SOLUZIONE LEZIONE 9
Esercitazione
Applicazioni del modello di comportamento dei consumatori

6.2 Supponete che un dato consumatore abbia la funzione di utilità intertemporale definita da

$$u(c_1,c_2) = 6\ \ln(c_1) + 3\ \ln(c_2),$$

e che disponga di € 20 oggi e di € 20 domani da spendere. Il tasso d'interesse è il 10%. Quale sarà la sua scelta di consumo oggi e consumo domani? Questo consumatore risparmierà o prenderà a prestito, e quanto?
Rappresentate il problema e la sua soluzione anche geometricamente con l'opportuna mappa di curve di indifferenza e il vincolo di bilancio.

Per il risolvere il problema del consumatore bisogna eguagliare i valori soggettivi dei beni e controllare che il vincolo di bilancio sia soddisfatto. In formule:

$$\frac{UM_1}{(1+i)} = UM_2$$

$$c_1(1+i) + c_2 \leq y_1(1+i) + y_2.$$

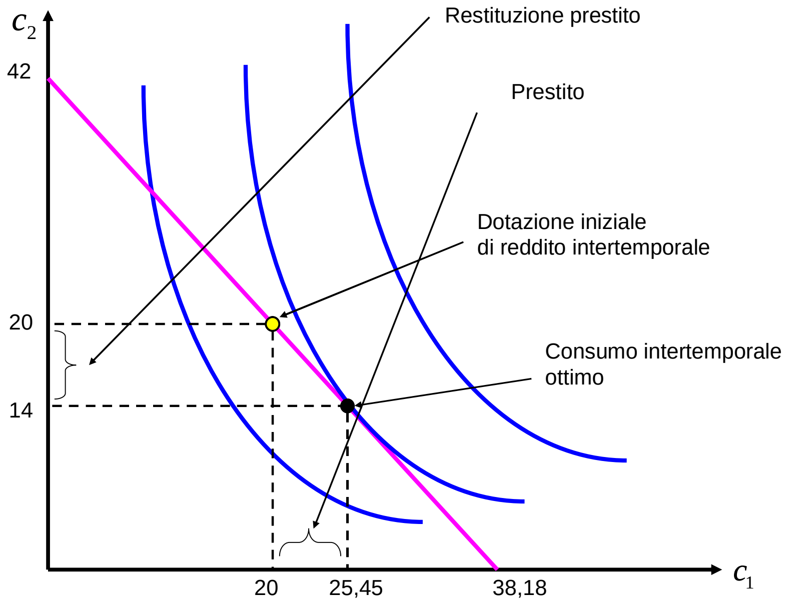
In questo caso:

$$\begin{cases} \dfrac{6/c_1}{(1+0{,}1)} = \dfrac{3}{c_2} \\ (1+0{,}1)c_1 + c_2 = 20(1+0{,}1) + 20 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{6}{1{,}1c_1} = \dfrac{3}{c_2} \\ 1{,}1c_1 + c_2 = 42 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2c_2 = 1{,}1c_1 \\ 2c_2 + c_2 = 42 \end{cases} = \begin{cases} c_2^* = 14 \\ c_1^* = 25{,}45. \end{cases}$$

Dato questo paniere di consumo intertemporale ottimo, il consumatore nel periodo 1 si deve indebitare perché $c_1^* > y_1$, in particolare in misura pari a $c_1^* - y_1 = 25{,}45 - 20 = 5{,}45$; nel periodo 2 deve restituire tale debito più il costo dell'indebitamento pari al 10% di tale somma, cioè $5{,}45 \times (1+0{,}1) \cong 6$, che è pari esattamente a $y_2 - c_2^* = 20 - 14$.

Graficamente:



6.3 Supponete che un consumatore con € 20 di reddito oggi e altrettanti di reddito domani abbia la funzione di utilità (per consumo oggi e consumo domani) definita da

$$v(c_1,c_2) = 2\ln(c_1) + \ln(c_2).$$

dato un tasso d'interesse del 10%, quale sarà la sua scelta di consumo oggi e consumo domani? Questo consumatore risparmierà o prenderà a prestito, e quanto?
Rappresentate il problema e la sua soluzione anche geometricamente con l'opportuna mappa di curve di indifferenza e il vincolo di bilancio.

La soluzione a questo esercizio è esattamente quella fornita nell'esercizio 6.2 perché la funzione di utilità $v(c_1;c_2)$ rappresenta le stesse preferenze della funzione di utilità precedente $u(c_1;c_2)$ perché sono l'una la trasformazione monotona crescente dell'altra. In particolare

$$v(c_1;c_2) = \frac{1}{3} \times u(c_1;c_2).$$

Quindi essendo le funzioni di utilità ordinali e la moltiplicazione per 1/3 monotona crescente ed essendo gli altri dati – tasso d'interesse e dotazione iniziale – comuni ad entrambi gli esercizi, la soluzione trovata nell'esercizio 6.2 vale anche per $v(c_1;c_2)$.

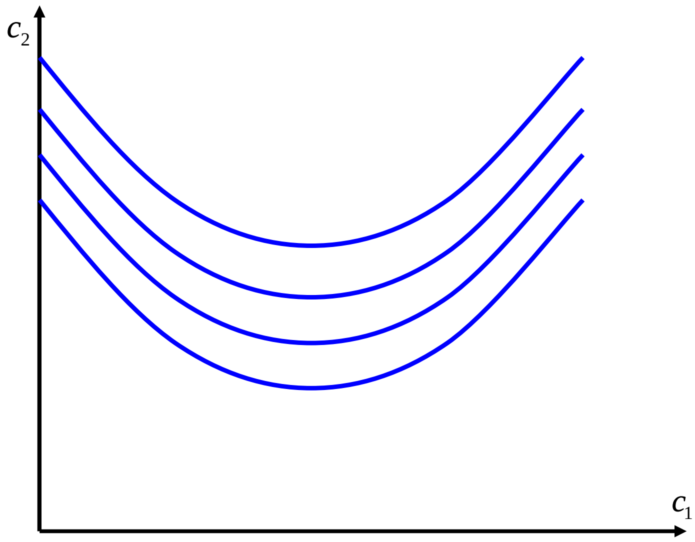
6.5 Immaginate un consumatore il cui comportamento di scelta intertemporale è descritto dalla massimizzazione dell'utilità per la funzione

$$u(c_1, c_2) = 4c_1 - c_1^2 + c_2,$$

dove c_1 è il consumo oggi e c_2 è il consumo domani.

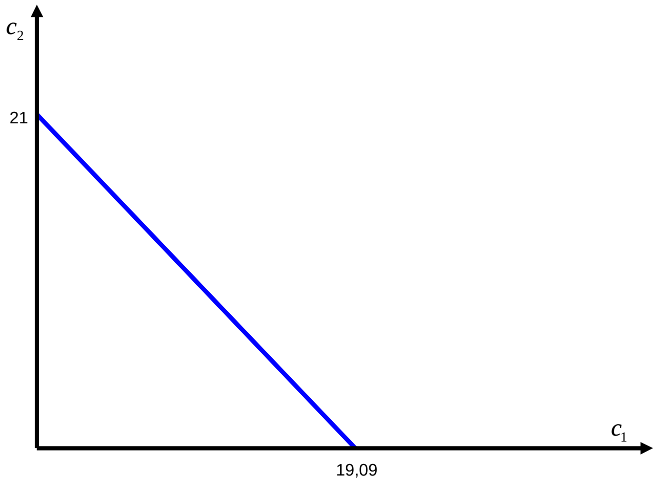
(a) Tracciate la mappa di curve di indifferenza di questo consumatore.

(a) Le curve di indifferenza sono definite dall'equazione $u(c_1, c_2) = \text{costante}$. Pertanto la mappa di curve di indifferenza e definita dalle funzioni $u(c_1, c_2) = 4c_1 - c_1^2 + c_2 = k$ al variare della costante *k;* cioè $c_2 = c_1^2 - 4c_1 + k$ che sono parabole il cui disegno è riportato nella figura seguente:



(b) Supponete che il tasso d'interesse sia il 10%, che il reddito oggi sia pari al reddito domani ed entrambi siano pari a € 10. Tracciate il vincolo di bilancio e individuate sia graficamente sia algebricamente la soluzione del problema intertemporale del consumatore.

(b) Il vincolo di bilancio in questo caso ha la seguente espressione $1{,}1c_1 + c_2 = 21$, cioè $c_2 = -1{,}1c_1 + 21$, che individua la retta riportata in figura:



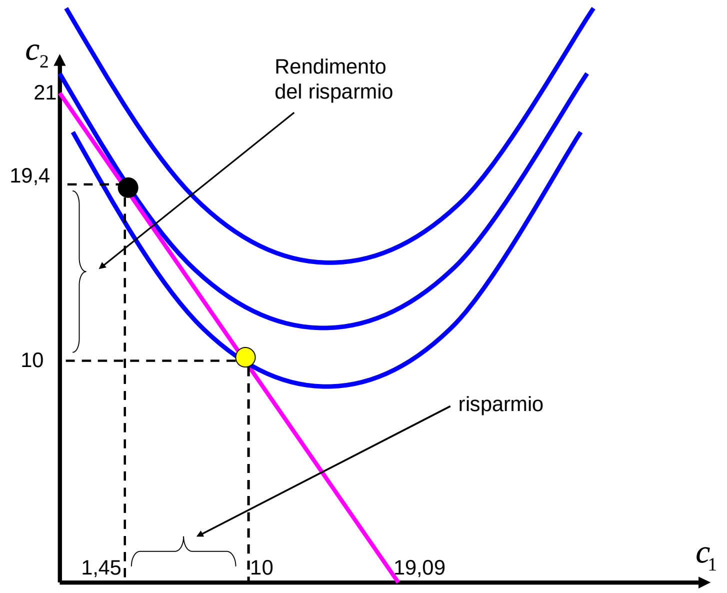
Per il risolvere il problema del consumatore bisogna eguagliare i valori soggettivi dei beni e controllare che il vincolo di bilancio sia soddisfatto:

$$\begin{cases} \dfrac{4-2c_1}{(1+0{,}1)} = 1 \\ (1+0{,}1)c_1 + c_2 = 10(1+0{,}1)+10 \end{cases} = \begin{cases} 4-2c_1 = 1{,}1 \\ 1{,}1c_1 + c_2 = 21 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} c_1 = 1{,}45 \\ 1{,}6 + c_2 = 21 \end{cases} = \begin{cases} c_2^* = 19{,}4 \\ c_1^* = 1{,}45. \end{cases}$$

Dato questo paniere di consumo intertemporale ottimo, il consumatore nel periodo 1 risparmia perché $c_1^* < y_1$, in particolare in misura pari a $y_1 - c_1^* = 10 - 1{,}45 = 8{,}55$; nel periodo 2 invece consuma i frutti di tale risparmio, pari alla somma risparmiata più l'interesse su tale somma, cioè $8{,}55 \times (1+0{,}1) \cong 9{,}4$, che è pari esattamente a $c_2^* - y_2 = 19{,}4 - 10$.

Graficamente:



6.7 Un consumatore è caratterizzato dalla seguente funzione di utilità intertemporale:

$$u(c_1, c_2) = \ln(c_1) + 2c_2 \,.$$

Derivate nel modo più completo possibile la funzione di domanda di prestiti e di offerta di risparmio di tale consumatore.
Rappresentate il problema e la sua soluzione anche geometricamente con l'opportuna mappa di curve di indifferenza e il vincolo di bilancio.

Per il risolvere il problema del consumatore bisogna eguagliare i valori soggettivi del consumo oggi e del consumo domani, controllando che il vincolo di bilancio sia soddisfatto e lasciando in termini parametrici i prezzi dei beni e il reddito. In formule:

$$\frac{UM_{c_1}}{1+i} = UM_{c_2}$$

$$(1+i)c_1 + c_2 \leq (1+i)y_1 + y_2.$$

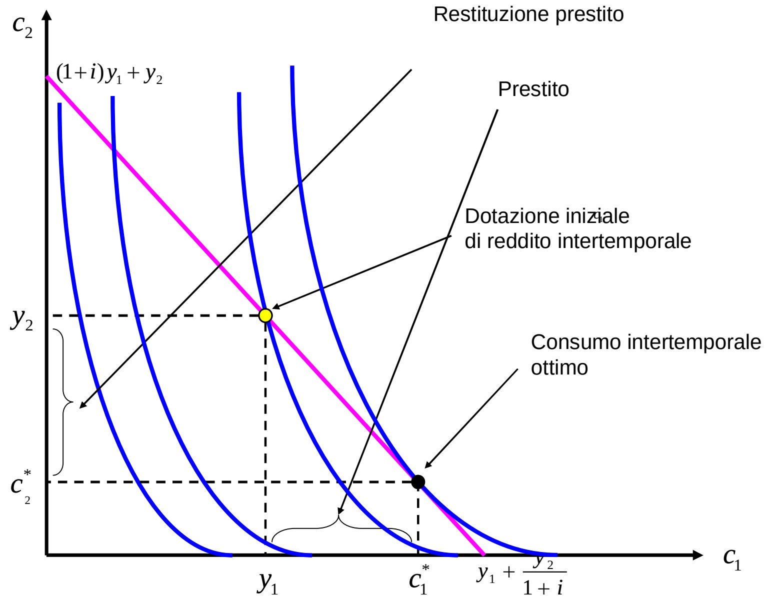
Una volta derivato in questo modo $c_1^*(i)$ confrontandolo con y_1 si ottiene la domanda di prestiti $c_1^*(i) - y_1$ se $c_1^*(i) > y_1$ o l'offerta di risparmio $y_1 - c_1^*(i)$ se $y_1 > c_1^*(i)$.
In questo caso:

$$\begin{cases} \dfrac{1/c_1}{1+i} = 2 \\ (1+i)c_1 + c_2 = (1+i)y_1 + y_2 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+i)c_1} = 2 \\ (1+i)c_1 + c_2 = (1+i)y_1 + y_2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} c_1^*(i) = \dfrac{1}{2(1+i)} \\ c_2^*(i) = (1+i)y_1 + y_2 - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi la domanda di prestiti è $\frac{1}{2(1+i)} - y_1$ se $y_1 < \frac{1}{2(1+i)}$ oppure l'offerta di risparmio è $y_1 - \frac{1}{2(1+i)}$ se $y_1 > \frac{1}{2(1+i)}$.

Graficamente:



c_2
Restituzione prestito
$(1+i)y_1 + y_2$
Prestito
Dotazione iniziale
di reddito intertemporale
y_2
Consumo intertemporale
ottimo
c_2^*
c_1
y_1
c_1^*
$y_1 + \frac{y_2}{1+i}$

6.9 Supponete che un dato consumatore abbia la funzione di utilità relativa a tempo libero e consumo definita da

$$u(n,c) = \ln(n) + \ln(c),$$

e che disponga di 20 ore di tempo a disposizione, mentre il salario orario è di € 20. Quale sarà la sua scelta di tempo libero, di consumo e di lavoro?
Rappresentate il problema e la sua soluzione anche geometricamente con l'opportuna mappa di curve di indifferenza e il vincolo di bilancio.

Per il risolvere il problema del consumatore bisogna eguagliare i valori soggettivi del consumo e del tempo libero e controllare che il vincolo di bilancio sia soddisfatto. In formule:

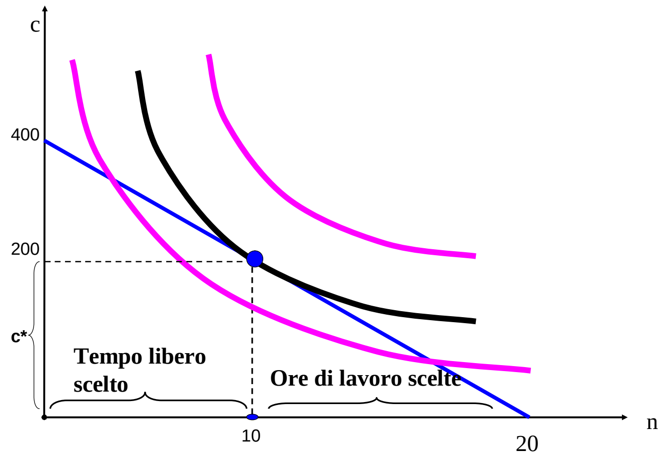
$$\frac{UM_n}{w} = UM_c$$

$$c \le -wn + wT.$$

In questo caso:

$$\begin{cases} \dfrac{1/n}{20} = \dfrac{1}{c} \\ c = -20n + 20 \times 20 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{20n} = \dfrac{1}{c} \\ c = -20n + 400 \end{cases} = \begin{cases} c = 20n \\ c = -c + 400 \end{cases} = \begin{cases} c^* = 200 \\ n^* = 10. \end{cases}$$

Dato questo paniere di consumo e tempo libero ottimo, è immediato derivare la scelta di lavoro considerando la definizione: $l = T - n$; quindi in questo caso $l^* = 20 - n^* = 20 - 10 = 10.$
Graficamente:



6.10 Supponete che un dato consumatore abbia la funzione di utilità relativa a tempo libero e consumo definita da

$$v(n,c) = \ln(n) + \ln(c) + 10,$$

e che disponga di 20 ore di tempo a disposizione, mentre il salario orario è di € 20. Quale sarà la sua scelta di tempo libero, di consumo e di lavoro?

Rappresentate il problema e la sua soluzione anche geometricamente con l'opportuna mappa di curve di indifferenza e il vincolo di bilancio.

La soluzione a questo esercizio è esattamente quella fornita nell'esercizio 6.2 perché la funzione di utilità $v(n;c)$ rappresenta le stesse preferenze della funzione di utilità precedente $u(n;c)$ perché sono l'una la trasformazione monotona crescente dell'altra. In particolare

$$v(n;c) = u(n;c) + 10.$$

Quindi essendo le funzioni di utilità ordinali e la somma di 10 monotona crescente ed essendo gli altri dati – salario orario e tempo a disposizione – comuni ad entrambi gli esercizi, la soluzione trovata nell'esercizio 6.2 vale anche per $v(n;c)$.

6.11 (a) Risolvete il problema di scelta di un consumatore/lavoratore caratterizzato dalla funzione di utilità

$$u\,(n,c) = \ln(n + 2) + \ln(c),$$

se ha a disposizione 20 ore e il salario orario è di € 30.
Rappresentate il problema e la sua soluzione anche geometricamente con l'opportuna mappa di curve di indifferenza e il vincolo di bilancio.

(a) Ipotizziamo che la soluzione sia strettamente positiva per il tempo libero e quindi partiamo eguagliando i valori soggettivi e controlliamo che il vincolo di bilancio sia soddisfatto. In formule:

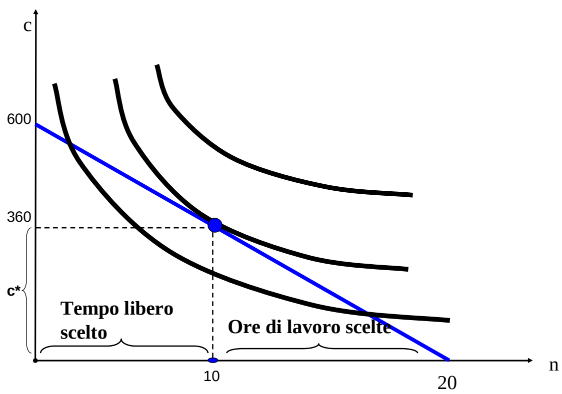
$$\frac{UM_n}{w} = UM_c \quad \Leftrightarrow \quad c = -wn + wT.$$

In questo caso:

$$\begin{cases} \dfrac{1/(n+2)}{30} = \dfrac{1}{c} \\ c = -30n + 30 \times 20 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{30(n+2)} = \dfrac{1}{c} \\ c = -30n + 600 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} c = 30n + 60 \\ 30n + 60 = -30n + 600 \end{cases} = \begin{cases} n^* = 9 \\ c^* = 330. \end{cases}$$

Poiché la soluzione ottima implica una quantità strettamente positiva per il tempo libero, non devo controllare per soluzioni d'angolo con relative disuguaglianze tra i valori soggettivi.
Dato questo paniere di tempo libero e consumo, il consumatore deve lavorare in misura pari a $l^* = T - n^* = 20 - 9 = 11$.
Graficamente:



(b) Risolvete il problema di scelta di un consumatore/lavoratore caratterizzato dalla funzione di utilità

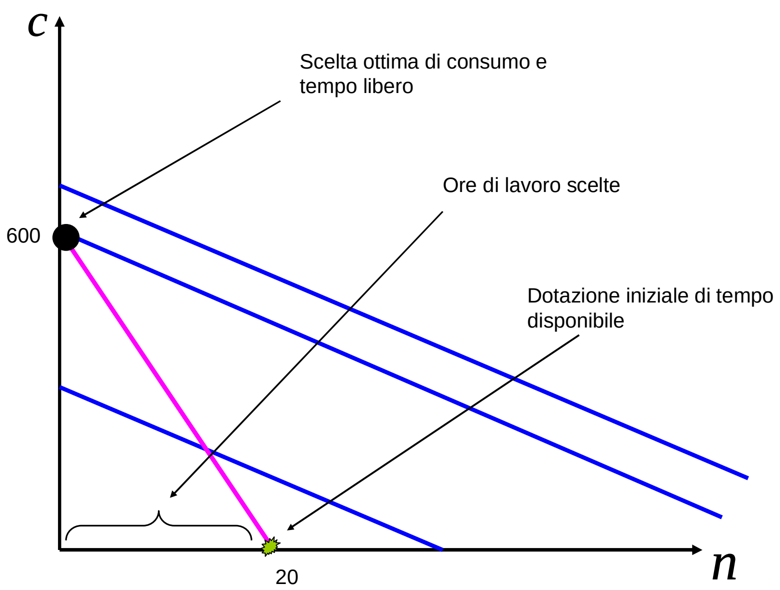
$$u\,(n,c) = n + 2c,$$

se ha a disposizione 20 ore e il salario orario è di € 30.
Rappresentate il problema e la sua soluzione anche geometricamente con l'opportuna mappa di curve di indifferenza e il vincolo di bilancio.

(b) Per risolvere il problema del consumatore dobbiamo considerare i valori soggettivi, ma non dobbiamo eguagliarli perché sono costanti e quindi l'eguaglianza in generale non può essere soddisfatta. Però dal loro confronto si può decidere quale bene viene consumato in misura nulla, cioè quelli che hanno il valore soggettivo minimo. Quindi si ha:

$$\frac{UM_n}{30} = \frac{1}{30} < UM_c = 2,$$

Pertanto in equilibrio $n^* = 0$ e sostituendo nel vincolo di bilancio $c = -30n + 600$ si ottiene $c^* = 600$.
Dato questo paniere di tempo libero e consumo ottimo, il consumatore deve lavorare in misura pari a $l^* = T - n^* = 20 - 0 = 20$.
Graficamente:



(c) Risolvete il problema di scelta di un consumatore/lavoratore caratterizzato dalla funzione di utilità

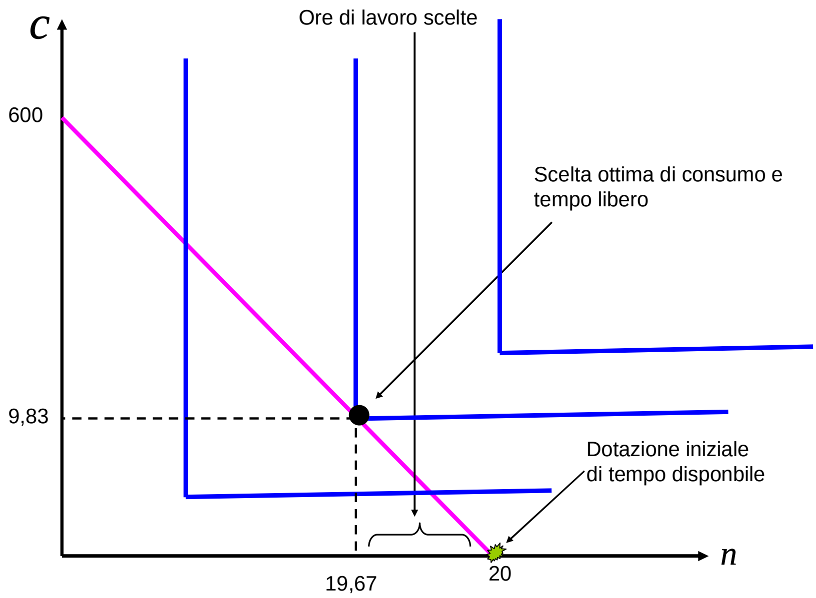
$$u\,(n,c) = \min\{n\,,2c\},$$

se ha a disposizione 20 ore e il salario orario è di € 30.
Rappresentate il problema e la sua soluzione anche geometricamente con l'opportuna mappa di curve di indifferenza e il vincolo di bilancio.

(c) In questo caso non è possibile eguagliare i valori soggettivi dei beni per il risolvere il problema del consumatore perché non esiste la derivata della funzione di utilità. Dalla teoria però sappiamo che in questo caso dobbiamo eguagliare gli argomenti della funzione di utilità. Quindi:

$$\begin{cases} n = 2c \\ c = -30n + 30 \times 20 \end{cases} = \begin{cases} n = 2c \\ c = -60c + 600 \end{cases} = \begin{cases} c^* = 9{,}83 \\ n^* = 19.67. \end{cases}$$

Dato questo paniere di consumo e tempo libero ottimo, il consumatore deve lavorare in misura pari a $l^* = T - n^* = 20 - 19{,}67 = 0{,}33;$ cioè il 33% di un'ora, ossia circa venti minuti.
Graficamente:



6.14 Un consumatore/lavoratore è caratterizzato dalla seguente funzione di utilità:

$$u(n, c) = 2n + \ln(c+1).$$

Derivate nel modo più completo possibile la funzione di domanda di tempo libero e di consumo e la funzione di offerta di lavoro.
Rappresentate il problema e la sua soluzione anche geometricamente con l'opportuna mappa di curve di indifferenza e il vincolo di bilancio.

Per il risolvere il problema del consumatore bisogna eguagliare i valori soggettivi del tempo libero e del consumo, controllando che il vincolo di bilancio sia soddisfatto e lasciando in termini parametrici il prezzo del tempo libero, cioè il salario, e la dotazione di tempo a disposizione. In formule:

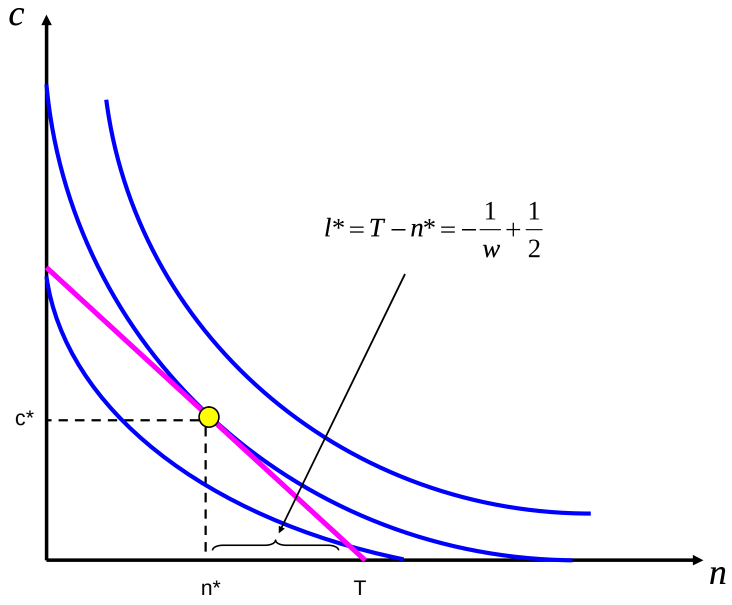
$$\frac{UM_n}{w} = UM_c$$
$$c = -wn + wT.$$

In questo caso:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{w} = \dfrac{1}{c+1} \\ c = -wn + wT \end{cases} = \begin{cases} 2c + 2 = w \\ c = -wn + wT \end{cases} = \begin{cases} c^* = \dfrac{w}{2} - 1 \\ \dfrac{w}{2} - 1 = -wn + wT \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} c^*(w,T) = \dfrac{w}{2(1-n)} \\ n^*(w,T) = \dfrac{1}{w} + T - \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Quindi l'offerta di lavoro è data da $l^* = T - n^* = -\frac{1}{w} + \frac{1}{2}$. Notate che a differenza dell'esercizio precedente la domanda di tempo libero e quindi l'offerta di lavoro sono dipendenti dal salario, in particolare in questo caso la domanda di tempo libero diminuisce all'aumentare del salario e quindi l'offerta di lavoro aumenta all'aumentare del salario.
Graficamente:


c
$l^* = T - n^* = -\frac{1}{w} + \frac{1}{2}$
c*
n*
T
n