Teoria de Interpolação.

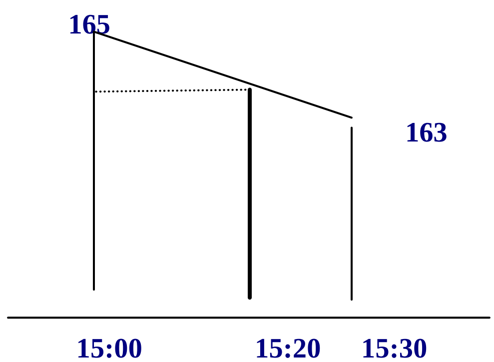
Motivação.

Vamos pensar na seguinte situação: Uma industria consome energia elétrica durante uma jornada típica de trabalho, de acordo com a tabela apresentada abaixo:

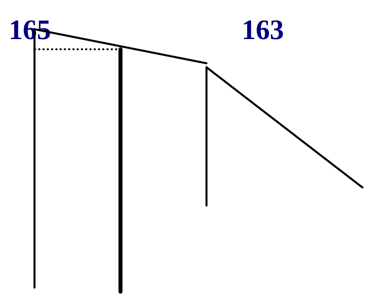
Hora	**14.00**	**14.30**	**15.00**	**15.30**	**16.00**	**16.30**	**17.00**
Pot.	**139**	**152**	**165**	**163**	**142**	**119**	**97**

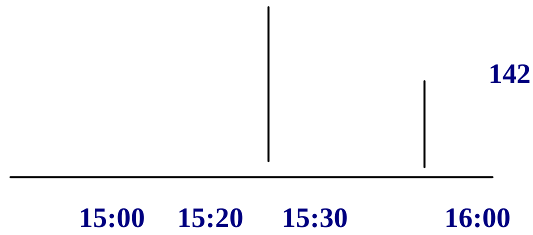
Estas medidas feitas a intervalos regulares, dão uma idéia do consumo de energia elétrica da fábrica. No entanto, como devemos proceder para fazer uma <u>estimativa</u> do consumo de energia, por exemplo, às 15:20 ?

Uma primeira aproximação seria ligar, com uma reta, os valores relativos a 15:00 hrs e 15:30 hrs:

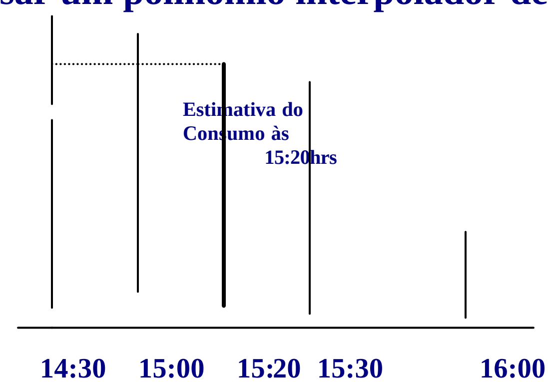


Uma segunda aproximação pode ser feita com a utilização de mais dados, isto é, levando em consideração o consumo às 16:00 hrs também e, em vez de se fazer uma interpolação linear, passamos pelos três pontos uma parábola:





Aparentemente, esta segunda aproximação é mais apropriada, pois considera informações adicionais. A idéia natural para uma terceira aproximação seria considerarmos, além do que já temos, a situação às 14:30 e, pelos quatro pontos obtidos, passar um polinômio interpolador de terceiro grau:



O polinômio interpolador neste caso seria da forma :

$$a_1x^3 + a\ x^2 + a_3x + a_{0.}$$

O problema da interpolação pode ser dado na seguinte definição:

Definição

Sendo fornecida uma série de dados (x_i, x_j) , *i*=0,1,...n, correspondentes aos valores de argumentos e valores de uma função *f*, tal que: y = *f*(*x*), os quais foram obtidos

“experimentalmente”, deseja-se obter os valores $f(\bar{x})$, $\bar{x} \neq x_i$, utilizando-se os pontos dados.

O objetivo da interpolação é obter o valor de $f(\bar{x})$ aproximadamente. Para isso construímos, a partir dos dados “experimentais” uma nova função f (*x*) que interpola a *f*, tal que:

***i*) " x_i , $x_0 \leq x_i \leq x_n$ f (x_i) = *f*(x_i);**

***ii*) " *x* Î [x_0 , x_n] f (x_i) @ *f*(x_i).**

Pela definição anterior podemos ter vários tipos de funções que interpolam a função. Tal pode ser visto nas figuras abaixo:

A função f que interpola *f* pode pertencer a uma das seguintes famílias:

P: polinômios : $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$
F: Fourier : $f_i(x) = a_i \cos ix + b_i \operatorname{sen} ix$
E: exponencial : $y = ae^{bx}$
S: splines : “pedaços” de polinômios, etc.

O problema da interpolação pode ser visto em dois casos:

a) *Valores tabelados:* a função *f* pode ser dada através de uma tabela correspondente aos valores da função para um número

limitado de valores *x*. como por exemplo, a função dada pela tabela mostrada a seguir:

x_0	x_1	x_2	x_3	**....**	x_n
y_0	y_1	y_2	y_3	**....**	y_n

adimitindo-se que os valores tabelados tenham sido obtidos com uma alta exatidão, isto é, todas as casas são corretas ou confiáveis, resta o problema de obter os valores da função para os pontos não tabelados.

b) *Funções matemáticas conhecidas:* Neste caso as funções a serem interpoladas são conhecidas analiticamente, mas seu cálculo é muito trabalhoso ou ainda, não podem ser calculadas para qualquer valor do argumento.

***Ex.:* Função *erf*(*x*) de Bessel:** ***erf*(*x*) =** $\dfrac{2}{\sqrt{p}}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}.\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$\mathrm{J}_n(x) = \sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-1)^v}{v!(n+v)!}.\frac{x^{2v+n}}{2}$$

Em linhas gerais, o problema da interpolação resume-se em: A partir de uma tabela com valores de uma função *f*, onde y = *f*(*x*), com n + 1 pontos, deve-se escolher n funções f_i , *i* = 0,1,...,n cuja combinação usada como aproximação da função dada :

$$f(x) \cong c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x) = f(x)$$

As funções f_i são conhecidas e escolhidas conforme a natureza do problema que está tabelado. O que desejamos calcular são as constantes c_j. De acordo com a definição , de acordo com item 1, temos que a aproximação f(*x*) deve coincidir com *f*(*x*) nos pontos dados na tabela, o que nos dá o seguinte sistema :

$$\begin{cases} c_0 f_0(x_0) + c_1 f_1(x_0) + \ldots + c_n f_n(x_0) = y_0 \\ c_0 f_0(x_1) + c_1 f_1(x_1) + \ldots + c_n f_n(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ c_0 f_0(x_n) + c_1 f_1(x_n) + \ldots + c_n f_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

se tivéssemos $f_i(x) = x^i$, ou seja, a função f que interpola a *f* será um polinômio seria:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \ldots + c_n x_0^n = y_0 = f(x_0) \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \ldots + c_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + \ldots + c_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

\ **(n+1) equações e (n+1) incógnitas :** $c_0, c_1, \ldots, c_n$.

$\therefore$ **A x = b**

onde **A =** $$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

A : Matriz de Vandermond e det A ¹ 0; o sistema A x = b admite uma solução única.

Teorema .: Dados (n+1) pontos distintos $x_0,\dots,x_n$ e (n+1) ordenadas $y_0,\dots,y_n$, existe um polinômio *p*(*x*) de grau $\leq$ n que interpola y_i em x_i , *i* = 0,1,...,n. Este polinômio *p*(*x*) é único entre todos os conjuntos de polinômios de grau no máximo n.

Interpolação Polinomial.

Por razões práticas e históricas, a classe de funções mais usadas na interpolação são os polinômios, pois possuem a vantagem de serem fáceis de derivar, integrar e calcular. Uma boa razão para usarmos polinômios é dada pelo teorema abaixo:

Teorema .(Weierstrass):

Se *f*(*x*) é contínua em [a,b] então para " e > 0, $ um polinômio $P_n(x)$ de grau n, n = *g*(e) tal que | *f*(*x*) - $P_n(x)$| < e para *x* Î [a,b].