LEZIONE 17

La tecnologia e la minimizzazione dei costi

Parte seconda

CAPITOLO 9
La tecnologia e la minimizzazione dei costi

Parte seconda

- Dalla tecnologia alle funzioni di costo: il problema della minimizzazione dei costi
- Allocare la produzione tra processi di produzione con costi indipendenti
- La massimizzazione vincolata

Riassunto della puntata precedente

- Gli isoquanti rappresentano il luogo delle combinazioni di input che mantengono l'output costante e rappresentano la TECNOLOGIA DI PRODUZIONE, cioè come combinare gli input per produrre un determinato livello di output.
- La quantità di output aumenta al muoversi verso nord-est nello spazio delle quantità.

- Un modo alternativo ed equivalente di rappresentare la tecnologia è la FUNZIONE DI PRODUZIONE.
- Il Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica misura l'inclinazione di un isoquanto.
- Gli isoquanti per sostituti perfetti sono linee parallele.
- Gli isoquanti per complementi perfetti hanno la forma ad L.
- Le tecnologie convesse sono molto più comuni nella realtà.
- Esempi di tecnologie convesse sono le Cobb-Douglas

ARGOMENTI OGGETTO DI STUDIO IN QUESTA LEZIONE

- In questa lezione dato un modello di tecnologia e i prezzi degli input di produzione, troviamo il metodo più economico con cui l'impresa può realizzare un dato livello di output, ottenendo la **funzione di costo totale**.

Massimizzazione dei profitti e minimizzazione dei costi (1)

- L'obiettivo principale di qualsiasi impresa è la
- **massimizzazione dei profitti**, effettuata usando come variabili di scelta:
- 1. **i fattori della produzione (input)**
- 2. **il livello di produzione (output)**.
- Noi suddividiamo questa operazione in **due stadi**
- 1. la **scelta degli input ottimali per qualsiasi possibile livello di output**,
- 2. la **scelta dell'output ottimale** (data la scelta ottimale effettuata al primo stadio).

Massimizzazione dei profitti e minimizzazione dei costi (2)

1. Per ogni possibile livello di prodotto *x*, l'impresa risolve il problema di minimizzazione dei costi trovando il metodo più economico per realizzare *x*;
2. in questo modo ottiene la funzione di costo totale CT(*x*).
3. Successivamente, una volta calcolato CT(*x*), l'impresa sceglie il livello ottimale di prodotto *x* considerando la differenza tra i ricavi totali e i costi totali;
4. è a questo punto che emerge l'importanza dell'uguaglianza CMa = RMa.

Massimizzazione dei profitti e minimizzazione dei costi (3)

- La prima operazione, **la *minimizzazione dei costi***, è l'oggetto dell'analisi di questa lezione.
- La seconda, la scelta dell'output per massimizzare i profitti con costi minimizzati, in parte è già stato analizzato e verrà ripreso nelle prossime lezioni
- L'obiettivo dell'impresa considerato in questa lezione è la **scelta dei livelli di input che minimizzano i costi per ogni possibile livello di output**.

La minimizzazione dei costi

- Immaginate un'impresa la cui tecnologia sia indicata dalla funzione di produzione *f*.
- Supponete anche che il prezzo dell'input *j* sia r_j, a prescindere dalla quantità di input acquistata.
- Allora il metodo più economico e più efficiente in termini di costi con cui l'impresa può produrre *x* o più unità di prodotto è la soluzione del seguente problema, chiamato ***problema di minimizzazione dei costi***:

$$\min\{r_1 y_1 + \ldots + r_n y_n\}$$

$$cv \quad f(y_1,\ldots,y_n) \geq x \quad \text{e} \quad y_1 \geq 0,\ldots,y_n \geq 0$$

La definizione dei costi e il funzionamento del mercato degli input

- Quando scriviamo i costi di produzione come

$$r_1 y_1 + \ldots + r_n y_n$$

- Sto implicitamente facendo le seguenti **ipotesi**:

1. Per ogni input *j* esiste un mercato e un prezzo r_j
2. Il prezzo degli input è indipendente dalla quantità di input domandata
3. Il prezzo degli input è indipendente dall'identità dell'impresa che lo domanda
4. la quantità di input domandata coincide con quella ottenuta, cioè l'impresa non è mai razionata sul mercato degli input

cioè

mercati dei fattori produttivi in concorrenza perfetta

Primo stadio: minimizzazione dei costi

- Scegli un livello di output
- Prendi come dati i prezzi di mercato degli input **r**
- Massimizza i profitti...
- ...minimizzando i costi $\sum_{i=1}^{n} r_i y_i$

La determinazione grafica del costo totale

- Per effettuare questa analisi introduciamo un importante concetto - quello di ***curva di isocosto***.
- Con due input una retta di isocosto è data dalla seguente espressione:

$$r_1 y_1 + r_2 y_2 = \text{costante}$$

- al variare della costante si ottiene un fascio di rette di isocosto parallele.

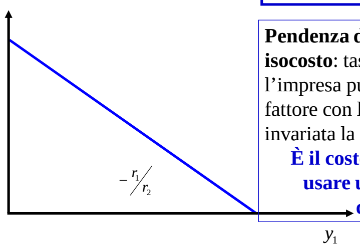
L'*isocosto in generale*

- Per un dato vettore di prezzi degli input **r**...
- ...questo è l'insieme di panieri di input **y**...
- ...che genera un costo costante
- Geometricamente è una retta...
- ...a causa della semplice espressione dei costi stessi

$$\sum_{i=1}^{n} r_i y_i$$

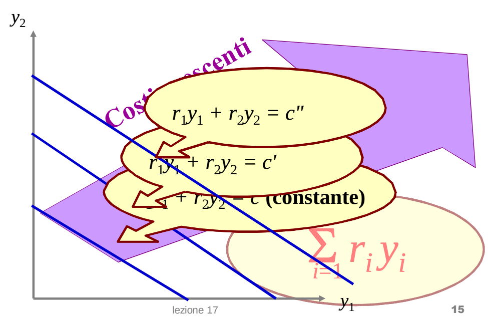
La **retta di isocosto** rappresenta tutte le combinazioni di input aventi lo stesso costo per l'impresa.

$$r_1 y_1 + r_2 y_2 = \bar{c} \rightarrow \boxed{y_2 = -\frac{r_1}{r_2} \cdot y_1 + \frac{\bar{c}}{r_2}}$$

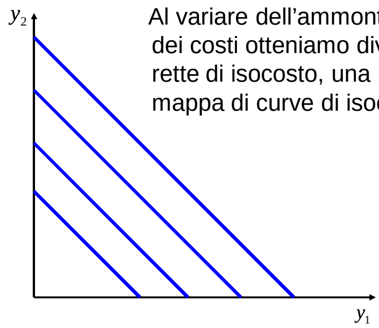


Pendenza della linea di isocosto: tasso al quale l'impresa può sostituire un fattore con l'altro, mantenendo invariata la spesa complessiva, **È il costo opportunità di usare un input invece dell'altro**

Mappa di isocosti



Una mappa di curve di isocosto



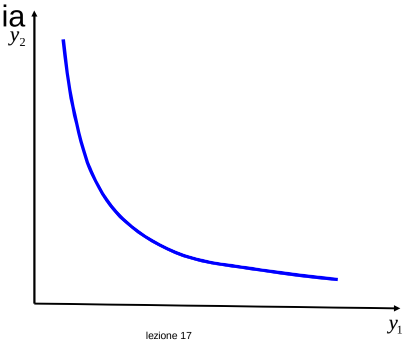
Al variare dell'ammontare dei costi otteniamo diverse rette di isocosto, una mappa di curve di isocosto

---

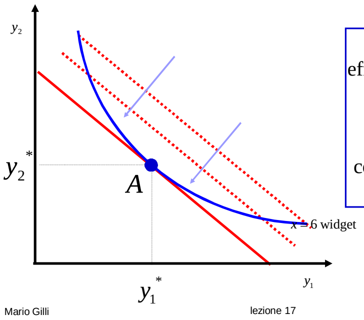
Scelta ottimale degli input (1)

- Fissiamo arbitrariamente un livello di output di sei widget e consideriamo il modo più economico di produrre quel livello di output, dato che il prezzo degli input 1 e 2 è rispettivamente €2 e €3
- **Rappresentiamo il livello fissato di output con un isoquanto appropriato.**
- ***Ovviamente la sua posizione e la sua forma dipendono dal livello di output scelto e dalla tecnologia***.

Ecco ad esempio l'isoquanto corrispondente a 6 widget per una data tecnologia



Qual è la combinazione di input migliore?
Nel punto sulla curva di isocosto *più bassa*. Una combinazione di input è economicamente efficiente quando consente di ottenere un determinato volume di produzione al minor costo possibile.



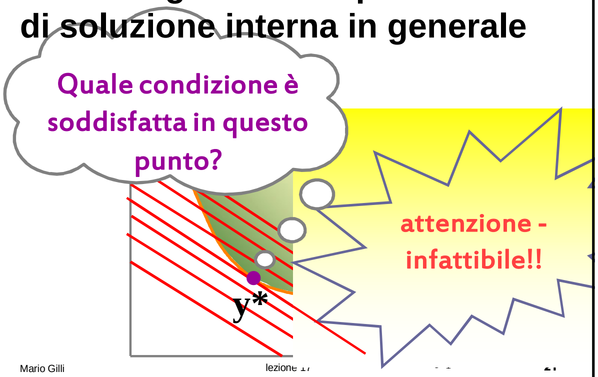
La combinazione efficiente è il punto in cui l'isocosto più vicino all'origine tocca l'isoquanto corrispondente al livello di output desiderato

Scelta ottimale degli input (2)

Esempio:

- Il punto segnato con l'asterisco è quello per il quale l'isoquanto di 6 widget è tangente a una curva di isocosto: le coordinate di questo punto che minimizza i costi sono circa 10,5 unità di input 1 e 4,5 unità di input 2; questa combinazione comporta un costo totale di
- (€ 2)(10,5) + (€ 3)(4,5) = € 21 + € 13,50 = € 34,50,
- che è quindi il costo totale per produrre 6 widget nel modo più economico possibile, dati questi prezzi per gli input.
- Quindi CT(6) = € 34,50.

L'analisi geometrica per il caso di soluzione interna in generale



Per una **soluzione interna**, si ha la seguente condizione necessaria:

Pendenza dell'isoquanto → $SMST_{21} = \dfrac{PM_1}{PM_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$ ← Pendenza dell'isocosto

In altre parole un'impresa dovrebbe scegliere la combinazione di input da utilizzare in modo tale che, al margine, i prodotti marginali degli input siano proporzionali ai loro prezzi.

Prodotto marginale per ogni euro speso nell'input 1 → $\dfrac{PM_1}{r_1} = \dfrac{PM_2}{r_2}$ ← Prodotto marginale per ogni euro speso nell'input 2

Quando il prodotto marginale dell'ultimo euro speso è lo stesso per ogni fattore, non c'è più modo di diminuire la spesa totale per i fattori cambiando le quantità di fattori utilizzate.

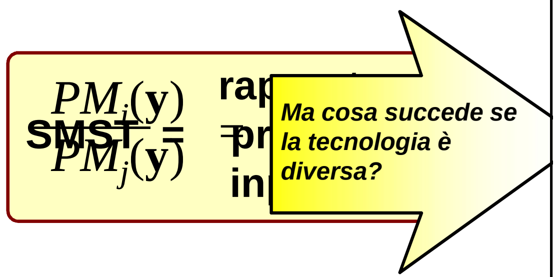
La soluzione interna

Nel caso di soluzione interna per ottenere analiticamente i livelli ottimali y_1^* e y_2^* è necessario risolvere il seguente sistema di equazioni

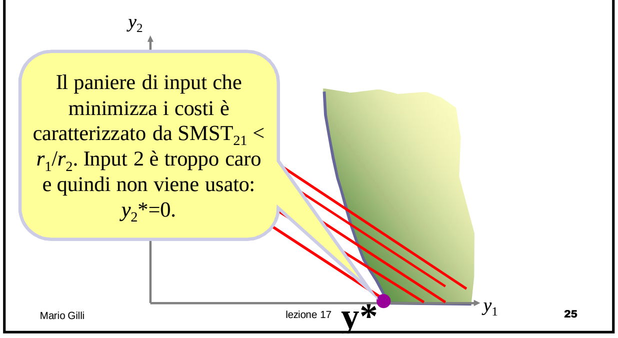
$$\begin{cases} \dfrac{PM_1}{PM_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \\ f(y_1, y_2) = \bar{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1^*(\bar{x}, r_1, r_2) \\ y_2^*(\bar{x}, r_1, r_2) \end{cases}$$

I livelli ottimali y_1^* e y_2^* espressi in funzione del volume di produzione desiderato e dei prezzi dei fattori, vengono detti **domanda condizionata del fattore** (condizionata al volume di produzione desiderato)

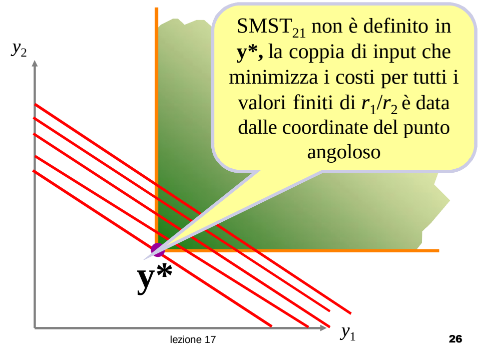
Quindi se gli input i e j sono usati entrambi e se il SMST è definito...



Soluzione d'angolo



Nel caso di complementi perfetti, quando il SMST non esiste



- **<u>SOLUZIONE AL PROBLEMA DELLA MINIMIZZAZIONE DEI COSTI (quando gli isoquanti sono differenziabili)</u>**
- **occorre eguagliare i rapporti tra i prezzi degli input e le rispettive produttività marginali per ogni coppia di input utilizzati in quantità strettamente positive, e tali rapporti dovrebbero essere inferiori o uguali al rapporto per ogni input non utilizzato**

Calcolo della funzione dei costi

- Per ogni input si ottiene un ... re y* che minimizza i costi ...
- ... E quin... per i costi ... $y_1^* + \ldots + y_n^*$
- Sia l'amm... ono essere scritti in funzione dei p... degli input r e di un livello di output x

In particolare...

$$C^*(r,x) = r_1 y_1^*(r,x) + \ldots + r_n y_n^*(r,x)$$

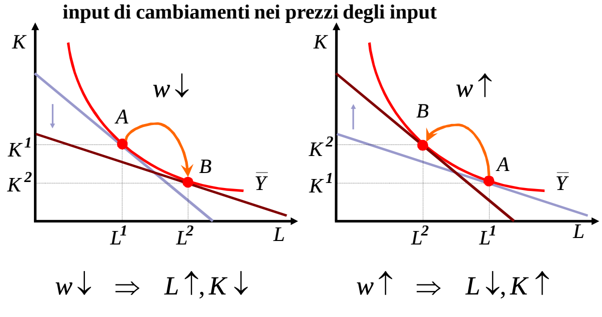
La soluzione è la funzione di *costo*

$$C(\mathbf{r}, x) := \min_{\{f(\mathbf{y}) = x\}} \Sigma\, r_i\, y_i = \Sigma\, r_i\, y^*_i$$

vettor... prezzi de...

Livello di output dato

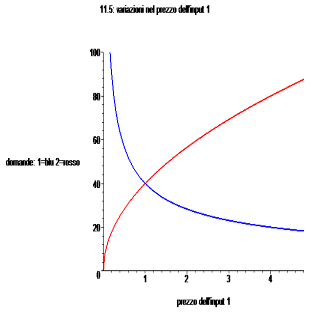
STATICA COMPARATA: effetti sulla combinazione ottimale di input di cambiamenti nei prezzi degli input



$w\downarrow \;\Rightarrow\; L\uparrow, K\downarrow$ $\qquad$ $w\uparrow \;\Rightarrow\; L\downarrow, K\uparrow$

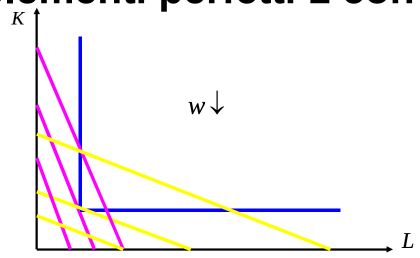
NB: *<u>l'impresa sostituisce sempre il fattore il cui prezzo è aumentato, tranne che per i complementi perfetti.</u>*

- Possiamo esprimere questa relazione in termini di ***curve di domanda*** **per i due input - come funzioni del prezzo dell'input 1**



Mario Gilli lezione 17 31

Complementi perfetti 1 con 2



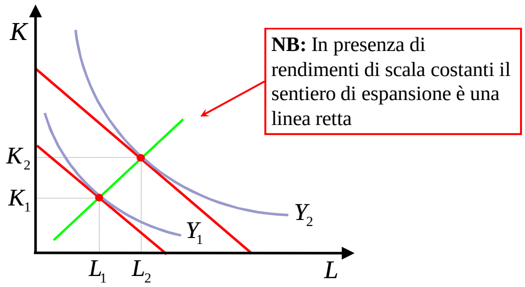
$w\downarrow \;\Rightarrow\; \Delta L = \Delta K = 0$ $\quad w\uparrow \;\Rightarrow\; \Delta L = \Delta K = 0$

Mario Gilli lezione 17 32

- Possiamo esprimere questa relazione in termini di ***curve di domanda*** **per i due input - come funzioni del prezzo dell'input 1**

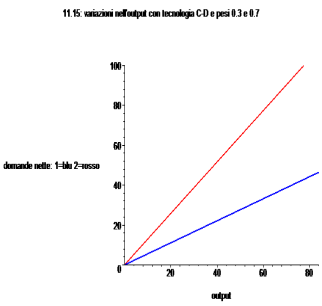
Mario Gilli lezione 17 33

Il **sentiero di espansione** indica le combinazioni di input ottimali nel lungo periodo al variare del volume di produzione, *ceteris paribus*



Mario Gilli lezione 17 34

- Statica comparata: variamo il livello desiderato di output, mantenendo i prezzi dei due input fissi, e otteniamo le domande degli input in funzione dell'output
- Nel caso di tecnologia Cobb-Douglas con parametri 0,3 e 0,7 e uguali prezzi dei fattori si ha il disegno a lato



Mario Gilli lezione 17 35

Osservazioni:

- Abbiamo ipotizzato che il costo totale di una serie di quantità di input sia chiaramente definito
- A volte è difficile imputare un prezzo a ciascun input

1. Una prima difficoltà riguarda il prezzo dei beni durevoli: qual è il costo da imputare in un periodo?
2. Una seconda difficoltà riguarda gli input per cui non esiste un prezzo di mercato chiaramente stabilito, poiché il bene in questione è unico. In linea di principio, il costo economico corretto è il *costo opportunità*. In pratica è spesso difficile calcolare i costi opportunità.

Mario Gilli lezione 17 36

■ Osservazioni:

1. quando ipotizziamo di poter associare un costo a ogni input stiamo semplificando
2. la contabilità delle imprese non sempre corrisponderà precisamente agli effettivi e corretti costi economici dei diversi input
   - pertanto, i profitti economici differiscono dai profitti contabili.

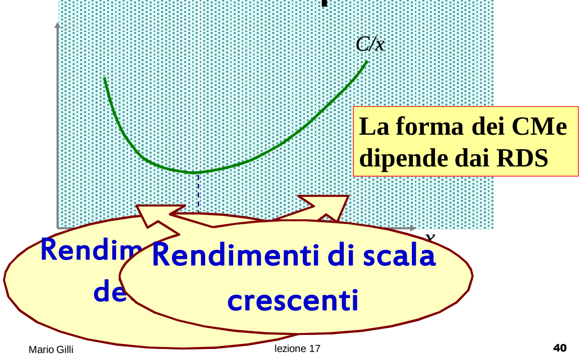
I rendimenti di scala e il costo medio (1)

- E' possibile dimostrare i seguenti risultati:
  - un'impresa caratterizzata da **rendimenti di scala crescenti** ha una funzione **di costo medio non crescente**;
  - un'impresa caratterizzata da **rendimenti di scala decrescenti** ha una funzione di **costo medio non decrescente**;
  - un'impresa caratterizzata da **rendimenti di scala costanti** ha una funzione di **costo medio costante**, e quindi una funzione di costo totale lineare

I rendimenti di scala e il costo medio (2)

- E l'impresa "tipica" che, in termini generali, è caratterizzata da rendimenti di scala crescenti per bassi livelli di produzione e rendimenti di scala decrescenti per livelli di produzione elevati?
- Questo tipo di tecnologia implica una funzione di costo medio a forma di U o concava. Ed è per questo motivo che le funzioni di costo medio a forma di U sono così diffuse negli esempi economici

Costi medi e output...



Riepilogo

- Vi sono tre modi per risolvere il problema di minimizzazione dei costi di un'impresa:
  - graficamente, utilizzando gli isoquanti e le rette di isocosto;
  - con un foglio di calcolo;
  - con il calcolo differenziale, utilizzando la regola

$$\frac{r_i}{PM_i} = \frac{r_j}{PM_j} \le \frac{r_k}{PM_k} \quad \text{per } y_i, y_j > 0, y_k = 0 \quad \text{dove } PM_i = \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

è la produttività marginale dell'input *i*.

- I rendimenti di scala implicano alcune ipotesi sulla tecnologia di produzione e, più specificatamente, sulla quantità di cui aumenta il prodotto quando i livelli di input vengono incrementati in modo proporzionale.
- Lo schema "naturale" prevede rendimenti crescenti (che riflettono le efficienze tecnologiche, i vantaggi della specializzazione e l'ammortizzamento dei costi fissi) fino a un certo livello e poi rendimenti decrescenti (quando prevalgono le inefficienze di coordinamento e di incentivo).

- I rendimenti di scala costanti implicano un costo medio (e marginale) costante, i rendimenti di scala crescenti un costo medio non crescente e i rendimenti di scala decrescenti un costo medio non decrescente. Lo schema “naturale” dei rendimenti di scala appena descritto prevede quindi costi medi a forma di U.