SOLUZIONE
LEZIONE 6
Esercitazione
Funzioni di utilità e scelta ottima

5.5 (a) Risolvete il problema del consumatore per un individuo caratterizzato dalla funzione di utilità

$$u(p; f; s) = 8 \ln(p + 2) + 6 \ln(f + 1) + 2 \ln(2s + 1),$$

se i prezzi sono p_p = € 1, p_f = € 2 e p_s = € 4 e il consumatore ha € 18 da spendere.

In questo caso:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{8}{p+2}}{1} = \dfrac{\frac{6}{f+1}}{2} = \dfrac{\frac{4}{2s+1}}{4} \\ p + 2f + 4s = 18 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{8}{p+2} = \dfrac{3}{f+1} = \dfrac{1}{2s+1} \\ p + 2f + 4s = 18 \end{cases}$$

che diventa

$$\begin{cases} 16s + 8 = p + 2 \\ 6s + 3 = f + 1 \\ p + 2f + 4s = 18 \end{cases} = \begin{cases} p = 16s + 6 \\ f = 6s + 2 \\ 16s + 6 + 12s + 4 + 4s = 18 \end{cases} \begin{cases} s^* = 0{,}25 \\ f^* = 3{,}5 \\ p^* = 10. \end{cases}$$

(b) Risolvete il problema del consumatore per un individuo caratterizzato dalla funzione di utilità

$u\ (p; f; s) = 8 \ln(p + 2) + 6 \ln(f + 1) + 2 \ln(2s + 1)$,

se i prezzi sono p_p = € 1, p_f = € 2 e p_s = € 4 e il consumatore ha € 6,50 da spendere.

Analogamente a prima, variando però il reddito disponibile:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{8}{p+2}}{1} = \dfrac{\frac{6}{f+1}}{2} = \dfrac{\frac{4}{2s+1}}{4} \\ p+2f+4s=6{,}5 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{8}{p+2} = \dfrac{3}{f+1} = \dfrac{1}{2s+1} \\ p+2f+4s=18 \end{cases}$$

che diventa

$$\begin{cases} 16s+8 = p+2 \\ 6s+3 = f+1 \\ p+2f+4s=6{,}5 \end{cases} = \begin{cases} p = 16s+6 \\ f = 6s+2 \\ 16s+6+12s+4+4s=6{,}5 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} s^* = -0{,}1 \ \text{impossibile} \\ f^* = \dots \\ p^* = \dots \end{cases}$$

A causa del reddito limitato dobbiamo controllare se la soluzione si ottiene per s*=0 e quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{8}{p+2}}{1} = \dfrac{\frac{6}{f+1}}{2} \\ p+2f=6{,}5 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{8}{p+2} = \dfrac{3}{f+1} \\ p+2f=6{,}5 \end{cases} = \begin{cases} 8f+8=3p+6 \\ p+2f=6{,}5 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p = \dfrac{8}{3}f + \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{8}{3}f + \dfrac{2}{3} + 2f = 6{,}5 \end{cases} = \begin{cases} f^* = \dfrac{5}{4} \\ p^* = 4. \end{cases}$$

Notate che in equilibrio, cioè per *s*=0, f*=1,25 e p*=4*, si ha:

$$\frac{UM_p}{p_p} = \frac{4}{3} = \frac{UM_f}{p_f} = \frac{4}{3} > \frac{UM_s}{p_s} = 1.$$

(c) Risolvete il problema del consumatore per un individuo caratterizzato dalla funzione di utilità

$u\,(p;\,f;\,s;\,m) = 8\ln(p + 2) + 6\ln(f + 1) + 2\ln(2s + 1) + m,$

dove m è il denaro avanzato, se i prezzi sono p_p = € 1, p_f = € 2 e p_s = € 4 e il consumatore ha € 50 da spendere. Risolvete lo stesso problema nei casi in cui il consumatore possa spendere rispettivamente: € 500; € 18; € 6,50.

In questo caso:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{8}{p+2}}{1} = \dfrac{\frac{6}{f+1}}{2} = \dfrac{\frac{4}{2s+1}}{4} = 1 \\ p + 2f + 4s + m = 50 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{8}{p+2} = \dfrac{3}{f+1} = \dfrac{1}{2s+1} = 1 \\ p + 2f + 4s + m = 50 \end{cases}$$

che diventa

$$\begin{cases} p + 2 = 8 \\ f + 1 = 3 \\ 2s + 1 = 1 \\ m = 50 - p - 2f - 4s \end{cases} = \begin{cases} p^* = 6 \\ f^* = 2 \\ s^* = 0 \\ m^* = 50 - 6 - 4 = 40. \end{cases}$$

Chiaramente questo risultato vale per ogni reddito disponibile fino a quando $m^*>0$; quindi

- se il reddito disponibile è € 500, allora $p^*=6$, $f^*=2$, $s^*=0$ e $m^*=500-10=490$,
- se il reddito disponibile è € 18, allora $p^*=6$, $f^*=2$, $s^*=0$ e $m^*=18-10=8$,

se il reddito disponibile è € 6,5, allora la soluzione precedente non funziona più perché $p^*=6$, $f^*=2$, $s^*=0$ implica $m^*=6{,}5-10<0$, che è impossibile. In questo caso $m^*=0$ e si torna alla soluzione trovata al punto (b): $m^*=s^*=0$, $f^*=1{,}25$ e $p^*=4$.

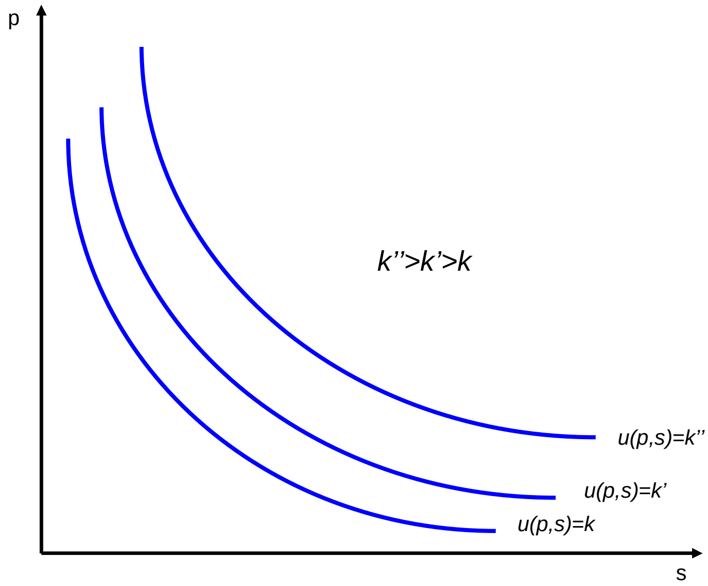
5.10 Considerate un consumatore che sceglie tra panieri costituiti da pane e salame. Le sue preferenze possono essere descritte dalla seguente funzione di utilità: $u(p,s) = ps$.

(a) Tracciate la mappa di curve di indifferenza di questo consumatore.

Le curve di indifferenza sono definite dall'equazione $u(p,s) = \text{costante}$, quindi in questo esempio:

$$ps = \text{costante} \quad \text{cioè} \quad p = \frac{k}{s} \quad \text{dove } k \text{ è la costante.}$$

Quindi la mappa di curve di indifferenza si ottiene al variare di *k*:

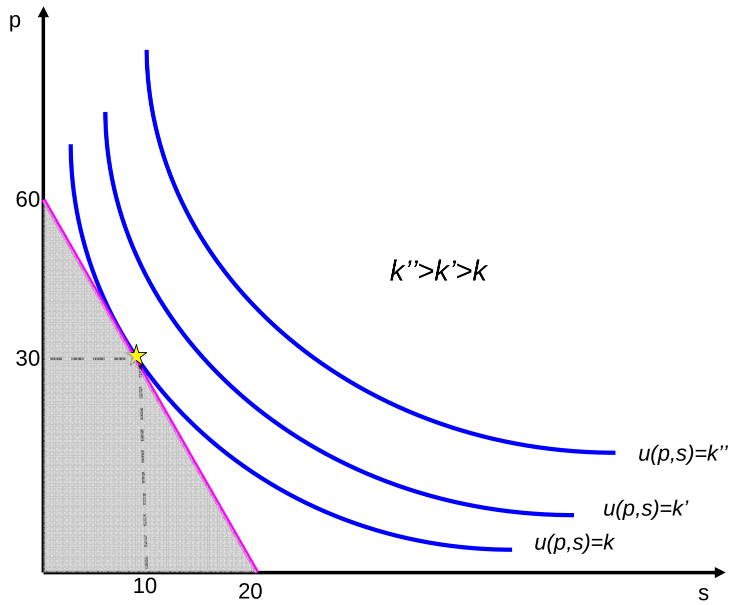


(b) Supponete che il prezzo del pane sia € 1, mentre il salame costa € 3 e che il reddito disponibile sia € 60: calcolate algebricamente e indicate graficamente il paniere scelto dal consumatore.

Algebricamente il calcolo del paniere scelto si ottiene al solito eguagliando i valori soggettivi e considerando il vincolo di bilancio:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{1} = \dfrac{p}{3} \\ p + 3s = 60 \end{cases} = \begin{cases} p = 3s \\ 3s + 3s = 60 \end{cases} = \begin{cases} s^* = 10 \\ p^* = 30. \end{cases}$$

Se il prezzo del pane è € 1, del salame € 3 e il reddito disponibile è € 60, il vincolo di bilancio è $p + 3s = 60$, rappresentato dalla retta $p = -3s + 60$. In figura rappresentiamo tramite una retta il vincolo di bilancio, l'insieme di bilancio tramite il triangolo grigio, la funzione di utilità tramite la mappa di curve di indifferenza e il paniere scelto dal consumatore, individuato dalla curva di indifferenza più alta compatibile con il vincolo di bilancio, tramite la stellina gialla.

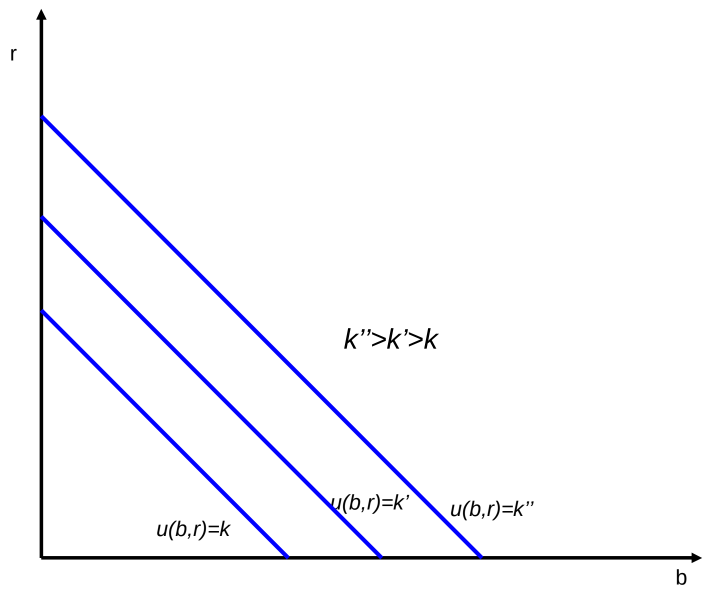


5.11 Immaginate un consumatore che sceglie tra panieri costituiti da bicchieri di vino bianco e di vino rosso. Le sue preferenze possono essere descritte (in modo approssimato) in questo modo: gli piacciono entrambi i tipi vino e qualsiasi sia la quantità non trovo differenza tra un bicchiere di bianco o di rosso.
(a) Cercate di tracciare le curve di indifferenza di questo consumatore conformemente alle precedenti affermazioni, cercando di essere il più "realisti" possibile, ossia rispettando il più possibile i termini generali indicati nella breve descrizione fornita.

Le preferenze di questo consumatore tra vino bianco e vino rosso sono del tipo sostituti perfetti 1 a 1, quindi possono essere descritti dalla seguente funzione di utilità, dove *b* indica il vino bianco e *r* indica il vino rosso: $u(b,r) = b + r$.
(a) Le curve di indifferenza sono definite dall'equazione $u(b,r) = \text{costante}$, quindi in questo esempio:

$$b + r = \text{costante} \quad \text{cioè} \quad r = -b + k \quad \text{dove } k \text{ è la costante.}$$

Quindi la mappa di curve di indifferenza si ottiene al variare di *k*:



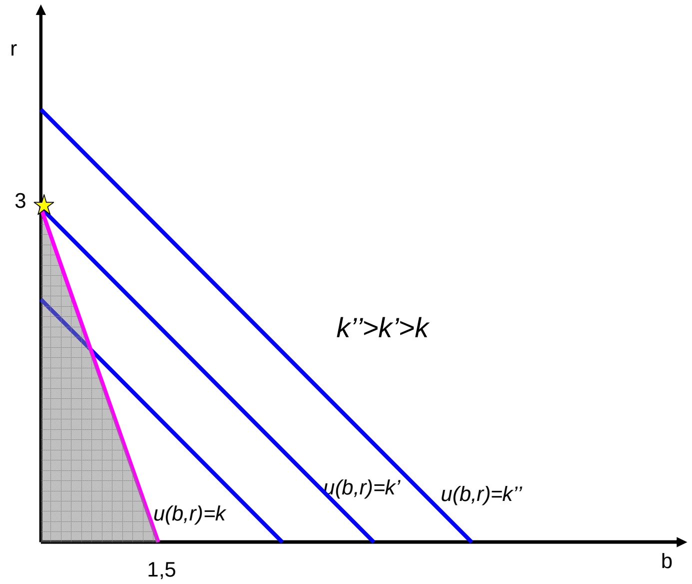
(b) Supponete che il prezzo del vino bianco sia il doppio del prezzo del vino rosso, che è pari a € 1 e che il reddito disponibile sia € 3: calcolate algebricamente e indicate graficamente il paniere scelto dal consumatore.

Per risolvere il problema del consumatore dobbiamo considerare i valori soggettivi, ma non dobbiamo eguagliarli perché sono costanti e quindi l'eguaglianza in generale non può essere soddisfatta. Però dal loro confronto si può decidere quale bene viene consumato in misura nulla, cioè quelli che hanno il valore soggettivo minimo. Quindi si ha:

$$\frac{UM_r}{p_r} = 1 > \frac{UM_b}{p_b} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto in equilibrio *b*=0* e sostituendo nel vincolo di bilancio si ottiene *r*=3*.

In figura rappresentiamo tramite una retta il vincolo di bilancio, l'insieme di bilancio tramite il triangolo grigio, la funzione di utilità tramite la mappa di curve di indifferenza e il paniere scelto dal consumatore, individuato dalla curva di indifferenza più alta compatibile con il vincolo di bilancio, tramite la stellina gialla.



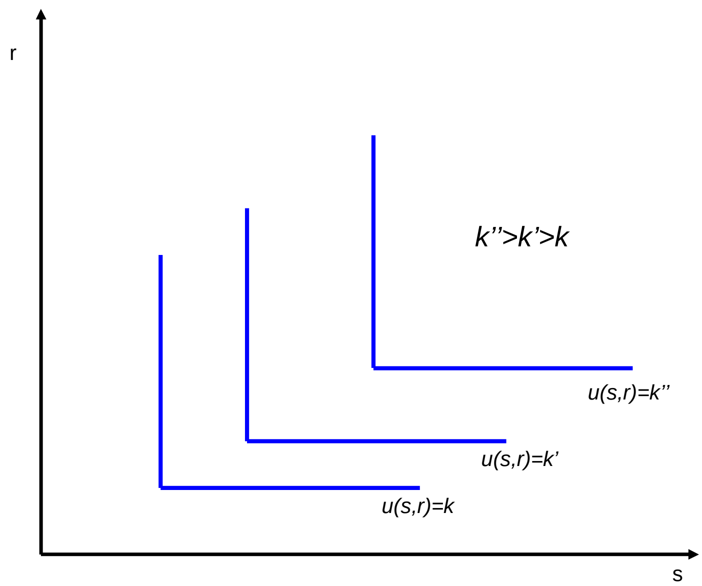
5.12 Immaginate un consumatore che sceglie tra panieri costituiti da fette di salame e bicchieri di vino rosso. Le sue preferenze possono essere descritte (in modo approssimato) in questo modo: gli piacciono entrambi i beni e qualsiasi sia la quantità desidera sembra abbinare a due fette di salame un bicchiere di vino rosso.
(a) Cercate di tracciare le curve di indifferenza di questo consumatore conformemente alle precedenti affermazioni, cercando di essere il più "realisti" possibile, ossia rispettando il più possibile i termini generali indicati nella breve descrizione fornita.

Le preferenze di questo consumatore tra fette di salame e bicchieri di vino rosso sono del tipo complementi perfetti 2 con 1, quindi possono essere descritti dalla seguente funzione di utilità, dove *s* indica il salame e *r* indica il vino rosso: $u(s,r) = \min\{s, 2r\}$.

(a) Le curve di indifferenza sono definite dall'equazione $u(s,r) = \text{costante}$, quindi in questo esempio:

$$\min\{s, 2r\} = k \quad \text{dove } k \text{ è la costante.}$$

Quindi la mappa di curve di indifferenza si ottiene al variare di *k*:

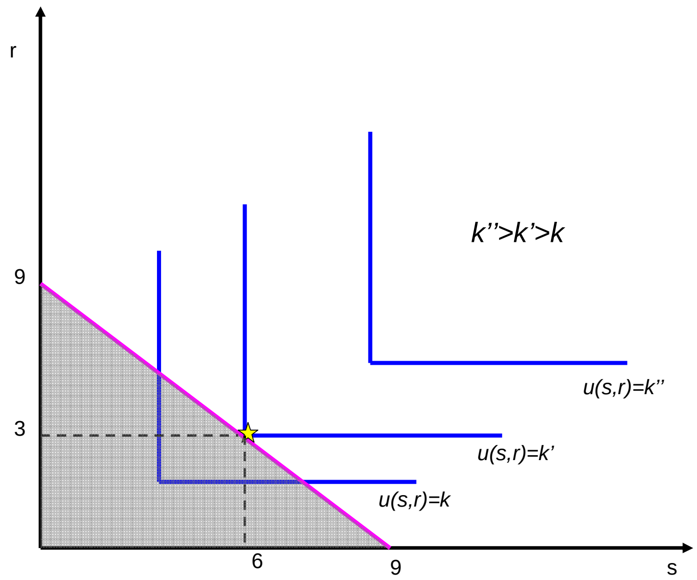


(b) Supponete che il prezzo del salame sia pari al prezzo del vino rosso, che è pari a € 1 e che il reddito disponibile sia € 9: calcolate algebricamente e indicate graficamente il paniere scelto dal consumatore.

In questo caso non è possibile eguagliare i valori soggettivi dei beni per il risolvere il problema del consumatore perché non esiste la derivata della funzione di utilità. Dalla teoria però sappiamo che in questo caso dobbiamo eguagliare gli argomenti della funzione di utilità. Quindi:

$$\begin{cases} s = 2r \\ s + r = 9 \end{cases} = \begin{cases} s = 2r \\ 2r + r = 9 \end{cases} = \begin{cases} r^* = 3 \\ s^* = 6. \end{cases}$$

In figura rappresentiamo tramite una retta il vincolo di bilancio, l'insieme di bilancio tramite il triangolo grigio, la funzione di utilità tramite la mappa di curve di indifferenza e il paniere scelto dal consumatore, individuato dalla curva di indifferenza più alta compatibile con il vincolo di bilancio, tramite la stellina gialla.



5.14 Un consumatore con un reddito pari a y da spendere in pane e formaggio e salame ha la funzione di utilità

$$u(p; f) = \ln(p) + \ln(f).$$

Trovate la funzione di domanda di tale consumatore per il pane e per il formaggio.

Per il risolvere il problema del consumatore bisogna eguagliare i valori soggettivi dei beni e controllare che il vincolo di bilancio sia soddisfatto, lasciando in termini parametrici i prezzi dei beni e il reddito. In formule:

$$\frac{UM_1}{p_1} = \frac{UM_2}{p_2} = \ldots = \frac{UM_n}{p_n}$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n \leq y.$$

In questo caso:

$$\begin{cases} \dfrac{1/p}{p_p} = \dfrac{1/f}{p_f} \\ p_p p + p_f f = y \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{p_p p} = \dfrac{1}{p_f f} \\ p_p p + p_f f = y \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p_p p = p_f f \\ p_p p + p_f f = y \end{cases} = \begin{cases} f^*(p_p, p_f, y) = \dfrac{y}{2 p_f} \\ p^*(p_p, p_f, y) = \dfrac{y}{2 p_p}. \end{cases}$$

5.15 Un consumatore con un reddito pari a y da spendere in pane e formaggio e salame ha la funzione di utilità

$$v(p; f) = pf\,.$$

Trovate la funzione di domanda di tale consumatore per il pane e per il formaggio.

La soluzione a questo esercizio è esattamente quella fornita nell'esercizio 5.14 perché la funzione di utilità $v(p;f)$ rappresenta le stesse preferenze della funzione di utilità precedente $u(p;f)$ perché sono l'una la trasformazione monotona crescente dell'altra. In particolare

$$u(p; f) = \log(v(p; f)).$$

Quindi essendo le funzioni di utilità ordinali e la funzione logaritmica monotona crescente, la soluzione trovata nell'esercizio 5.14 vale anche per $v(p;f)$.

5.17 Un consumatore con un reddito pari a *y* da spendere in pane e formaggio e salame ha la funzione di utilità

$$u(p; f) = \min\{3p, f\} \,.$$

Trovate la funzione di domanda di tale consumatore per il pane e per il formaggio.

In questo caso non è possibile eguagliare i valori soggettivi dei beni per il risolvere il problema del consumatore perché non esiste la derivata della funzione di utilità. Dalla teoria però sappiamo che in questo caso dobbiamo eguagliare gli argomenti della funzione di utilità. Quindi:

$$\begin{cases} 3p = f \\ p_p p + p_f f = y \end{cases} = \begin{cases} 3p = f \\ p_p p + 3p_f p = y \end{cases} = \begin{cases} p^*(p_p, p_f, y) = \dfrac{y}{p_p + 3p_f} \\ f^*(p_p, p_f, y) = \dfrac{3y}{p_p + 3p_f} \end{cases}.$$

5.18 Un consumatore con un reddito pari a y da spendere in pane e formaggio e salame ha la funzione di utilità

$$u(p;f) = p + 2f\,.$$

Trovate la funzione di domanda di tale consumatore per il pane e per il formaggio.

Per risolvere il problema del consumatore dobbiamo considerare i valori soggettivi, ma non dobbiamo eguagliarli perché sono costanti e quindi l'eguaglianza in generale non può essere soddisfatta. Però dal loro confronto si può decidere quale bene viene consumato in misura nulla, cioè quelli che hanno il valore soggettivo minimo. Quindi in equilibrio $f^*=0$ se e solo se:

$$\frac{UM_p}{p_p} = \frac{1}{p_p} > \frac{UM_f}{p_f} = \frac{2}{p_f} \Leftrightarrow p_f > 2p_p.$$

Pertanto in questo caso $f^*=0$ e consumo tutto il mio reddito per la domanda di pane. Viceversa se:

$$\frac{UM_p}{p_p} = \frac{1}{p_p} < \frac{UM_f}{p_f} = \frac{2}{p_f} \Leftrightarrow p_f < 2p_p$$

allora $p^*=0$ e consumo tutto il mio reddito per la domanda di formaggio. Quindi la domanda di pane e formaggio è:

$$\begin{cases} p^*(p_p, p_f, y) = \begin{cases} \dfrac{y}{p_p} & se \quad p_p < 0{,}5p_f \\ \in [0, \dfrac{y}{p_p}] & se \quad p_p = 0{,}5p_f \\ 0 & se \quad p_p > 0{,}5p_f \end{cases} \\ f^*(p_p, p_f, y) = \begin{cases} \dfrac{y}{p_f} & se \quad p_p > 0{,}5p_f \\ \in [0, \dfrac{y}{p_f}] & se \quad p_p = 0{,}5p_f \\ 0 & se \quad p_p < 0{,}5p_f. \end{cases} \end{cases}$$