Inatel

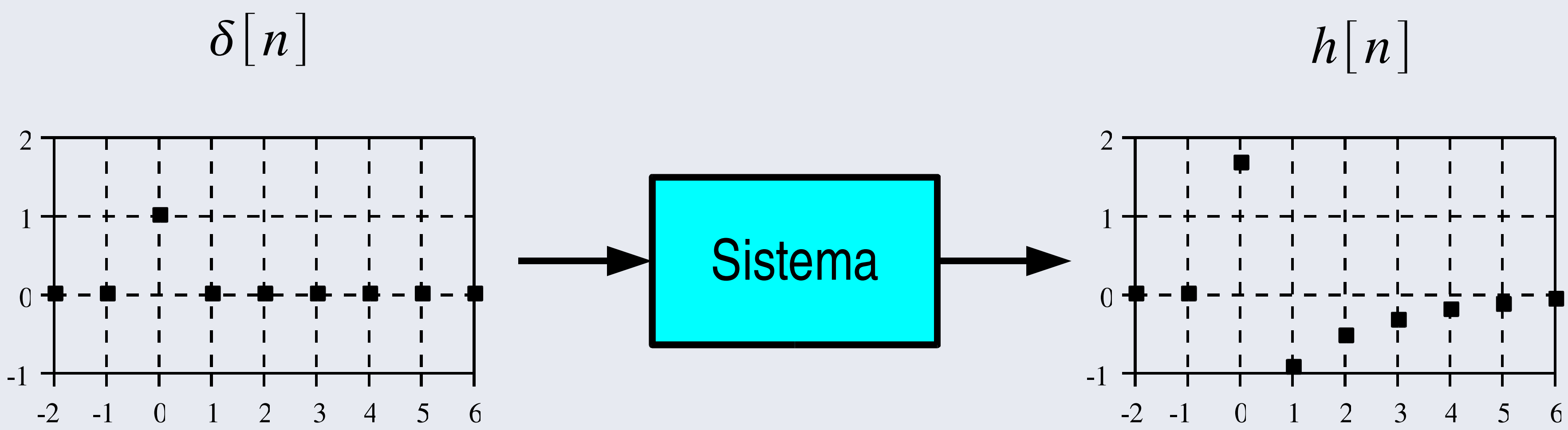
Instituto Nacional de Telecomunicações

Processamento Digital de Sinais

Convolução

Prof. Dr. Carlos Alberto Ynoguti

Função delta e resposta a impulso



Função delta ou
impulso unitário

Resposta a impulso:
saída de um sistema
quando aplicamos um
impulso na entrada.

Resposta a impulso

- Se dois sistemas são diferentes de alguma forma, eles irão ter respostas a impulso diferentes.
- Assim, a resposta a impulso caracteriza completamente um sistema.
- Geralmente utiliza-se a notação h[n] para a resposta a impulso.

Representação de impulsos a partir da função delta

- Qualquer impulso pode ser representado como uma versão deslocada e escalonada da função delta.

- Exemplo: a[n]: sinal composto somente de zeros, exceto a amostra 8, que tem amplitude -3. Podemos escrever então

$$a[n] = -3\,\delta[n-8]$$

- A resposta de um sistema h[n] a este sinal de entrada será então:

$$y[n] = -3\,h[n-8]$$

- Conclusão: se conhecemos a resposta a impulso de um sistema, temos condições de calcular a resposta deste a qualquer impulso na entrada.

Resumindo ...

Se $\delta[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow h[n]$

Então $-3\,\delta[n-8] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow -3\,h[n-8]$

Convolução

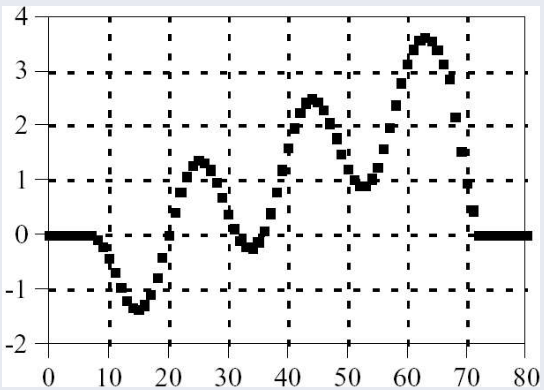
- É uma operação matemática formal, assim como a soma.
- Soma: toma dois números e gera um terceiro.
- Convolução: toma dois sinais para gerar um terceiro.
- Notação: $y[n] = x[n] * h[n]$

Aplicação a Sistemas Lineares

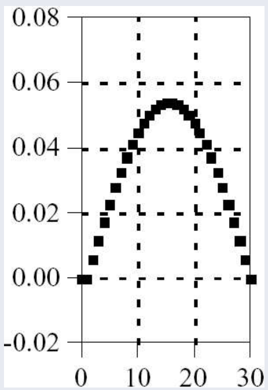
- O sinal de saída é o resultado da convolução do sinal de entrada com a resposta a impulso do sistema.

- h[n] pode ter outros nomes dependendo da aplicação:
  - filtragem: kernel do filtro ou simplesmente kernel
  - processamento de imagem: função de espalhamento de ponto (point spread function).

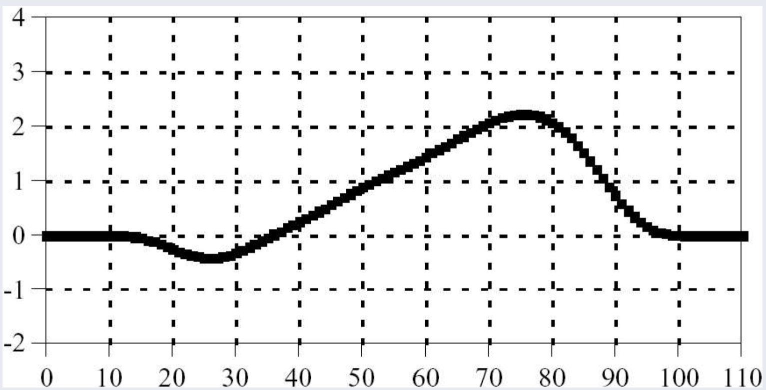
Exemplo1: filtragem passa-baixas



*



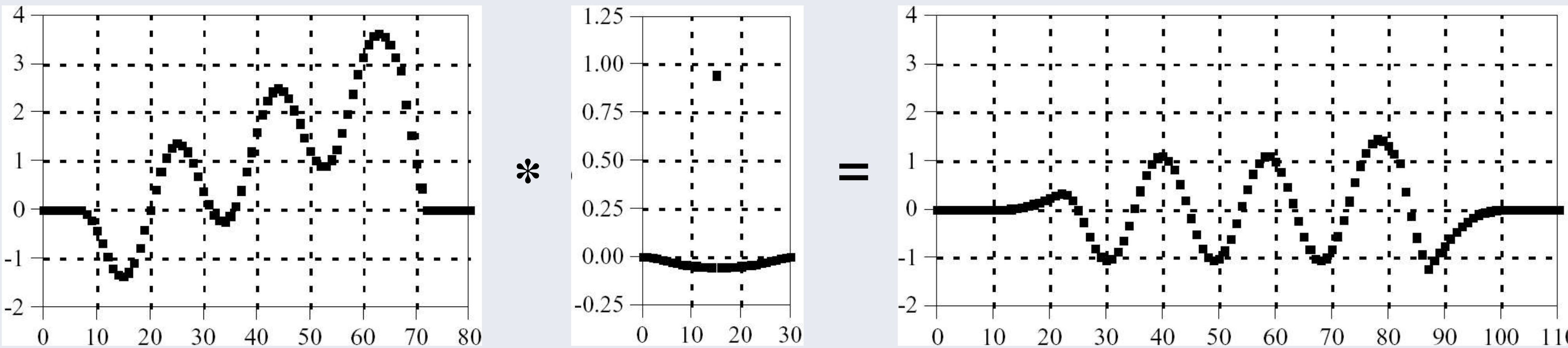
=



$x[n]$ $h[n]$ $y[n]$

N=81 amostras M=31 amostras N+M-1=111 amostras

Exemplo2: filtragem passa-altas



$x[n]$ $h[n]$ $y[n]$

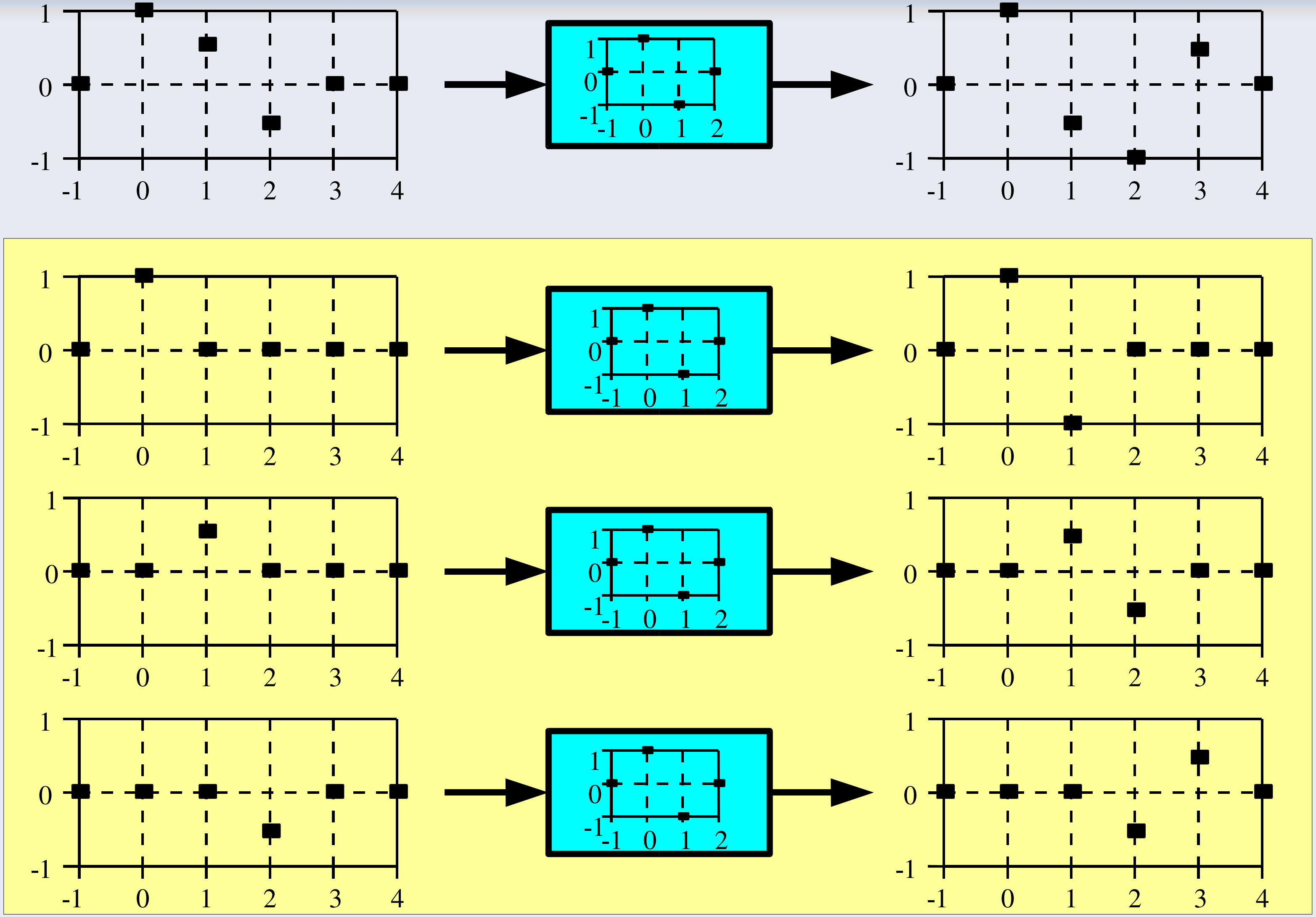
N=81 amostras M=31 amostras N+M-1=111 amostras

Matemática da convolução

- Podemos estudar a convolução sob dois pontos de vista distintos:
  - do sinal de entrada: como cada ponto do sinal de entrada contribui para vários pontos do sinal de saída.
  - do sinal de saída: como cada ponto do sinal de saída recebeu contribuições de vários pontos do sinal de entrada.

- Estas duas perspectivas são formas diferentes de analisar a mesma operação matemática, e portanto são equivalentes: a primeira fornece uma idéia conceitual da convolução, enquanto que a segunda descreve a matemática da convolução.

Algoritmo do lado da entrada



Exemplo

Dados os sinais:

$x[n] = \{1,2,3,2\}$ e $h[n] = \{2,1\}$

calcule $x[n]*y[n]$ utilizando o algoritmo do lado da entrada

Resposta

$x[n] = \{1, 2, 3, 2\}$ N = 4 pontos

$h[n] = \{2, 1\}$ M = 2 pontos

$y[0] = \{2, 1\}$

$y[1] = \{0, 4, 2\}$

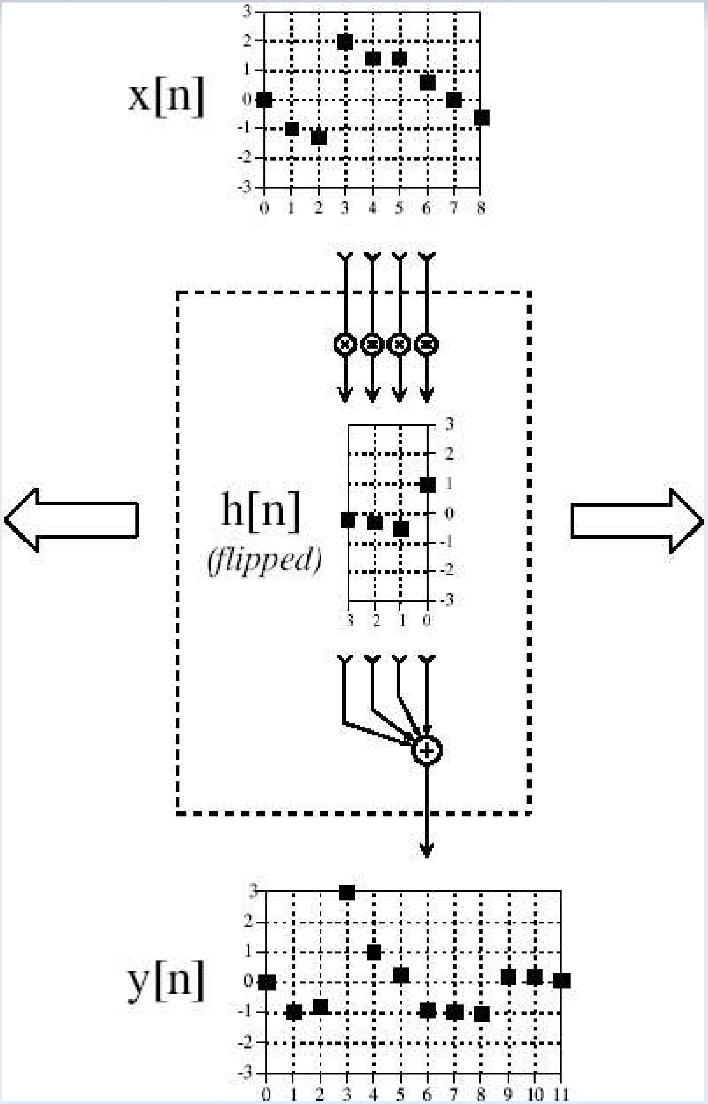
$y[2] = \{0, 0, 6, 3\}$

$y[3] = \{0, 0, 0, 4, 2\}$

____

$y[n] = \{2, 5, 8, 7, 2\}$ N+M-1=5 pontos

Algoritmo do lado da saída



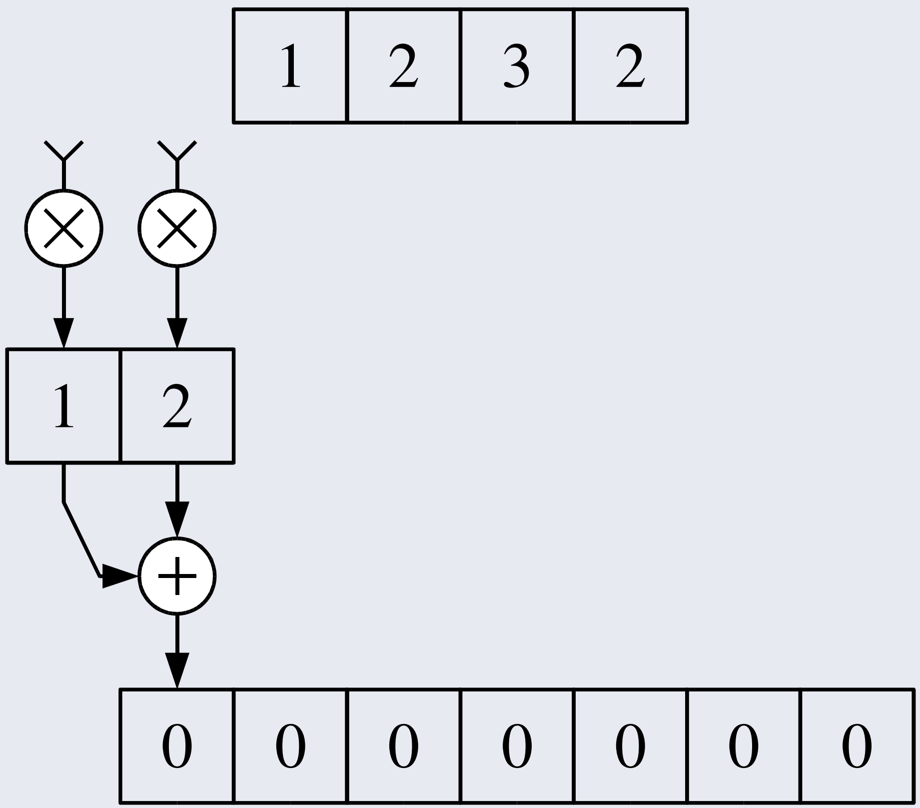
Exemplo

Dados os sinais:

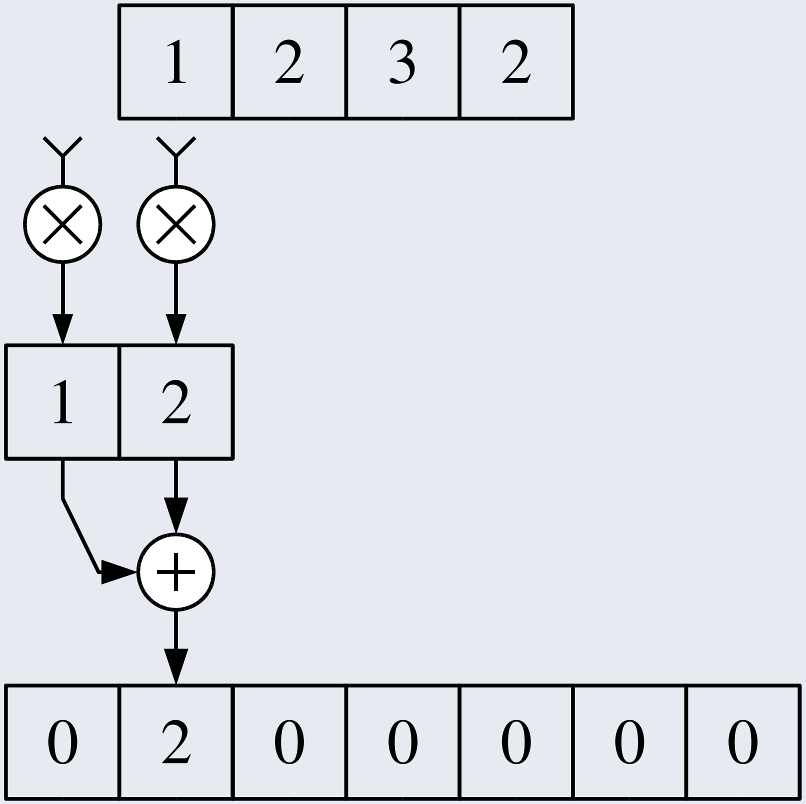
$x[n] = \{1,2,3,2\}$ e $h[n] = \{2,1\}$

calcule x[n]*y[n] utilizando o algoritmo do lado da saída

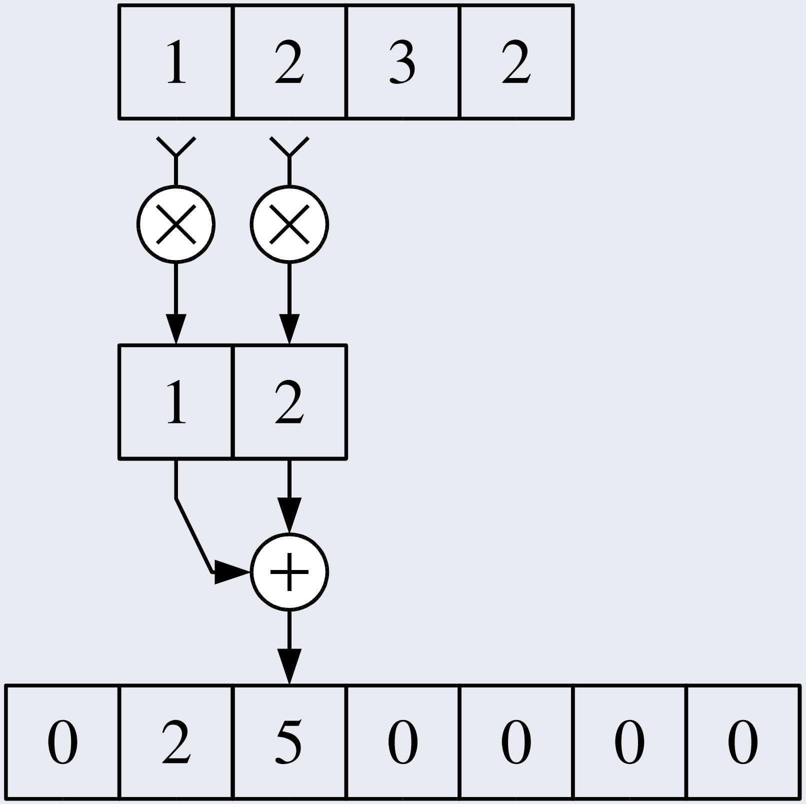
Resposta



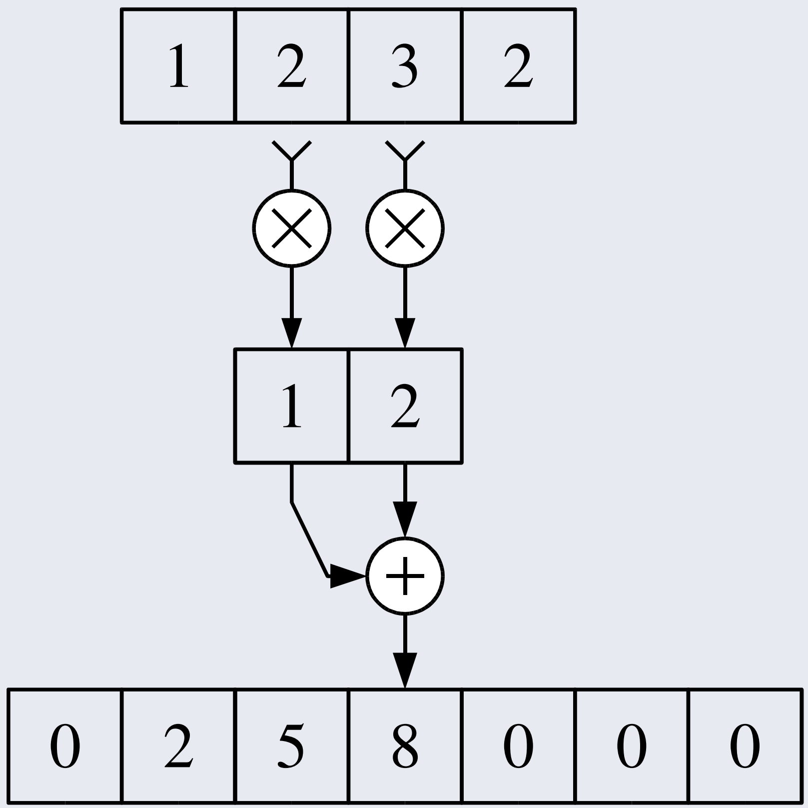
Resposta



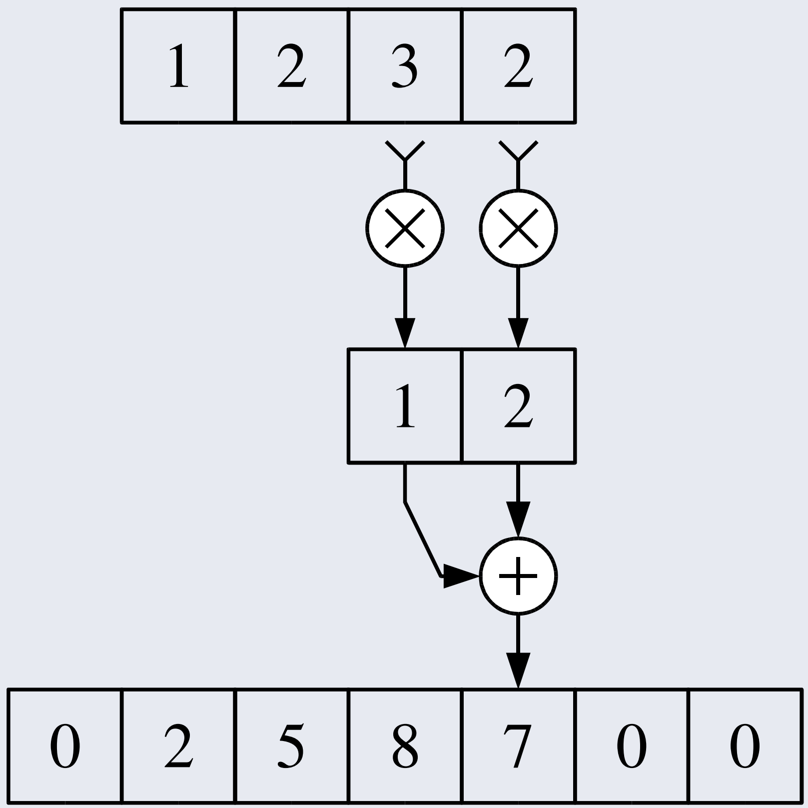
Resposta



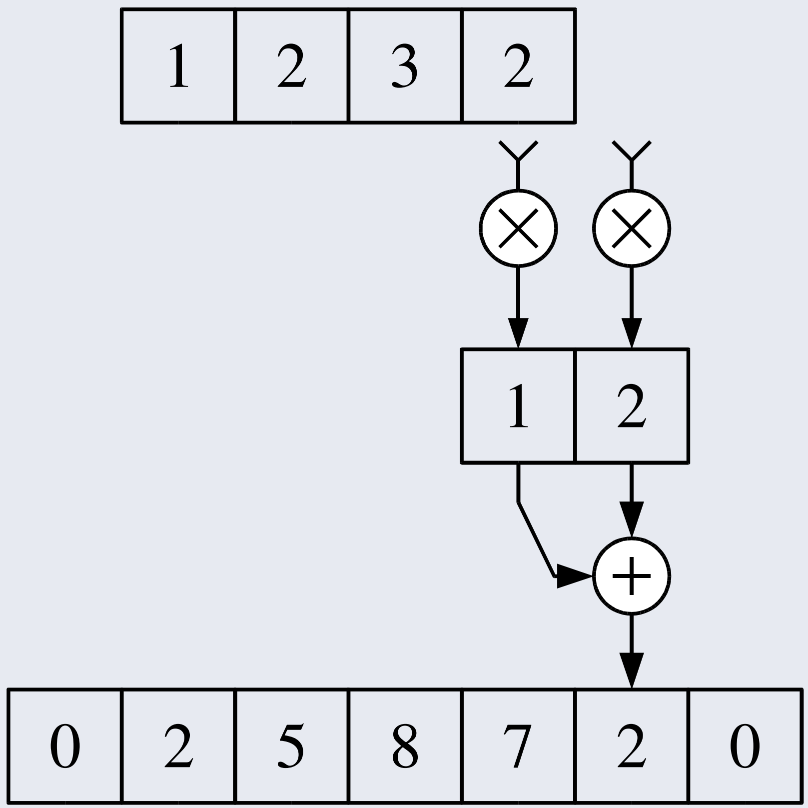
Resposta



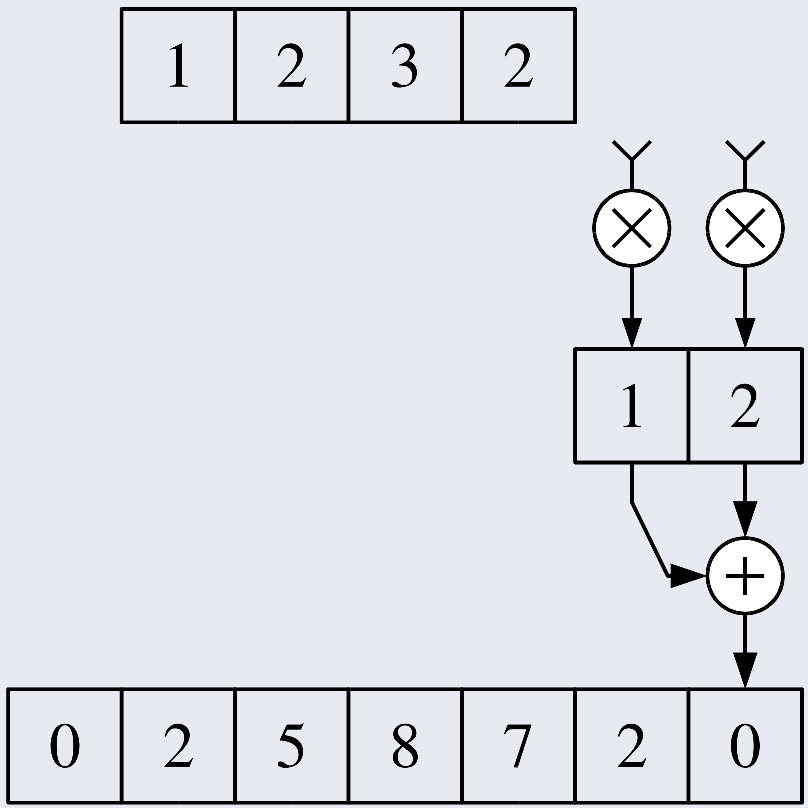
Resposta



Resposta



Resposta



Soma de convolução

- Em forma matemática, o algoritmo do lado da saída pode ser descrito como:

$$y[i] = \sum_{j=0}^{M-1} h[j]\,x[i-j]$$

- Esta equação é conhecida como soma de convolução.

Exemplo

Dados os sinais:

$x[n] = \{1,2,3,2\}$ e $h[n] = \{2,1\}$

calcule x[n]*y[n] utilizando a soma de convolução

Resposta

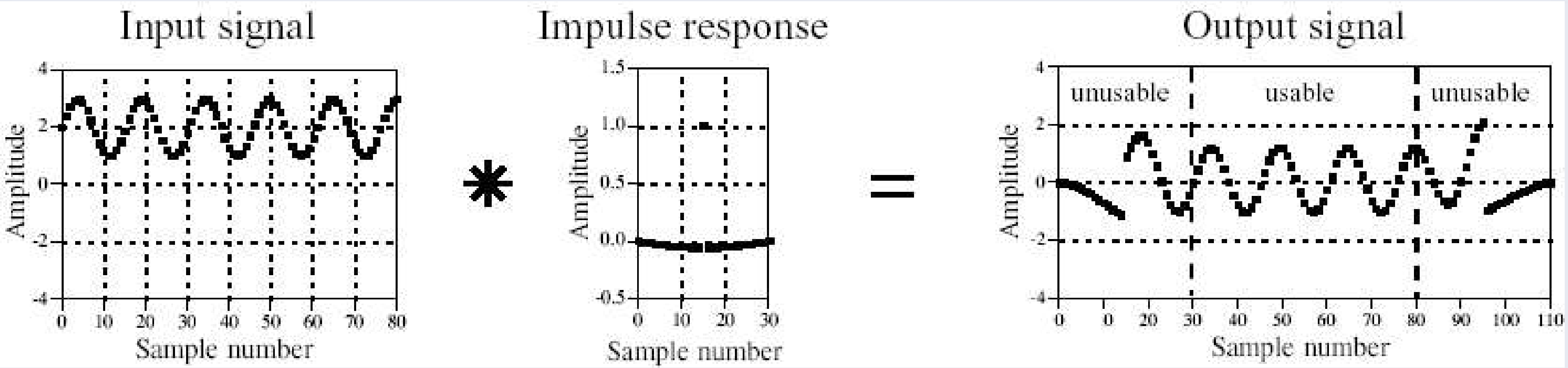
$$y[i] = \sum_{j=0}^{M-1} h[j]\,x[i-j]$$

x[n] = {1,2,3,2} e h[n] = {2,1}

N = 4 M = 2

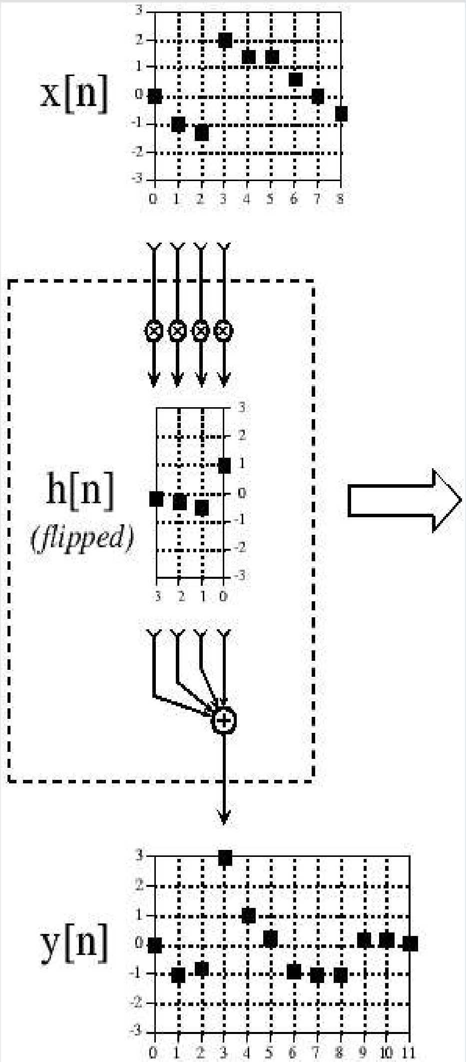
- Sabemos que a resposta tem que ter N+M-1=4+2-1=5 pontos.
- Desta forma, temos que calcular y[0], y[1], ..., y[4].
- y[0] = h[0]x[0-0]+h[1]x[0-1] = h[0]x[0]+h[1]x[-1] = 2x1+1x0 = 2
- y[1] = h[0]x[1-0]+h[1]x[1-1] = h[0]x[1]+h[1]x[0] = 2x2+1x1 = 5
- y[2] = h[0]x[2-0]+h[1]x[2-1] = h[0]x[2]+h[1]x[1] = 2x3+1x2 = 8
- y[3] = h[0]x[3-0]+h[1]x[3-1] = h[0]x[3]+h[1]x[2] = 2x2+1x3 = 7
- y[4] = h[0]x[4-0]+h[1]x[4-1] = h[0]x[4]+h[1]x[3] = 2x0+1x2 = 2

Problemas nas extremidades

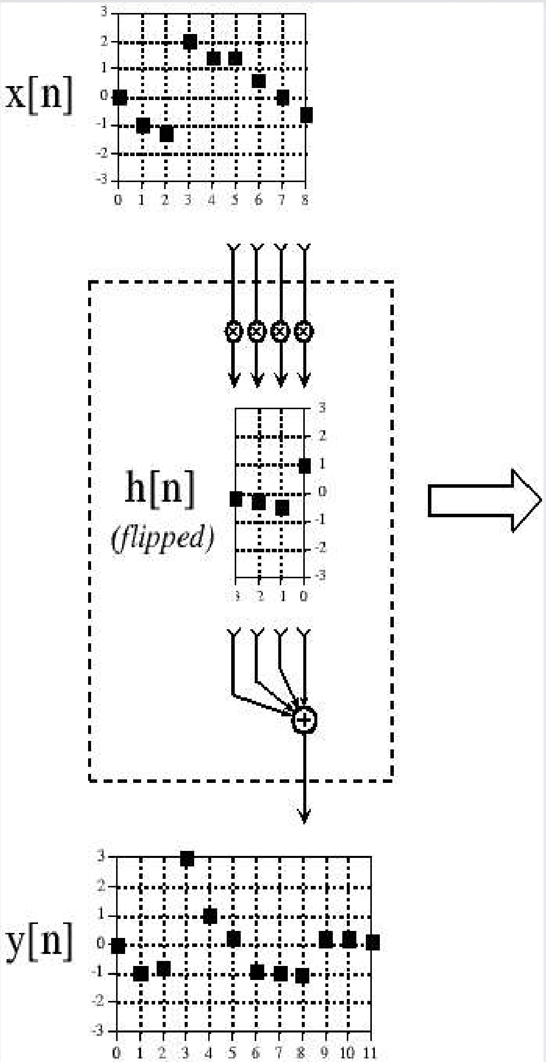


- Na filtragem de sinais através da convolução pode-se esperar um comportamento errôneo no início e no final dos sinais.
- Se o filtro tem comprimento de M amostras, as (M-1) amostras iniciais e as (M-1) amostras finais estarão erradas, e devem ser descartadas.

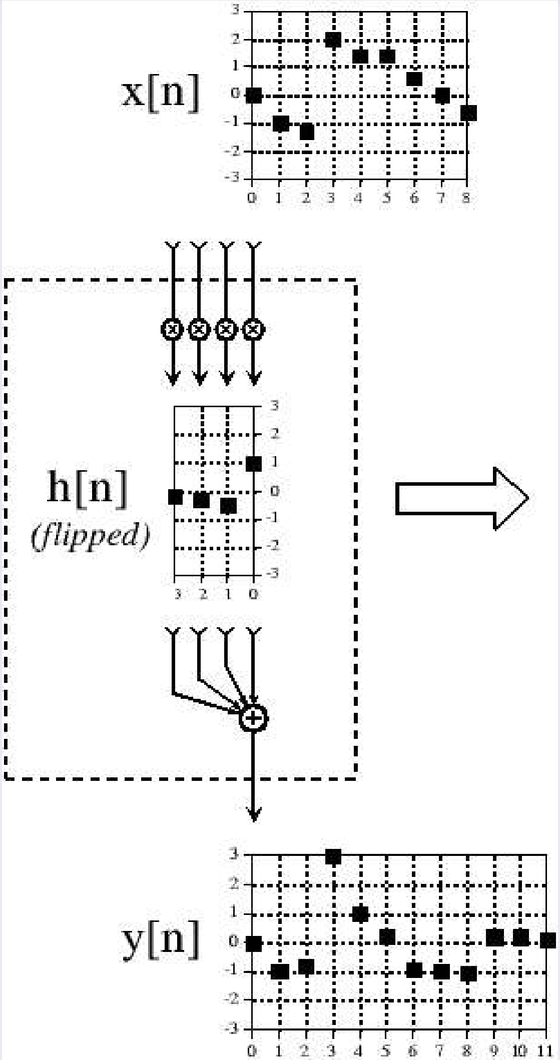
Por que isto ocorre? (parte 1)



Enquanto a "máquina" de convolução está totalmente imersa no sinal, não há problemas.



Por que isto ocorre? (parte 2)



No início e no final da convolução, temos que "inventar" valores para as amostras inexistentes.

Normalmente assumimos que estas amostras têm valor 0.