CURSO Métodos Numéricos-Prof. Dr. J. M. Balthazar (2003 segundo semestre).

Capítulo 0 : Modelagem

Capítulo 1 : Aproximação e Erros

Capítulo 2 : Equações e Sistemas Não-Lineares

Capitulo 3: Algebra linear Computacional

Capítulo 4 : Teoria da Interpolação

Capítulo 5 : Ajuste de Funções

Capítulo 6 : Introdução a Resolução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias

Critérios: $P_{1:}$ 5ª aula
$P_{2:}$ 9ª aula
$P_{2.5}$: 14ª aula
P_1: Presença
$EXComput_{1.5}$: transcorrer do curso em grupo nos dias das P_i

Referencias: Notas de aula (pagina http:/black.rc.unesp.br/balthazar/

Capítulo 0 : MODELAGEM

0.1. Preliminares

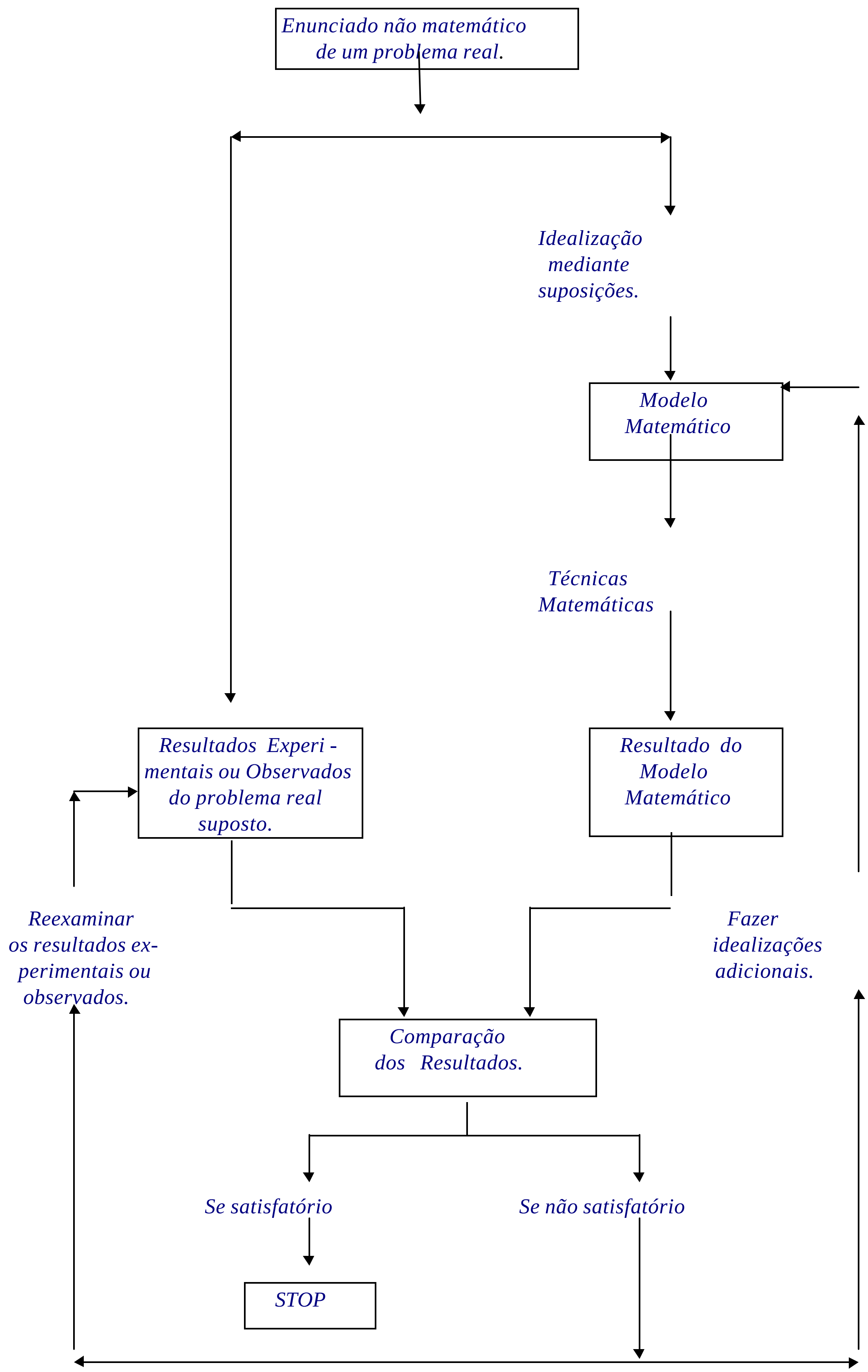
Um modelo é uma representação (substitutiva) da realidade.

Como VERBO MODELAR(=>)construir representações idealizadas de uma situação real, um modelo matemático pode ser definido como uma formulação ou equação que expressa as características essenciais de um sistema físico ou processo, em termos matemáticos.

A técnica de construção de modelos matemáticos é sumarizado na figura (0 - 1.1), a seguir.

OBS: O modelo ideal deve ser o mais próximo possível do modelo real.

Figura 0.1.1. Diagrama da técnica de Modelagem.



Enunciado não matemático de um problema real.
Idealização mediante suposições.
Modelo Matemático
Técnicas Matemáticas
Resultados Experi - mentais ou Observados do problema real suposto.
Resultado do Modelo Matemático
Reexaminar os resultados ex- perimentais ou observados.
Fazer idealizações adicionais.
Comparação dos Resultados.
Se satisfatório
Se não satisfatório
STOP

0.2 COMPUTADORES E SOFTWARES

Métodos Numéricos : Combinam matemática e computadores.

Não importa que tipo de computador, você use; pois ele só terá utilidade se for provido de instruções cuidadosas (SOFTWARES)

Linguagem: A escolha do aluno(Pref. C)

Algoritmos

Definição: Um algoritmo pode ser uma sequência de instrução ordenadas, de maneira, a dar, em seu decurso a solução para um problema específico.

Nossa preocupação será com os algoritmos voltados para o processamento numérico; eles devem ter a seguinte características:

∗ 1. O algoritmo deve identificar todas as etapas do modelo.

∗ 2. O algoritmo pode falhar por violar restrições físicas da máquina, que são detectadas, em tempo de execução.

∗3. Como muitos problemas numéricos são resolvidos por métodos ITERATIVOS
(repetitivos), faz-se necessário estabelecer um <u>Critério de Parada</u> para que o algoritmo possa terminar após um <u>número finito de passos.</u> (É aconselhável que o número de passos seja determinado à priori).

∗ 4. O algoritmo deve ter independência de máquina.

∗ 5. Eficiência (Economia).

∗ 6. Resultado <= Valor Aproximado $\pm$ Limite Erro.

OBS : Um fluxograma é uma representação gráfica (visual) de um algoritmo

Capítulo 2 : Aproximação e Erro.

2.1. Definições de Erro:

Os erros numéricos, isto é, erro num número xa é seu valor verdadeiro menos seu valor aproximado :

$$E[\, xa \,] = \text{Erro em } xa = xv - xa$$

(2.1-1)

e o erro relativo em xa :

$$Rel\,[\, xa \,] = \frac{xv - xa}{x\,v}$$

(2.1-2)

Note que os erros relativos são muito mais usados que os erros absolutos; veja os exemplos :

Exemplo 1:

xv = 10.000 cm **xa = 9.999 cm**

xv = 10 cm **x a = 9 cm**

(Medidas de comprimentos de uma ponte e de um rebite (prego)).

Erro *E[* xa *]* (Ponte) = 10.000 - 9.999 = 1 cm

Erro *E[* xa *]* (Rebite) = 10 - 9 = 1 cm

$\therefore$ Ambos tem o mesmo erro absoluto.

$$Rel\,(\, xa \,)\,(\text{Ponte}) = \frac{1}{10.000}\,(100) = 0{,}01\ \%$$

$$Rel\,(\, xa \,)\,(\text{Rebite}) = \frac{1}{10}\,(100) = 10\ \%$$

Mas o erro relativo para a rebite é muito maior.

Exemplo 2 :

x_v = 0,00006 $\quad$ $E[x_a]$ = 0,00001

x_a = 0,00005 $\quad$ $Rel[x_a] = \dfrac{0{,}00001}{0.00006} = 0.1$ ou 10 %

x_v = 100.500 $\quad$ $E[x_a]$ = 500

x_a = 100.000 $\quad$ $Rel[x_a] = \dfrac{500}{100.500} = 0.05$ ou 0.5 %

Logo é importante especificar se o erro considerado é absoluto ou relativo.

Note que no caso dos processos iterativos :

$$E[x_a] = \frac{\text{Aproximação Presente - Aproximação Prévia}}{\text{Aproximação Presente}} \qquad (2.1\text{-}3)$$

Além do mais, os erros podem ser positivos ou negativos: se aproximação for maior do que o valor verdadeiro (Aproximação prévia maior do que a Aproximação presente) o erro é negativo (Positivo no caso inverso). O interessante é tomar-se

$$|\, E[x_a] \,| < \varepsilon_s \quad \text{(Pré especificação da tolerância)}$$

2.2. Fontes de erro:

Geralmente, os erros provém de três fontes:

2.2-1: Modelagem Matemática do Problema;
2.2-2: Precisão dos Dados;
***2.2-3: Erros de Arredondamentos* (na fase de resolução) *e truncamentos*.**

Os exemplos abaixo, são ilustrativos:

EXEMPLO 1: SOBRE MODELAGEM E PRECISÃO DOS DADOS.

Supõem-se que se queira determinar a altura de um edifício e que para isso se disponha apenas de uma bolinha de metal e de um cronômetro e da fórmula:

$$d = do + vo\ t + \frac{1}{2}\ a\ t^2 \qquad (2.2\text{-}1)$$

d : distância percorrida; d_0 : distância inicial; v_0 : velocidade inicial;
a : aceleração; t : tempo.

Então subindo-se ao topo do edifício e <u>medindo-se o tempo que a bolinha gasta</u> para tocar o solo, ou seja, 3 segundos ($\Rightarrow$)

$$\mathbf{d = 0 + 0.3 + (0.5)(9.8)(3)^2 = 44{,}1\ m.}$$

Pergunta: Este resultado é confiável ?

Não, no modelo não foram considerados outras forças, tais como resistência do ar, velocidade do vento, além da precisão da leitura do cronômetro; pois para uma pequena variação no tempo medido, existe uma grande variação na altura do edifício.
Se o tempo de medida fosse 3,5 segundos ao invés de 3,0 segundos a altura do edifício seria 60 m.

Para uma variação de 16,7 % no valor lido no cronômetro, a altura calculada apresenta uma variação de 36 %.

Exemplo 2: Sobre truncamentos.

São os erros provenientes da atualização de processos que deveriam ser infinitos ou muito grandes para a determinação de um valor e que por razões práticas são truncadas. A solução adotada é a de interromper os cálculos quando uma determinada precisão for atingida.

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \ldots + \binom{a}{n}x^n + R \qquad \text{se } \alpha = ½$$

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x \qquad \text{(x pequeno)}$$

Mais tarde, veremos mais detalhes.

Exemplo 3: Sobre Arredondamentos.

Quando trabalha-se com um número limitado dígitos num número, como num computador, os erros de arredondamentos são inevitáveis e devem estar ligados à precisão da máquina, em uso.

Ex.: Supondo-se as operações abaixo sendo processadas, numa máquina com quatro dígitos significativos ($\Rightarrow$)

$$x_1 = \mathbf{0.3491} \cdot 10^4 , \qquad x_2 = \mathbf{0.2345} \cdot 10^0$$

$$(x_2 + x_1) - x_1 = (\mathbf{0.2345} \cdot 10^0 + \mathbf{0.3491} \cdot 10^4) - \mathbf{0.3491} \cdot 10^4 =$$
$$= \mathbf{0.3491} \cdot 10^4 - \mathbf{0.3491} \cdot 10^4 = \mathbf{0.000}$$

$$x_2 + (x_1 - x_1) = \mathbf{0.2345} \cdot 10^0 + (\mathbf{0.3491} \cdot 10^4 - \mathbf{0.3491} \cdot 10^4) =$$
$$= \mathbf{0.2345}$$

Os resultados são diferentes, pois o arredondamento feito em $(x_2 + x_1)$ apresenta o resultado com oito dígitos e a máquina só armazena quatro dígitos.

2.3. Propagação de erros:

a. Números.

Seja ε o erro em X e η o erro em Y, isto é:

$$\begin{aligned} Xv &= Xa + \xi \\ Yv &= Ya + \eta \end{aligned} \qquad (2.3\text{–}1)$$

então para :

i) **Multiplicação -**

$$\mathbf{X_v Y_v - X_a Y_a = Y_v X_v - (X_v - x)(Y_v - h) =}$$
$$\mathbf{= X_v Y_v - \{ X_v Y_v + X_v h - Y_v x + x h \} =}$$
$$\mathbf{= X_v h + Y_v x + x h} \qquad \mathbf{(2.3\text{-}2)}$$

$$\mathbf{Rel[X_a , Y_a] = \frac{X_v Y_v - X_a Y_a}{X_v Y_v} =}$$

$$\mathbf{= \frac{X_v h + Y_v x - x h}{X_v Y_v} = \frac{h}{Y_v} + \frac{x}{X_v} - \frac{x h}{X_v Y_v} =}$$

$$\mathbf{= Rel[X_a] + Rel[Y_a] - Rel[X_a]\ Rel[Y_a]} \qquad \mathbf{(2.3\text{-}3)}$$

Para | Rel [Xa] | ,| Rel[Ya] | << 1 (=>)

$$\mathbf{Rel[X_a , Y_a] \cong Rel[X_a] + Rel[Y_a]}$$

***ii*) Divisão -**

$$Rel[X_a / Y_a] = \frac{Rel[X_a] - Rel[Y_a]}{1 - Rel[Y_a]} \qquad (2.3\text{-}3)$$

Se $Rel[Y_a] << 1$ então $Rel[X_a / Y_a] \approx Rel[X_a] - Rel[Y_a]$

***iii*) Adição e Subtração -**

$$\mathbf{Rel[X_a \pm Y_a] = x \pm h = Rel[X_a] \pm Rel[Y_a]} \qquad \mathbf{(2.3\text{-}4)}$$

b. Funções.

Seja $f\,(Xv)$ ser uma aproximação por $f\,(Xa)$, então pelo teorema do valor médio temos

$$f\,(Xv) - f\,(Xa) \approx |\, f\,'(Xa)\,|\ (Xv - Xa) \qquad (2.3\text{-}5)$$

desde que Xa e Xv são relativamente próximos e f ’(x) não varia muito $x \in (Xa , Xv)$.

No caso de ter-se função de duas variáveis :

$$f\,(X_v , Y_v) - f\,(X_a , Y_a) \approx \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(X_a , Y_a) \right| \right\} (X_v - X_a) + \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial y}(X_a , Y_a) \right| \right\} (Y_v - Y_a) \qquad (2.3\text{-}6)$$

com restrições equivalentes.

2.3.1. Ruído no cálculo da função.

Considere o gráfico da função $f\,(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $x \in [0,2]$.

é uma curva suave e contínua.

Para $x \in [0.998 , 1.002]$ temos que os valores estão espaçados, logo não temos mais curva contínua (considero cerca de 800 pontos), como apresentado na figura 2.3.2.

OBS: Na nuvem de pontos não se consegue detectar onde está a raiz.
O ruído nas funções é um problema importante que deve ser considerado em suas análises.

2.4. Estabilidade Numérica.

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 0.7 \\ 7x_1 + 10x_2 = 1 \end{cases} \qquad \text{Solução :} \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0.1 \end{aligned}$$

Se

$$\begin{cases} 5\hat{x}_1 + 7\hat{x}_2 = 0.69 \\ 7\hat{x}_1 + 10\hat{x}_2 = 1.01 \end{cases} \qquad \text{Solução :} \quad \begin{aligned} \hat{x}_1 &= -0.17 \\ \hat{x}_2 &= 0.22 \end{aligned}$$

isto é, uma pequena mudança no lado direito do sistema levou a grandes mudanças no resultado.

Do ponto de vista prático, deveremos introduzir uma medida de estabilidade (número de condição), que será a medida de sensibilidade da solução para pequenas mudanças na Amostra.

Seja o número de condição dado por **K**, então :

- Se **K** for grande (k > 1) $\Rightarrow$ mal condicionamento;
- Se **K** for pequeno (k < 1) $\Rightarrow$ bem condicionado.
-

Note $f(x) \approx f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x-\tilde{x})$, então definimos :

$$\mathbf{E}[f(x)] = \frac{f(x) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} \cong \frac{f'(\tilde{x})(x-\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

$\mathbf{E}[x] = \dfrac{x-\tilde{x}}{\tilde{x}}$, $\mathbf{K}(x) = \tilde{x}\dfrac{f'(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$, onde **K** é o número de condição.

$$\mathbf{E}[f(x)] = \left[\tilde{x}\frac{f'(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}\right]\left(\frac{x-\tilde{x}}{\tilde{x}}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{E}[f(x)] = \mathbf{K}(x) \;.\; \mathbf{E}[x]}$$

OBS : O Teste de Condicionamento, verifica se o problema é bem condicionado ou bem posto. Quando o problema for mal condicionado, deve haver uma mudança de variável para que o problema possa ser resolvido.

EXEMPLO

1. Maneira:

$$\begin{cases} 0{,}0030X_1 + 30{,}0000X_2 = 5{,}0010 & (* \; 333{,}3333) \\ 1{,}0000X_1 + 4{,}0000X_2 = 1{,}0000 & (* \; -1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}0000X_1 + 9999{,}9990X_2 = 1666{,}9998 \\ -1{,}0000X_1 - 4{,}0000X_2 = -1{,}0000 \end{cases}$$

$$9995{,}9990X_2 = 1665{,}9998$$

$$X_2 = 0{,}1667$$

$$X_1 = 1666{,}9998 - 9999{,}9990 * 0{,}1667$$

$$X_1 = 0{,}000$$

Neste caso, chegamos nos valores de $X_1 = 0{,}0000$ e $X_2 = 0{,}1667$

2ª Maneira:

$$\begin{cases} 1{,}0000X_1 + 4{,}0000X_2 = 1{,}0000 & (* \; 0{,}0030) \\ 0{,}0030X_1 + 30{,}0000X_2 = 5{,}0010 & (* \; -1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}0030X_1 + 0{,}0120X_2 = 0{,}0030 \\ -0{,}0030X_1 - 30{,}0000X_2 = -5{,}0010 \end{cases}$$

$$29{,}9880X_2 = 4{,}9980$$

$$X_2 = 0{,}1667$$

$$X_1 = 1{,}0000 - 4{,}0000 * 0{,}1667$$

$$X_1 = 0{,}3333$$

Neste caso chegamos nas soluções de $X_1 = 0{,}3333$ e $X_2 = 0{,}1667$.

Portanto, as soluções obtidas na primeira e na segunda maneira são diferentes!