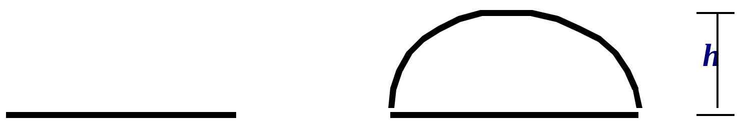
Capítulo 3 : Equações e Sistemas Não-Lineares.

3.1. Introdução.

Consideremos os seguintes problemas:

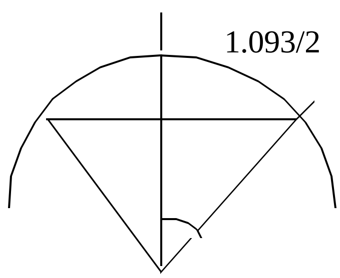
a) Uma barra metálica de l m de comprimento serve de apoio vertical lateral a um forno. Sua extremidades são fixas. O calor do forno faz com que esta haste se aqueça e passe de 1 m à 1.093 m. Suponha que a barra assuma a forma de um arco de circunferência. Quer se conhecer a deflexão da barra *h*.



ANTES **(Forno Frio)** **DEPOIS** **(Forno Quente)**

Fig. 3.1.1.

Introduzindo variáveis auxiliares R raio da circunferência, q metade do ângulo central.



As equações que relacionam *h*, R, θ são:

$$h = R - R \cos \theta \qquad (3.1\text{-}1)$$

$$0.5 = r \operatorname{sen} \theta \qquad (3.1\text{-}2)$$

$$\theta = \frac{1.093/2}{R} \qquad (3.1\text{-}3)$$

Para encontrar *h*, devemos achar R, θ; se encontrarmos θ, facilmente acharemos R. De (3.1-2) ⇒ R e substituídos em (3.1-3) obtemos a equação não linear:

$$\theta - 1.093 \operatorname{sen} \theta = 0 \qquad (3.1\text{-}4)$$

Deve-se agora, achar o valor de θ no qual

$$f(\theta) = \theta - 1.093 \operatorname{sen} \theta \qquad (3.1\text{-}5)$$

se anule, ou seja, calcular uma raiz de f(θ) = 0.

b) Uma loja de eletrodomésticos oferece dois planos de financiamentos para um produto cujo o preço é à vista Cr$ 16.200,00.

Plano A : entrada de Cr$ 2.200,00 + 9 prestações mensais de Cr$ 2.652,52.

Plano B : entrada de Cr$ 2.200,00 + 12 prestações mensais de Cr$ 2.152,27.
Qual dos dois planos é melhor para o consumidor ?

Para escolher o melhor plano deve-se saber qual tem a menor taxa de juros.

A equação abaixo relaciona os juros (*j*) e prazo (*P*) com o valor financiado (VF = preço à vista - entrada) e a prestação mensal (PM):

$$\frac{1-(1+j)^{-P}}{j} = \frac{VF}{PM} \qquad (3.1\text{-}6)$$

Fazendo $x = 1 + j$, $k = VF/PM$ tem-se:

$$\frac{1-x^{-P}}{x-1} = k$$

multiplicando ambos os membros por x^p :

$$\frac{x^p - 1}{x-1} = kx^p$$

e fazendo

$$f(x) = kx^{p+1} - (k+1)x^p + 1 = 0 \qquad (3.1\text{-}7)$$

chega-se a uma equação algébrica de grau P+1.

Deve-se, agora, achar o valor de x no qual *f(x)* se anule, ou seja, calcular uma raiz de *f*(*x*) = 0.

3.2. Isolamento das raízes de f(x) = 0.

Deve-se inicialmente efetuar uma análise teórica da função $f(x)$ usando-se o teorema :

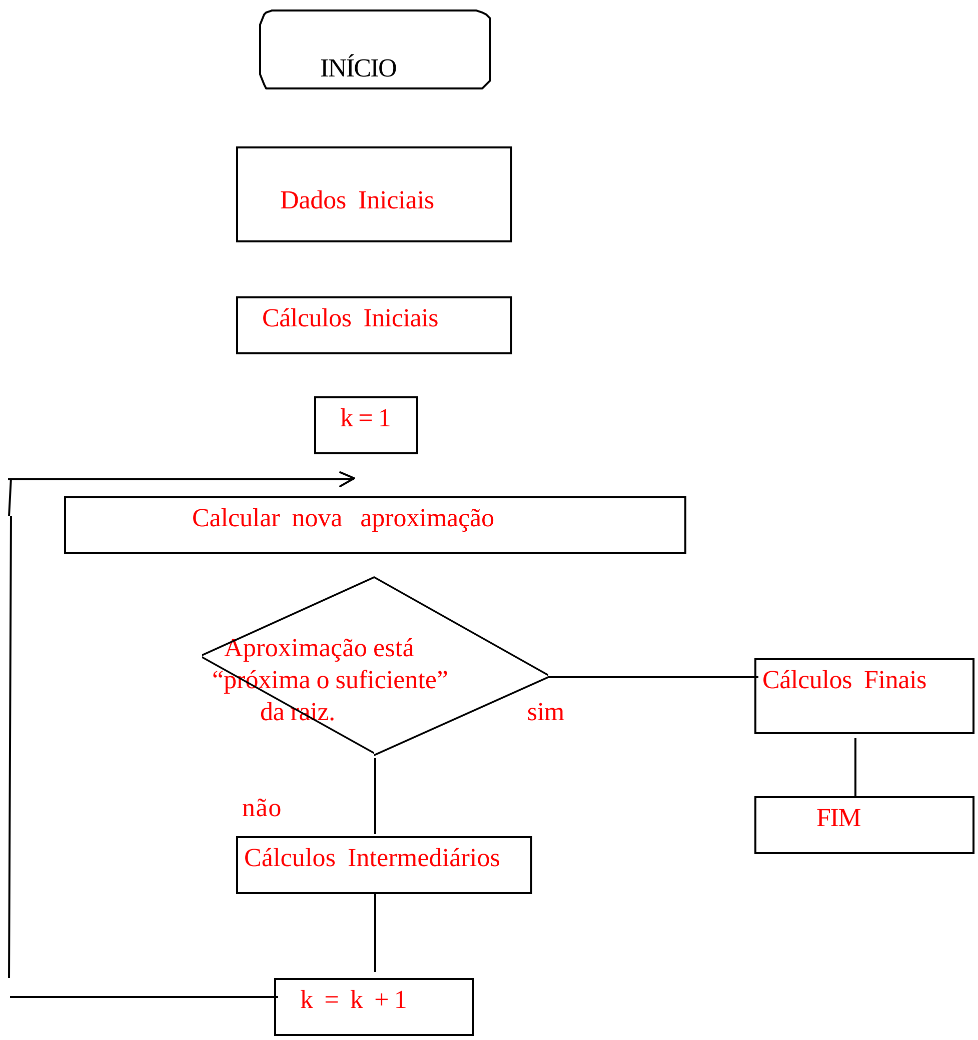
Teorema 3.2.1.:

Seja $f(x) \in C^{\circ}$ em [a,b]. Se $f(a) \, . \, f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $x = \xi$ entre a e b que é zero de $f(x)$.

Note que se $f'(x)$ existir e preservar o sinal em (a,b), então este intervalo contém um único zero de $f(x)$ (ele deve ser o menor possível).

3.3. Refinamento das raízes de f(x).

A forma como se efetua o refinamento é o que diferencia os métodos. Os métodos iterativos para o refinamento da aproximação inicial para a raiz exata podem ser colocados num fluxograma.



3.4. Critérios de Parada para f(x) = 0.

Na verdade implica $\{x_n\}$ de aproximações cujo limite é a raiz exata x. Como sabemos se x_k está suficientemente próximo da raiz exata . Prefixando a tolerância $\in$, utilizamos um dos critérios abaixo:

$$i) \quad |f(x_k)| < \in$$

$$ii) \quad |x_k - x_{k-1}| < \in$$

$$iii) \quad \left|\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k}\right| < \in$$

Para cada aproximação da raiz x_k compara-se o resultado com $\in$ pré-fixado. Nem sempre é possível ter ambas as exigências *i.* e *ii.* satisfeitas simultaneamente, conforme mostram os gráficos:

.

Deve-se desenvolver os métodos numéricos de forma a satisfazer um dos critérios.

3.5. Métodos de Solução f(x)=0.

3.6.

3.5.1. Método de Newton Raphson:

Seja a função y = *f*(x) mostrada na fig. 3.5-1. A raiz *x* ocorre quando o gráfico corta o eixo x. Seja x_0 uma estimativa para *x*. Para melhorarmos esta estimativa (Þ) Seja a reta *r* tangente ao gráfico no ponto: (x_0, *f*(x_0)).

Se x_0 for próximo de *x*, temos:

x_0 » *x* (Þ) x_1 = *x*

Para determinar se a fórmula para x_1, consideramos a tangente *r* que é a reta entre dois pontos: (x_0, *f*(x_0)) e (x_1, 0).

$$\text{tg } \boldsymbol{x} = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \qquad \textbf{(3.5-1.1)}$$

desde que x_1 foi uma "melhora" de x_0 como uma estimativa de $\boldsymbol{x}$, o processo pode ser repetido com x_1 como condição inicial e obtemos

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad (3.5\text{-}1.2)$$

Repetindo este processo, obtemos uma sequência de números $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ que espera-se convergir para x; logo, teremos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (3.5\text{-}1.3)$$

n = 0,1,2,... . Exemplificamos o processo acima para o caso em que:

$$f(x) = x^6 - x - 1 \,, \qquad f'(x) = 6x^5 - 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \left\{ \frac{x_n^6 - x_n - 1}{6x_n^5 - 1} \right\} \qquad n \geq 0 \qquad (3.5\text{-}1.5)$$

Usaremos x_0 = 1.5 e obtemos:

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$
0	**1.5**	**8.89 E + 1**	
1	**1.30049088**	**2.54 E + 1**	**- 2.00 E - 1**
2	**1.18148042**	**5.38 E - 1**	**- 1.19 E - 1**
3	**1.13945559**	**4.92 E - 2**	**- 4.20 E - 2**
4	**1.13477763**	**5.50 E - 4**	**- 4.68 E - 3**
5	**1.13472415**	**6.80 E - 8**	**- 5.35 E - 5**
6	**1.13472414**	**- 4.00 E - 9**	**- 1.00 E - 8**

A raiz real é $\boldsymbol{x}$ = 1.134724138.

Note que o método de Newton converge lentamente no início, mas quando a iteração vem a ficar próxima da raiz, a velocidade de convergência aumenta, de acordo com a tabela.

Algoritmo:

Seja a equação F(x) = 0

1) *Dados iniciais* x_0 *: aproximação inicial*
   e : precisão

2) *Se* $|\, F(x_0) \,| < \varepsilon$ *então faça* $\bar{x} = x_0$ *. FIM.*

3) *K = 1*

4) $x_k = x_{k-1} - \dfrac{F(x_0)}{F'(x_0)}$

5) *Se* $|\, F(x_k) \,| < e$ *ou Se* $|\, x_k - x_{k-1} \,| < e$
   então faça $\bar{x} = x_k$ *. FIM.*

6) $x_{k-1} = x_k$

7) *k = k + 1. Volte para o passo 4.*

3.5.2. Análise do erro.

Assumindo que $f(x)$ tem pelo menos duas derivadas contínuas para $\forall\, x$ em algum intervalo em torno da raiz x, o teorema de Taylor :

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_n) + (\boldsymbol{x} - x_n).\, f'(x_n) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - x_n)^2 .\, f''(c_n) \qquad (3.5\text{-}2.1)$$

$c_n \in (\boldsymbol{x}, x_n)$.

Note que $f(x) = 0$, por hipótese, se dividirmos por $f'(x_n)$ $(\Rightarrow)$

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (\boldsymbol{x} - x_n) + (\boldsymbol{x} - x_n)^2 .\frac{f''(c_n)}{2 f'(x_n)}$$

Usando a fórmula Newton-Raphson $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\Rightarrow)$

$$\boxed{(\boldsymbol{x} - x_{n+1}) = \left[\frac{-f''(c_n)}{2 f'(x_n)}\right](\boldsymbol{x} - x_n)^2}$$

$\therefore$ O erro em x_{n+1} é proporcional ao quadrado do erro em x_n .

Quando o erro inicial é pequeno (Þ) que o erro nas iterações sucessivas decrescerá muito rapidamente. Note que assumir do que a iteração x_n está próxima da raiz $\boldsymbol{x}$, o termo $\left[\dfrac{-f''(c_n)}{2 f'(x_n)}\right]$ na equação acima pode ser escrito como:

$$\left[\frac{-f''(c_n)}{2 f'(x_n)}\right] \doteq \frac{-f''(\boldsymbol{x})}{2 f'(\boldsymbol{x})} \equiv M \qquad (3.5\text{-}2.2)$$

$$\therefore (\boldsymbol{x} - x_{n+1}) \doteq M(\boldsymbol{x} - x_n)^2 \qquad (3.5\text{-}2.3)$$

Multiplicando ambos os membros de (3.5-2.3) por M ($\Rightarrow$)

$$M\,(\boldsymbol{x} - x_{n+1}) \;\doteq\; [\,M\;(\boldsymbol{x} - x_n)\,]^2$$

Assumindo, que todas as iterações são próximas de $\boldsymbol{x}$, por indução finita mostra-se que:

$$M\,(\boldsymbol{x} - x_{n+1}) \;\doteq\; [\,M\;(\boldsymbol{x} - x_n)\,]^{2^n} \quad n \geq 0 \qquad (3.5\text{-}2.4)$$

Desde que necessitamos que $(\boldsymbol{x} - x_n)$ convirja para zero, devemos ter

$$M\,(a - x_0) < 1\,.$$

Portanto,

$$(x - x_0) < \frac{1}{M} = \left|\frac{2f'(\boldsymbol{x})}{f''(\boldsymbol{x})}\right| \qquad (3.5\text{-}2.5)$$

Se M for muito grande então x_0 deverá ser escolhido muito próximo à x para obtermos convergência.

A escolha de x_0 pode ser muito importante na determinação se ou não o método de Newton Raphson converge.

OBS 3.5.2.1: Estimação do erro .

Para estimarmos $(\boldsymbol{x} - x_n)$ notamos que, desde que $f(x)=0$,

temos:

$$f(x_n) = f(x_n) - f(x) = f'(\boldsymbol{x}_n)\,(x_n - \boldsymbol{x}) \quad ,$$

$\boldsymbol{x}_n \in (x_n, x)$.

$$\therefore \quad (\boldsymbol{x} - x_n) = \frac{-f(x_n)}{f'(\boldsymbol{x}_n)}$$

$$(\boldsymbol{x} - x_n) \doteq \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Supondo x_n próximo à $\boldsymbol{x}_n$ tal que $f'(x_n) \doteq f'(\boldsymbol{x}_n)$, obtemos:

$$\therefore\ (\boldsymbol{x} - x_n) \doteq x_{n+1} - x_n \qquad (3.5\text{-}2.6)$$

3.6. Problemas mal condicionados (Ill-Behaved).

Começaremos com o caso de funções que tenham uma raiz de multiplicidade m, isto é,

$$f(x) = (x - \boldsymbol{x})^m \ g(x) \qquad (3.6\text{-}1)$$

para alguma função contínua $g(x)$ com $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$ (assumindo que $f(x)$ é diferenciável), e

$$f(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{x}) = \ldots = f^{(m-1)}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(m)}(\boldsymbol{x}) \neq 0 \qquad (3.6\text{-}2)$$

se m = 1 a raiz é dita simples.

Quando o método de Newton é aplicado ao cálculo de uma raiz múltipla $\boldsymbol{x}$, a convergência de $(\boldsymbol{x} - x_n)$ é muito lenta comparativamente a uma raiz simples.

Além do mais existe um intervalo grande de incerteza onde a raiz realmente está, devido a presença do ruído (*noise*) no cálculo de $f(x)$.

O único meio de obter valores precisos para raízes múltiplas é removendo analiticamente a multiplicidade, obtendo uma nova função para a qual $\boldsymbol{x}$ é uma raiz simples. Para remover a multiplicidade, primeiro usamos o método de Newton Raphson para determinarmos a multiplicidade m de $\boldsymbol{x}$ usando os resultados:

$$\lambda = \frac{m-1}{m} \qquad m \geq 1 \qquad (3.6\text{-}1.1)$$

$$(\boldsymbol{x} - x_n) \doteq \lambda\ (\boldsymbol{x} - x_{n-1}) \qquad (3.6\text{-}1.2)$$

(erro decresce em torno de uma razão constante), junto com a aproximação:

$$\lambda \doteq \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} \qquad (3.6\text{-}1.3)$$

Determinando λ $(\Rightarrow)$ m de (3.6-1.1). Então analiticamente calculamos

$$F(x) = f^{(m-1)}(x) \qquad (3.6\text{-}1.4)$$

isto é , $F(x)$ tem uma raiz simples de (3.6-1). Logo o método de Newton Raphson convergirá rapidamente para um valor muito preciso.

3.7. Estabilidade de Raízes.

Definindo

$$f(x) = x^7 - 28x^6 + 322x^5 - 1960x^4 + 6769x^3 - 13132x^2 + 13068x - 5040 \qquad (3.7\text{-}1)$$

e mudando o coeficiente de x^6 de - 28 para - 28.002 $(\Rightarrow)$ $\hat{f}(x)$.

Para tratarmos do cálculo aproximadamente de uma função $f(x)$ introduzimos a função perturbada

$$F_\in(x) = f(x) + \in g(x) \qquad (3.7\text{-}2)$$

onde g(x) é assumida ser continuamente diferenciável e $|\in| << 1$.

Denotaremos $\alpha(\in)$ raiz $F_\in(x)$ e $\alpha(0)$ raiz $f(x)$

$$\therefore \quad \alpha(\in) \doteq \alpha(0) + \in \alpha'(0) \qquad (3.7\text{-}3)$$

Uma vez que $\alpha(\in)$ raiz $F_\in(x)$ $(\Rightarrow)$ $f(\alpha(\in)) + \in g(\alpha(\in)) = 0$, derivando ambos os termos relativamente em $\in$ $(\Rightarrow)$

$$f'(\alpha(\in)).\alpha'(\in) + g(\alpha(\in)) + \in g'(\alpha(\in)).\alpha'(\in) = 0$$

e tomando $\in = 0$ $(\Rightarrow)$ $f'(\alpha(0)).\alpha'(0) + g(\alpha(0)) = 0$ $(\Rightarrow)$

$$(\Rightarrow) \quad \alpha'(0) = -\frac{g(\alpha(0))}{f'(\alpha(0))} \qquad (3.7\text{-}4)$$

$$\boxed{\alpha(\in) \doteq \alpha(0) - \in \frac{g(\alpha(0))}{f'(\alpha(0))}} \quad (3.7\text{-}5)$$

Se $\alpha'(0)$ for muito grande em tamanho, então as pequenas mudanças $\in$ alterará muito os efeitos na raiz.

3.8. Sistemas Não Lineares.

Seja o problema, determinar $\tilde{x} \in \mathrm{R}^n$ de modo que $\tilde{f}(\tilde{x}) = 0$, $\tilde{f} \in \mathrm{R}^n$, isto é,

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n) & = & 0 \end{cases} \quad (3.8\text{-}1)$$

de modo análogo ao anterior, temos:

$$\boxed{\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k - [\mathrm{J}(x_k)]^{-1}.\tilde{f}(\tilde{x}_k)} \quad (3.8\text{-}2)$$

Exemplo: Achar (x,y) de tal forma que: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$ (3.8-3)

$$f_1 = x^2 + y^2 - 2, \qquad f_2 = x^2 - y^2 - 1$$

$$\mathrm{J}(x) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{J}^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4y} & -\frac{1}{4y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4x_k} & \frac{1}{4x_k} \\ \frac{1}{4y_k} & \frac{-1}{4y_k} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_k^2 + y_k^2 - 2 \\ x_k^2 - y_k^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k}{2} + \dfrac{3}{4x_k}.y_k \\ y_{k+1} = y_k - \dfrac{y_k}{2} + \dfrac{1}{4x_k} \end{cases}$$

Se $x_0 = y_0 = 1$ $(\Rightarrow)$

n	x	y
1	1.25	0.75
2	1.225	0.7083
3	1.2247	0.7071

obs: *Sistema a ser resolvido:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$