RISPOSTE ALLE DOMANDE E AGLI ESERCIZI SUL CAPITOLO 18 DI KREPS “MICROECONOMIA PER MANAGER”

Le risposte sono in carattere più piccolo e in grassetto per distinguerle dalle domande.

DOMANDE

1. Discutete la relazione tra oligopolio di Cournot, oligopolio di Bertrand, monopolio e concorrenza perfetta dal punto di vista dell’efficienza sociale.

Usando come ordinamento di efficienza l’ammontare di surplus sociale, l’oligopolio di Bertrand e la concorrenza perfetta sono equivalenti e massimizzano il surplus, l’oligopolio di Cournot si pone a livello intermedio e il monopolio è al livello inferiore.

2. Discutete il concetto di equilibrio usato per analizzare l’oligopolio.

Un equilibrio in un mercato oligopolistico è dato da un profilo di strategie per le imprese, tale che nessuna impresa ha un incentivo a cambiare la propria scelta strategica date le scelte di equilibrio delle altre imprese. Questa è l’idea di equilibrio di Nash applicato al caso particolare di oligopolio, con diverse declinazioni a seconde delle modalità di concorrenza oligopolistica.

ESERCIZI

1. In un duopolio le imprese sono caratterizzate dalla funzione di costo totale CT(*x*) = 5*x* , mentre la funzione di domanda inversa è $P(x)=\begin{cases}20-x & x\le 20\\ 0 & x>20.\end{cases}$

   Trovate quantità, prezzi e profitto di equilibrio nel caso di
   a. oligopolio di Cournot

Per trovare l’equilibrio nell’oligopolio di Cournot per il mercato in esame è importante scrivere in primo luogo le funzioni di profitto degli oligopolisti in funzione delle loro variabili di scelta, che in questo caso sono le quantità prodotte:

- $\pi_1(x_1,x_2)=P(x_1+x_2)x_1-CT_1(x_1)=\begin{cases}-5x_1 & x_1+x_2>20\\ (20-x_1-x_2)x_1-5x_1 & 0\le x_1+x_2\le 20\end{cases}$
- $\pi_2(x_1,x_2)=P(x_1+x_2)x_2-CT_2(x_2)=\begin{cases}-5x_2 & x_1+x_2>20\\ (20-x_1-x_2)x_2-5x_2 & 0\le x_1+x_2\le 20\end{cases}$

Le condizioni di massimizzazione del profitto per entrambe le imprese sono le derivate prima della funzione di profitto pari a zero e la derivata seconda negativa:

- $\frac{\partial\pi_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}=20-x_1-x_2-x_1-5=0 \qquad \frac{\partial^2\pi_1(x_1,x_2)}{\partial {x_1}^2}=-2<0$
- $\frac{\partial\pi_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}=20-x_1-x_2-x_2-5=0 \qquad \frac{\partial^2\pi_2(x_1,x_2)}{\partial {x_2}^2}=-2<0$.

Le condizioni del primo ordine implicano il seguente sistema per trovare le quantità di equilibrio nell’oligopolio di Cournot:

$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_2+\frac{15}{2}\\ x_2=-\frac{1}{2}x_1+\frac{15}{2}\end{cases}=\begin{cases}{x_1}^C=5\\ {x_2}^C=5\end{cases}$$

Quindi il prezzo nell’equilibrio dell’oligopolio di Cournot è $P(5+5)=10$, mentre i profitti sono $\pi_1^{\ C}(5,5)=10\times5-5\times5=25 \quad \pi_2^{\ C}(5,5)=10\times5-5\times5=25$.

b. oligopolio di Bertrand

Per trovare l'equilibrio nell'oligopolio di Bertrand per il mercato in esame è importante scrivere in primo luogo le funzioni di profitto degli oligopolisti in funzione delle loro variabili di scelta, che in questo caso sono i prezzi:

1. $\pi_1(p_1, p_2) = p_1 x_1(p_1, p_2) - CT_1(x_1(p_1, p_2))$
2. $\pi_2(p_1, p_2) = p_2 x_2(p_1, p_2) - CT_2(x_2(p_1, p_2))$.

In questo caso per specificare le funzioni di domanda residuali della singola impresa $x_1(p_1, p_2)$ **e** $x_2(p_1, p_2)$ **è necessario in primo luogo invertire la funziona di domanda inversa ottenendo la funzione di domanda vera e propria, che è** $D(p) = \begin{cases} 20 - p & p \leq 20 \\ 0 & p > 20. \end{cases}$ **Quindi possiamo scrivere le funzioni di domanda residuali delle imprese:**

$$x_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 20 - p_1 & p_1 < p_2 \text{ e } p_1 \leq 20 \\ \frac{1}{2}(20 - p_1) & p_1 = p_2 \leq 20 \\ 0 & p_1 > p_2 \text{ o } p_1 > 20 \end{cases} \quad \textbf{e}$$

$$x_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 20 - p_2 & p_2 < p_1 \text{ e } p_2 \leq 20 \\ \frac{1}{2}(20 - p_2) & p_1 = p_2 \leq 20 \\ 0 & p_2 > p_1 \text{ o } p_2 > 20 \end{cases}$$

Poiché queste funzioni sono discontinue, anche le funzioni di profitto lo sono e quindi non posso derivare tramite differenziazione le condizioni di massimizzazione del profitto, che infatti sono:

$$\pi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} p_1(20 - p_1) - 5(20 - p_1) & p_1 < p_2 \text{ e } p_1 \leq 20 \\ \frac{1}{2} p_1(20 - p_1) - \frac{5}{2}(20 - p_1) & p_1 = p_2 \leq 20 \\ 0 & p_1 > p_2 \text{ o } p_1 \geq 20 \end{cases} \quad \textbf{e}$$

$$\pi_2(p_1, p_2) = \begin{cases} p_2(20 - p_2) - 5(20 - p_2) & p_1 < p_2 \text{ e } p_2 \leq 20 \\ \frac{1}{2} p_2(20 - p_2) - \frac{5}{2}(20 - p_2) & p_1 = p_2 \leq 20 \\ 0 & p_1 > p_2 \text{ o } p_2 \geq 20 \end{cases}$$

Dalla semplice ispezione delle funzioni di profitto è chiaro che nell'oligopolio di Bertrand l'unico modo per massimizzarle è porre $5 \leq p_i < p_j$**, quindi i prezzi in equilibrio sono pari a:** $\begin{cases} p_1{}^B = 5 \\ p_2{}^B = 5 \end{cases}$**.**

Di conseguenza le quantità nell'equilibrio dell'oligopolio di Bertrand sono $x_1{}^B(5{,}5) = \frac{1}{2}(20 - 5) = 7{,}5$ **e** $x_2{}^B(5{,}5) = \frac{1}{2}(20 - 5) = 7{,}5$**, mentre i profitti sono** $\pi_1{}^B(5{,}5) = 5 \times 7{,}5 - 5 \times 7{,}5 = 0$ **e** $\pi_2{}^B(5{,}5) = 5 \times 7{,}5 - 5 \times 7{,}5 = 0$**.**

c. oligopolio di Bertrand con prodotti differenziati, con domanda alla singola impresa pari a $x_i(p_1, p_2) = \begin{cases} 20 - \frac{3}{2} p_i + \frac{1}{2} p_j & p_i \leq \frac{1}{3} p_j + \frac{40}{3} \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$

Per trovare l'equilibrio nell'oligopolio di Bertrand con prodotti differenziati per il mercato in esame è importante scrivere in primo luogo le funzioni di profitto degli oligopolisti in funzione delle loro variabili di scelta, che in questo caso sono i prezzi:

3. $\pi_1(p_1,p_2)=p_1x_1(p_1,p_2)-CT_1(x_1(p_1,p_2))$
4. $\pi_2(p_1,p_2)=p_2x_2(p_1,p_2)-CT_2(x_2(p_1,p_2))$.

In questo caso le funzioni di domanda residuali della singola impresa $x_1(p_1,p_2)$ **e** $x_2(p_1,p_2)$ **sono date dall'esercizio, quindi le funzioni di profitto sono:**

$$\pi_1(p_1,p_2)=\begin{cases} p_1(20-1{,}5p_1+0{,}5p_2)-5(20-1{,}5p_1+0{,}5p_2) & p_1\le \frac{1}{3}p_2+\frac{40}{3} \\ 0 & p_1>\frac{1}{3}p_2+\frac{40}{3}\end{cases}$$

$$\pi_2(p_1,p_2)=\begin{cases} p_2(20-1{,}5p_2+0{,}5p_1)-5(20-1{,}5p_2+0{,}5p_1) & p_2\le \frac{1}{3}p_1+\frac{40}{3} \\ 0 & p_2>\frac{1}{3}p_1+\frac{40}{3}\end{cases}$$

In questo caso le funzioni di profitto sono continue e differenziabili, quindi le condizioni di massimizzazione del profitto per entrambe le imprese sono le derivate prima della funzione di profitto pari a zero e la derivata seconda negativa:

- $\dfrac{\partial\pi_1(p_1,p_2)}{\partial p_1}=20-1{,}5p_1+0{,}5p_2-1{,}5p_1+7{,}5=0$ **e** $\dfrac{\partial^2\pi_1(p_1,p_2)}{\partial p_1{}^2}=-3<0$
- $\dfrac{\partial\pi_2(p_1,p_2)}{\partial p_2}=20-1{,}5p_2+0{,}5p_1-1{,}5p_2+7{,}5=0$ **e** $\dfrac{\partial^2\pi_2(p_1,p_2)}{\partial p_2{}^2}=-3<0$.

Le condizioni del primo ordine implicano il seguente sistema per trovare i prezzi di equilibrio nell'oligopolio di Bertrand con prodotti differenziati:

$$\begin{cases} p_1=\frac{1}{6}p_2+\frac{55}{6} \\ p_2=\frac{1}{6}p_1+\frac{55}{6}\end{cases}=\begin{cases} p_1{}^{BD}=11 \\ p_2{}^{BD}=11\end{cases}$$

Quindi le quantità nell'equilibrio dell'oligopolio di Bertrand con prodotti differenziati sono $x_1(11{,}11)=20-1{,}5\times 11+0{,}5\times 11=9$ **e** $x_2(11{,}11)=20-1{,}5\times 11+0{,}5\times 11=9$, **mentre i profitti sono** $\pi_1{}^{BD}(11{,}11)=11\times 9-5\times 9=54$ $\pi_2{}^{BD}(11{,}11)=11\times 9-5\times 9=54$.

d. oligopolio di Stackelberg

Per trovare l'equilibrio nell'oligopolio di Stackelberg per il mercato in esame è importante scrivere in primo luogo le funzioni di profitto degli oligopolisti in funzione delle loro variabili di scelta, che in questo caso sono le quantità prodotte in ordine sequenziale. Invece di distinguere tra impresa 1 e 2, distinguiamo tra impresa leader che sceglie per prima e impresa follower che sceglie dopo avere osservato la scelta dell'impresa leader:

$$\pi_L(x_L,x_F)=P(x_L+x_F)x_L-CT_L(x_L)=\begin{cases} -5x_L & x_L+x_F>20 \\ (20-x_L-x_F)x_L-5x_L & 0\le x_L+x_F\le 20\end{cases}$$

$$\pi_F(x_L,x_F)=P(x_L+x_F)x_F-CT_F(x_F)=\begin{cases} -5x_F & x_L+x_F>20 \\ (20-x_L-x_F)x_F-5x_F & 0\le x_L+x_F\le 20\end{cases}$$

Per trovare le scelte ottime considero prima il follower che osserva la scelta del leader e quindi sceglie in relazione a quanto scelto dal leader. La condizione di massimizzazione del profitto per l'impresa follower è la derivata prima della funzione di profitto pari a zero e la derivata seconda negativa per data scelta del leader:

- $\dfrac{\partial\pi_F(x_L,x_F)}{\partial x_F}=20-x_L-x_F-x_F-5=0$ $\dfrac{\partial^2\pi_F(x_L,x_F)}{\partial x_F{}^2}=-2<0$.

La condizione del primo ordine implica che il follower sceglie il seguente livello di produzione ottima in funzione della scelta del leader: $x_F(x_L) = -\frac{1}{2}x_L + \frac{15}{2}$.

Il leader anticipa questa scelta del follower e quindi massimizza la seguente funzione

$$\pi_L(x_L, x_F) = P(x_L + x_F)x_L - CT_L(x_L) =$$
$$= \left(20 - x_L + \frac{1}{2}x_L - \frac{15}{2}\right)x_L - 5x_L = \left(\frac{25}{2} - \frac{1}{2}x_L\right)x_L - 5x_L.$$

La condizione di massimizzazione del profitto per l'impresa leader è la derivata prima della funzione di profitto pari a zero e la derivata seconda negativa:

$$\frac{\partial \pi_L(x_L, x_F(x_L))}{\partial x_L} = \frac{25}{2} - \frac{1}{2}x_L - \frac{1}{2}x_L - 5 = 0 \quad \textbf{e} \quad \frac{\partial^2 \pi_L(x_L, x_F(x_L))}{\partial x_L^{\;2}} = -1 < 0.$$

Di conseguenza la quantità ottima scelta dall'impresa leader è $x_L^{\;S} = 7{,}5$**, che sostituito nella funzione di scelta ottima del follower trovata prima:** $x_F^{\;S} = -\frac{1}{2} \times 7{,}5 + \frac{15}{2} = 3{,}75$.

Quindi il prezzo nell'equilibrio dell'oligopolio di Stackelberg è $P(7{,}5 + 3{,}75) = 8{,}75$**, mentre i profitti sono** $\pi_L^{\;S}(7{,}5;3{,}75) = 8{,}75 \times 7{,}5 - 5 \times 7{,}5 = 28{,}125 \quad \pi_F^{\;S}(7{,}5;3{,}75) = 8{,}75 \times 3{,}75 - 5 \times 3{,}75 = 14{,}0625$.

e. oligopolio di Bertrand-Stackelberg , con domanda alla singola impresa pari a

$$x_i(p_1, p_2) = \begin{cases} 20 - \frac{3}{2}p_i + \frac{1}{2}p_j & p_i \le \frac{1}{3}p_j + \frac{40}{3} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Per trovare l'equilibrio nell'oligopolio di Bertrand Stackelberg per il mercato in esame è importante scrivere in primo luogo le funzioni di profitto degli oligopolisti in funzione delle loro variabili di scelta, che in questo caso sono i prezzi fissati in ordine sequenziale. Invece di distinguere tra impresa 1 e 2, distinguiamo tra impresa leader che sceglie per prima e impresa follower che sceglie dopo avere osservato la scelta dell'impresa leader:

$$\pi_L(p_L, p_F) = \begin{cases} p_L(20 - 1{,}5p_L + 0{,}5p_F) - 5(20 - 1{,}5p_L + 0{,}5p_F) & p_L \le \frac{1}{3}p_F + \frac{40}{3} \\ 0 & p_L > \frac{1}{3}p_F + \frac{40}{3} \end{cases}$$

$$\pi_F(p_L, p_F) = \begin{cases} p_F(20 - 1{,}5p_F + 0{,}5p_L) - 5(20 - 1{,}5p_F + 0{,}5p_L) & p_F \le \frac{1}{3}p_L + \frac{40}{3} \\ 0 & p_F > \frac{1}{3}p_L + \frac{40}{3} \end{cases}$$

Per trovare le scelte ottime considero prima il follower che osserva la scelta del leader e quindi sceglie in relazione a quanto scelto dal leader. La condizione di massimizzazione del profitto per l'impresa follower è la derivata prima della funzione di profitto pari a zero e la derivata seconda negativa per data scelta del leader:

- $$\frac{\partial \pi_F(p_L, p_F)}{\partial p_F} = 20 - 1{,}5p_F + 0{,}5p_L - 1{,}5p_F - 7{,}5 = 0 \quad \textbf{e} \quad \frac{\partial^2 \pi_F(p_L, p_F)}{\partial p_F^{\;2}} = -3 < 0.$$

La condizione del primo ordine implica che il follower sceglie il seguente livello ottimo del prezzo in funzione della scelta del leader: $p_F(p_L) = \frac{1}{6}p_L + \frac{55}{6}$.

Il leader anticipa questa scelta del follower e quindi massimizza la seguente funzione

$$\pi_L(p_L, p_F(p_L)) = \left(20 - 1{,}5p_L + \frac{1}{12}p_L + \frac{55}{12}\right)p_L -$$
$$-5\left(20 - 1{,}5p_L + \frac{1}{12}p_L + \frac{55}{12}\right).$$

La condizione di massimizzazione del profitto per l'impresa leader è la derivata prima della funzione di profitto pari a zero e la derivata seconda negativa:

$$\frac{\partial \pi_L(p_L, p_F(p_L))}{\partial p_L} = \frac{295}{12} - \frac{17}{12} p_L - \frac{17}{12} p_L + \frac{85}{12} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \pi_L(x_L, x_F(x_L))}{\partial {x_L}^2} = -\frac{17}{6} < 0 .$$

Di conseguenza il prezzo ottimo scelta dall'impresa leader è ${p_L}^{BS} = \frac{190}{17} \cong 11{,}2$**, che sostituito nella funzione di scelta ottima del follower trovata prima:** ${p_F}^{BS} = \frac{1}{6} \times \frac{190}{17} + \frac{55}{6} \cong 11$**.**

Quindi le quantità nell'equilibrio dell'oligopolio di Bertrand Stackelberg con prodotti differenziati sono $x_1(11{,}2;11) = 20 - 1{,}5 \times 11{,}2 + 0{,}5 \times 11 = 8{,}7$ **e** $x_2(11{,}2;11) = 20 - 1{,}5 \times 11 + 0{,}5 \times 11{,}2 = 9{,}1$**, mentre i profitti sono** ${\pi_1}^{BD}(11{,}2;11) = 11{,}2 \times 8{,}7 - 5 \times 8{,}7 = 53{,}94$ **e** ${\pi_2}^{BS}(11{,}2;11) = 11 \times 9{,}1 - 5 \times 9{,}1 = 54{,}6$**.**

f. concorrenza perfetta

La concorrenza perfetta è caratterizzata dall'eguaglianza tra domanda e offerta di mercato. La domanda inversa è data dall'esercizio per cui è sufficiente invertire la funzione, mentre l'offerta aggregata in concorrenza perfetta è data dalla somma orizzontale delle curve di offerta individuali che coincidono con l'inverso dei costi marginali per prezzi maggiori del minimo dei costi medi. In questo caso i costi marginali sono costanti, quindi la somma orizzontale è sempre pari alla costante, per cui l'offerta aggregata non esiste essendo una retta orizzontale in corrispondenza del costo marginale. Quindi per questo mercato l'eguaglianza è tra domanda inversa e offerta inversa: $P(X) = 20 - X = CMa(X) = 5$**, che implica:** $p^{CP} = 5$ **e** $X^{CP} = 5$**, dove *X* è la quantità totale scambiata nel mercato. Di conseguenza se le due imprese operano come se fossero in concorrenza perfetta ciascuna deve produrre** ${x_i}^{CP} = 2{,}5$**. Il profitto di un'impresa in concorrenza perfetta è** $\pi^{CP} = 5 \times x - 5 \times x = 0$**.**

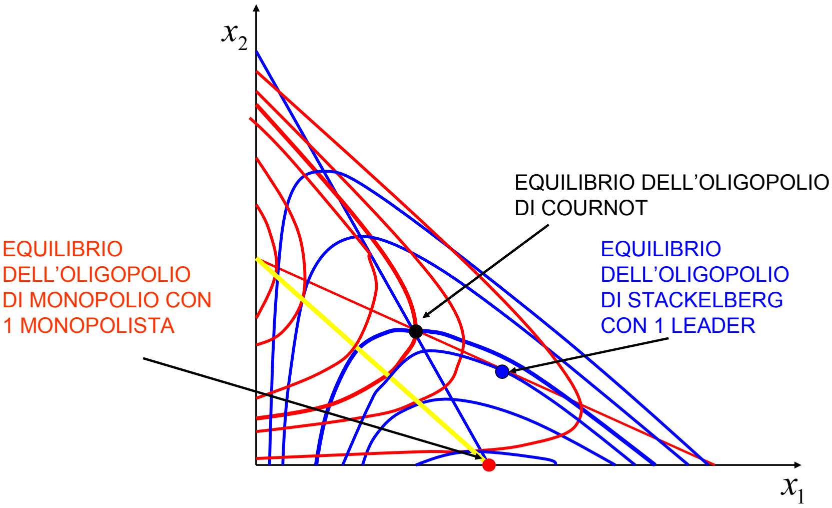
g. monopolio

Per trovare la quantità prodotta in monopolio è sufficiente considerare la funzione di risposta ottima di un'impresa qualsiasi nell'oligopolio di Cournot e porre uguale a zero la quantità prodotta dai concorrenti: dai calcoli svolti al punto (1) abbiamo derivato $x_j = -\frac{1}{2} x_i + \frac{15}{2}$**, quindi ponendo** $x_i = 0$**, si trova** $x^M = 7{,}5$**, che sostituendo nella funzione di domanda inversa fornisce il prezzo di monopolio:** $p^M = P(x^M) = 20 - 7{,}5 = 12{,}5$**. Di conseguenza il profitto di monopolio è** $\pi^M = 12{,}5 \times 7{,}5 - 5 \times 7{,}5 = 56{,}25$**. Pertanto se le due imprese colludono comportandosi come se fossero un unico monopolista devono produrre** ${x_i}^M = 3{,}75$ **ciascuno, con un profitto d'impresa pari a** ${\pi_i}^M = 12{,}5 \times 3{,}75 - 5 \times 3{,}75 = 28{,}125$

h. Rappresentate geometricamente il problema e la sua soluzione.

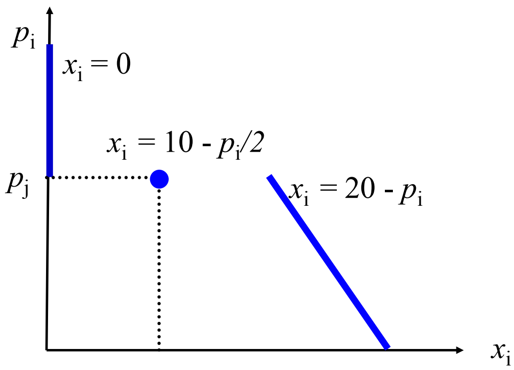
Il disegno seguente illustra l'equilibrio di Cournot, di Stackelberg e di Monopolio:

Confronto tra **equilibrio di Cournot**, **equilibrio di Stackelberg con 1 leader**, **equilibrio di monopolio**



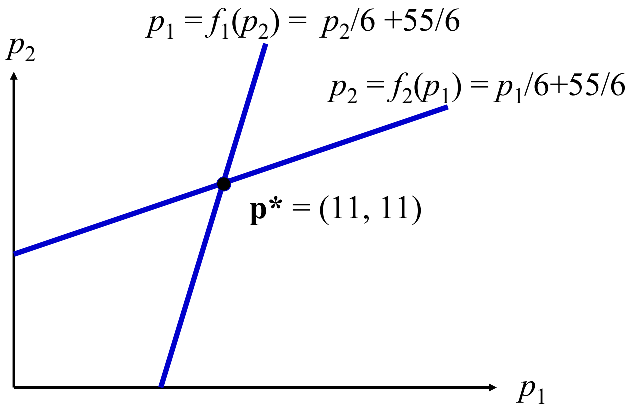
Il disegno seguente invece illustra la domanda della singola impresa nell'oligopolio di Bertrand, la forza che genera il risultato di equilibrio:

La curva di domanda fronteggiata da una singola impresa nell'oligopolio di Bertrand



Il disegno seguente invece illustra l'equilibrio nell'oligopolio di Bertrand con prodotti differenziati:

Equilibrio nell'oligopolio di Bertrand con differenziazione del prodotto



In ultimo rappresentiamo graficamente l'equilibrio del mercato in concorrenza perfetta: