IGCE – Instituto de Geociências e Ciências Exatas
DEMAC – Departamento de Estatística, Matemática e Computação

Computação Gráfica

Daniel Pedronette
pedronette@gmail.com

Agenda

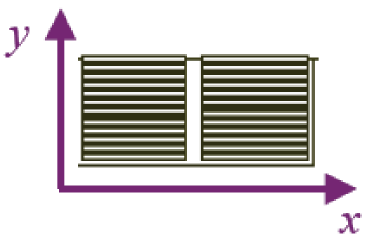
- Transformações Geométricas
  - Translação
  - Escala
  - Rotação
- Coordenadas Homogêneas
- Composição de Transformações
- Outras Transformações
  - Cisalhamento
  - Espelhamento
- Aplicação Prática
- Exercício

Motivação

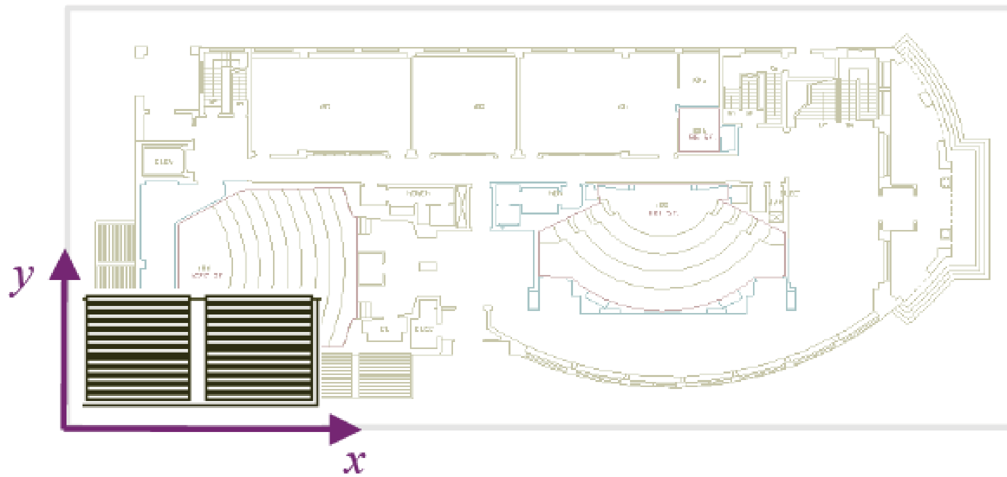
- Como operações de **posicionamento** de objetos
- Como operações de **modelagem** de objetos
- Como operações de **visualização** de objetos

Motivação

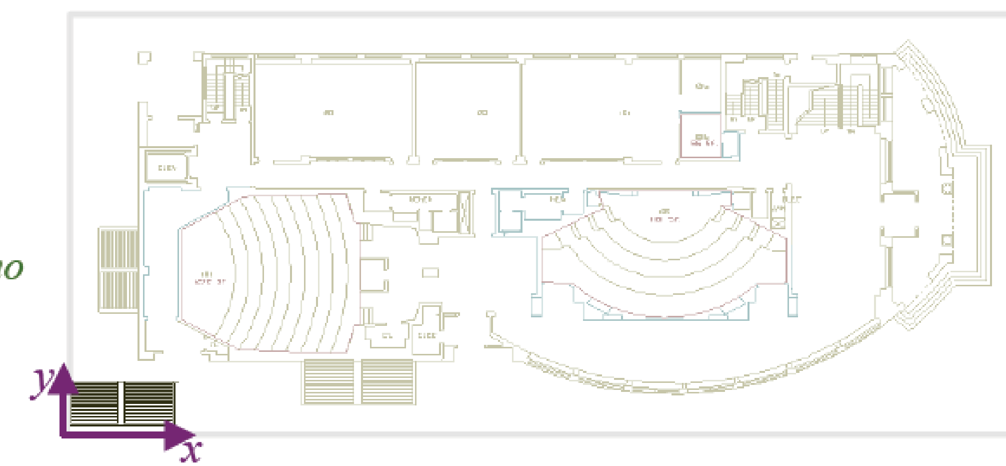
Coordenadas Locais



Posicionamento

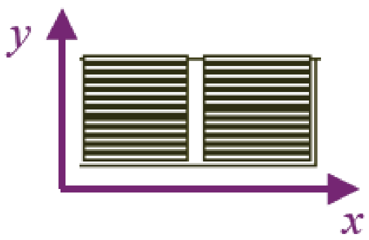


Variação de Tamanho

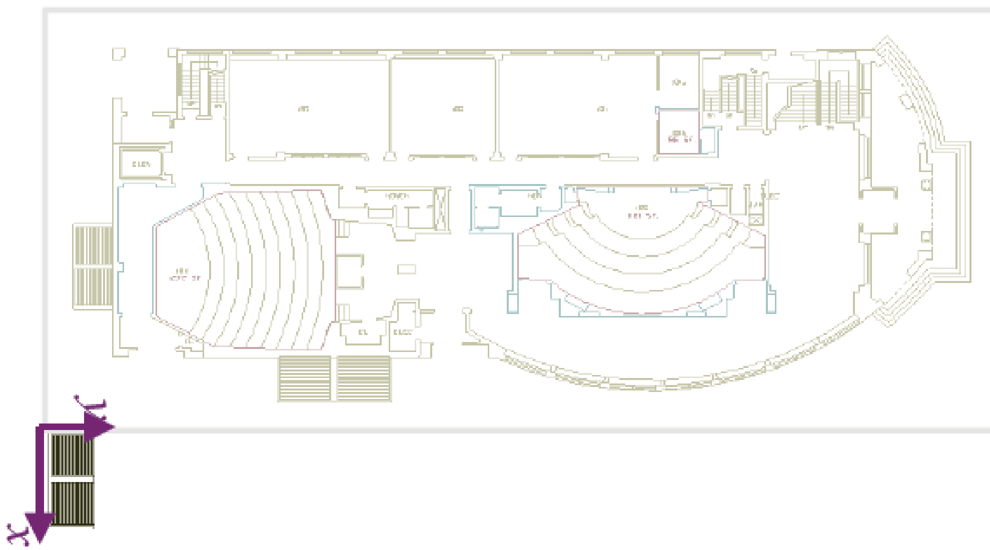


Motivação

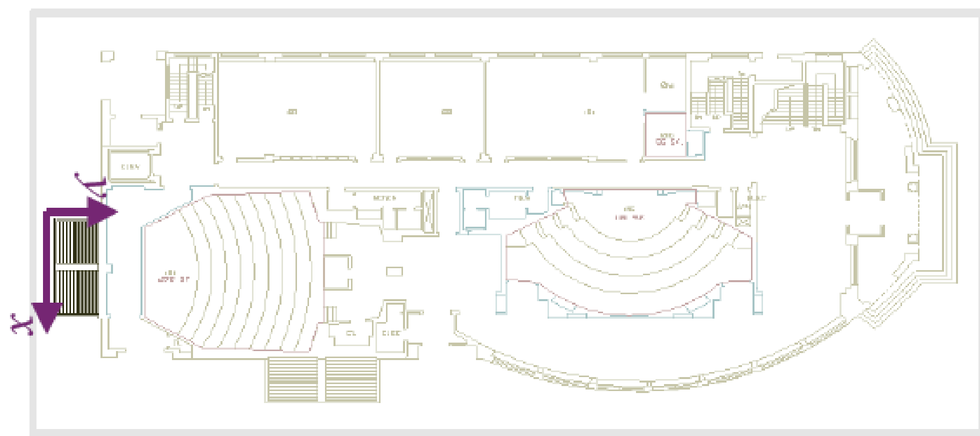
Coordenadas Locais



Rotação



Translação



Definições

- Transformações Lineares + Translações
- Transformações Lineares:
  - $T(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = T(x) + T(y)$
  - $T(\lambda x) = \lambda\, T(x)$
- A origem é único ponto fixo
  - Logo, a translação não é uma transformação linear.

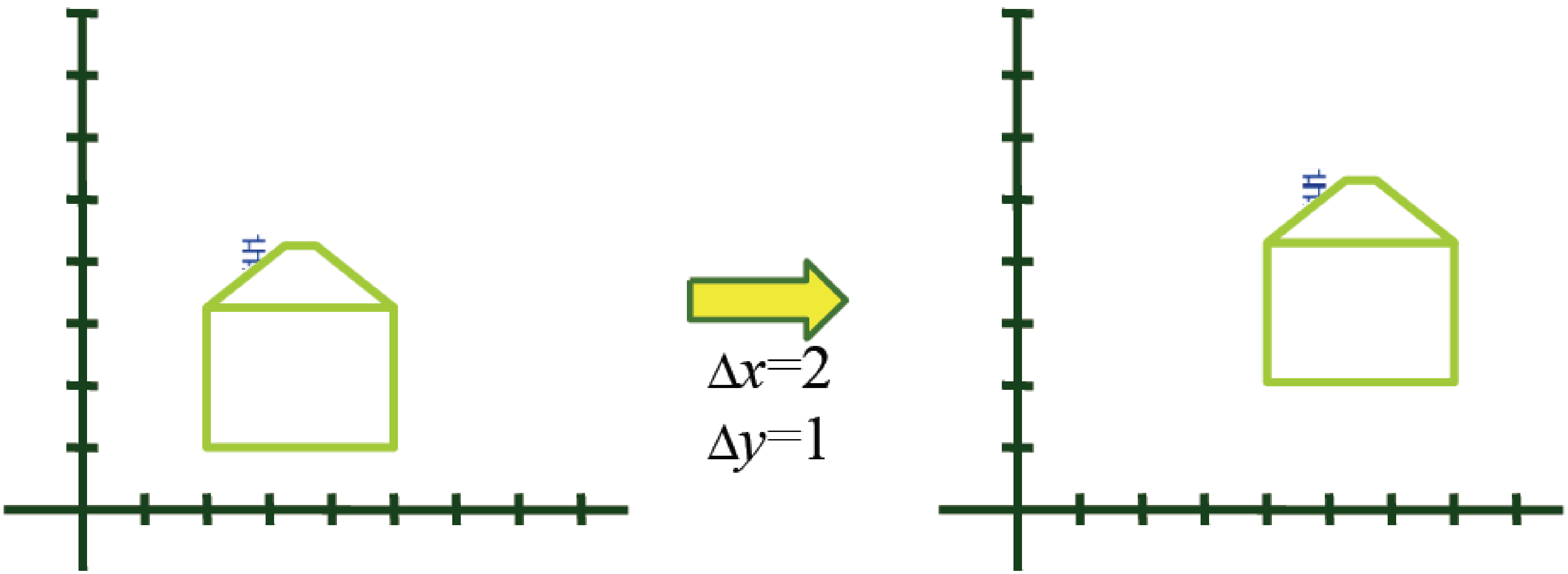
Definições

- Transformações Lineares:
  - Representadas por matrizes 2 x 2:

$$T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$$

Translação

- Efeito Visual:



Translação

- *Transladar* um ponto (x, y) significa deslocá-lo de uma quantidade de movimento linear (Δx,Δy).
  - $x' = x + \Delta x$
  - $y' = y + \Delta y$

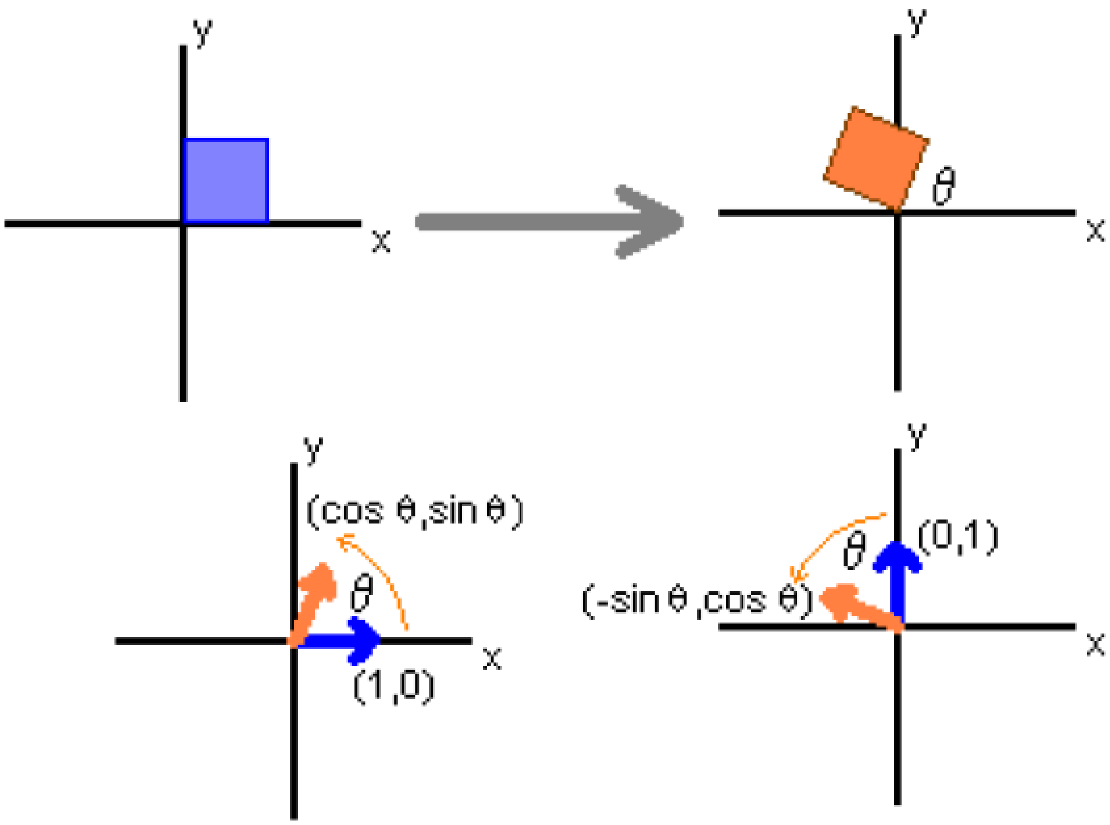
Translação

- Em forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

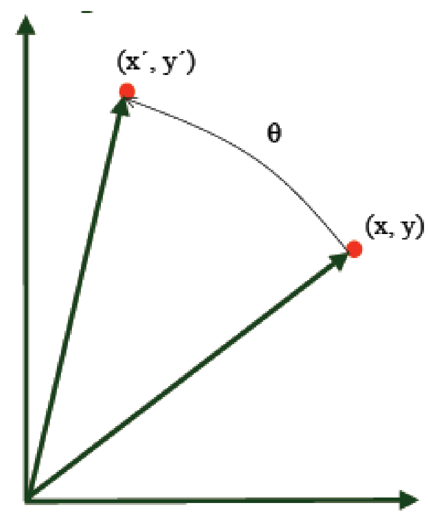
Rotação

- Efeito visual:

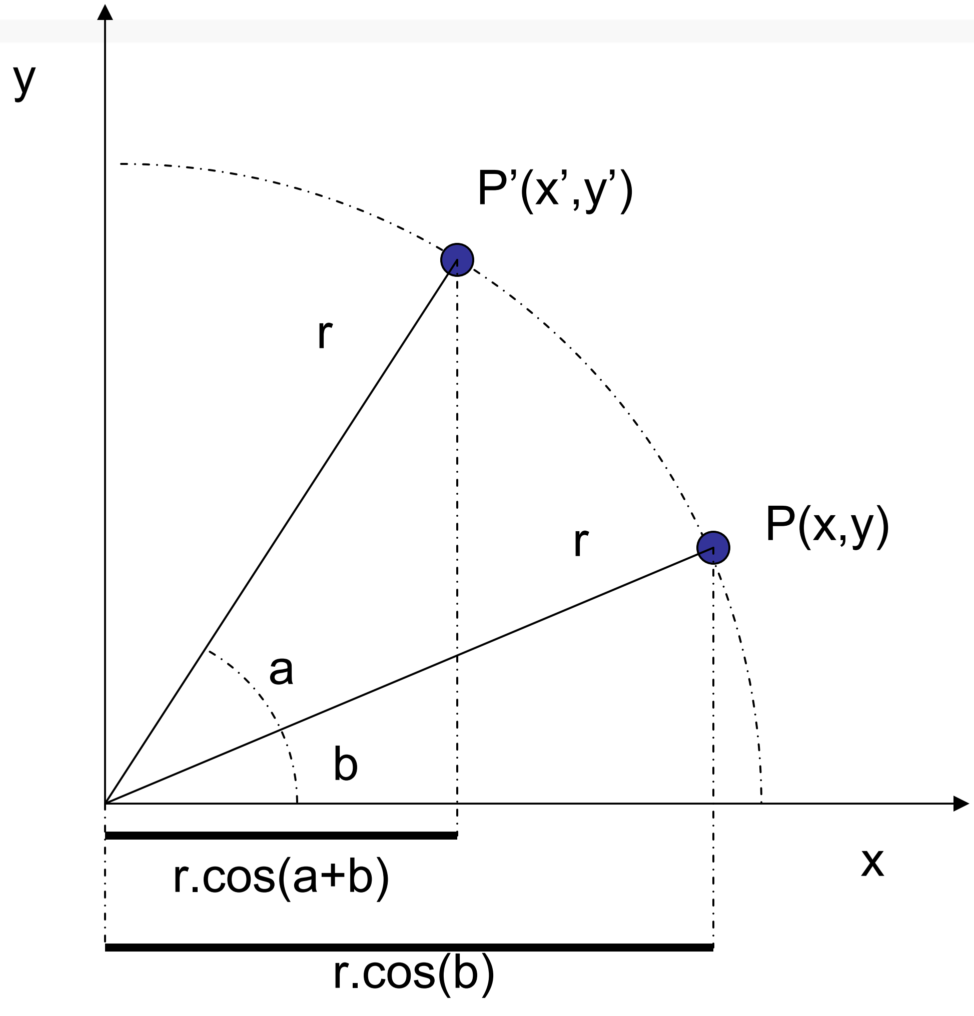


Rotação

- *Rotacionar* um ponto P=(x,y) de um ângulo θ relativamente à origem significa encontrar outro ponto P'=(x',y') sobre uma circunferência centrada na origem que passa pelos dois pontos.



Rotação



Rotação

- Observamos que:

$x = r.\cos(b)$ $y = r.\text{sen}(b)$

$x' = r.\cos(a+b)$ $y' = r.\text{sen}(a+b)$

- Aplicamos as igualdades de cossenos e senos da soma.

Rotação

COSSENO DA SOMA DE DOIS ARCOS

$$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, b$$

COSSENO DA DIFERENÇA DE DOIS ARCOS

$$\cos(a-b) = \cos a \,.\, \cos b + \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, b$$

SENO DA SOMA DE DOIS ARCOS

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \,.\, \cos b + \text{sen}\, b \,.\, \cos a$$

SENO DE DIFERENÇA DE DOIS ARCOS

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}\, a \,.\, \cos b - \text{sen}\, b \,.\, \cos a$$

Rotação

- Temos que:

  x'= r.cos(b) * r.cos(a) – r.sen(b) * sen(a)

  y'= r.cos(b) * r.sen(a) + r.sen(b) * cos(a)

- Desconhecemos o valor de b, logo devemos tentar eliminá-lo das equações.
- Sabemos o valor de cos(b) e sem(b) em termos de x,y e r.
- Realizamos a substituição.

Rotação

- Por fim, temos que:

  - $x' = x \cdot \cos(a) - y \cdot \sin(a)$
  - $y' = x \cdot \sin(a) + y \cdot \cos(a)$

Rotação

- Em forma matricial, temos:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

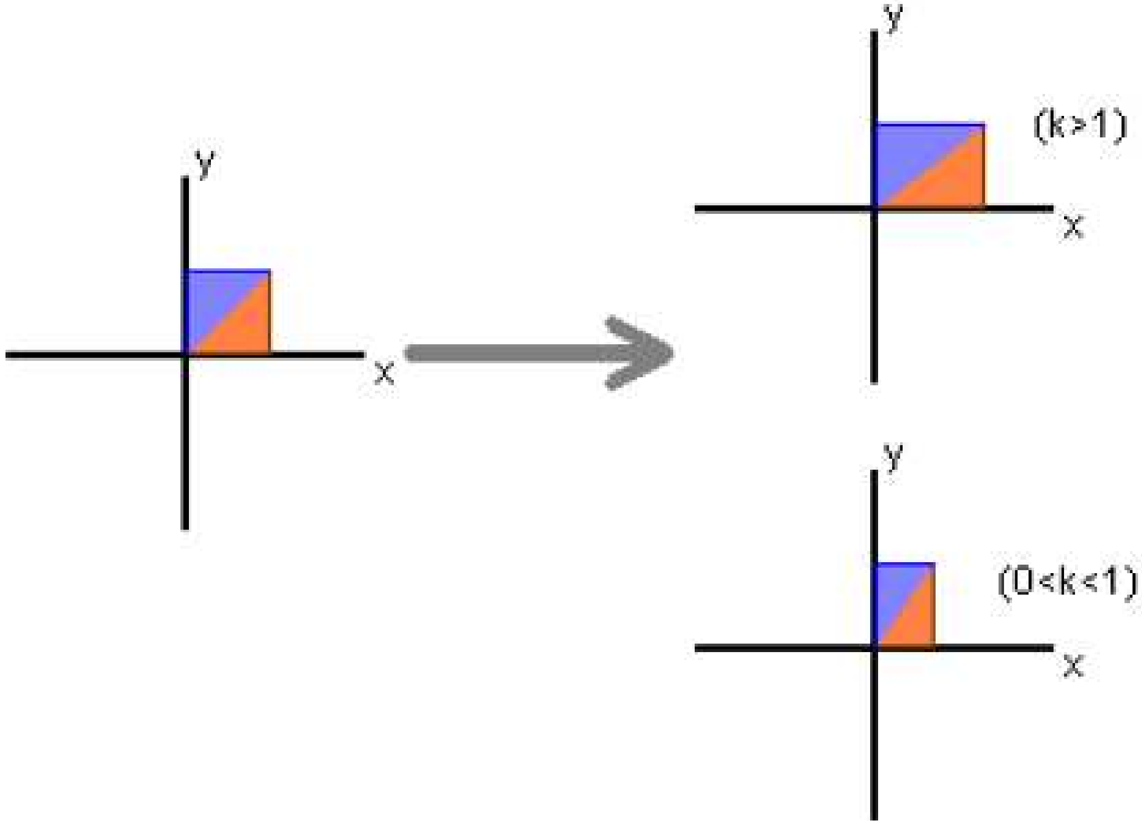
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotação

- Observações:
  - Embora sin(θ) e cos(θ) sejam funções não-lineares de θ,
    - x’ é uma combinação linear de x e y
    - y’ é uma combinação linear de x e y
  - Rotação é efetuada em torno da origem.

Escala

- Efeito visual:



Escala

- Efetuar operações de *escala* em um objeto significa aumentá-lo ou diminuí-lo linearmente.
  - $x' = x * Sx$
  - $y' = y * Sy$

Escala

- Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

- Dado que a translação não é uma transformação linear, e assim não definida como uma matriz 2x2 como as demais, isso dificulta a execução de transformações sucessivas da mesma forma.
- Solução proposta: operar com coordenadas homogêneas 3x3.

Coordenadas Homogêneas

- Translação:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Escala:

$$S = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

- Rotação:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de Transformações

- Objetivo: aplicar transformações sucessivas em um determinado objeto.]
- Multiplicação de matrizes de transformação.

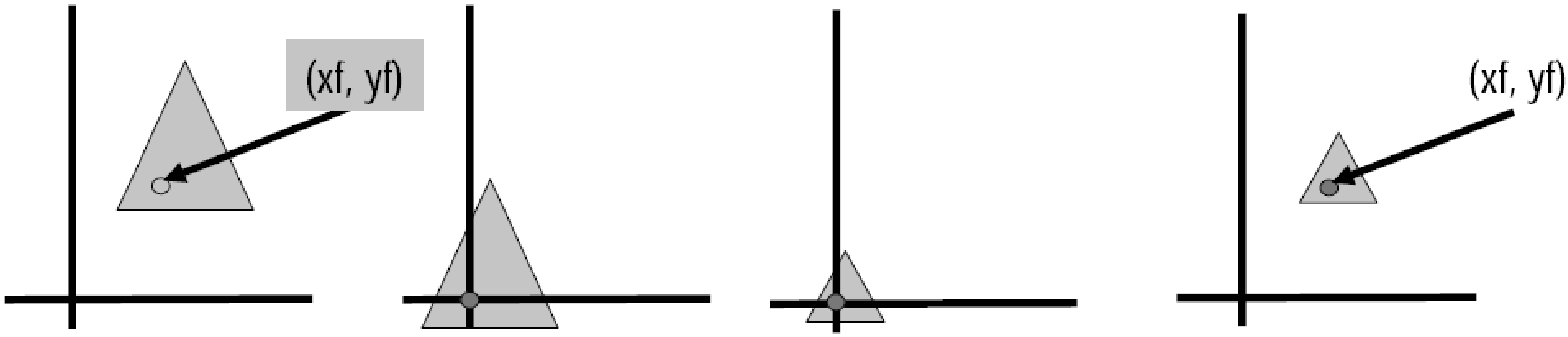
$$T_1 * T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_1 + dx_2 \\ 0 & 1 & dy_1 + dy_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de Transformações

- Quando for necessário aplicar uma transformação em relação a um ponto P arbitrário:
  - Translada-se P para a origem;
  - Aplica-se as transformações desejadas
  - Aplica-se a translação inversa de origem para P.

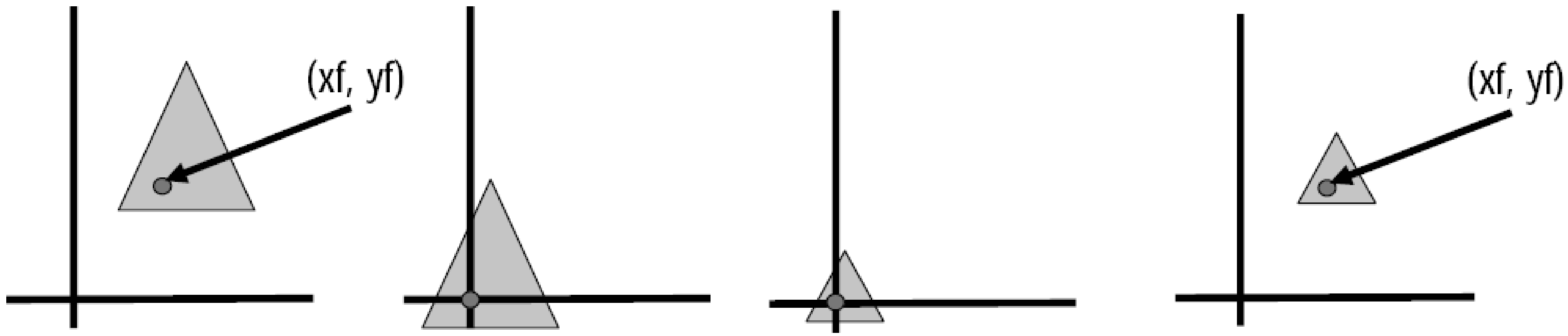
  - Exemplo: translação ou rotação pelo centro do objeto.

Composição de Transformações



- Translação do triângulo dx = -xf, dy = -yf)
- Escala
- Translação dx = xf, dy = yf

Composição de Transformações

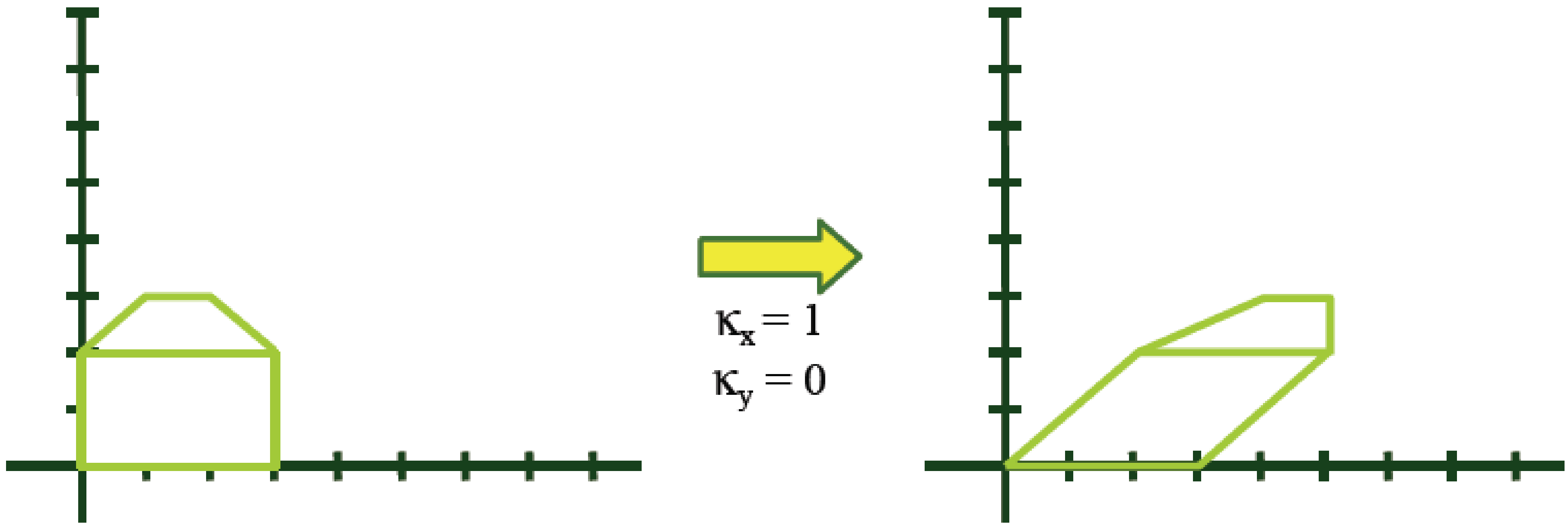


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & xf \\ 0 & 1 & yf \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & -xf \\ 0 & 1 & -yf \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

Cisalhamento

$$\begin{cases} x' = x + \kappa_x y \\ y' = y + \kappa_y x \end{cases}$$

Cisalhar um objecto é deformá-lo linearmente ao longo do eixo x ou do eixo y ou de ambos.



Cisalhamento

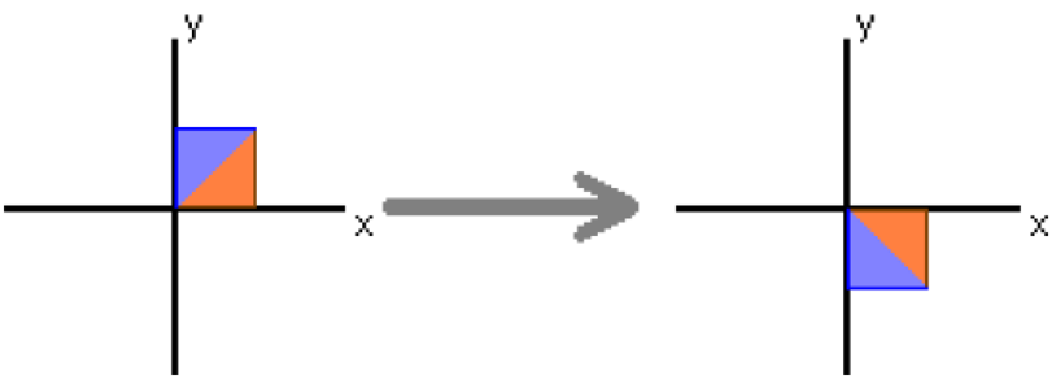
- Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \kappa_x & 0 \\ \kappa_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Espelhamento

- Operações de escala com fator 1 e -1.
  - Reflexão em relação ao Eixo X:

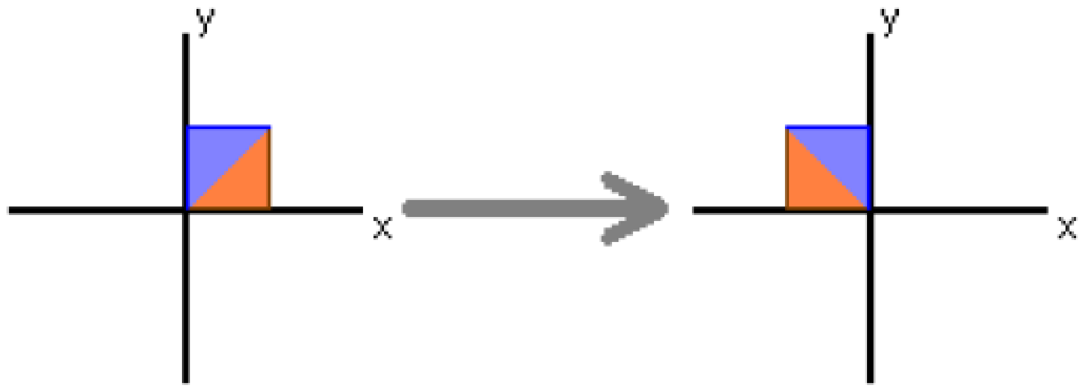
$$Rfl_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Espelhamento

- Reflexão em relação ao Eixo Y:

$$Rfl_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Aplicação

```
typedef
        struct {
          float x;
          float y;
              } Point;

typedef
        float Matrix3x3[3][3];
```

Aplicação

```
/***********************************/
//Inicializa Matriz Identidade
void matrix3x3SetIdentity(Matrix3x3 m)
{
 int i,j;
 for(i=0;i<3;i++){
  for(j=0;j<3;j++){
    m[i][j] = (i == j);
  }
 }
}
```

Aplicação

```
/*************************************/
//Multiplica Matrix 3x3
void matrix3x3Multiply(Matrix3x3 a, Matrix3x3 b)
{
 int r,c;
 Matrix3x3 tmp;
 for(r=0;r<3;r++){
  for(c=0;c<3;c++){
   tmp[r][c] = a[r][0]*b[0][c] + a[r][1]*b[1][c] + a[r][2]*b[2][c];
  }
 }
 for(r=0;r<3;r++) {
  for(c=0;c<3;c++){
    b[r][c] = tmp[r][c];
  }
 }
}
```

Aplicação

```
/**********************************/
//Translação
void translate(int tx, int ty)
{
 Matrix3x3 m;
 matrix3x3SetIdentity(m);
 m[0][2] = tx;
 m[1][2] = ty;
 matrix3x3Multiply(m,theMatrix);
}
```

Aplicação

```
Point points[3] = {200, 100, 400, 100, 300, 300};

    void display () {
      glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);
      glColor3f (0.0, 0.0, 0.0);
      glBegin(GL_POINTS);
      polyLine (NPOINTS, points);
      glEnd();
      glutSwapBuffers();
    }

    void updateValues () {
      matrix3x3SetIdentity(theMatrix);
      translate (-points[2].x,-points[2].x);
      rotate (incAng);
      translate (points[2].x,points[2].x);
      transformPoints (NPOINTS, points);
    }
```

Exercício

- Criar uma animação de um triângulo com rotação constante, tendo um de seus vértices como ponto de referência.

Referências

- HEARN, D. e BAKER, PAULINE - Computer Graphics with OpenGL, Prentice-Hall, 2004.
- FRANCIS S. HILL JR. - Computer Graphics, Macmillan Publishing Company, 1990.