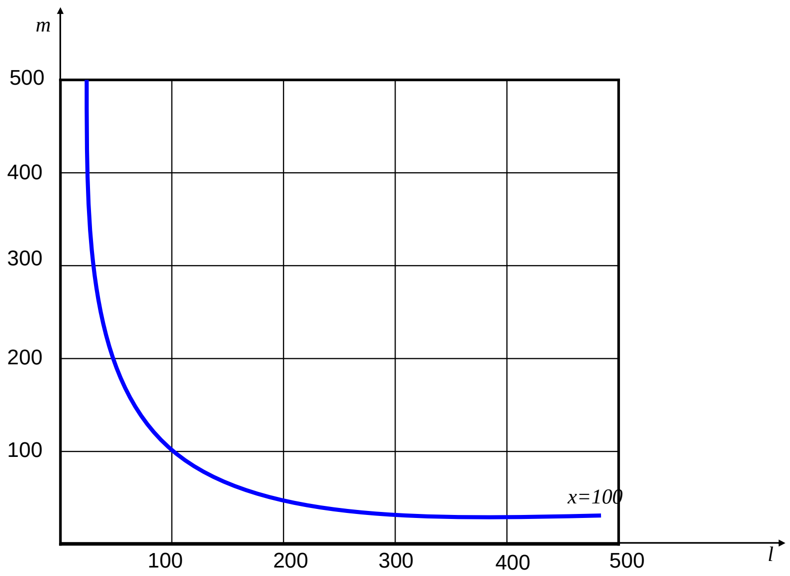
SOLUZIONE
LEZIONE 18
Esercitazione
Tecnologia e costi

9.4 La figura seguente mostra l'isoquanto di 100 unità in un'impresa che realizza un unico prodotto con lavoro e materiali. Questo isoquanto deriva dalla funzione di produzione:

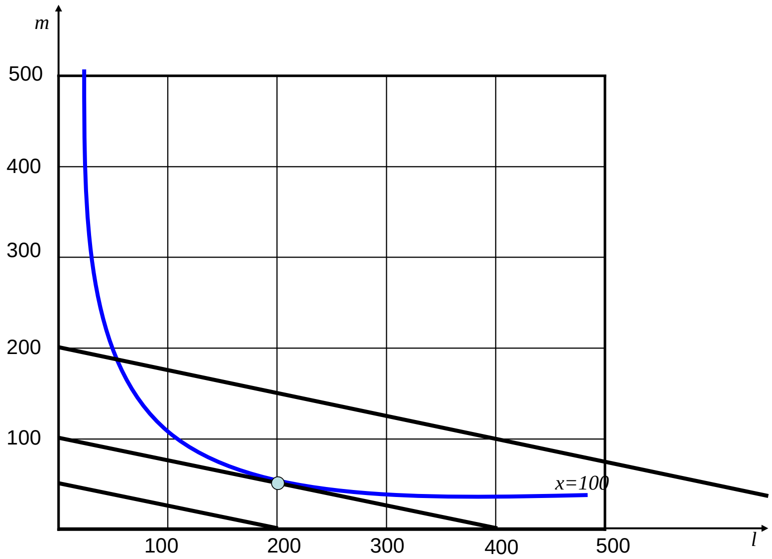
$$f(l; m) = l^{1/2}m^{1/2}$$

(abbiamo tracciato l'isoquanto con il più alto grado di precisione possibile, che è perlomeno sufficiente per questo problema, ma probabilmente non perfetto per l'esatta corrispondenza con la funzione di produzione). La tecnologia di produzione correlata a questa funzione di produzione presenta rendimenti di scala costanti. Il prezzo delle materie prime ammonta a € 4 l'unità, quello del lavoro ammonta a € 1 per unità.



(a) Trovate il valore di CT(100) prima utilizzando il grafico dell'isoquanto di 100 unità, poi impiegando il metodo algebrico della funzione di produzione.

La mappa di isocosti è data dalla seguente funzione, al variare della costante *costi:* $\text{costi} = l + 4m$, cioè $m = -\frac{1}{4}l + \frac{\text{costi}}{4}$, che nel seguente grafico sono rappresentate dalle rette:



Dal disegno sembra che la combinazione ottima di input sia *l=200* e *m=50*, quindi il costo per produrre 100 unità sarebbe $CT(x) = r_l l(r_l, r_m, x) + r_m m(r_l, r_m, x) = 1\times 200 + 4\times 50 = 400$.

Per risolvere il problema algebricamente cerco in primo luogo le produttività marginali di l e m: $\frac{\partial f(l,m)}{\partial l} = \frac{m^{1/2}}{2l^{1/2}}$ e $\frac{\partial f(l,m)}{\partial m} = \frac{l^{1/2}}{2m^{1/2}}$.

Quindi la quantità ottima di fattori produttivi usata la trovo risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{l^{1/2} / 2m^{1/2}}{m^{1/2} / 2l^{1/2}} = \dfrac{4}{1} \\ l^{1/2}m^{1/2} = 100 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{l}{m} = 4 \\ lm = 10.000 \end{cases} = \begin{cases} l = 4m \\ 4m^2 = 10.000 \end{cases} = \begin{cases} m^* = 50 \\ l^* = 200 \end{cases},$$

che conferma quanto trovato geometricamente. Quindi anche con questo metodo di soluzione:

$CT(x) = r_l l(r_l, r_m, x) + r_m m(r_l, r_m, x) = 1 \times 200 + 4 \times 50 = 400$.

(b) Supponete che l'impresa sia soggetta a una curva di domanda inversa con forma $P(x) = 12 - (x/2000)$, dove x è il numero di unità prodotte e vendute e $P(x)$ è il loro prezzo. Quale prezzo chiederà l'impresa per massimizzare i profitti e quante unità produrrà? (Potete rispondere rapidamente a questa domanda sfruttando il fatto che questa tecnologia di produzione presenta rendimenti di scala costanti).

Sfruttando l'informazione sulla costanza dei rendimenti di scala possiamo dire che i costi marginali sono costanti, quindi se il costo per produrre 100 unità di x è 400, il costo marginale è 4. Se desidero trovare in modo più rigoroso i costi marginali allora devo derivare la funzione di costo risolvendo il seguente sistema per trovare la domanda degli input in funzione della produzione:

$$\begin{cases} \dfrac{l^{1/2}/2m^{1/2}}{m^{1/2}/2l^{1/2}} = \dfrac{4}{1} \\ l^{1/2}m^{1/2} = x \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{l}{m} = 4 \\ l^{1/2}m^{1/2} = x \end{cases} = \begin{cases} l = 4m \\ 2m = x \end{cases} = \begin{cases} m^*(x) = \dfrac{x}{2} \\ l^*(x) = 2x \end{cases}.$$

Quindi la funzione di costo totale è $CT(x) = r_l l^*(x) + r_m m^*(x) = 1 \times 2x + 4 \times \dfrac{x}{2} = 4x$ e quindi come previsto $CMa(x) = 4$.

Dalla funzione di domanda inversa $P(x) = 12 - (x/2000)$ è facile derivare il ricavo totale $RT(x) = P(x) \times x = \left(12 - \dfrac{x}{2.000}\right)x = 12x - \dfrac{x^2}{2.000}$, e quindi il ricavo marginale $RMa(x) = \dfrac{\partial RT(x)}{\partial x} = 12 - \dfrac{x}{1.000}$; la condizione di massimizzazione del profitto *RMa(x)=CMa(x)* diventa $12 - (x/1.000) = 4$, che implica *x=8.000* con prezzo unitario pari a *P(x)=8.*

9.5 Un'impresa realizza un prodotto brevettato, chiamato xillip, a partire da due input: le materie prime e il lavoro. Se indichiamo con x la quantità di xillip prodotti, con m la quantità delle materie prime e con l la quantità del lavoro, allora la funzione di produzione dell'impresa è data da $x = m^{1/3}l^{1/6}$. L'impresa inoltre deve possedere una licenza per produrre xillip, che costa € 300 per periodo produttivo, a prescindere dalla quantità di xillip prodotta. Il prezzo di una unità di materie prime ammonta a € 1 e quello di una unità di lavoro ammonta a € 4. La funzione di domanda (inversa) per xillip è $P = 160 - 2x$. Trovate il piano di produzione che massimizza il profitto di questa impresa in due fasi: innanzitutto trovate la funzione di costo totale, successivamente trovate il livello di produzione che massimizza il profitto ponendo il costo marginale pari al ricavo marginale.

Per derivare la funzione di costo cerco in primo luogo le produttività marginali di l e m: $\dfrac{\partial f(l,m)}{\partial l} = \dfrac{m^{1/3}}{6l^{5/6}}$ e $\dfrac{\partial f(l,m)}{\partial m} = \dfrac{l^{1/6}}{3m^{2/3}}$. Quindi dobbiamo risolvere il seguente sistema per trovare la domanda degli input in funzione della produzione:

$$\begin{cases} \dfrac{l^{1/6} / 3m^{2/3}}{m^{1/3} / 6l^{5/6}} = \dfrac{1}{4} \\ l^{1/6}m^{1/3} = x \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{l^{1/6}}{3m^{2/3}} \times \dfrac{6l^{5/6}}{m^{1/3}} = \dfrac{1}{4} \\ l^{1/6}m^{1/3} = x \end{cases} = \begin{cases} 8l = m \\ l^{1/6}(8l)^{1/3} = x \end{cases} = .$$

$$= \begin{cases} 8l = m \\ 2l^{1/2} = x \end{cases} = \begin{cases} l^*(x) = \dfrac{x^2}{4} \\ m^*(x) = 2x^2 \end{cases}$$

Quindi la funzione di costo totale variabile è $CTV(x) = r_l l^*(x) + r_m m^*(x) = 4 \times \dfrac{x^2}{4} + 1 \times 2x^2 = 3x^2$. Al costo totale variabile devo sommare i costi fissi per trovare i costi totali: $CT(x) = 3x^2 + 300$.

Quindi il costo marginale è $CMa(x) = \dfrac{\partial CT(x)}{\partial x} = 6x$.

Dalla funzione di domanda inversa $P(x) = 160 - 2x$ è facile derivare il ricavo totale $RT(x) = P(x) \times x = (160 - 2x)x = 160x - 2x^2$, e quindi il ricavo marginale $RMa(x) = \frac{\partial RT(x)}{\partial x} = 160 - 4x$; la condizione di massimizzazione del profitto *RMa(x)=CMa(x)* diventa $160 - 4x = 6x$, che implica *x=16* con prezzo unitario pari a *P(x)=128.* Quindi il profitto massimo è

$$\pi(16) = RT(16) - CT(16) = 128 \times 16 - 300 - 3 \times (16)^2 =$$

$$= 2.048 - 300 - 768 = 980.$$

9.6 Considerate la funzione di produzione

$$f(c; l; m) = c^{1/2}l^{1/8}m^{1/4}:$$

presenta rendimenti di scala crescenti, decrescenti o costanti?.

Per calcolare i rendimenti di scala applico la definizione, cioè confrontiamo $f(\lambda y_1;...;\lambda y_n)$ con $\lambda f(y_1;...;y_n)$.

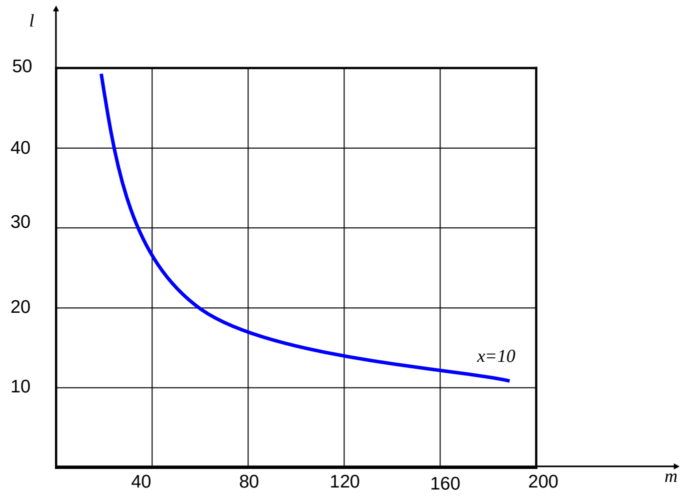
Consideriamo la prima funzione di produzione $f(c; l; m) = c^{1/2}l^{1/8}m^{1/4}$:

$$f(\lambda c;\lambda l;\lambda m) = (\lambda c)^{1/2}(\lambda l)^{1/8}(\lambda m)^{1/4} = \lambda^{1/2}c^{1/2}\lambda^{1/8}l^{1/8}\lambda^{1/4}m^{1/4} =$$

$$= \lambda^{1/2+1/8+1/4}c^{1/2}l^{1/8}m^{1/4} = \lambda^{7/8}f(c;l;m) < \lambda f(c;l;m) \quad \forall\lambda > 1$$

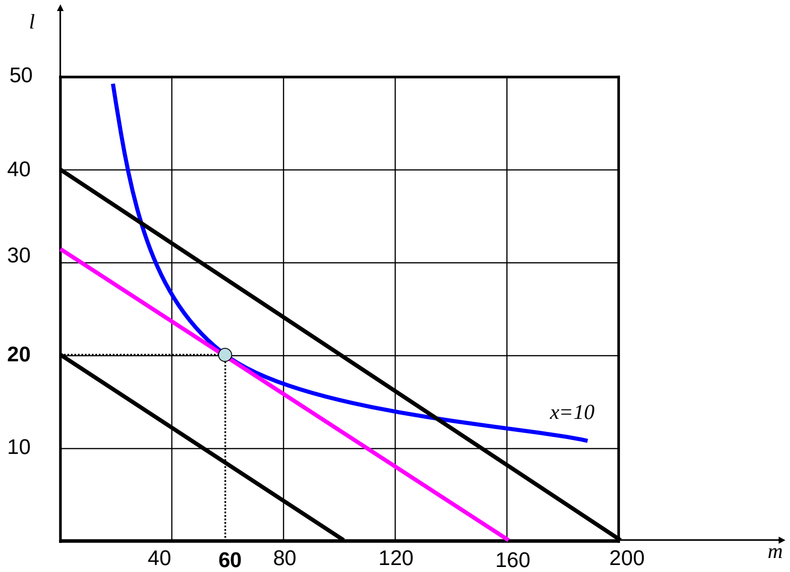
Quindi questa funzione di produzione presenta rendimenti di scala decrescenti.

9.8 Nella Figura seguente è rappresentato l'isoquanto di 10 unità per un'impresa che produce rewp a partire da due input: lavoro e materie prime. Il lavoro costa € 10 per unità e le materie prime costano € 2 l'unità.



(a) Quanto costa all'impresa produrre 10 rewp nel modo più economico possibile?

La mappa di isocosti è data dalla seguente sequenza di funzioni al variare del costo: $10l + 2m = \text{costo}$, cioè $l = -\frac{1}{5}m + \frac{\text{costo}}{10}$. Sovrapponendo tale mappa all'isoquanto si ottiene il disegno seguente, dal quale è facile derivare che la quantità domandata di lavoro e materie prime è *l=20* e *m=60*. Quindi il costo totale di produzione è $CT(10) = 10 \times 20 + 2 \times 60 = 320$, quindi all'impresa produrre 10 rewp nel modo più economico possibile costa 320.



(b) Supponete di sapere che questa impresa presenta rendimenti di scala costanti. Completate la frase seguente scegliendo una delle tre alternative.

Il costo totale di produrre 15 rewp $\begin{cases} \text{non è superiore a} \\ \text{è esattamente pari a} \\ \text{non è inferiore a} \end{cases}$

____.

Se l'impresa presenta rendimenti di scala costanti, allora i costi medi sono costanti. Quindi posso derivare i costi medi di produzione per produrre 10 rewp che sono esattamente pari ai costi medi per produrre 15 rewp: $CMe(10) = \frac{CT(10)}{10} = \frac{320}{10} = 32 = CMe(15)$. Quindi i costi totali di produrre 15 rewp sono $CT(15) = CMe(15) \times 15 = 32 \times 15 = 480$.

9.10 Un'impresa che realizza un particolare prodotto chimico di base può utilizzare uno di due processi: il primo consiste in idratazione seguita da distillazione, il secondo è costituito da un processo catalitico completamente separato. Gli input del processo sono costituiti dalle materie prime (un diverso prodotto chimico di base acquistato a € 1 il chilogrammo), il tempo della manodopera necessario per gestire i processi e il tempo di utilizzo delle attrezzature. In particolare, per lavorare un chilogrammo di materie prime occorrono 0,03 ore di lavoro a € 20 l'ora nel processo di idratazione e distillazione e 0,09 ore di lavoro allo stesso tasso salariale nel processo catalitico. Supponete che l'impresa possa variare la quantità delle materie prime acquistate e la quantità di ore di lavoro impiegate, ma che non possa variare la capacità dei due processi: può sfruttare il processo di idratazione e distillazione sino al livello di 1.000 chilogrammi di input all'ora e il processo catalitico sino a 500 chilogrammi di input all'ora. Per ogni chilogrammo di input l'impresa ottiene 0,4 chilogrammi di prodotto finito con il processo di idratazione e distillazione, 0,5 chilogrammi con il processo catalitico.
Qual è la funzione di costo totale dell'impresa? Ignorate i costi fissi delle attrezzature.

Consideriamo prima il processo di idratazione e distillazione: questo processo può processare fino a 1.000 Kg di input all'ora producendo 0,4 kg di output per ogni chilo di input, quindi producendo fino a un massimo di 0,4 x 1.000= 400 chilogrammi di output all'ora. Ogni chilo di input richiede 0,03 ore di lavoro a € 20 all'ora, cioè costa 20 x 0,03 =0,6 € all'ora di lavoro. Inoltre insieme con il lavoro è necessaria la materia prima al costo di € 1 al chilo. Quindi il costo totale di lavorazione di un chilo di input usando il processo di idratazione e distillazione è €1,6 per produrre 0,4 Kg di output, quindi **il costo totale di produzione di un chilo di output usando il processo di idratazione e distillazione è €(1,6)/(0,4)=€4.**
Alternativamente è possibile usare il processo catalitico: questo processo può processare fino a 500 Kg di input all'ora producendo 0,5 kg di output per ogni chilo di input, quindi producendo fino a un massimo di 0,5 x 500= 250 chilogrammi di output all'ora. Ogni chilo di input richiede 0,09 ore di lavoro a € 20 all'ora, cioè costa 20 x 0,09 =1,8 € all'ora di lavoro. Inoltre insieme con il lavoro è necessaria la materia prima al costo di € 1 al chilo. Quindi il costo totale di lavorazione di un chilo di input usando il processo catalitico è €2,8 per

produrre 0,5 Kg di output, quindi **il costo totale di produzione di un chilo di output usando il processo catalitico è €(2,8)/(0,5)=€5,6.**

A questo punto possiamo calcolarci i costi totali: prima usiamo il processo di produzione più economico, quello di idratazione e distillazione che costa € 4 al chilo, per processare 1000 Kg di input e quindi per produrre fino a 400 kg di output, poi per produrre ulteriore output usiamo il secondo processo produttivo, il processo catalitico più costoso, al costo di € 5,60 al chilo, che può processare 500 Kg di input producendo ulteriori 250 Kg di output. Di più non è possibile produrre all'ora. Analiticamente le funzioni di costo totale e di costo marginale sono:

$$CT(x) = \begin{cases} 4x & 0 \le x \le 400 \\ 5{,}6x & 400 \le x \le 650 \\ \infty & x > 650 \end{cases}$$

quindi $$CMa(x) = \begin{cases} 4 & 0 \le x \le 400 \\ 5{,}6 & 400 \le x \le 650 \\ \infty & x > 650. \end{cases}$$

Geometricamente abbiamo le seguenti funzioni: