

**Universidade Estadual Paulista
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Departamento de Matemática Aplicada e Computacional**

Métodos Numéricos

Tópicos de Álgebra Linear Computacional

Prof. Dr. José Manoel Balthazar

Rio Claro, 2º. semestre de 2003

CAPÍTULO. I

I.1 - Sistemas Lineares

O problema se refere à dosagem de tipos diferentes de adubos face ao preço e às necessidades do tipo de solo em que se trabalha. Uma vez montado o problema, vemos que sua solução depende da solução de um sistema de 4 equações lineares simultâneas:

De modo bastante sumário, podemos descrever o problema do seguinte modo :

CONTEÚDO ADUBO	N	P	K	PREÇO POR UNIDADE
1	10	10	100	5,00
2	10	100	30	6,00
3	50	20	20	5,00
4	120	40	35	15,00

A mistura desejada deve fornecer, para cada 10 m² de terreno, uma quantidade de 140 g de Nitrato(N), 190g de Fosfato(P) e 205g de Potássio(K). Se podemos gastar Cr\$ 54,00 por 10 m², como se deve misturar o adubo ?

Em 1º lugar, denominamos de X_i a quantidade buscada do adubo de tipo i, e a 1ª equação dos preços será :

$$5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 15x_4 = 54$$

I.2 - Motivação

Iniciaremos nosso curso com um problema prático a ser resolvido, para, depois, utilizando as ferramentas do Cálculo Numérico, resolvermos tal problema. Veja:

As demais equações se referem à quantidade que cada adubo contém dos três produtos e à necessidade total o solo destes mesmos produtos :

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 120x_4 = 140 \\ 10x_1 + 100x_2 + 20x_3 + 40x_4 = 190 \\ 100x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 35x_4 = 205 \end{cases}$$

Estas 4 equações nos fornecem o sistema linear.

$$\begin{cases} 100x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 35x_4 = 205 \\ 10x_1 + 100x_2 + 20x_3 + 40x_4 = 190 \\ 10x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 20x_4 = 140 \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 15x_4 = 54 \end{cases}$$

A solução exata deste sistema talvez seja muito difícil de ser expressa com os mostradores de máquina de calcular, mas uma boa aproximação é :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.6548 \text{ Kg do adubo I} \\ 0.4389 \text{ Kg do adubo II} \\ 1.6967 \text{ Kg do adubo III} \\ 2.6406 \text{ Kg do adubo IV} \end{array} \right.$$

Nesta seção iremos discutir alguns modos para obtermos boas aproximações para a solução de sistemas de equações lineares simultâneas.

I.2.1 - Resolução:

Vamos iniciar então uma breve revisão de resolução de Sistemas Lineares:

Sistemas Lineares com n equações e n incógnitas :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn} = b_n \end{array} \right.$$

Onde :

$a_{ij} : i, j = 1, \dots, n$: coeficientes

$x_j : j = 1, 2, \dots, n$: variáveis

$b_j : j = 1, \dots, n$: constantes

Usando a notação vetorial $\boxed{\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}}$ onde :

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Comentário sobre a Regra de Cramer :

Para um sistema nxn (\Rightarrow) o envolvimento de cálculo de (n+1) determinantes de ordem n.

Exemplificando se $n=20(\Rightarrow)$ nº total de operações : $21 \times 20! \times 12$ multiplicações + nº semelhantes de adições.

Assim, um computador que efetue cerca de cem milhões de multiplicações por segundo (\Rightarrow) 3×10^8 anos p/ efetuar as multiplicações desejadas.

I.2.2 - Problemas a serem observados

$$\tilde{A}x = \tilde{b} (\Rightarrow) x = A^{-1} b$$

Ex: $3x = 18 (\Rightarrow) x = 18/3 = 6$
 $x = 3^{-1} \cdot 18 = 0.3333 \times 18 = 5.99994$ (Com 5 casas decimais)

I.2.3 - Sistemas lineares triangulares

Devemos utilizar os métodos que usam cálculo “direto” de A^{-1} de A e não apresentam problemas com o tempo de execução, como é o caso da regra de Cramer.

Antes, analisa-se o caso particular em que A: nxn (\Rightarrow) Sistema Triangular inferior, com elementos da diagonal \neq de zero :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Da última equação (\Rightarrow) $X_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$, x_{n-1} pode ser obtido de maneira igual :

$$X_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

e assim sucessivamente, obtém-se x_{n-2} , ..., x_2 e finalmente x_1 :

$$X_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

De um modo geral :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \frac{(b_i - \sum_{j=k+1}^n a_{ij}x_j)}{a_{ii}} \end{array} \right.$$

Na prática, existem 2 tipos de algoritmos usados no Cálculo Numérico de SELAS (Sistemas Lineares).

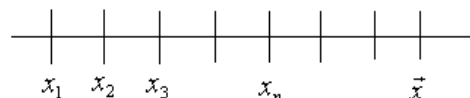
I.2.3 - Algoritmos

i-) Algoritmos Diretos :

Um método é dito direto quando a solução exata \vec{x} é obtida realizando-se um número finito de operações aritméticas em R (isto é em precisão infinita).

ii-) Algoritmos Iterativos :

Um método é dito iterativo qdo a solução \vec{x} é obtida como limite de uma sequência de aproximação sucessivas $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots$



O diagrama mostra uma linha horizontal com sete pontos de divisão verticais. Abaixo dos pontos, as primeiras três são rotuladas como x_1 , x_2 e x_3 . O quarto ponto é rotulado como x_n . O sétimo ponto, no extremo direito, é rotulado como \vec{x} .

$$x = \lim_{j \rightarrow \infty} (x_j)$$

I.2.4 - Precisão e Exatidão de Máquinas Digitais

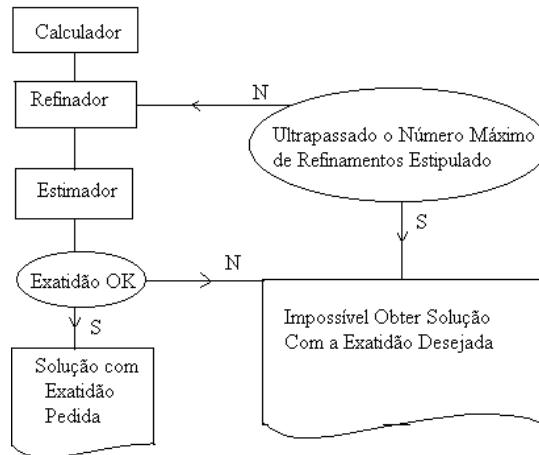
Precisão de uma máquina digital é definida como o nº de dígitos desta máquina. Portanto a precisão é algo claro, não variável para uma máquina.

A exatidão é uma medida de Perfeição do resultado que depende da precisão da máquina e do método utilizado para a obtenção desse resultado; depende da máquina e do algoritmo).

Ocupamo-nos agora em discriminar as etapas envolvidas no cálculo de um SELA

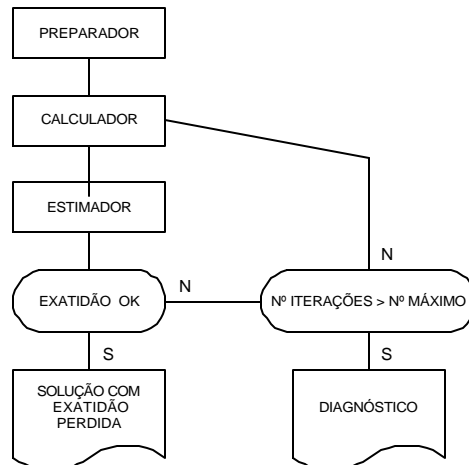
i) Algoritmos diretos

Esses algoritmos são compostos de três componentes: o calculador, o refinador e o estimador.



ii) Algoritmos Iterativos

São compostos também de três partes. O preparador, estimador e o calculador.



De importância capital aqui é a presença de um refinador, que tem a função de atender a perda de exatidão provocada pelo mau condicionamento do SELA, assim como fornecer elementos para estimativa desse condicionamento.

O preparador tem aqui uma finalidade muito importante, que é modificar a estrutura da matriz de maneira que a convergência venha a ser mais rápida. Os detalhes citados, referentes aos algoritmos diretos e aos algoritmos iterativos, serão vistos minuciosamente nas partes que se seguem.

CAPÍTULO II

II.1 - REVISÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

Grosseiramente falando, um espaço vetorial V é um conjunto de “objetos” chamados de vetores para os quais as operações de adição de vetores e multiplicação escalar foram definidas num subconjunto W de um espaço vetorial V é chamado de subespaço vetorial de V . W é um espaço vetorial com as operações vetoriais, induzidas de V

II.1.1 - DEFINIÇÕES

Seja A : matriz $m \times n$; (a_{ij}) . A transposta $c=A^t$ tem ordem $n \times m$ e é dada por: $c_{ij}=a_{ji}$. A transposta conjugada $c=A^*$, também tem ordem $n \times m$ e $c_{ij}=\tilde{a}_{ji}$. (adjunto de A).

I.2 - $O_{n \times m}$: Matriz nula

I.3 - A matriz identidade de ordem n é definida por $I=[I_{ij}]$

$$A: m \times n$$

$$B: n \times p \quad A \cdot I = A, \quad I \cdot B = B$$

I.4 - $A: m \times n$ se existir uma matriz quadrada $B: n \times m$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$, então diz-se que A é inversível, com inversa B . Pode-se demonstrar que B é única e é denotado por A^{-1} .

I.5 - A é simétrica se $A^t=A$ e é chamada de Hermitiana se $A^* = A$. A é antissimétrica se $A^t = -A$ ($A: m \times n$)

I.6 - $A: m \times n$ Rank A = posto A

Matriz Esparsa é aquela em que aproximadamente 80% dos elementos são nulos. Ela é frequente, na prática, quando usamos métodos (elementos finitos, diferença finita, etc... não vistas neste caso)

Matriz Banda: Todos os elementos não nulos se situam na vizinhança da DIAGONAL

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Também denominada Tridiagonal

TEOREMA II.1: $A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^n$ são equivalentes às afirmações:

- $Ax=b$ tem uma única solução $x \in V$, para $\forall b \in V$
- $Ax=b$ tem uma única solução $x \in V$ para $\forall b \in V$
 - $Ax=0$ implica em $x=0$
 - A^{-1} existe
 - $\det(A) \neq 0$
 - $\text{posto}(A)=n$

I - Definições

I.7 - O produto interno de 2 vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$(x, y) = \sum x_i y_i = x^t y = y^t x$$

$$x, y \in \mathbb{C}^n: (x, y) =$$

$$x, y \in \mathbb{C}^n: (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} = y^* x$$

I.8 - Norma euclidiana de x em \mathbb{C}^n ou \mathbb{R}^n é:

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

TEOREMA II.2

Para \forall matriz quadrada $A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e para $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$: $(Ax, y) = (x, A^* y)$

I.9 - Dois vetores são ortogonais se e somente se $(x, y) = 0$

I.10 - $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita unitária (*unitary*) se $V^* U = V U^* = I$

Obs: se a matriz U for real ela é denominada **Ortogonal** além de unitária

TEOREMA II.3

As linhas (colunas) de uma matriz de ordem n ($n \times n$) unitária formam uma base ortogonal em \mathbb{C}^n e, as matrizes ortogonais para \mathbb{R}^n .

TEOREMA II.4

a) O número real complexo λ é um autovalor de $A:n \times n$ se existir um vetor $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ tal que: $Ax = \lambda x$

vetor x é chamado de autovetor correspondente ao autovalor λ

$$\text{De } Ax = \lambda x \quad (\Leftrightarrow) \quad (A - \lambda I)x = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \det(A - \lambda I) = 0$$

$f_A(\lambda)$ = polinômio de grau n (exatamente) (\Leftrightarrow) polinômio característico

b) A, B : mesma ordem. Então A é semelhante a B se existir uma matriz singular P para a qual $B = P^{-1}AP$

TEOREMA II.5

i) Se A, B são semelhantes $(\Rightarrow) f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$

Tal fato pode ser facilmente verificado:

$$\begin{aligned} f_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \\ &= \det[P^{-1}(A - \lambda I)P] = \\ &= (\det P^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(P) = f_A(\lambda) \end{aligned}$$

II.1.3 - Vetores e Normas de Matrizes

Definição II.1

Seja V um espaço vetorial e seja $N(x)$ uma função real definida em V . Então $N(x)$ é uma norma se:

- $$N(x) \geq 0, \forall x \in V; N(x) = 0 (\Leftrightarrow) x = 0$$
1. $N(\alpha x) = |\alpha| N(x), \forall x \in V, \alpha$ escalar.
 2. $N(x+y) \leq N(x) + N(y), \forall x, y \in V$.

Notação usual: $\|x\| = N(x)$

Definição II.2:

A distância de x a y $d(x,y) = \|x - y\|$

Exemplos de normas:

1. Para $1 \leq p \leq \infty$ definimos a norma p $\|x\|_p = \left[\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right]^{1/p}, x \in C^n$
2. A norma do máximo é: $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} (|x_j|) \quad x \in C^n$

Série 2- Ex 1: $x = (1, 0, -1, 2)$

$$\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$$

Serie 2 -Ex 2: dar uma interpretação geométrica para $S_p = \{x \in R^2 / \|x\|_p = 1\}$

Lema II.1: Seja $N(x)$ uma norma em C^n . Então $N(x)$ é uma função contínua nas componentes x_1, x_2, \dots, x_n de C .

TEOREMA II.9 Equivalência de Normas

Seja N, M normas em C^n . Então \exists constantes $c_1, c_2 > 0$ para as quais $c_1 M(x) \leq N(x) \leq c_2 M(x), \forall x \in V$.

Obs: muitos problemas numéricos envolvendo álgebra linear, produzem uma sequência de vetores: $\{x^{(m)} / m \geq 0\}$ e sua convergência.

Definição. II.3: uma sequência de vetores $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}, \dots\}$ em C^n ou R^n é dito seu conjunto para o vetor

$x \Leftrightarrow \|x - x^{(m)}\| \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$ (independente da 11.11 para espaço de dimensão finita)

Norma de Matriz. O conjunto de todas as matrizes $N \times N$ com “complex entries” podem ser consideradas como equivalente ao espaço vetorial C^{n^2} com uma operação de multiplicação especial adicionando **ao array vetorial**. Logo, uma norma matricial deveria satisfazer as exigências usuais de uma norma de vetores. Além disso, são também exigidas outras duas condições:

$$\begin{aligned} \text{Definição. II.4.} \quad & \|AB\| \leq \|A\| \|B\| \\ & (\|Ax\|_v \leq \|A\| \|x\|_v) \\ & \|\cdot\|_v : \text{vetor} \quad \text{então } \forall x \in V, \forall A \end{aligned}$$

Definição. II.5. Usualmente quando dado um espaço vetorial com uma norma $\|\cdot\|_v$, uma norma (associada) de matriz é definida como:

$$\|A\| = \sup \left(\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \right), \quad x \neq 0$$

Note que a propriedade IB.4b. é satisfeita.

Def IB.5: Seja A uma matriz arbitrária. O espectro de A é o conjunto de todos os autovalores de A e é denotado por $G(A)$. O raio espectral é o “tamanho” máximo dos autovalores dado por:

$$\text{e é denotado por: } r_d(A) = \max_{I \in G(A)} |I|$$

Tabela de norma de vetores e norma de matrizes associadas:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i|, & \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \\ \|x\|_2 &= \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{1/2}, & \|A\|_2 &= \sqrt{r_d(A^* A)} \\ \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, & \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right] \end{aligned}$$

Serie 2 . Ex3 : $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = A$. $\|A\|_1 = ?$ $\|A\|_2 = ?$ $\|A\|_\infty = ?$ $rG(A) = ?$

Serie 2. Ex 4. Calcule autovalores e autovetores $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Serie 2. Ex 5. Dado $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ verifique se $A^T A = \|A\|_2 = \sqrt{S(A^T A)} \cong 3.1$

Teorema II.10:

Seja A : matriz quadrada arbitrária. Então para \forall operador norma de matriz $r_d(A) \leq \|A\|$; Além do mais se $\epsilon > 0$ então existe um operador norma de matriz $\|\cdot\|_\epsilon$ para o qual $\|A\|_\epsilon \leq r_d(A) + \epsilon$

DEM: seja $\|\cdot\| \forall$ norma de matriz com uma norma de vetor associado, compatível $\|\cdot\|_\nu$.

Seja I um autovalor em $G(A)$ para o qual $|I| = r_g(A)$ e seja x um autovetor associado $\|x\|_\nu = 1$. Então: $r_g(A) = |I| = \|Ix\|_\nu = \|Ax\|_\nu \leq \|A\|_\nu \|x\|_\nu$

Corolário: para A matriz quadrada $r_g(A) < 1 \Leftrightarrow \|A\| < 1$, para algum operador norma de matriz

TEOREMA II.11:

$A: n \times n$. A^m converge para matriz nula quando $m \rightarrow \infty \Leftrightarrow r_g(A) < 1$

TEOREMA II.12:

A : matriz quadrada. Se para algum operador norma de matriz $\|A\| < 1$ então

$$(I - A)^{-1} \text{ existe e } \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

TEOREMA II.13:

A, B matriz quadrada e de mesma ordem. A não singular $\|(A - B)\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

Capítulo.III

III.1 - Método de Eliminação de Gauss

O método direto mais conhecido e mais usado para resolução de um SELA denso de porte pequeno e médio (ordem até 30 e 50, respectivamente). A partir daí teremos sistemas de grande porte (não abordaremos neste curso).

Essencialmente, o método de Gauss nada mais é do que a aplicação esquemática das propriedades básicas da álgebra linear. Em geral ele é usado para matrizes menos densas não simétricas de ordem até 50 aproximadamente.

O objetivo principal do método é o de transformar convenientemente o sistema linear original para obter um sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior.

Para tal vale o seguinte teorema :

TEOREMA III.1

Seja $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b}$ um sistema linear. Aplicando sobre as equações deste sistema uma sequência de operações, escolhidas entre :

- i) trocar duas operações;
- ii) multiplicar uma equação por uma constante não nula;
- iii) adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Obtemos um novo sistema $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b}$ e, os sistemas $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b}$, $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b}$ são equivalentes, isto é \forall solução de um é solução do outro.

Para descrever o método seja $\det A \neq 0$, através do exemplo :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Estágio 1 : Eliminação x_1 da equações 2 e 3.

$$\tilde{A}^{(0)} / \tilde{b}^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

Pivô: $a_{11}^{(0)} = 3$, $m_{21} = \frac{1}{3}$, $m_{31} = \frac{4}{3}$ $L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1$

$$(\Rightarrow) A^{(1)} \left| b^{(1)} \right. = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{22}{3} & \frac{5}{3} \end{array} \right)^{(I)} =$$

$$^{(I)} 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$^{(II)} 2 - 4 \cdot \frac{1}{3} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$^{(III)} 2 - 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$^{(IV)} 3 - 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$^{(V)} -2 - 4 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{22}{3}$$

$$^{(VI)} 3 - 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$A^{(1)} \left| b^{(1)} \right. = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array} \right)$$

Estágio 2. Eliminação de x_2 na equação 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{22}{3} & \frac{5}{3} \end{array} \right)$$

$$\text{Pivô: } \frac{1}{3}, \quad m_{23} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1, \quad L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2 \cdot m_{32} L_2$$

$$A^{(2)} \left| b^{(3)} \right. = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array} \right)$$

Assim, resolver $Ax = b$ é equivalente a resolver $A^{(2)}x = b^{(2)}$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{5}{3} \\ -8x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \text{Vetor solução: } \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veremos abaixo um algoritmo para resolução de uma equação utilizando o método de Gauss: Seja o Sistema linear $Ax = b$. A : $n \times n$, x : $n \times 1$, b : $n \times 1$. Supor que $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} k = 1, \dots, n-1 \\ \begin{cases} i = k+1, \dots, n \\ m = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \\ a_{ik} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} j = k+1, \dots, n \\ a_{ij} = a_{ij} - m \cdot a_{kj} \\ b_i = b_i - m \cdot b_k \end{cases} \end{cases} \\ & x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ & \begin{cases} l = n-1, \dots, 2, 1 \\ x_l = \frac{b_l - \sum_{j=l+1}^n a_{lj} \cdot x_j}{a_{ll}} \end{cases} \end{aligned}$$

III. 2 - Estratégias de Pivoteamento:

Vimos que o método de Eliminação de Gauss requer o cálculo dos multiplicadores

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, i = k+1, \dots, n \text{ em cada estágio } k \text{ do processo.}$$

Problemas: O que acontece se o pivô for nulo? E se o pivô estiver próximo de zero? (veremos mais tarde)

Note que é impossível trabalhar com um pivô nulo. E trabalhar com um pivô próximo de zero pode conduzir a resultados imprecisos (erros de arredondamento).

\ No início do estágio k do processo de eliminação de Gauss, escolher para pivô o elemento de maior módulo dentre os coeficientes $a_{ik}^{(k-1)}, i = k, k+1, \dots, n$; trocar as linhas k e i , se necessário.

Exemplo: $n = 4, k = 2$

$$A^{(1)} | b^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 16 \end{array} \right]$$

Início Etapa 2

1) Escolher o pivô. Para isso, utilize a fórmula $\max |a_{j2}^{(1)}| = |a_{32}^{(1)}| = 3, j = 1, 2, 3, 4$

Pivô = -3

2) Trocar as linhas (2) e (3)

$$A^{(1)} | b^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 16 \end{array} \right]$$

cujos multiplicadores são: $m_{32} = \frac{1}{-3}, m_{42} = \frac{2}{-3}$ (veja que os multiplicadores estão entre 0 e 1, evitando erros de arredondamento).

Obs: O pivoteamento completo não é muito usado, pois envolve uma comparação extensa entre os elementos e todo este processo acarreta um esforço computacional maior que a estratégia do pivoteamento parcial.

TEOREMA:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $y \in \mathbb{R}^n$. $Ax = y$ pode ser resolvido pelo método de Gauss
 com: $n^2 + \frac{1}{3}(n-1)(n+1)$ multiplicações/divisões e $n(n-1) + \frac{1}{6}(n-1)(2n-1)n$
 adições/subtrações

TEOREMA:

O método de Gauss, como executado, produz com precisão infinita, sempre a solução exata de $A\bar{x} = \bar{b}$ desde que:

- i) A não seja singular
- ii) as linhas sejam trocadas sempre que necessário caso $a_{ij} = 0$

EXEMPLO PARA ENTENDIMENTO

$$\begin{cases} 0,7291x_1 + 0,81x_2 + 0,9x_3 = 0,6867 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0,8338 \\ 1,331x_1 + 1,21x_2 + 1,1x_3 = 1,000 \end{cases}$$

Sua solução exata é:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X = \begin{pmatrix} 0,2245 \\ 0,2814 \\ 0,3279 \end{pmatrix}$$

Se usarmos Gauss (sem pivotamento):

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 0,7290 & 0,8100 & 0,9000 & 0,6867 \\ 1,0000 & 1,0000 & 1,0000 & 0,8338 \\ 1,3310 & 1,2100 & 1,1000 & 1,0000 \end{array} \right] \xrightarrow[m_{31}=1,726]{m_{21}=1,372} \left[\begin{array}{ccc|c} 0,7290 & 0,8100 & 0,9000 & 0,6867 \\ 0,0000 & -0,1110 & -0,2356 & -0,1084 \\ 0,0000 & -0,2690 & -0,5430 & -0,2540 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{m_{32}=2,423} \left[\begin{array}{ccc|c} 0,7290 & 0,8100 & 0,9000 & 0,6867 \\ 0,0000 & -0,1110 & -0,2356 & -0,1084 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0264 & 0,0087 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0,2251 \\ 0,2790 \\ 0,3295 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0,2245 \\ 0,2814 \\ 0,3279 \end{pmatrix} \text{ exat.}$$

Obs.: Se trocar (a) $r_1 \leftrightarrow r_3$: $m_{21} = 0,7513$
 $m_{31} = 0,5477$ (b) $r_2 \leftrightarrow r_3$: $m_{32} = 0,6171$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0,2246 \\ 0,2812 \\ 0,3280 \end{pmatrix} \rightarrow \text{mais preciso}$$

Sua solução exata é:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X = \begin{pmatrix} 0,2245 \\ 0,2814 \\ 0,3279 \end{pmatrix}$$

III.3 - Fatoração LU (VEREMOS NA OUTRA AULA)

Seja o sistema linear $A.x = b$, o processo de fatoração para resolução deste sistema consiste em decompor a matriz A dos coeficientes em um produto de 2 ou mais fatores, e em seguida, resolver uma seqüência de sistemas lineares que nos conduzirá a solução do sistema linear original.

Por exemplo, se pudermos fazer a fatoração

$$A = C.D \text{ ® } A.x = C.D.x = b \text{ ® } C.(D.x) = b$$

Se $y = D.x$ então resolver o sistema linear $A.x = b$ é resolver o sistema linear $C.y = b$ e, em seguida, o sistema linear $D.x = y$, o que resultará na solução do sistema linear original.

A fatoração LU é um dos processos de fatoração mais utilizados.

L: triangular inferior com diagonal unitária

U: triangular superior

III. 4 - Cálculo da Matriz Inversa

Seja A uma matriz com $\det A \neq 0$. Seja $A^{-1} = [b_1 \mid b_2 \mid \dots \mid b_n]$ a matriz inversa de A, onde b_j é a coluna da matriz inversa.

Seja e_j a coluna j da matriz identidade, de $A \cdot A^{-1} = I$, isto é,

$$A \cdot [b_1 \mid b_2 \mid \dots \mid b_n] = [e_1 \mid e_2 \mid \dots \mid e_n]$$

$$\therefore Ab_j = e_j \quad (j=1,2,\dots,n)$$

Assim podemos calcular as colunas $j=1,2,\dots$ da matriz A^{-1} , resolvendo os sistemas lineares acima.

Teorema III.2(VEREMOS NA OUTRA AULA)

Se A é matriz simétrica positiva definida, então A pode ser decomposta unicamente em $L \cdot L^T$ (L^T transposta da matriz L), onde G é a matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos.

Nota: A construção de L é a base do método de Cholesky.

III. 5 - Erro na Solução de Sistemas Lineares

Seja $A \cdot x = b$ e x' a solução computada. Define-se $r = b - A \cdot x'$ o resíduo na aproximação de b por $A \cdot x'$. Se x' for a solução exata, então $r = 0$.
 $r = A \cdot x - A \cdot x' = A \cdot (x - x')$ $\{(x - x') \text{ é o erro em } x'\}$ $r = A \cdot e$

\ O erro satisfaz um sistema linear com a mesma matriz coeficiente A do sistema original $A \cdot x = b$.

Estabilidade na Solução de Sistemas Lineares

$$\begin{aligned} &\bullet \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 0,7 \\ 7x_1 + 10x_2 = 1 \end{cases} && \text{Solução: } x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 0,1 \\ &\bullet\bullet \begin{cases} 5x'_1 + 7x'_2 = 0,62 \\ 7x'_1 + 10x'_2 = 1,01 \end{cases} && \text{Solução } x'_1 = -0,17 \text{ e } x'_2 = 0,22 \end{aligned}$$

\therefore Uma pequena mudança no lado direito de \bullet levou à mudança grande na solução.
(Problema: condicionamento da matriz A).

III. 8 - Análise do erro:

$Ax=b$, $A:n \times n$ (solução única, $\det A \neq 0$)

$$A\tilde{x} = \tilde{b} \text{ (Solução perturbada)}$$

$$\tilde{b} = b + r \quad e = \tilde{x} - x \text{ (erro)}$$

$$\begin{aligned} A\tilde{x} &= \tilde{b} \\ Ax &= b \end{aligned} \quad (\Rightarrow) \quad A(\tilde{x} - x) = (\tilde{b} - b)$$

$$Ae = r \quad e = A^{-1}r$$

Examinemos, agora, a quantidade

$$\frac{\|e\|}{\|x\|} \div \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

$$\text{de } \|Ae\| = \|r\|, \quad e = A^{-1}r \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{aligned} \frac{\|r\|}{\|e\|} &\leq \|A\| \cdot \|e\| \Rightarrow \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|e\|} \leq 1 \\ \frac{\|e\|}{\|x\|} &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|r\| \Rightarrow \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|r\|}{\|x\|} \end{aligned}$$

Sabemos ainda que

$$\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|$$

\therefore obtemos

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|r\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

\therefore

$$\frac{\|e\|}{\|x\|} \div \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

$$b = Ax \text{ e } x = A^{-1} \cdot b,$$

É a justificativa para a introdução do número de condições de A

$$\text{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Note que:

$$1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \frac{\|A\| \|A^{-1}\|}{\text{cond}(A)}$$

Se $\text{cond} \approx 1 \therefore$ pequena perturbação em $b \Rightarrow$ pequena perturbação em x

Note que (Teorema anterior)

$$\text{Se } A: n \times n \quad r_\sigma(A) \leq \|A\| \quad \text{Cond}(A) \geq r_\sigma(A) \cdot r_\sigma(A^{-1}).$$

Do que os autovalores de A^{-1} são os recíprocos daqueles de A

$$\text{Cond}(A) \geq \frac{\max_{\lambda \in r(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda \in r(A)} |\lambda|} \quad \text{onde } r = \text{autovalores de } A$$

TEOREMA III.4:

$$\|A - \hat{A}\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

Note que:

III.10 - Mal Condicionamento

No processo de resolução, a matriz poderá ser mal condicionada. Para isso, é preciso usar $\hat{f}(x) = a_1 \phi_1(x) + \dots + a_m \phi_m(x)$, onde ϕ_1, \dots, ϕ_m são escolhidos de tal forma que a matriz não seja mal condicionada.

$$\sum_{k=1}^m a_k \left[\sum_{j=1}^m \phi_k(x_k) \phi_j(x_j) \right] = \sum_{j=1}^m y_j \phi_j(x), \quad i = 1, \dots, m$$

Então, existe uma escolha ótima para $\phi_j(x)$ tal que grandes $(\phi_j) = f - 1$ e tome (x) diagonal. Mostraremos abaixo um exemplo prático do mal condicionamento:

Utilizando o MMQ, dado um ajuste $\hat{f}(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$ à tabela

x_i	y_i
1.	-1.945
1.2	-1.253
1.4	-1.140
1.6	-1.087
1.8	-0.760
2.0	-0.683
2.2	-0.424

2.4	-0.012
2.6	-0.190
2.8	0.452
3.0	0.337
3.2	0.764
3.4	0.532
3.6	1.073
3.8	1.286
4.0	1.502
4.2	1.582
4.4	1.993
4.6	2.473
4.8	2.503
5.0	2.322

Fazendo as contas, obtenho $La = b$:

$$L = \begin{bmatrix} 21 & 105 & 7.175 & 5.5125 \\ 10.5 & 7.175 & 5.5125 & 4.51666 \\ 7.175 & 5.5125 & 4.51666 & 3.85416 \\ 5.5125 & 4.51666 & 3.85416 & 3.38212 \end{bmatrix}$$

$$a = [a_1, a_2, a_3, a_4]^t$$

$$b = [24.1180, 13.2345, 9.46836, 7.55944]^t$$

Uma solução indireta que detecta esta singularidade requerendo em princípio um número infinito de operações aritméticas para produzir uma solução exata :

$$a = [65747, 4.7259, -11.1282, 7.6677]^t$$

$$\text{Cond}(L) = \|L\| \|L^{-1}\| \approx 22000 \quad \text{Aproximação Ruim}$$

No novo caso,

$$\phi_1(x) = T_0(2x-1) = 2x-1$$

$$\phi_2(x) = 2x-1$$

$$\phi_3(x) = 8x^2 - 8x + 1$$

$$\phi_4(x) = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1$$

$$\therefore La = b$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

Teorema III.5

$$|T_n(x)| \leq 1 \quad \text{com } -1 \leq x \leq 1$$

No mesmo caso, usa-se

$$T_k(x) = T_{k-1} \left(\frac{2x - a - b}{b - a} \right)$$

$$x \in [a, b], k \geq 1$$

$\text{Gra}(T_k) = k-1$ e $\forall f(x)$ (polinômio) de grau $m-1$ pode ser escrito como uma combinação de $T_1(x), \dots, T_m(x)$

Uma escolha não ótima, mas satisfatória é utilizar o **polinômio de Chebyshev**:

$$T_n(x) = \cos[n \cos^{-1}x] \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{Se } \theta = \cos^{-1}x \Rightarrow x = \cos \theta$$

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = x$$

$$T_2 = 2x^2 - 1$$

\therefore

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x \cdot T_n(x)$$

$$T_{n+1}(x) = 2 \cdot x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n \geq 1$$

$$L = \begin{bmatrix} 21 & 0 & -5.6 & 0 \\ 0 & 7.7 & 0 & -2.8336 \\ -5.6 & 0 & 10.4664 & 0 \\ 0 & -2.8336 & 0 & 11.6108 \end{bmatrix}$$

$$a = [1.160969 \quad 0.046850 \quad 0.239646]^T$$

$$\text{Cond}(L) = \|L\| \cdot \|L^{-1}\| \approx 4.8$$

$$E = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}(x_i - y_i)} = 0.0421 \quad \text{Boa aproximação}$$

É então difícil de encontrar uma solução numérica, e como acabamos de ver, ela será de exatidão duvidosa. Em um grande sistema mal-condicionado, os erros de arredondamento em um método direto podem tornar a “solução” sem significado. Apesar de seu erro de truncamento teórico, um método indireto pode ser muito mais desejável porque em tal método os erros de arredondamento não se acumulam.

Capítulo IV

IV.1 - Métodos Iterativos

Muitas SELAS são muito grandes para serem resolvidas pelos métodos diretos baseados no Método de Gauss. Para estes sistema, os métodos iterativos são os indicados. Vejamos três destes métodos:

IV.1.1 - Método de Gauss-Jacobi

A forma como o método de Gauss-Jacobi transforma o sistema linear $Ax = b$ em $x=Cx+g$ é a seguinte:

Tomamos o sistema linear original

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Isolando o vetor x , mediante a separação pela diagonal, assim:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ \dots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

A idéia é $Ax = b \Leftrightarrow x = cx + g = \varphi(x)$ e daí $x^{(0)}$: aproximação inicial

$$x^{(1)} = cx^{(0)} + g = \varphi(x^{(0)})$$

Primeiro aproximado e assim por diante

$$x^{(2)} = cx^{(1)} + g = \varphi(x^{(1)})$$

O método de Gauss-Jacobi consiste em dado $x^{(0)}$, aproximação inicial, obter $x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \dots$ através da relação recursiva $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$, para $k = 0, 1, \dots$

$$\{x^{(0)}, \dots, x^{(k)}, \dots\}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \alpha$$

$$\alpha = c \cdot \alpha + g$$

α solução da equação $Ax = b$

IV.1.2 - Teste de Parada

O processo iterativo é repetido até que o vetor $x^{(k)}$ esteja suficientemente próximo do vetor $x^{(k-1)}$.

Medimos a distância entre $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$, por $m^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$

$$\text{Se } |m^{(k)}| < \epsilon \therefore \text{OK}$$

Assim, dada uma precisão ϵ , o vetor $x^{(k)}$ será escolhido como \bar{x} , solução aproximada da solução exata, se $M^{(k)} < \epsilon$.

Da mesma maneira que no teste de parada dos métodos iterativos para zeros de funções podemos efetuar aqui o teste do erro relativo:

$$M_R^{(k)} = \frac{M^{(k)}}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|}$$

Computacionalmente usamos também como teste de parada um número máximo de iterações.

No caso Gauss-Jacobi $x = cx + g$

$$c = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} -\frac{a_{12}}{a_{11}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{a_{13}}{a_{11}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{a_{21}}{a_{22}} \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} -\frac{a_{23}}{a_{22}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix} \quad \text{daí a solução } x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)} \right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)} \right)$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} \right)$$

Serie 2. Ex 6 Exercício Exemplo:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

Solução $\epsilon = 0.05$, $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$, $x^{(\delta)} = \bar{x} = \begin{pmatrix} 0.9994 \\ -1.9888 \\ 0.9984 \end{pmatrix}$

IV.1.3 - Critério de Convergência

Daremos aqui um teorema que estabelece uma condição suficientemente para a convergência do método Iterativo de Gauss-Jacobi.

Seja o sistema linear $Ax=b$ e seja $a_k = \left(\sum_{j=1}^n |a_{kj}| \right) / |a_{kk}|$. Se $\alpha = \max_k a_k < 1$ então o

método de Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial, $x^{(0)}$.

Exercicio Resolver metodo de Gaus e Gaus Jacobi comparando-

$$La = b:$$

$$L = \begin{bmatrix} 21 & 0 & -5.6 & 0 \\ 0 & 7.7 & 0 & -2.8336 \\ -5.6 & 0 & 10.4664 & 0 \\ 0 & -2.8336 & 0 & 11.6108 \end{bmatrix}$$

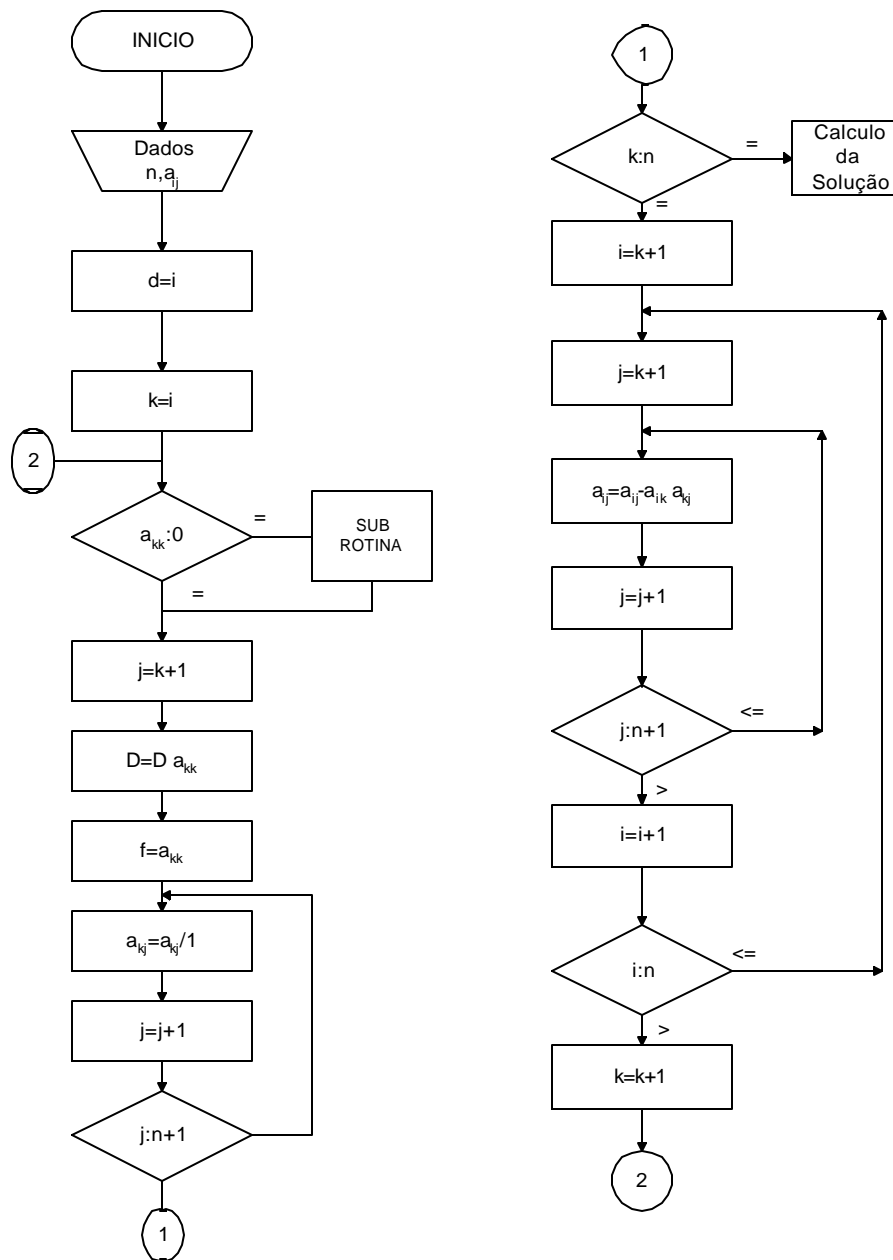
$$a = [a_1, a_2, a_3, a_4]^t$$

$$b = [24.1180, 13.2345, 9.46836, 7.55944]^t$$

$$L = \text{Cond}(L) = \|L\|, \|L^{-1}\| \approx 4.8$$

$$E = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}(x_i - y_i)} = 0.0421 \quad \text{Boa aproximação}$$

Fluxograma do método de eliminação de Gauss



A4.2 - Programa para resolução de sistemas lineares utilizando o método de Gauss

/******

* Programa para resolução de sistemas lineares
utilizando *

* o método de GAUSS

*

* Linguagem: Borland C++

*

```

*****
*****/

#include <stdio.h>
#include <conio.h>

int l,c,m,aux;
float mult,div;
float a[20][20];
float b[20][20];

void gauss(void);
void invert(void);

void gauss()
{
    int k,l,i,j;
    for (k=1;k<=m-1;k++)
    {
        for (i=k+1;i<=m;i++)
        {
            mult=a[i][k]/a[k][k];
            a[i][k]=0;
            for (j=k+1;j<=m;j++)
            {
                a[i][j]=a[i][j]-(mult*a[k][j]);
            }
            if (aux==1) r[i]=r[i]-mult*r[k];
            else B[i]=B[i]-mult*B[k];
        }
    }
    if (aux==1)
    {
        y[m]=r[m]/a[m][m];
        for (l=m-1;l>=1;l--)
        {
            y[l]=0;
            for (j=l+1;j<=m;j++)
            {
                y[l]=y[l]+a[l][j]*y[j];
            }
            y[l]=(r[l]-y[l])/a[l][l];
        }
    }
    else
    {
        x[m]=B[m]/a[m][m];
        for (l=m-1;l>=1;l--)
        {
            x[l]=0;
            for (j=l+1;j<=m;j++)
            {
                x[l]=x[l]+a[l][j]*x[j];
            }
            x[l]=(B[l]-x[l])/a[l][l];
        }
    }
}

void invert()
{
    /// INVERSAO DA MATRIZ
    for(c=0;c<m;c++)
        for(l=0;l<m;l++)
        {
            if(c==l)
            {
                div=a[l][l];
                for(aux=0;aux<m;aux++)
                {
                    a[l][aux]=a[l][aux] / div;
                    b[l][aux]=b[l][aux] / div;
                }
            }
            else
            {
                mult=-a[l][c] / a[c][c];
                for(aux=0;aux<m;aux++)
                {
                    a[l][aux]=a[l][aux] +
                    b[l][aux]=b[l][aux] +
                    mult*a[c][aux];
                }
            }
        }
}

void main(void)
{
    clrscr();
    printf("Inversao de matriz");
    printf("\nOrdem da matriz = "); // MxM
    scanf("%d",&m);
    printf("\n");

    /// INICIALIZACAO DA MATRIZ B (diagonal = 1)
    for(l=0;l<m;l++)
        for(c=0;c<m;c++)
            if(l==c) b[l][c]=1;
            else b[l][c]=0;

    /// LEITURA DA MATRIZ
    printf("\nMatriz");
    printf("\nEntrar com as linhas\n");
    for(l=0;l<m;l++)
    {
        for(c=0;c<m;c++)
        {
            printf("> ");
            scanf("%f",&a[l][c]);
        }
        printf("\n");
    }

    invert();

    /// IMPRESSAO DOS RESULTADOS
    printf("\nMatriz Identidade (so para conferencia)");
    for(l=0;l<m;l++)
    {
        for(c=0;c<m;c++)
        {
            printf("\nident[%d][%d] = %f ",l,c,a[l][c]);
            printf("\n");
        }
        getch();

        printf("\n\nMatriz Resultado");
        for(l=0;l<m;l++)
        {
            for(c=0;c<m;c++)
            {
                printf("\nres[%d][%d] = %f ",l,c,b[l][c]);
                printf("\n");
            }
            getch();
            getch();
        }
    }
}

```