x	-1.0	-0.75	-0.6	-0.5	-0.3	0	0.2	0.4	0.5	0.7	1
$x^2 x^2$	1	0.3164	0.1296	0.0625	0.0081	0	0.0016	0.0256	0.0625	0.2401	1
$f(x)\, x^2$	2.05	0.6486	0.162	0.1	0.045	0	0.008	0.096	0.128	0.588	2.05

SOMA : $x^2 x^2 \; = \; 2.8464$; $f(x)\, x^2 \; = \; 5.8756$

Assim, nossa equação é $2.8464\, \alpha \; = \; 5.8756 \; \Rightarrow \; \alpha \; = \; \dfrac{5.8756}{2.8464} \approx 2.0642$

Então $\varphi\,(x) = 2.0642\;\; x^2$ é a parábola que melhor se aproxima, no sentido de Quadrados Mínimos, da função tabelada.

Observações :

- A exatidão dos dados de entrada é importante na medida que é impossível obter valores e curvas mais exatos do que os dados de origem.
- A medida que aumenta a ordem de um método de mínimos quadrados o número de equações de um sistema normal também aumenta, trazendo com isso problemas de aumento de tempo computacional, perda de exatidão e maior necessidade de memória.
- O sistema normal é simétrico.

<u>*Questão:*</u> Se usarmos polinômios, como devemos escolher o grau k do polinômio a ser escolhido? (*Conheço o grau máximo, mas não o grau que melhor ajusta a curva).*

Seja k o grau do menor polinômio, então para $\alpha = k,\; k{+}1,\; \ldots\;, m\text{-}1$, o desvio padrão será:

$$\sigma_k^2 = \delta_k^2 \;/\; m\text{-}k\text{-}1$$

$$\delta_k^2 = \sum_{j=1}^{m} (y_i - \sum_{j=0}^{k} c_j^{(k)} . x_i^j)$$

Se k é desconhecido, é preciso resolver o sistema normal para k = 1,2,...,m-1, assim como calcular σ_k^2 , enquanto σ_k^2 decresce quando k aumenta. Quando k atinge um valor que não implica um decréscimo de σ_k^2 , alcançamos nosso objetivo.

Computacionalmente, implica que novos valores de k tem que ser resolvidos com a utilização contínua do monômio x^{i-1}. ($\Rightarrow$) polinômios ortogonais.

Ao notarmos então, que o desvio padrão não se manteve constante, tentamos aumentar o grau de aproximação, aumentando-se por exemplo o grau do polinômio aproximante. As equações normais precisam ser resolvidas novamente.

Essa desvantagem poderia ser compensado se as equações normais originassem um sistema que somente na diagonal principal tivesse elementos não nulos e daí teríamos uma só incógnita por equação. Isto é,

$f(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i . \phi_i(x)$ tal que $\sum_{j=1}^{m} \phi_i(x_j) . \phi_k(x_j) = 0$, $i \neq k$.

$\therefore$ $f(x)$ é aproximada por um polinômio de grau k e os coeficientes c_i, $i = 1, \ldots, k$ podem ser calculados por

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} \phi_i(x_j) . y_i}{\sum_{j=1}^{m} \phi_j^2(x_j)}$$

Teorema : Os polinômios ortogonais $\phi_i(x)$ satisfazem a relação de recursividade:
$\phi_{l+1}(x) = (2x + \alpha_2) . \phi_l(x) . \beta_{l-1} . \phi_{l-1}(x)$; $\phi_0(x) = 0.5$; $\phi_{-1}(x) = 0$; $\beta_{-1} = 1$

$$\alpha_l = \frac{-2\sum_{j=1}^{m} x_1 . \phi_l^2(x_j)}{\sum_{j=1}^{m} \phi_l^2(x_j)} \qquad \beta_{l-1} = \frac{-\sum_{j=1}^{m} \phi_l(x_j)}{\sum_{j=1}^{m} \phi_{l-1}^2(x_j)}$$

demonstração: (por indução).

Exemplo: Dado a tabela

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3.8	5.2	3.9	1.1	-4.1

determinar um polinômio de segundo grau que se ajuste a esses pontos.

$f(x) = c_0 . \phi_0(x) + c_1 . \phi_1(x) + c_2 . \phi_2(x)$

$\phi_0(x) = - 0.5$

$$\alpha_0 = \frac{-2\sum_{j=1}^{m} x_1 . \phi_0^2(x_j)}{\sum_{j=1}^{m} \phi_0^2(x_j)} = -4$$

$\phi_1(x) = (2x + \alpha_0) . \phi_0(x) = x - 2$

$$\alpha_1 = \frac{-2\sum_{j=1}^{m} x_1 . \phi_1^2(x_j)}{\sum_{j=1}^{m} \phi_1^2(x_j)} \;=\; -4 \qquad\qquad \beta_1 = \frac{-\sum_{j=1}^{m} {\phi_1}^2(x_j)}{\sum_{j=1}^{m} \phi_0^2(x_j)} \;=\; -\,x$$

$$\phi_2(x) = (2x + \alpha_1).\phi_1(x).\beta_0.\phi_0(x) = 2x^2 - 8x + 4$$

$$\therefore c_0 = 3.96 \;\;;\;\; c_1 = -2.81 \;\;;\;\; c_2 = -0.594$$

$$f(x) = 3.86 \;+\; 2.21\,x - 1.05\,x^2$$