

SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS POR DIFERENÇAS FINITAS-JM Balthazar- Maio 2003

1 Resolvendo um Problema de Condução de Calor

Para introduzir o método das diferenças finitas de uma forma prática, vamos considerar um problema de condução estacionária de calor em uma barra delgada – Figura 1.

Suas extremidades são mantidas a temperaturas constantes e seu corpo troca calor convectivamente com o meio. Neste caso o conjunto de equações que descrevem o problema é o seguinte:

$$AK \cdot \frac{d^2 T(x)}{dx^2} - Ph \cdot (T(x) - T_\infty) = 0$$

$$p/ \quad 0 \leq x \leq l$$

$$T(0) = T_A \quad p/ \quad x = 0$$

$$T(l) = T_B \quad p/ \quad x = l$$

Os parâmetros são a área da seção transversal A , a condutividade do material K , o perímetro P , o coeficiente da transferência convectiva h e a temperatura ambiente T_∞ .

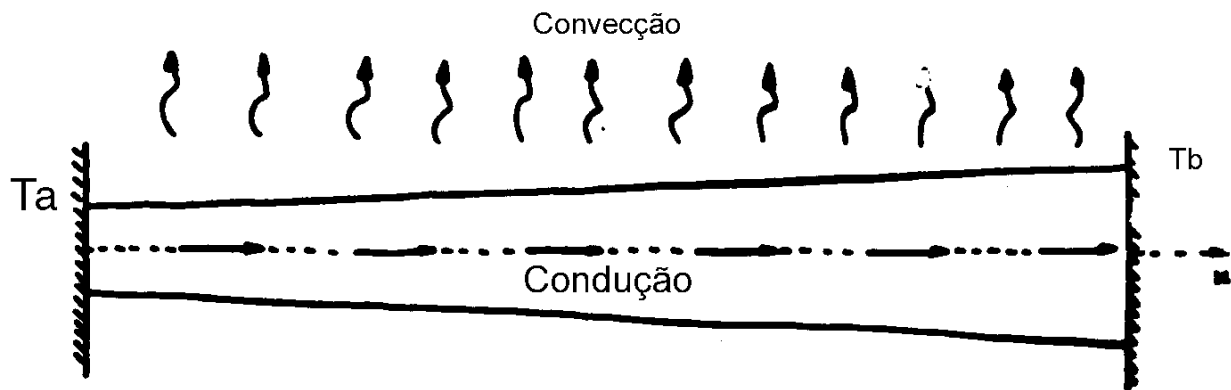


Figura 1

Neste ponto temos a opção de escolher entre dois caminhos para encontrar a solução.

O primeiro deles consiste em utilizar métodos analíticos de solução. Este procedimento produz resultados de excelente precisão, porém é limitado ao pequeno número de casos em que pode ser aplicado.

A Segunda opção refere-se ao emprego de métodos numéricos que são de aplicação bastante ampla e produzem resultados satisfatórios. Dentre estes podem ser citados o método das diferenças finitas, elementos finitos, elementos de contorno e muitos outros. Os resultados precisam ser visualizados graficamente.

Para obtermos a solução por diferenças finitas vamos inicialmente realizar uma partição regular na região em que estamos estudando a condução de calor – Figura 2. Desta forma trabalharemos com um intervalo

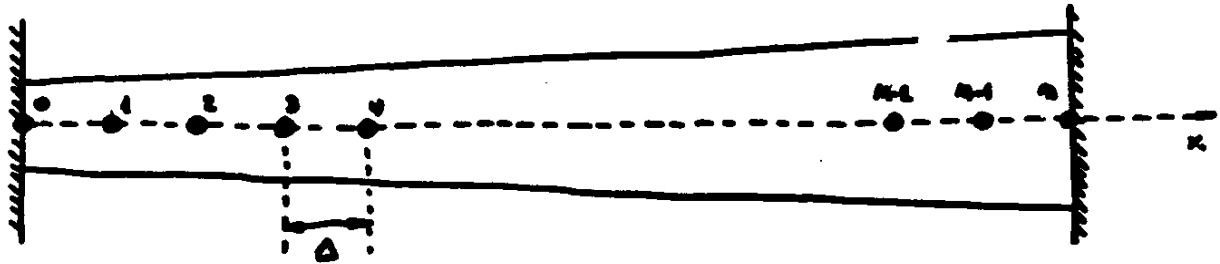


Figura 2

formado por um conjunto discreto de pontos ou nós x_i e não com um intervalo contínuo.

A cada nó x_i podemos associar os valores $T_i = T(x_i)$ da função $T(x)$, que representa a distribuição da temperatura ao longo da barra.

Se os parâmetros do problema variarem ao longo da barra, da mesma forma apoderemos associar os valores nodais $A_i = A(x_i)$, $K_i = K(x_i)$, $P_i = P(x_i)$ e $h_i = h(x_i)$.

O próximo passo consiste em reescrever todas as equações do problema em termos dos parâmetros nodais.

Este procedimento consiste em linhas gerais no que se denomina discretização do problema e pode ser feito de diversas maneiras.

Uma das maneiras de se realizar a discretização, no caso de problemas de 2ª ordem, correspondente ao método das diferenças finitas, consiste em tomar três pontos consecutivos da função incógnita, neste caso da temperatura $T(x)$ - Figura 3.

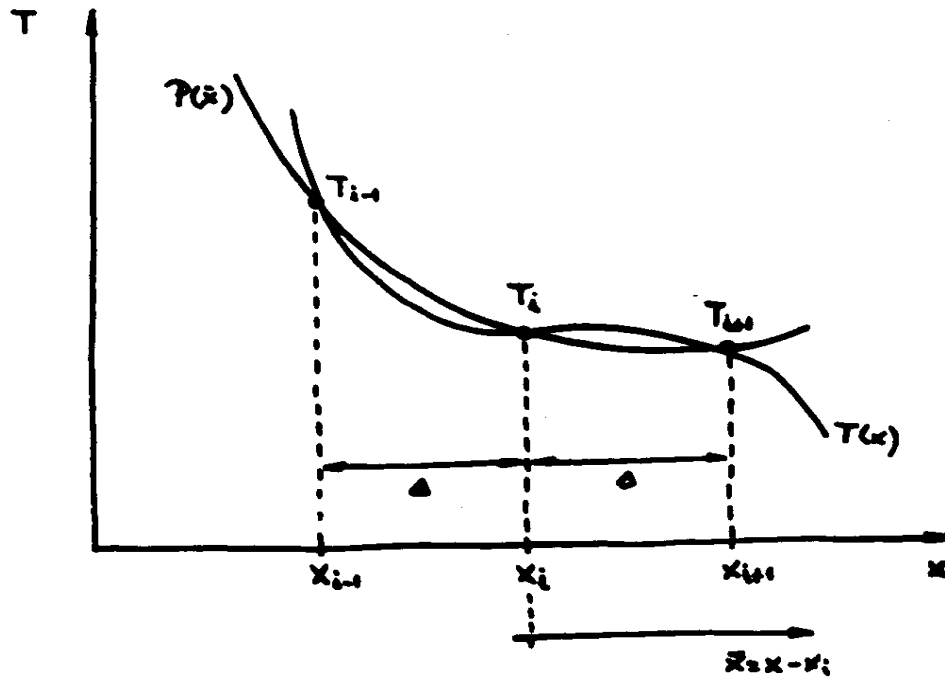


Figura 3

Passemos por eles a parábola

$$P(x - x_i) = a \cdot (x - x_i)^2 + b \cdot (x - x_i) + c$$

Para determinar seus coeficientes devemos impor que $P(x)$ interpole os pontos escolhidos, ou seja

$$P(x_{i-1} - x_i) = a \cdot (x_{i-1} - x_i)^2 + b \cdot (x_{i-1} - x_i) + c = T_{i-1}$$

$$P(x_{i+1} - x_i) = a \cdot (x_{i+1} - x_i)^2 + b \cdot (x_{i+1} - x_i) + c = T_{i+1}$$

$$P(x_i - x_i) = a \cdot (x_i - x_i)^2 + b \cdot (x_i - x_i) + c = T_i$$

Considerando porém a malha regular, simplificação conveniente mas não obrigatória, as equações podem se reescritas

$$P(-\Delta) = a \cdot (-\Delta)^2 + b \cdot (-\Delta) + c = T_{i-1}$$

$$P(+\Delta) = a \cdot (+\Delta)^2 + b \cdot (+\Delta) + c = T_{i+1}$$

$$P(0) = a \cdot (0)^2 + b \cdot (0) + c = T_i$$

A solução deste sistema de equações fornece os seguintes valores para os coeficientes da parábola:

$$a = \frac{T_{i-1} - 2 \cdot T_i + T_{i+1}}{2 \cdot \Delta^2}, \quad b = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2 \cdot \Delta}, \quad c = T_i$$

A essência do método das diferenças finitas consiste em aproximar as derivadas de $T(x)$ pelas derivadas de $P(x)$, o que será tanto melhor quanto menor for o incremento Δ .

Assim sendo:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_i \cong P'(0) \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_i \cong P''(0)$$

Efetuada as derivações necessárias e substituindo os coeficientes determinados anteriormente, resultam expressões que aproximam as derivadas de $T(x)$ em função de valores nodais desta mesma função. Estas expressões podem ser também vistas como operadores uma vez que transformam o problema do cálculo no domínio contínuo para um domínio discretizado. Tais operadores para o presente caso são:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_i \cong \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2 \cdot \Delta} \quad \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_i \cong \frac{T_{i-1} - 2 \cdot T_i + T_{i+1}}{\Delta^2}$$

Voltemos à equação diferencial que agora desejamos satisfazer de forma aproximada somente nos nós

$$A_i K_i \cdot \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_i - P_i h_i \cdot (T(x) - T_\infty) \Big|_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

Substituindo os operadores deduzidos acima, obtemos a equação em diferenças correspondente à equação diferencial do problema

$$A_i K_i \left(\frac{T_{i-1} - 2 \cdot T_i + T_{i+1}}{\Delta^2} \right) - P_i h_i (T_i - T_\infty) = 0 \quad i = 0, 1, \dots$$

Reagrupando convenientemente os termos, para cada valor de i temos a seguinte equação

$$\frac{A_i k_i}{\Delta^2} \cdot T_{i-1} - \left(\frac{2A_i K_i}{\Delta^2} + P_i h_i \right) \cdot T_i + \frac{A_i K_i}{\Delta^2} \cdot T_{i+1} = -P_i h_i T_\infty$$

Como A_i , K_i , P_i , h_i , **D** e T_∞ são parâmetros conhecidos, a expressão acima representa um conjunto de equações.

Portanto

$$i = 0 \quad \mathbf{a}_0 \cdot T_{-1} - \mathbf{b}_0 \cdot T_0 + \mathbf{a}_0 \cdot T_1 = -P_0 h_0 T_\infty$$

$$i = 1 \quad \mathbf{a}_1 \cdot T_0 - \mathbf{b}_1 \cdot T_1 + \mathbf{a}_1 \cdot T_2 = -P_1 h_1 T_\infty$$

$$i = 2 \quad \mathbf{a}_2 \cdot T_1 - \mathbf{b}_2 \cdot T_2 + \mathbf{a}_2 \cdot T_3 = -P_2 h_2 T_\infty$$

\vdots

$$i = n \quad \mathbf{a}_n \cdot T_{n-1} - \mathbf{b}_n \cdot T_n + \mathbf{a}_n \cdot T_{n+1} = -P_n h_n T_\infty$$

Onde os coeficientes **\mathbf{a}_i** e **\mathbf{b}_i** são calculados

$$\mathbf{a}_i = \frac{A_i K_i}{\Delta^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_i = \frac{2A_i K_i}{\Delta^2} + P_i h_i$$

Conforme podemos observar, entre as incógnitas aparecem T_{-1} e T_{n+1} .

Estes termos representam valores de $T(x)$ em pontos situados fora do intervalo considerado.

Temos portanto $n+1$ equações ($i = 0,1,...,n$) e $n+3$ incógnitas ($T_{-1}, T_0, ..., T_{n+1}$).

As equações que faltam para completar o sistema são justamente as condições de contorno que, expressas em função das temperaturas nodais, são $T_0 = T_A$ e $T_n = T_B$.

Assim o sistema de equações completo, escrito matricialmente, tem forma abaixo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{b}_0 & \mathbf{a}_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_1 & -\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_2 & -\mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{a}_n & -\mathbf{b}_n & \mathbf{a}_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{-1} \\ T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_{n-1} \\ T_n \\ T_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Ph_0 T_\infty \\ -Ph_1 T_\infty \\ -Ph_2 T_\infty \\ \vdots \\ -Ph_n T_\infty \\ T_A \\ T_B \end{bmatrix}$$

Este pode ser resolvido numericamente uma vez que tanto a matriz dos coeficientes como o vetor de termos independentes são conhecidos.

Neste ponto é conveniente fazer algumas observações.

A primeira delas refere-se à formulação intrínseca desta primeira abordagem.

O aluno deve lembrar que havíamos tomado três pontos consecutivos e centrados em (x_i, T_i) para interpolar a parábola.

Esse procedimento gera operadores de formulação central.

Caso houvésssemos tomado pontos a esquerda ou a direita de (x_i, T_i) obteríamos operadores de formulações esquerda e direita respectivamente.

A segunda observação refere-se à ordem do polinômio interpolador.

Escolhemos uma parábola porque necessitávamos de derivadas de Segunda ordem no máximo.

Poderíamos Ter tomado cinco pontos centrados em (x_i, T_i) por exemplo, os quais gerariam um polinômio interpolador de grau 4 produzindo melhores aproximações para derivadas de 1^a e 2^a ordem bem como de 3^a e 4^a ordem.

Por fim, obtidos os valores de T_i , após a solução do sistema de equações, podemos calcular as derivadas de $T(x)$ nos nós (fluxos de calor nesse caso) usando novamente os operadores em diferenças já conhecidos.

Por exemplo para calcular o fluxo em $x = l$ fazemos

$$q(l) = -K \frac{dT}{dx} \Big|_l = \frac{-K}{2\Delta} \cdot (T_{n+1} - T_{n-1})$$

2. Exemplo Prático de aplicação

Um soldador elétrico – Figura 4 – possui uma resistência de 25W para aquecer a haste de cobre de tal forma que a temperatura na ponta seja suficiente para fundir o estanho ($T_{\text{fusão}} = 240^{\circ}\text{C}$).

O calor é conduzido de uma extremidade à outra e parte é dissipado convectivamente para o ambiente a $T_{\infty} = 25^{\circ}\text{C}$ e segundo coeficiente de convecção de $h = 150 \text{ W/m}^2/^{\circ}\text{C}$.

A condutividade térmica do cobre pode ser fixada em $K = 380 \text{ W/m}^2/^{\circ}\text{C}$.

A equação diferencial que rege o problema é a mesma considerada no exemplo anterior

$$AK \cdot \frac{d^2T}{dx^2} - Ph \cdot (T(x) - T_{\infty}) = 0 \quad p/ \quad 0 \leq x \leq 2,5 \text{ cm}$$

Porém, as condições de contorno são diferentes:

$$q(0) = 25/(Pr^2) = 127,324 \text{ W/cm}^2$$

$$-K \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = h \cdot (T - T_{\infty})$$

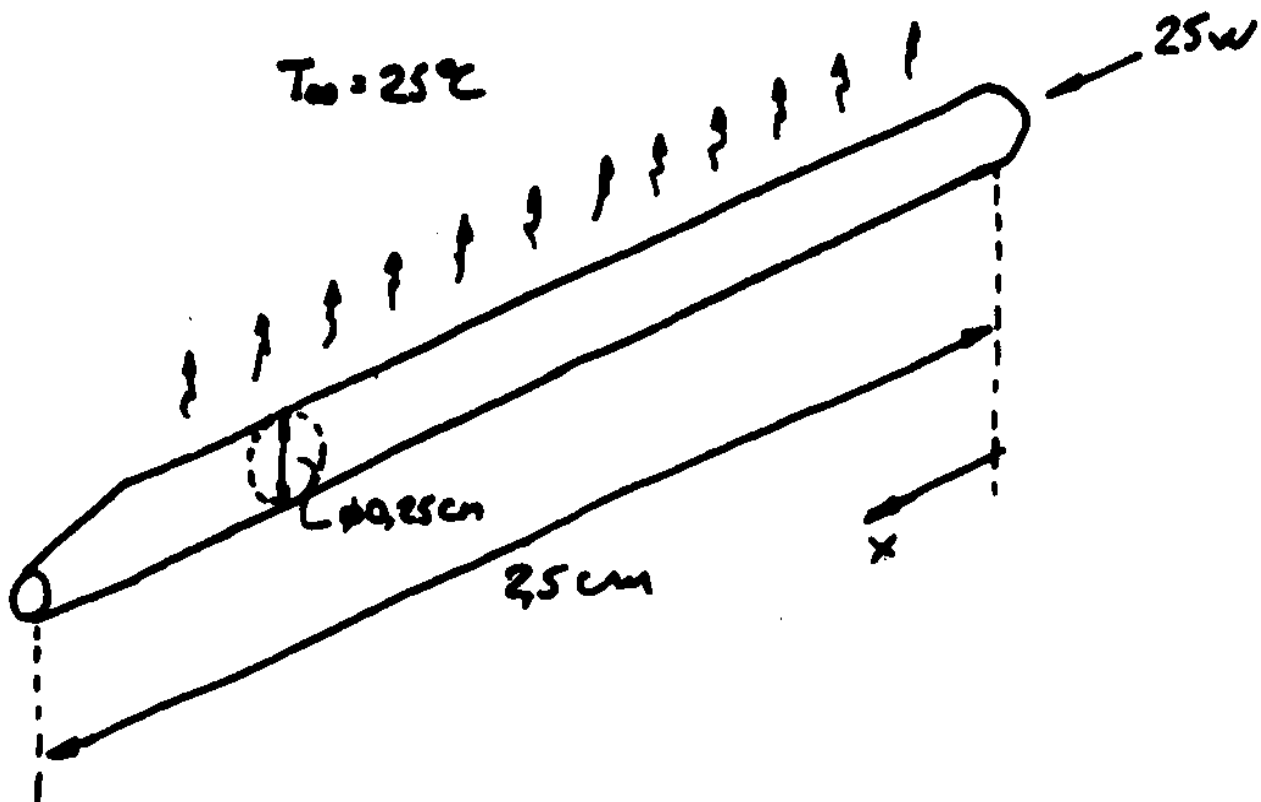


Figura 4

Dividindo a haste em cinco partes ($\Delta = 0,5\text{ cm}$) após aplicarmos os operadores, a equação em diferenças e as condições de contorno resultam

$$2,985 T_{i-1} - 5,993 T_i + 2,985 T_{i+1} = 0,589 \quad i =$$

$$0,1, \dots, 5$$

$$T_{-1} - T_1 = 33,506^{\circ}\text{C}$$

$$3,8 T_6 + 0,015 T_5 - 3,8 T_4 = 0,375$$

Desta forma podemos montar o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 298 & -599 & 298 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 298 & -599 & 298 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 298 & -599 & 298 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 298 & -599 & 298 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 298 & -599 & 298 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 298 & -599 & 298 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -38 & 0,015 & 38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{-1} \\ T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,589 \\ -0,589 \\ -0,589 \\ -0,589 \\ -0,589 \\ -0,589 \\ 33506 \\ 0,375 \end{bmatrix}$$

Cuja solução fornece os seguintes valores nodais:

$$T_{-1} = 493,8 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_3 = 439,9 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_0 = 475,3 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_4 = 434,5 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_1 = 460,3 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_5 = 432,1 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_2 = 448,5 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_6 = 432,8 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Repare que as temperaturas nos nós externos, nós -1 e 6, não têm significado físico e, portanto, devem ser desconsideradas.

Estas temperaturas foram introduzidas devido ao uso de operadores em diferenças de formulação central.

Existem diversas formas de se evitar isto.

Podemos utilizar operadores de formulação esquerda e direita quando estivermos operando a equação diferencial e as condições de contorno respectivamente nas extremidades direita e esquerda da haste.

Outra forma, mais comumente empregada, requer um pouco de manipulação analítica e consiste em deduzir operadores especiais para o contorno, considerando conjuntamente a equação diferencial e a condição específica de contorno.

2.1 Problemas Bidimensionais

A introdução do método das diferenças finitas foi feita através de um problema de condução estacionária de calor em uma barra delgada.

Veremos agora como o método pode ser aplicado à problemas bidimensionais em partículas, uma vez que sua extensão para problemas n-dimensionais é muito simples.

Consideremos então o problema de condução estacionária de calor em uma placa plana – Figura 5. As equações que descrevem este caso são

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$(x,y) \in \hat{\mathbf{I}} [0,1] \times [0,1]$$

$$T(x,0) = T(0,y) = T(1,y) = 0$$

$$T(x,1) = 100 \operatorname{sen}(\mathbf{P}x)$$

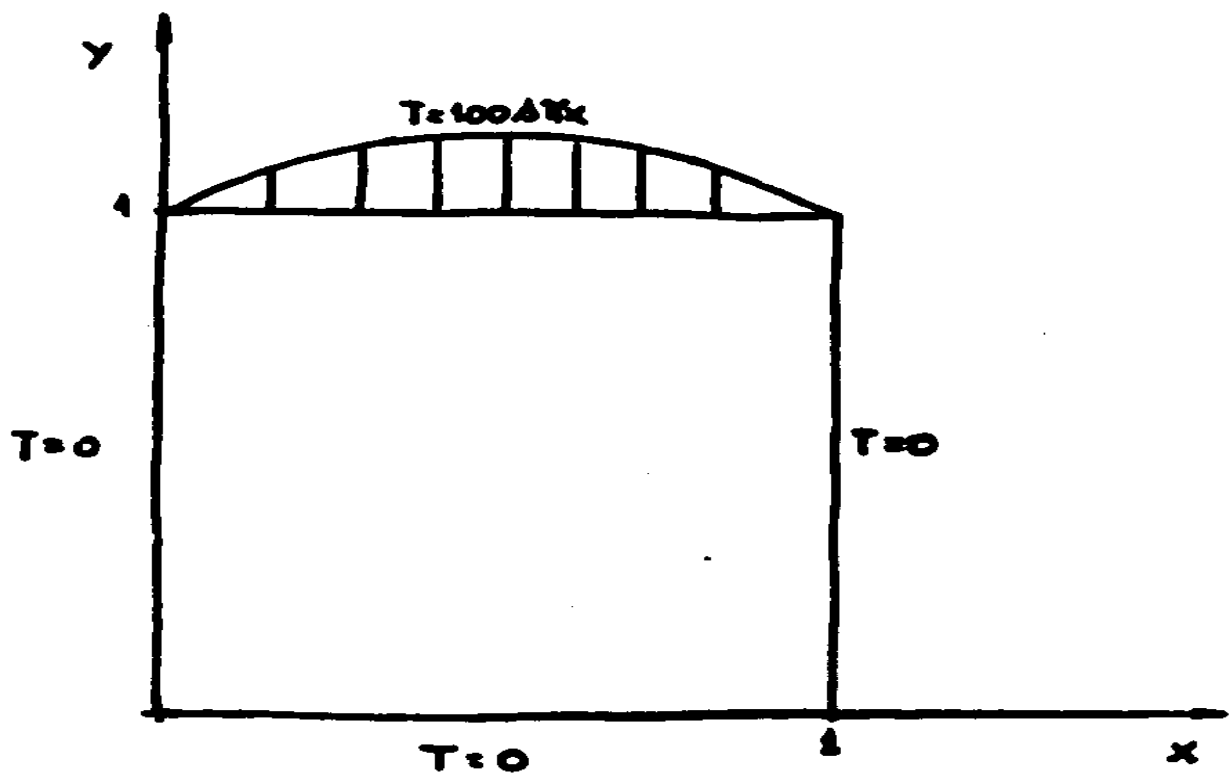


Figura 5

Procuramos agora por uma distribuição bidimensional de temperaturas $T(x,y)$ que torne verdadeiras as relações acima.

Da mesma forma como vimos no caso unidimensional, o primeiro passo é realizar uma partição no domínio.

A solução obtida deverá satisfazer de forma aproximada as equações do problema somente nos nós da malha de discretização.

Seja então a malha indicada na Figura 6.

Os nós são definidos por pares de pontos (x_n, y_m) , para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ e $m = 0, 1, 2, \dots, M$, e a temperatura nestes pontos ou nós é identificada por $T_{n,m} = T(x_n, y_m)$.

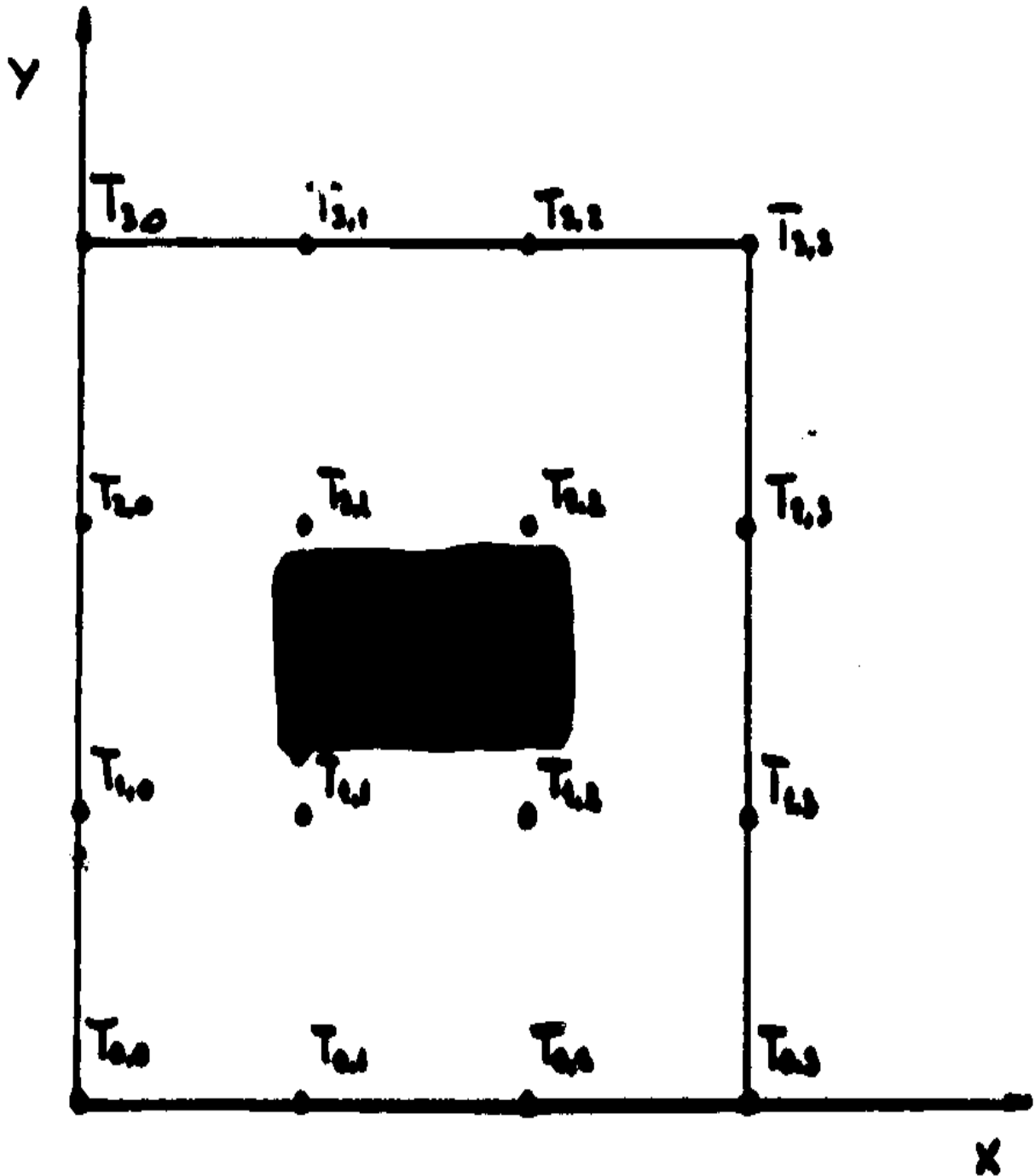


Figura 6

Qualquer variável dependente da posição pode ser indicada da mesma forma. Para expressar as derivadas parciais em função dos parâmetros nodais, procedemos de forma análoga ao exemplo unidimensional.

Tomamos alguns nós centrados em (x_n, y_m) por exemplo, e interpolamos um polinômio bidimensional $P(x, y)$ conveniente de forma que é possível obter

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m,n} \cong \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{m,n} = \frac{T_{n+1,m} - T_{n-1,m}}{2 \cdot \Delta}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{m,n} \cong \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{m,n} = \frac{T_{n,m+1} - T_{n,m-1}}{2 \cdot \Delta}$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{m,n} \cong \left. \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right|_{m,n} = \frac{T_{n+1,m} - 2 \cdot T_{n,m} + T_{n-1,m}}{\Delta^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{m,n} \cong \left. \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right|_{m,n} = \frac{T_{n,m+1} - 2 \cdot T_{n,m} + T_{n,m-1}}{\Delta^2}$$

De posse dos operadores em diferenças, o segundo passo consiste em voltar à equação diferencial do problema e obter a sua versão em diferenças. Assim para este caso

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{n,m} = \frac{1}{\Delta^2} (T_{n+1,m} + T_{n-1,m} + T_{n,m+1} + T_{n,m-1} + 4 \cdot T_{n,m})$$

As condições de contorno são igualmente expressas em diferenças, de acordo com nossa notação:

$$\begin{aligned} T(x_n, 0) = T_{n,0} &= 0 & n &= 0, 1, 2, \dots, N \\ T(0, y_m) = T_{0,m} &= 0 & m &= 0, 1, 2, \dots, M \\ T(1, y_m) = T_{n,m} &= 0 & m &= 0, 1, 2, \dots, M \\ T(x_n, 1) = T_{n,m} &= 100 \operatorname{sen}(\mathbf{P}x) & n &= 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

O terceiro passo se resume em montar e resolver o sistema de equações algébricas.

No exemplo anterior o operador em diferenças foi aplicado em todos os nós da malha, inclusive aquelas em que já conhecíamos a temperatura.

Pelo fato de estarmos utilizando operadores em diferenças de formulação central isso redundou na inclusão de parâmetros nodais fictícios ou externos à malha original e, conseqüentemente, num aumento da ordem do sistema de equações.

Em problemas unidimensionais esse aumento não é significativo mas em problemas bi e tridimensionais podem surgir sérias dificuldades computacionais devido a esse fato.

Por exemplo, no caso em estudo temos uma malha com 16 nós dos quais desconhecemos a temperatura em apenas 4 deles (Figura 6).

Aplicando o operador em diferenças em todos os 16 nós teríamos, pela inclusão dos nós externos, um sistema com 32 incógnitas e 32 equações.

É muito mais simples aplicar o operador em diferenças apenas nos 4 nós em que desconhecemos a temperatura a aplicar as condições de contorno diretamente nas 4 equações resultantes

Assim, aplicando o operador em diferenças nos nós (x_1, y_1) , (x_2, y_1) , (x_1, y_2) e (x_2, y_2) , obtemos as seguintes equações:

$$\frac{1}{\Delta^2} (T_{2,1} + T_{0,1} + T_{1,2} + T_{1,0} - 4 \cdot T_{1,1}) = 0$$

$$\frac{1}{\Delta^2} (T_{2,2} + T_{0,2} + T_{2,3} + T_{2,1} - 4 \cdot T_{1,2}) = 0$$

$$\frac{1}{\Delta^2} (T_{3,1} + T_{1,1} + T_{2,2} + T_{2,0} - 4 \cdot T_{2,1}) = 0$$

$$\frac{1}{\Delta^2} (T_{3,2} + T_{1,2} + T_{2,3} + T_{2,1} - 4 \cdot T_{2,2}) = 0$$

Sua solução nos fornece os valores:

$$T_{1,1} = 10,822 \text{ }^{\circ}\text{C} \quad T_{1,2} = 10,822 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_{2,1} = 32,476 \text{ }^{\circ}\text{C} \quad T_{2,2} = 32,476 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Os valores teóricos para as temperaturas nodais:

$$T_{1,1} = 9,368 \text{ }^{\circ}\text{C} \quad T_{1,2} = 9,368 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_{2,1} = 29,986 \text{ }^{\circ}\text{C} \quad T_{2,2} = 29,986 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Comparando estes com os valores obtidos pelo método das diferenças finitas podemos perceber uma concordância razoável tendo em vista a discretização em poucos nós. Considerando uma malha com 49 nós, o que corresponde a dividir cada lado da placa em 6 partes – Figura 7 – obtemos as seguintes aproximações para os mesmos pontos considerados anteriormente.

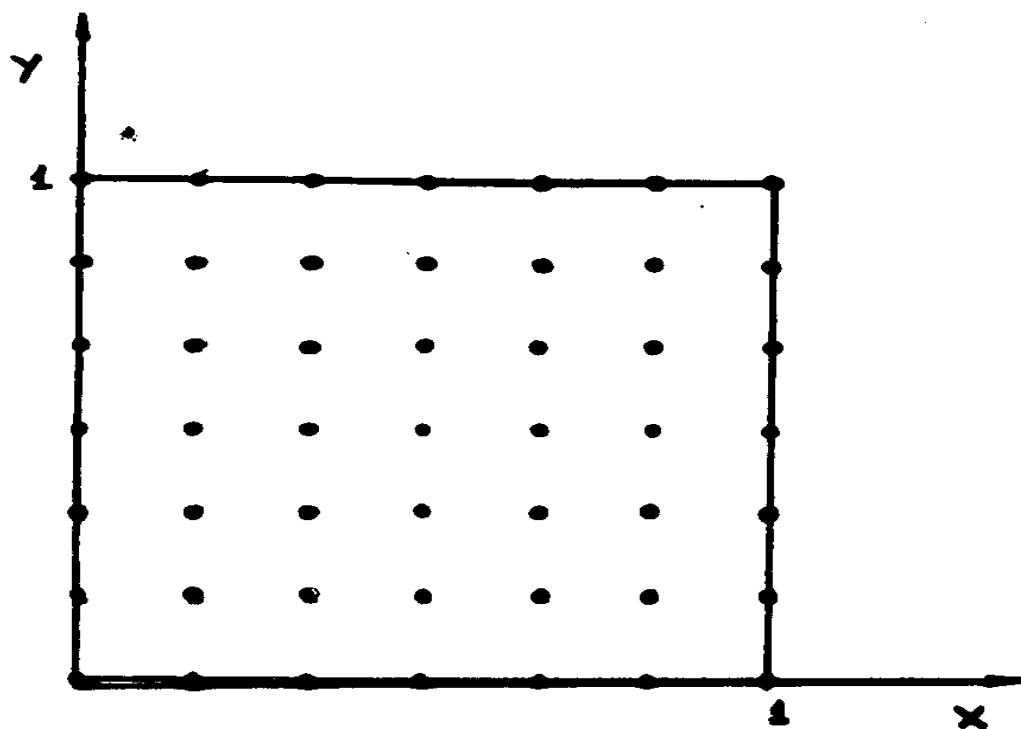


FIGURA 7

Valores Obtidos:

$$T_{2,2} = 9,750 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_{2,1} = 9,750 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_{4,1} = 30,650 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_{4,4} = 30,650 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Valores obtidos Antes com menos pontos:

$$T_{1,1} = 10,822 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_{1,2} = 10,822 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_{2,1} = 32,476 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_{2,2} = 32,476 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Valores Teóricos

$$T_{1,1} = 9,368 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_{1,2} = 9,368 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_{2,1} = 29,986 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_{2,2} = 29,986 \text{ }^{\circ}\text{C}$$