Vimos que dado o SELA:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Pode-se resolver este Sistema pelo Método de Gauss- Jordan

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots\ldots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots\ldots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \ldots\ldots - a_{n1n-1}x_{n-1}^{(k)}\right)$$

Dado CI para podermos resolve-lo, ie, dando $x^{(0)}$ uma aproximação inicial, calcularemos as aproximações

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots.., x^{(n)}$$

cujo critério de convergência do método de Gauss- Jordan :

Seja o sistema linear Ax=b e

seja $a_k = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \right) / |a_{kk}|$ Se $a = max\, a_k < 1$

então o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial, $x^{(0)}$.

Exemplo:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 1x_1 + 5x_2 + 1x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10 - x_3 = -6 \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{2+1}{10} = 0.3 \langle 1$$

$$a_2 = \frac{1+1}{5} = 0.4 \langle 1$$

$$a_3 = \frac{2+3}{10} = 0.2 \langle 1$$

No caso do exemplo:

Seja
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 0x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

Note que o critério das linhas não é satisfeito pois

$$a_1 = \frac{3+1}{1} = 4 \rangle 1$$

contudo o permutando a primeira equação com a segunda, teremos o sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 0x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema original e a matriz deste novo sistema satisfaz o critério das linhas. E a convergencia é assegurada.

Método Iterativo de Gauss Seidel:

Da mesma forma que no método de Gauss Jacobi, no método de Gauss Seidel o sistema linear Ax=b é escrito na forma equivalente

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots\ldots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots\ldots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \ldots\ldots - a_{n1n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right)$$

Ou seja neste método, no momento de se calcular $x^{(k+1)}{}_j$,

Usamos todos os valores $x^{(k+1)}{}_1$, ..., $x^{(k+1)}{}_{j-1}$ que já foram calculados e os valores $x^{(k)}{}_{j+1}$, ..., $x^{(k)}{}_n$ restantes

O critério de Convergência, de SASSENFELD, pode ser apresentado como:

Se Ax=b seja

$$b_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \ldots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$ e

$$b_j = \frac{|a_{j1}|b_j + |a_{j2}|b_2 + \ldots + |a_{jj-1}|b_{j-1} + |a_{jj+1}| + \ldots + |a_{1n}|}{|a_{jj}|}$$

Seja $b = \frac{\max}{1 \le j \le n}(b_j)$ então

se $b \langle 1$ o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial, $x^{(0)}$.

Além do mais quanto menor for b mais rápida vai sr as convergencia.

Exeercicio: b= $\begin{matrix} 0.2 \\ -3.6 \\ 1.0 \\ -2.5 \end{matrix}$ A= $\begin{matrix} 1 & 0.5 & -0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 1 \end{matrix}$ $b \langle 1$

No caso de A= $\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}$ b= $\begin{matrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}$ $b = 2 > 1$

Trocando a primeira equação pela terceira temos

$b' = \frac{2}{3} \langle 1$ entao vale o critério de Sanseenfeld e temos convergencia

Fatoração LU

Seja o sistema linear A.x = b, o processo de fatoração para resolução deste sistema consiste em decompor a matriz A dos coeficientes em um produto de 2 ou mais fatores, e em seguida, resolver uma seqüência de sistemas lineares que nos conduzirá a solução do sistema linear original.

Por exemplo, se pudermos fazer a fatoração

A = C.D ® A.x = C.D.x = b ® C.(D.x) = b.

Se y = D.x então

resolver o sistema linear A.x = b

é resolver o sistema linear

C.y = b e, em seguida,

o sistema linear D.x = y,

o que resultará na solução do sistema linear original.

A fatoração LU é um dos processos de fatoração mais utilizados.

L: triangular inferior com diagonal unitária

U: triangular superior

Nas proxima aulas, discutiremos os oblemas relativo Cálculo dos Fatores LU