

Introdução a Resolução

Numérica de Equações

Diferenciais Ordinárias

Equações Diferenciais

Definição 6.1.1: Uma equação que envolve derivadas até ordem n , é chamada de equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n e pode ser escrita na forma:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

(6.1.1)

$$a \leq x \leq b$$

Definição 6.1.2: A solução da equação (6.1.1) é qualquer função $y = F(x)$ que é definida em $[a, b]$ e tem n derivadas neste intervalo e que satisfaz (6.1.1).

A forma mais simples de uma EDO é

$$y' = f(x) \quad (6.1.2)$$

onde f é contínua para $a < x < b$.

A solução geral desta equação é:

$$y(x) = \int f(x)dx + c \quad (6.1.3)$$

com constante c determinada por $y(x_0) = y_0$

De um modo geral temos

$$\begin{cases} y^n(x) = f(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ a \leq x \leq b \\ y(a) = \eta_1, y'(a) = \eta_2, \dots, y^{n-1}(a) = \eta_n \end{cases} \quad (6.1.4)$$

como por exemplo:

$$\begin{cases} y'''(x) = xy'(x) + e^x y(x) + x^2 + 1 = f \\ 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, \dots, y''(0) = -1 \end{cases}$$

é conveniente reduzi-la a um sistema de EDO de primeira ordem chamando : $y_1 = y(x)$

$$\begin{cases} y'''(x) = xy'(x) + e^x y(x) + x^2 + 1 = f \\ 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, \dots, y''(0) = -1 \end{cases}$$

**Para reduzir a uma EDO de primeira ordem
assumimos:**

$$y_1 = y(x)$$

$$y_2 = y'(x)$$

$$y_3 = y''(x)$$

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2 \\ y_2'(x) = y_3 \\ y_3'(x) = xy_2(x) + e^x y_1(x) + x^2 + 1 = f \\ y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_3(0) = -1 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

isto é, se $\tilde{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $\tilde{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$ $\tilde{y}(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}$

$$\tilde{y}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ f(x, y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix} = \tilde{F}(x, y)$$

de um modo geral $\begin{cases} \frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{F}(x, \tilde{y}(x)) \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases} \quad (6.1.6)$

Equações de Diferenças

Definição 6.2.1: Uma equação de diferenças de ordem n é uma sequência de equações da forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} g(y_{k+n}, y_{k+n-1}, \dots, y_k) = 0 & k=0,1,\dots \\ y_i = \eta_i & i=0,1,\dots,n-1 \end{array} \right. \quad (6.2.1)$$

Os g_k são funções de $(n+1)$ variáveis e os valores η_i são específicos.

Definição 6.2.2: Uma solução de (6.2.1) é uma sequência $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \dots\}$ que satisfaz (6.2.1).

Uma forma especial de (6.2.1) é:

$$\begin{cases} \alpha_n y_{k+n} + \alpha_{n-1} y_{k+n-1} + \dots + \alpha_0 y_k = 0 \\ y_i = \eta_i \end{cases} \quad (6.2.2)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

$$i = 0, 1, \dots, n - 1$$

Estas fórmulas nos lembram as fórmulas recursivas e pode ser mostrado que toda fórmula recursiva pode ser escrita como uma equação de diferença.

Suponha, por exemplo, que a equação (6.2.2) tenha uma solução da forma:

$$y_k = \lambda^k \quad k=0,1,\dots \quad (6.2.5)$$

onde k é constante a ser determinada, então de (6.2.2) temos:

$$\alpha_n \lambda^{k+n} + \alpha_{n-1} \lambda^{k+n-1} + \dots + \alpha_0 \lambda^k = \lambda^k (\alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0) = 0$$

Como $\lambda \neq 0$ então $p(\lambda) = 0$

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0 \quad (6.2.6)$$

Logo se λ é uma raiz de $p(\lambda) = 0$ então satisfaz a equação (6.2.2).

Exemplo : $y_{k+2} = 8.5y_{k+1} - 4y_k$ (6.2.7)

$$p(\lambda) = 2\lambda^2 - 17\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_1 = 0.5 \quad \lambda_2 = 8$$

$$y_k = a_1 \lambda_1^k + a_2 \lambda_2^k \quad (6.2.8)$$

satisfaz (6.2.7). Note que, se $y_0 = 2$ e $y_1 = 1$ então

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 2 \\ 0.5a_1 + 8a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

e a solução será $y_k = 2(0.5)^k$ (6.2.9)

Se em vez dos valores iniciais anteriores tivermos,
por exemplo:
$$\begin{cases} y_0 = 2.000001 \\ y_1 = 1.000008 \end{cases}$$

então teríamos $\begin{cases} a_1 = 2.0 \\ a_2 = 10^{-6} \end{cases}$, de modo que a solução perturbada seria :

$$y_k = 2(0.5)^k + 10^{-6}8^k \quad (6.2.9-a)$$

Mesmo para valores moderados de k , a mudança é grande.

Teorema 6.2.1: A solução da equação de diferenças que envolve somente as raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ do polinômio característico $p(\lambda) = 0$ é estável (bem condicionada numericamente) se todas as outras raízes $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots, \lambda_n$ satisfazem $|\lambda_k| < 1$ para $k = m+1, \dots, n$.

Estudaremos, agora, os métodos que aproximam uma EDO por uma equação de diferença. Para facilitar, seja inicialmente

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (6.2.10)$$

- **Em alguns métodos para determinar y_{k+1} , uma aproximação de $y(x_k)$ levamos em consideração apenas o valor de f no ponto y_k , isto é, temos métodos de um só passo.**
- **Quando estamos calculando y_{k+1} podemos levar em conta, não só y_k , mas também os passos anteriores y_{k-1}, \dots, y_{k-l} , etc. Tais métodos são chamados de métodos de passos múltiplos.**

A forma geral dos métodos de k passos é dada por:

$$y_{i+1} = \sum_{j=1}^k \alpha_j y_{i+j-1} + h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{i+j-1} \quad (6.2.11)$$

Se $\beta_0 = 0 \Rightarrow$ Método Explícito.

Se $\beta_0 \neq 0 \Rightarrow$ Método Implícito.

Métodos de um Passo

Método de Runge Kutta (RK)

Os métodos de RK são obtidos pela série de Taylor em que se omitem os termos de mais alta ordem na expansão. Assim, expandindo a solução em série de Taylor obtemos:

$$y(x + X) = y(x) + X\dot{y}(x) + \frac{X^2}{2!} \ddot{y}(x) + \frac{X^3}{3!} \dddot{y}(x) + \dots$$

Sabendo que

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial t} = f \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

obtemos a base para todos os métodos RK

$$\begin{aligned} y(x+X) = & y(x) + Xf + \frac{X^2}{2!} \left[f \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \right] + \quad (6.2.14) \\ & + \frac{X^3}{3!} \left\{ f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right\} + \dots \end{aligned}$$

Discretizando, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = y(x_k) = y(k) \\ y(x + X) = y(x_{k+1}) = y(k + 1) \\ f(y(x), x) = f(y(x_k), x_k) = f(k) \end{array} \right.$$

logo

$$\begin{aligned} y(k + 1) = y(k) + Xf(k) + \frac{X^2}{2!} \left[f(k) \frac{\partial f}{\partial x} \right] + & \quad (6.2.17) \\ + \frac{X^3}{3!} \left\{ f^2(k) \frac{\partial^2 f(k)}{\partial x^2} + f(k) \left(\frac{\partial f(k)}{\partial x} \right)^2 \right\} + \dots \end{aligned}$$

levando-se em conta $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

Método de Euler

A menor aproximação é da forma :

$$y(k + 1) = y(k) + Xf(k) \quad k = 0,1,\dots$$

(6.2.18)

e é conhecido como **MÉTODO DE EULER.**

Runge Kutta de segunda ordem

Para desenvolvermos o método de segunda ordem RK2, assumiremos que a solução assume uma aproximação tendo a expressão:

$$y(k+1) = y(k) + c_1 g_1 + c_2 g_2 \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.2.19)$$

onde c_1 e c_2 são constantes e

$$g_1 = Xf(k) \quad (6.2.20)$$

$$g_2 = Xf(y(k) + \alpha_2 g_1) \quad (6.2.21)$$

com α_2 constante.

**Desenvolvendo em série de Taylor a expressão (6.2.21),
obtem-se:**

$$y(k+1) = y(k) + (c_1 + c_2)Xf(k) + c_2\alpha_2 X^2 f(k) \frac{\partial f(k)}{\partial x} + \dots$$

Logo
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2\alpha_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = 1 \end{matrix} \text{ então} \quad (6.2.23)$$

$$y(k+1) = y(k) + \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$$

$$g_1 = Xf(k) \quad g_2 = Xf(y(k) + g_1)$$

Runge Kutta de quarta ordem

Normalmente $X = h$, por universalidade : $g_1 = K_1$ e $g_2 = K_2$, e seguindo o mesmo procedimento obteremos RK4 (o mais importante):

$$y(k+1) = y(k) + \frac{1}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4) \quad k = 0,1,\dots$$

$$\begin{cases} g_1 = Xf(k) \\ g_2 = Xf(y(k) + 0.5g_1) \\ g_3 = Xf(y(k) + 0.5g_2) \\ g_4 = Xf(y(k) + g_3) \end{cases} \quad (6.2.25)$$

Nos métodos RK temos as seguintes características:

- São auto-inicializáveis, isto é, a partir da condição inicial temos condições de calcular os demais pontos;
- Não precisam do cálculo manual de derivadas;
- Permitem fácil troca de $X=h$;
- São facilmente codificáveis;
- Utilizam p avaliações de função, se a ordem da fórmula for p .

Método de Passos Múltiplos

Conforme vimos, os métodos de passo simples precisam de informação sobre a solução apenas em $x = x_n$ para achar uma aproximação para $y(x_n + h)$.

A característica dos métodos de passo múltiplos é que eles usam informações sobre a solução em mais de um ponto. Inicialmente vamos supor que conhecemos aproximações para $y(x)$ em x_0, x_1, \dots, x_n e

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad i = 0, 1, \dots$$

A seguir exporemos aqui uma classe de métodos de passo múltiplo que é baseado no princípio de integração numérica (*Métodos Adams-Bash Forth*).

Métodos Explícitos

São obtidos quando trabalhamos com $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m}$ para aproximar a integral :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

Aproximamos $f(x, y(x))$ pelo polinômio de grau m , $P_m(x)$ que interpola $f(x, y)$ em $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m}$ e então:

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_m(x) dx$$

Escolhendo $m = 3$ então vamos usar $(x_n, y_n); (x_{n-1}, y_{n-1}); (x_{n-2}, y_{n-2}); (x_{n-3}, y_{n-3})$ aproximando $f(x, y(x))$ pelo polinômio de grau 3 (\leq) $P_3(x)$ que interpola $f(x, y(x))$ nos pontos acima, fazendo as contas:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}]$$

Se o polinômio fosse do quarto grau (\Rightarrow)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720} [1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}]$$

Métodos Implícitos

São obtidos quando trabalhamos com $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m}$ (*Adams-Moulton*). Se $m = 2$ vamos usar

$$(x_{n+1}, y_{n+1}), (x_n, y_n), (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_{n-2}, y_{n-2})$$

Da mesma forma que fizemos anteriormente

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_3(x) dx \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}]$$

Notamos para métodos de mesma ordem :

- **eles usam menos informações que os métodos explícitos;**
- **os coeficientes de f_i são menores e portanto são fórmulas menos sensíveis ao arredondamento;**
- **os limites do erro de truncamento são menores;**
- **o problema de cálculo de y_{i+1} , pois precisamos de f_{i+1} , o que torna o método inaplicável numericamente.**

Métodos Previsores Corretores

Para contornar o último quesito podemos adotar um esquema:

1. Calculamos o valor de y_{i+1} por um método explícito e o chamamos de *valor previsto*.
2. Com o valor previsto, calculamos f_{i+1} .
3. Recalculamos y_{i+1} , isto é, corrigimos o valor de y_{i+1} já previsto usando uma fórmula implícita.

Matlab

A biblioteca do Matlab de EDOs os seguintes métodos de valor inicial:

ode23	método explícito de um passo, RK de ordem baixa.
ode45	método explícito de um passo, RK de ordem média. Este é geralmente, o primeiro método a se tentar em um novo problema.
ode113	método de passo múltiplo, de Adams-Bashforth-Moulton de ordens variadas.

ODE 23

Adequado para problemas que apresentam bruscas variações na solução, para os quais é aceitável uma baixa precisão, ou problemas em que $f(t, y)$ não é suave, ou seja, descontínua.

Equação da Mola sujeita a uma força $a\sin(t)$

$$w_1' = w_2$$

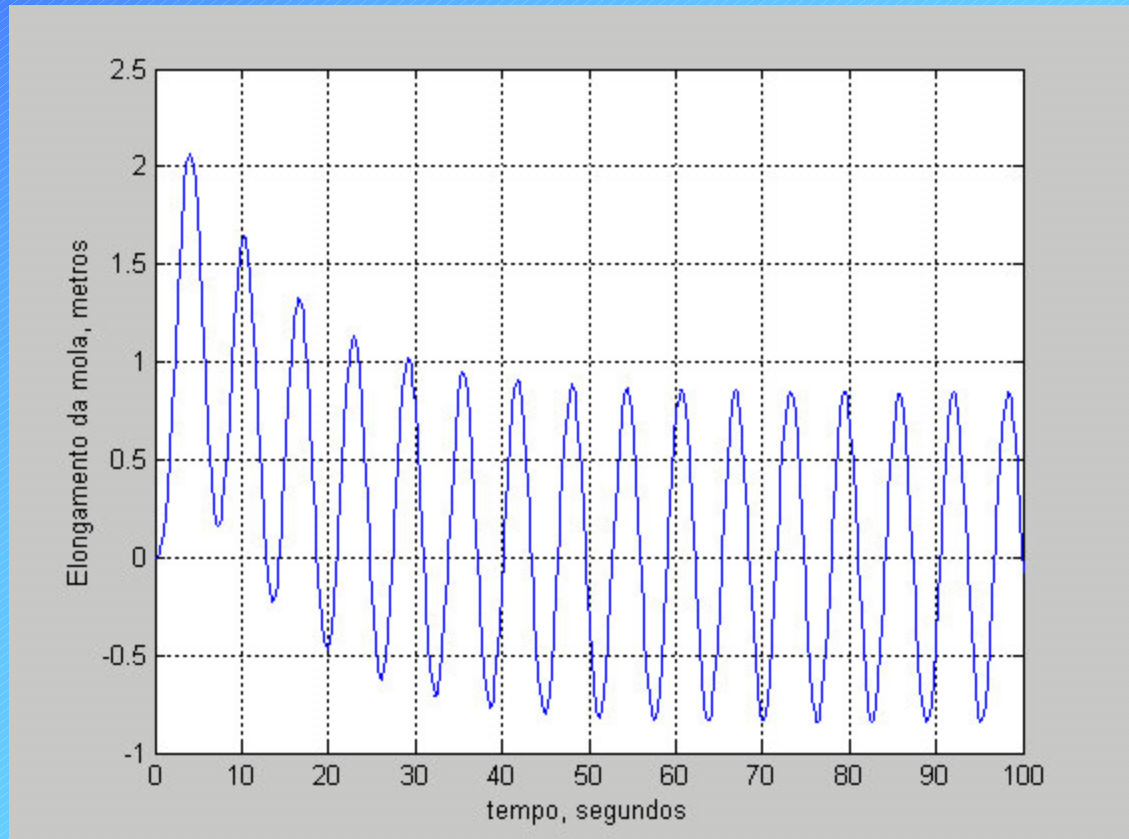
$$w_2' = -\frac{c}{m}w_2 - \frac{h}{m}w_1 + \frac{a}{m}\sin(t)$$

```
function wd=spring(t,w);
```

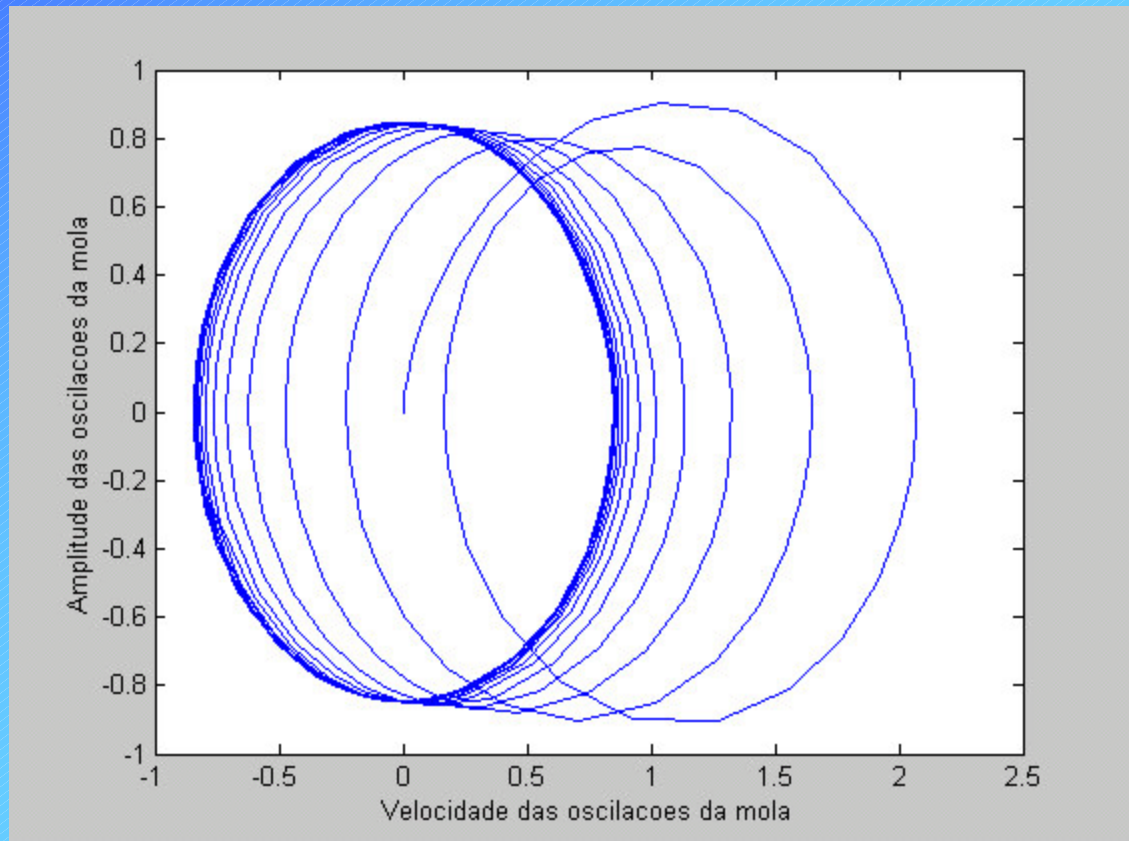
```
a=2.0; m=2.0;
```

```
c=1.4;h=0.1;
```

```
wd = [w(2);-c/m*w(2)-h/m*w(1)+a/m*sin(t)];
```

```
>> tspan=[0 100];  
>> wo=[0;0];  
>> [t,w] = ode23(@mola,tspan,wo);  
>> plot(t,w(:,1));  
>> grid  
>> xlabel('tempo, segundos');  
>> ylabel('Elongamento da mola, metros');
```

```
>> plot(w(:,1),w(:,2));
```

```
>> xlabel('Velocidade das oscilacoes da mola');
```

```
>> ylabel('Amplitude das oscilacoes da mola');
```

ODE 45

**Adequado para problemas não-stiff que exijam
precisão moderada.**

Equação de Van der Pol

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

onde μ é um parâmetro positivo. Escolhendo $y_1 = x$
e $y_2 = \dot{x}$ a equação de Van der Pol se torna:

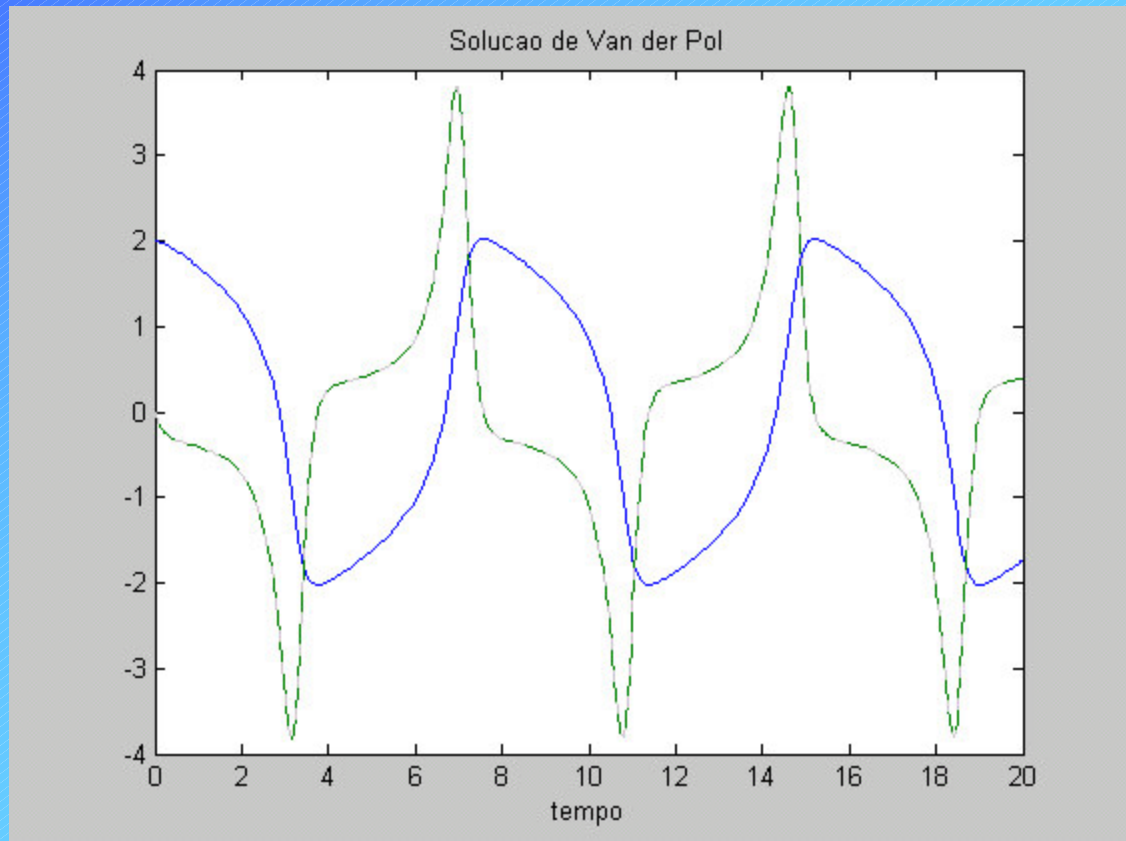
$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1$$

```
function yprime=vdpol(t,y)
```

```
mu=2;
```

```
yprime = [y(2);mu*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1)];
```



```
>> tspan = [0 20];  
>> yo = [2; 0];  
>> [t,y] = ode45(@vdpol,tspan,yo);  
>> plot(t,y(:,1),t,y(:,2),'--');  
>> xlabel('tempo');  
>> title('Solucao de Van der Pol');
```