

# Modello comportamentale del mercato di azioni

## Simulazioni ABM per attori capaci di previsione e decisione

D'Ignazi Jacopo

*jacopo.dignazi@edu.unito.it*

---

### Abstract

In questo progetto ho realizzato delle simulazioni ad agenti del mercato di azioni, con l'obiettivo di evidenziare come diverse strategie comportamentali degli attori possano influenzare l'evoluzione del prezzo di un asset. Il focus della simulazione è stato sui meccanismi di previsione e decisione degli agenti, con l'intento di elaborare un framework versatile ma interpretabile dei loro "processi mentali".

Con questa idea, ho elaborato un "framework comportamentale" in cui assunzioni sui processi mentali possono essere tradotte in probabilità di azione, associate alle diverse operazioni che un attore può compiere nel mercato d'azioni: in base all'ambiente ed una sua strategia di elaborazione l'agente svilupperà un suo sentiment, in base al quale effettuerà una previsione sull'evoluzione del prezzo di un asset; in base a questa previsione ed alla sua disponibilità economica, l'agente avrà una certa probabilità di vendere o comprare una certa quantità di un asset a un certo prezzo, mandando la sua richiesta ad un libro di ordini che elaborerà gli scambi.

### Summary

Nella sezione uno introdurrò brevemente lo stato dell'arte, e la linea di pensiero che ho seguito in questo progetto. Nella sezione due introdurrò il framework usato e ne discuterò significato e motivazioni. Nella sezione tre discuterò le assunzioni fatte per lo specifico modello che ho usato, ricavandolo come caso particolare di questo "framework comportamentale" e mostrando come queste scelte portino consistentemente ad una convergenza all'equilibrio. Nell'appendice A,B approfondirò l'aspetto matematico di queste scelte, in particolare come la convergenza del sistema sia dimostrabile a partire dalle assunzioni fatte. Nella sezione quattro ed appendice C analizzerò diverse parametrizzazioni di questo modello, notando come nelle simulazioni coesistano aspetti stocastici e prevedibili dell'evoluzione.

Il lavoro riportato nelle sezioni 3,4 di questo report riguarderà quindi lo studio del modello nel caso più semplice possibile, da poter prendere come benchmark per applicazioni più articolate -accennate nell'appendice D. Concluderò nella sezione cinque notando i vantaggi e gli svantaggi di questo approccio, oltre a possibili sviluppi futuri.

---

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione e motivazioni</b>	<b>3</b>
1.1	Sistemi dinamici . . . . .	3
1.2	Modelli ad agenti . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Framework comportamentale del mercato di azioni</b>	<b>5</b>
2.1	Infrastruttura economica . . . . .	6
2.2	Variabili interne dell'agente . . . . .	6
2.3	Definizioni del comportamento . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Assunzioni sul comportamento</b>	<b>9</b>
3.1	Sentiment . . . . .	9
3.2	Prediction . . . . .	10
3.3	Decision . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Simulazione</b>	<b>15</b>
4.1	Distribuzione uniforme sulla quantità scambiata . . . . .	15
4.2	Distribuzioni Beta sulla quantità scambiata . . . . .	16
4.3	Fit sui prezzi e stima dei tempi caratteristici . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Appendice A: Previsione dell'agente</b>	<b>22</b>
<b>7</b>	<b>Appendice B: Decisione dell'agente</b>	<b>24</b>
<b>8</b>	<b>Appendice C: Tempi caratteristici</b>	<b>33</b>
<b>9</b>	<b>Appendice D: Applicazioni</b>	<b>37</b>
9.1	Sentiment periodico . . . . .	37
9.2	Più partizioni a sentiment fisso . . . . .	38
9.3	Un gruppo di agenti influenzato dal trend . . . . .	39
9.4	Agenti che si influenzano reciprocamente su una rete sociale . . . . .	40

## 1. Introduzione e motivazioni

Lo studio dell'evoluzione dei mercati di azioni presenta delle difficoltà che lo rendono uno degli oggetti di ricerca più elusivi della scienza moderna; un sistema economico di scambi è infatti composto da:

- Un'infrastruttura non banale: la borsa, i contratti di scambio, le sue regole, tempistiche etc.
- L'interazione di parti molto eterogenee: ogni singolo individuo ed istituzione operante sul mercato, con la sua diversa accessibilità alle informazioni, ricchezza, strategia etc
- La non ovvia descrizione del comportamento delle parti: i processi di elaborazione delle informazioni, previsione e decisione etc degli attori nel mercato

La difficoltà nel trattare i fenomeni nel mercato delle azioni sta quindi nell'ampia eterogeneità della sua "struttura microscopica", unita all'impossibilità di conoscere i meccanismi che regolano i comportamenti degli attori. Questo fa sì che anche una trattazione macroscopica del sistema rimarrà elusiva: come poter studiare fenomeni emergenti in un sistema in cui è impossibile conoscere l'ampia varietà delle interazioni che li generano?

Con questo progetto ho quindi cercato di creare un framework che desse la possibilità di implementare e testare diversi scenari, introducendo possibili "processi mentali" dell'agente -approssimati ma quanto più possibile "verosimili"- e simulandone gli effetti sull'andamento del mercato.

Ho cercato quindi di ottenere un modello che unisse interpretabilità, versatilità e calcolabilità a partire dal comportamento degli attori: come si vedrà nella sezione 4 ed appendice D, il framework introdotto riuscirà quindi a riprodurre, almeno qualitativamente, alcuni fenomeni che è verosimile osservare nel mercato delle azioni.

### 1.1. Sistemi dinamici

Strumenti come la termodinamica statistica e le equazioni stocastiche permettono di descrivere -ed almeno in parte prevedere- il comportamento di sistemi in cui è noto, o tuttalpiù approssimabile, il comportamento di una tipologia relativamente omogenea di singole parti. Nel caso di discipline come la meteorologia, la fluidodinamica, e la fisica delle particelle il problema risiede quindi nell'elaborare strumenti matematici che permettano il passaggio dal comportamento microscopico delle parti al risultato macroscopico delle loro interazioni.

Alcuni modelli si propongono di usare gli stessi strumenti usati in questi campi, come le equazioni stocastiche, per descrivere il problema dell'evoluzione dei prezzi nella borsa. E' questo il caso di modelli come Black-Scholes [1], il modello della volatilità di Heston [2] ed il più recente modello a volatilità locale [3]: in questi modelli l'eterogeneità degli agenti ed il loro comportamento sono racchiusi nella volatilità del prezzo, che si assume quindi colga gli aspetti salienti della struttura microscopica del sistema. Il problema di questo approccio sta nel fatto che la volatilità può così risultare un'approssimazione molto forte, non potendo provvedere

alcuna indicazione sulle cause microscopiche che portano a certi eventi; per questo motivo possano essere usati in contesti di risk management, ma non sono modelli adatti nè a fornire una buona interpretazione del fenomeno, nè in molti casi a riprodurre scenari possibili.

Altri tipi di modelli usano strumenti come catene di markov nascoste, o algoritmi di learning su serie temporali, ma al di là delle performance di queste strategie si può dire in senso ampio che questo tipo di approccio top-down soffre sempre della stessa carenza: un effetto "black box" in cui si mette l'eterogeneità delle parti coinvolte, ignorando quindi la struttura microscopica del mercato e sperando di ricavare euristicamente una serie di parametri del modello che ne colga le componenti salienti [4] [5].

### *1.2. Modelli ad agenti*

Nella direzione opposta si collocano invece i modelli ad agenti, che partono proprio dall'eterogeneità delle parti e che con approssimazioni del loro comportamento cercano di simulare le loro interazioni. Questo approccio bottom-up riduce l'approssimazione dei modelli di volatilità, ma avvicinandosi al microscopico pone alla ricerca nuovi problemi: ad una maggiore potenzialità descrittiva, corrisponde il compito di dover fornire una maggiore accuratezza ed efficacia delle entità che si aggiungono al modello. Rispetto ai tre punti critici sopra descritti, si può dire che:

- L'infrastruttura del mercato, pur non banale, può essere descritta dalle regole stesse di interazione di agenti
- L'eterogeneità degli attori economici può essere implementata come eterogeneità degli agenti nella simulazione; il vantaggio di maggiore dettaglio nel modello, porta però allo svantaggio di doversi assicurare che ci sia coerenza tra eterogeneità reale ed eterogeneità assunta
- L'adeguata descrizione del comportamento può essere implementata dalla costruzione di agenti strategicamente realistici; anche in questo caso un maggiore dettaglio nella descrizione porta alla difficoltà di dover rappresentare adeguatamente, almeno in approssimazione, la strategia ed addirittura la psicologia degli attori

I modelli ad agenti forniscono quindi il vantaggio di una potenzialità descrittiva molto alta, ma risultano poi difficili da calibrare per aderire alla realtà oltre che computazionalmente costosi [6]. Con il miglioramento degli strumenti di calcolo, a partire dagli anni '90 la ricerca ha visto crescente interesse verso i modelli ad agenti, fino al giorno d'oggi in cui è un campo piuttosto attivo anche nell'elusiva descrizione dei mercati di azioni [6].

Secondo la classificazione data da Edmonds [7] modelli nel campo degli studi sociali possono avere diverse finalità; raggruppandole in due macrocategorie, si possono avere modelli predittivi/descrittivi (basati su note relazioni osservate e/o misure sul sistema) o modelli illustrativi/esplorativi. Diverse finalità di questi modelli possono esser dovute a diversa disponibilità di dati e/o diverse proprietà del sistema in analisi, e corrispondono a diverse esigenze nell'accuratezza delle definizioni. Nel caso della ricerca su sistemi economici, la scelta

ricade spesso nella seconda tipologia: cercare di riprodurre almeno in maniera stilizzata fenomeni osservati, per poter indagare le assunzioni psicologiche e sociali con i quali vengono costruiti [6]. Un esempio di questo stile di ricerca è il Santa Fe Artificial stock market [10], in cui gli agenti agiscono in base ad una domanda di asset creata sulla previsione dei dividendi che pagherà. Un'altra linea di ricerca è invece data da modelli su reti sociali in cui si studia l'impatto dell'influenza reciproca degli attori su fenomeni di salita/discesa improvvisa dei prezzi come un fenomeno epidemiologico [11]. Questi approcci riescono a riprodurre fenomeni realistici a partire dal comportamento degli agenti ma mancano di dettagli sul comportamento dell'agente, e possono per cui risultare limitati nella possibilità di simulare scenari diversi

Poiché l'eterogeneità degli agenti può invece consistere in diversi modi di fruire delle informazioni e processarle, una prospettiva di riferimento è data da Epstein [8], secondo cui gli agenti dovrebbero esser dotati di meccanismi di percezione e decisione; questi processi possono quindi essere parametrizzati per definire differenze socioculturali e/o individuali negli attori del sistema.

In un modello costruito secondo questi criteri, la definizione del sistema sarà quindi puramente bottom-up e potrà attingere all'economia comportamentale, statistica sociale ed in generale la psicologia per stabilire il comportamento degli attori [6].

Seguendo questa linea di pensiero ho quindi cercato di definire un framework in cui gli agenti fossero dotati di funzioni di previsione e decisione, definite come oggetti matematici abbastanza generali da poter implementare e testare diversi tipi di meccanismi. In particolare, oltre alle diverse parametrizzazioni di questi processi, ogni agente sarà dotato di una sua disponibilità economica per poter simulare l'impatto di attori di diverso stato sociale. Nei modelli di cui sono a conoscenza, gli scambi avvengono in quantità unitaria o random su disponibilità illimitate degli agenti; per quel che mi risulta quindi, questo è il primo modello ad implementare sia la disponibilità economica degli agenti che la scelta delle quantità da scambiare.

Nel corpo di questo report, ho riportato i risultati nel caso dell'applicazione più semplice del framework che definirò, per mostrare come questo porti ad evoluzioni convergenti, interpretabili e in parte calcolabili. Indagare la predittività di questo modello va oltre lo scopo di questo progetto, che ho invece studiato come benchmark per il comportamento del modello in generale.

Nella prossima sezione presenterò quindi i significati e motivazioni delle definizioni usate, che nella loro accezione più generale possono costituire un "framework comportamentale" per diversi modelli ad agenti del mercato di azioni.

## **2. Framework comportamentale del mercato di azioni**

Per un ambiente di lavoro versatile, ho scritto una breve libreria in python che permettesse di implementare diversi meccanismi di comportamento dell'agente. Alcuni di questi sono predefiniti al suo interno, con la possibilità di introdurre processi di previsione e decisione arbitrari definiti dall'utente. Per operare con l'eterogeneità degli agenti, è possibile dividere gli attori in partizioni, ognuna delle quali sarà composta da agenti con specifiche regole di comportamento. Questa libreria permette inoltre di implementare facilmente

metriche sulla simulazione e qualche operazione di fitting su simulazioni ripetute. L'infrastruttura del mercato sarà invece fissa, dotata di un book e ordini di operazioni descritte nel prossimo paragrafo.

Il vantaggio di questa libreria sta nel potersi concentrare sulle definizioni del comportamento e parametri interni dell'agente, definendo diverse simulazioni in poche righe di codice con molta libertà da parte dell'utente. Le performance sono state ottimizzate quanto possibile per mantenere maneggevolezza da parte dell'utente, e su un comune notebook ho potuto realizzare simulazioni in tempi nell'ordine dei minuti, su un ordine di migliaia di agenti che interagiscono per centinaia di giorni.

### *2.1. Infrastruttura economica*

La complessità delle regole di scambio economiche può essere riprodotta da adeguate definizioni del modello. La scelta di rappresentare o meno certi meccanismi del mercato sarà dettata dall'obiettivo di ricerca e può essere molto influente sull'esito della simulazione, come ad esempio la scelta di introdurre un book degli scambi o un broker che detta prezzi di mercato. Il rapporto tra modellizzazione dell'infrastruttura e conseguenze nella simulazione va oltre lo scopo di questo progetto, e le regole di scambio usate saranno una semplificazione dei meccanismi reali della borsa.

Dato un tempo discreto, ad ogni iterazione (giorno) della simulazione tutti gli agenti saranno scelti in ordine random e decideranno se effettuare o meno uno scambio; presa questa decisione, sceglieranno quanto scambiare ed a che prezzo in base alla loro previsione e disponibilità economica. Questa richiesta verrà elaborata da un libro degli scambi come segue:

- Se una richiesta di vendita/acquisto è fatta ad un prezzo maggiore/minore di quelli presenti nel book, questo aggiungerà la richiesta alle sue "pending" in attesa di future richieste adatte.
- Se una richiesta di vendita/acquisto è fatta ad un prezzo minore/maggiore della migliore presente nel book, lo scambio verrà realizzato a quel prezzo fino ad esaurire la quantità offerta/domandata da venditore/acquirente. Se la quantità del venditore/acquirente non è esaurita, il book ripeterà lo stesso processo per la quantità rimanente fino ad esaurimento o fino a quando non ci sarà più nel book una richiesta adatta (ed in tal caso aggiungerà la rimanente come "pending")
- Ad ogni iterazione (giorno), prima di iniziare gli scambi, il book cancella tutte le richieste dell'iterazione precedente

In questo studio mi concentrerò su un solo asset scambiabile, e nessun "prezzo di mercato" a cui gli agenti possono scambiare con un broker. Gli agenti quindi scambiano unicamente tra loro denaro ed asset, per cui le quantità totali di entrambi rimarranno costanti per tutta la durata della simulazione.

### *2.2. Variabili interne dell'agente*

L'eterogeneità degli agenti sarà innanzitutto rappresentata dall'eterogeneità dei suoi parametri interni. Questi possono riguardare la sua ricchezza iniziale, la sua disponibilità iniziale dell'asset, ma anche valori

come la suscettibilità a trend osservati, status sociale in una rete di interazioni etc. Tutti gli agenti saranno dotati di una certa quantità di denaro ed asset, che possono quindi essere considerate le sue variabili di stato. Definito  $\sigma_t$  la quantità di asset detenuto,  $w_t$  la quantità di una certa valuta, e  $\pi_t$  il prezzo corrente dell'asset, è rilevante definire la quantità

$$\Sigma_t = \frac{\sigma_t \pi_t}{\sigma_t \pi_t + w_t} \quad (1)$$

Questa è proporzione di ricchezza che un agente detiene in forma di asset al tempo  $t$ , e sarà la principale quantità di interesse nell'interpretare il comportamento microscopico e macroscopico degli agenti.

L'eterogeneità di comportamento sarà invece data da quelle funzioni e parametri che definiscono come l'agente interagisce con l'ambiente ed elabora le informazioni ottenute. Nel prossimo paragrafo sarà definito che ruolo questi parametri avranno nel framework che sto presentando, e mi riferirò in termini molto generali a questi con la  $\alpha_t$  per indicare qualsiasi parametro/variabile di stato che regoli i processi interni all'agente.<sup>1</sup> La scelta di questi meccanismi è arbitraria e non sarà oggetto di approfondimento in questo studio; la scelta effettuata qui sarà invece presentata nella sezione tre, mentre simulazioni con scelte diverse saranno presentate nell'appendice D

### 2.3. Definizioni del comportamento

In questo framework, il comportamento degli agenti è stato diviso in tre passaggi: elaborazione di un sentiment dall'interazione con l'esterno, elaborazione di una previsione in base al sentiment e infine decisione. La decisione sarà a sua volta divisa in: decisione di non fare nulla/comprare/vendere, per poi eventualmente scegliere quanto scambiare ed a che prezzo. Nella sua formulazione più generale, ognuno di questi passaggi può essere definito come una funzione al tempo  $t$  dipendente dallo stato al tempo precedente, dai parametri interni correnti dell'agente ed eventualmente parametri esterni.

Le definizioni date in seguito sono molto generali, al fine di stabilire il framework comportamentale a cui ho mirato ed ottenere con questo una chiave interpretativa del modello. Alcuni dettagli ulteriori di queste definizioni generali sono nelle appendici A e B, mentre il focus sarà qui quello di presentare "il significato" delle funzioni usate. Le simulazioni discusse nella prossima sezione saranno poi costruite da particolari scelte interne a questo framework, atte sia a semplificarlo che a stabilirne un benchmark.

*Sentiment.* :  $S_t = S_t(S_{t-1}; \alpha_t, \epsilon_t)$

Dove  $\alpha_t, \epsilon_t$  è l'insieme di tutte le variabili interne all'agente ed esterne nel momento in cui questo stabilisce il suo sentiment. Tramite le variabili interne si possono implementare meccanismi non lineari ed autoregressivi di evoluzione del sentiment, come una diversa suscettibilità a cambiare il proprio sentiment in funzione di un qualche stato emotivo dell'agente. Nelle variabili esterne possono essere implementate tutte le informazioni che l'agente può raccogliere dall'ambiente, come ad esempio dell'andamento dei prezzi osservati -se un agente

---

<sup>1</sup>Le variabili  $S_t, P_t, q, p$  che definirò saranno anch'esse variabili interne dell'agente, ma nella notazione saranno distinte da altri generici parametri possibili  $\alpha_t$  per evidenziare il processo sentiment-previsione-decisione che avviene internamente all'agente

è influenzato da trend (appendice D:9.3) o pattern nei prezzi- l' interazione con altri agenti in una rete sociale, o informazioni raccolte da notizie (appendice D:9.4).

*Prediction.* :  $P(\tilde{p}, \tilde{t} | \{\pi_\tau\}_{\tau=0}^{\tau=t-1}; \alpha_t, S_t)$

E' una funzione definita sulla storia passata dei prezzi e lo stato interno attuale dell'agente (tra cui in particolare il suo sentiment), tramite la quale l'agente assegna al tempo  $t$  una probabilità  $P$  di osservare un prezzo  $\tilde{p}$  ad un tempo futuro  $\tilde{t}$ . La dipendenza dall'intera storia dei prezzi  $\{\pi_\tau\}_{\tau=0}^{\tau=t-1}$  permette all'agente inferenze articolate basate su trend e pattern dei prezzi, modulate poi dal suo stato emotivo. Questa scelta permette molta libertà nella definizione del comportamento dell'agente, ma può essere operativamente complicata.

Una possibile semplificazione è ottenuta lasciando cadere la dipendenza dalla storia passata -che come si vede in appendice D (par.??) può essere racchiusa nel suo sentiment- e tenendo solo la dipendenza dall'ultimo prezzo osservato: in questo caso la previsione si può definire come un propagatore

$$P_t(\tilde{p}, \tilde{t} | \pi, t; \alpha_t, S_t) \quad (2)$$

parametrizzato al tempo  $t$  dallo stato interno dell'agente. Una discussione più approfondita sulla scelta di questa funzione e considerazioni tecniche sono nell'appendice A, mentre in questo report mi concentrerò su una scelta molto semplificata di questo meccanismo di previsione, descritta nella sezione tre.

*Decision.* :  $D(q, p | \alpha_t, P_t)$

E' una funzione definita sullo stato interno corrente dell'agente (in particolare la sua previsione), tramite la quale l'agente assegna una certa probabilità ad ogni possibile *scelta* che può effettuare al tempo  $t$ . Nel caso di un mercato di scambi, lo spazio delle possibili scelte è definito da tutte le quantità e prezzi  $(q, p)$  che l'agente può scambiare al tempo  $t$ , in funzione della sua disponibilità di denaro  $w_t$  e di asset  $\sigma_t$ .

Nel caso di insiemi di scelte mutualmente esclusive, come nel caso di fare nulla/comprare/vendere, è utile separare questa distribuzione di probabilità: chiamando *azione "a"* un insieme di scelte e indicandole con  $q, p \in a$ , si può definire la probabilità di azione come

$$D(a | \alpha_t, P_t) = \int_{q, p \in a} D(q, p | \alpha_t, P_t) dq dp \quad (3)$$

e tramite questa, la probabilità di scelta  $q, p$  condizionata all'azione  $a$ :

$$D^a(q, p | \alpha_t, P_t) \equiv D(q, p | a, \alpha_t, P_t) = \frac{D(q, p | \alpha_t, P_t)}{D(a | \alpha_t, P_t)} \Big|_{q, p \in a} \quad (4)$$

Questa separazione è utile per la versatilità ed interpretabilità del modello, poiché permette di descrivere separatamente il processo di decisione riguardo che azione compiere, e solo successivamente i dettagli di quell'azione. Questa scelta è descritta più approfonditamente nell'appendice B, mentre nella prossima sezione sono definite le assunzioni fatte per queste funzioni.



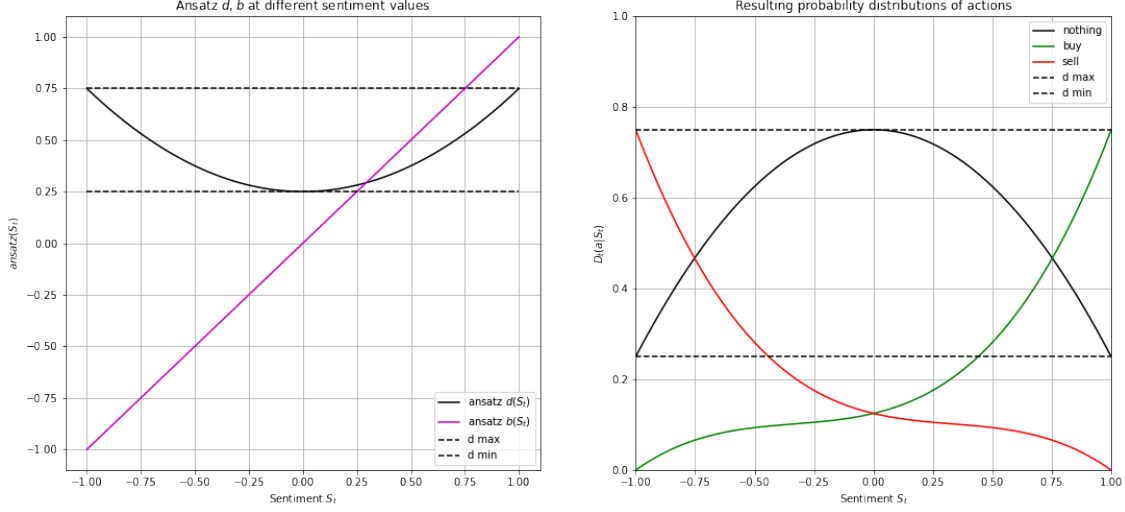


Figure 1: A sinistra gli ansatz  $d(S_t), b(S_t)$  definiti nelle eq.11. Sulla destra le distribuzioni di probabilità sulle azioni  $D(a|S_t)$  che conseguono da queste assunzioni, ricavate dalle eq.41)

### 3. Assunzioni sul comportamento

Adottando il framework comportamentale descritto nella sezione precedente, le scelte fatte sulle funzioni da definire sono interpretabili come assunzioni fatte sul comportamento dell'agente. Questo paradigma è la base dell'economia -ed in particolare l'economia comportamentale- in cui ad esempio le curve di indifferenza descrivono le preferenze degli attori economici, la funzione di utilità i suoi obbiettivi ed un'asimmetria di quest'ultima è interpretabile come avversione al rischio [13]. Con questo studio ho quindi cercato di usare questo paradigma nel contesto del mercato d'azioni, prendendolo come base concettuale per la definizione del comportamento degli agenti. In questa sezione discuterò quindi le scelte fatte sulle funzioni  $S, P, D$  sopra definite e la loro interpretazione.

#### 3.1. Sentiment

Il sentiment racchiude gli aspetti salienti dell'interazione dell'agente con l'ambiente, ed è quindi un elemento fondamentale per il suo comportamento. Come accennato in predenza, la scelta dei meccanismi di questa interazione è arbitraria ed in questo studio ho scelto di impostare il sentiment degli agenti come interamente esogeno e fisso, al fine di vedere come questo influenza in generale il suo comportamento. Scelte diverse sono definite e simulate nell'appendice D, al fine di dimostrarne le potenzialità.

La scelta di usare un sentiment esogeno e fisso permette di capire tuttavia come questo influenzi il comportamento dell'agente, e di conseguenza l'intero mercato, considerando che a parità di meccanismi di previsione e decisione il suo comportamento è interamente definito dal suo sentiment. Come riportato nell'appendice D il comportamento simulato nella prossima sezione sarà infatti riprodotto anche in casi di sentiment più articolati e variabili nel tempo (app.D: 9.1); per questo motivo, lo studio di questo caso può esser preso come benchmark per il modello.

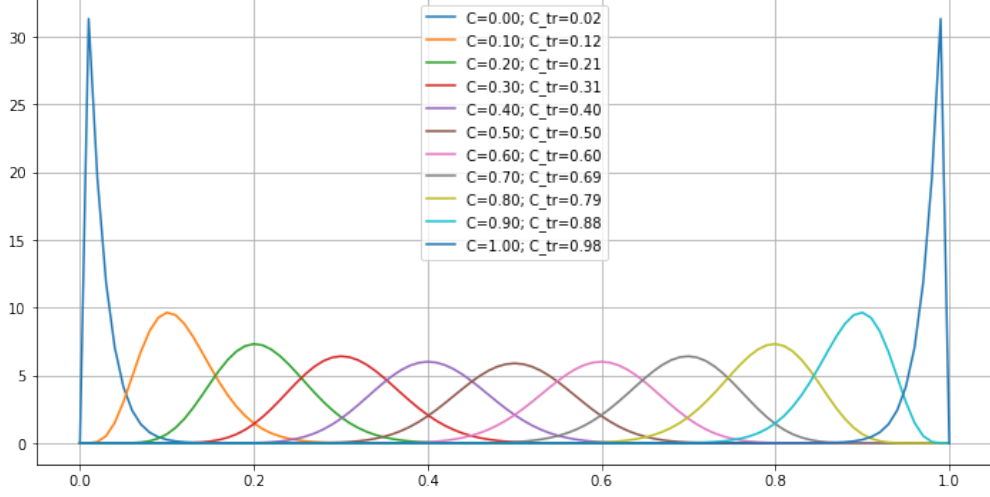


Figure 2: Occorrenze su 100 samples estratti dagli ansatz  $f^b, f^s$  definiti dalle eq.26. Sull'ascisse, la proporzione di quantità scambiata (in vendita o acquisto) rispetto alla propria disponibilità. I valori "C" e "C tr" nella legenda sono rispettivamente  $\tilde{\mu}$  e  $\mu$  spiegati nell'appendice B. In particolare "C tr" è la media della distribuzione Beta usata

Data una quantità  $S \in [-1, 1]$  la funzione di sentiment è quindi definita per tutti gli agenti semplicemente come

$$S_t = S \in [-1, 1] \quad (5)$$

### 3.2. Prediction

Come approfondito nell'appendice A la definizione della prediction permette molta libertà nel definire il processo con cui l'agente elabora le informazioni. L'assunzione fatta in questo studio è che il suo comportamento può essere tuttavia approssimabile a una decisione presa sulla sola previsione che un asset cresca di prezzo nel tempo futuro. Riprendendo la definizione generale, questa è ottenuta come

$$P_t^{up}(\{\pi_\tau\}_{\tau=0}^{\tau=t-1}; \alpha_t, S_t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tilde{p} \geq \pi, \tilde{t} \in [t, T]} P_t(\tilde{p}, \tilde{t} | \{\pi\}_{\tau=0}^{\tau=t-1}; \alpha_t, S_t) d\tilde{p} d\tilde{t} \quad (6)$$

Per le ragioni discusse nell'appendice A è ragionevole che senza ulteriori dipendenze dal prezzo osservato o altre variabili interne, questa previsione dipenda unicamente dal sentiment corrente dell'agente. Definendo quindi il sentiment  $S_t = P_t^{up} - P_t^{down}$ , e ricordando che si è scelto un sentiment fisso nel tempo si ha quindi che

$$P^{up} = \frac{S + 1}{2} \in [0, 1] \quad (7)$$

### 3.3. Decision

Partendo dalla definizione data nella sezione 2, si può definire la decisione dell'agente come una funzione delle variabili di stato e della previsione. Considerando quindi il suo stato  $\alpha_t = (\sigma_t, w_t)$  ed il rapporto univoco

tra sentiment e previsione dato dall'eq7, si può definire la decisione come una probabilità data da:

$$D_t(q, p | \sigma_t, w_t; S_t) \quad (8)$$

Come discusso nella sezione precedente, il processo decisionale può essere a sua volta decomposto in decisione dell'azione e decisione di quantità/prezzo dell'eventuale scambio. Le scelte effettuate di seguito sono approfondite nell'appendice B.

*Probabilità di azione.* Le probabilità associate alle azioni di fare nulla, comprare o vendere possono essere definite come segue:

$$d(S_t) = D(d|S_t) \quad (9)$$

$$b(S_t) = D(b|d; S_t) - D(s|d; S_t) \quad (10)$$

dove  $d$  indica la scelta di richiedere un ordine:  $b$  un ordine di acquisto ed  $s$  un ordine di vendita.

La funzione  $d(S_t)$  indica quindi la tendenza dell'agente ad agire, mentre  $1 - d(S_t)$  è la probabilità che l'agente non faccia nulla al tempo  $t$ .

La funzione  $b(S_t)$  indica invece la tendenza a comprare rispetto al vendere, nel momento in cui l'agente decide di agire.

Gli ansatz  $d, b$  traducono in probabilità di azione le tendenze dell'agente: alti valori di  $1 - d$  indicano un alto "effetto dotazione" [13], per il quale l'agente tenderà a non fare nulla anche di fronte ad un sentiment molto alto o basso; la funzione  $b$  può invece essere assunta dispari per indicare una simmetria nel comportamento in vendita, acquisto ed acquisto. Per semplicità nel modello che segue sono assunte

$$d(S_t) = d_{min} + (d_{max} - d_{min})S_t^2 \quad (11)$$

$$b(S_t) = S_t \quad (12)$$

dove i valori  $d_{max} = 0.75, d_{min} = 0.25$  limitano l'ansatz  $d$  in un certo range ed hanno lo scopo di mantenere stocastico il processo decisionale dell'agente -evitando che per qualche valore del sentiment ci siano scelte sicure- La disparità della funzione  $b$  impone in questo caso simmetria nella tendenza alla vendita ed all'acquisto rispetto a sentiment opposti. Nell'appendice B sono approfondite le motivazioni di questa scelta e come ricavare le probabilità di azione posti questi ansatz (eq.51); la figura 1 mostra questi ansatz e le probabilità di azione  $D(nothing|S_t), D(buy|S_t), D(sell|S_t)$  che ne conseguono.

*Scelta del prezzo.* Posto che l'agente deciderà di comprare o vendere, dovrà successivamente decidere quanto vorrà scambiare ed a che prezzo. Per semplicità, si assume che il prezzo sia estratto indipendentemente dalla quantità, da una distribuzione normale che ha come media il prezzo corrente  $\pi_t$  (quello a cui nel mercato si è effettuato l'ultimo scambio) e sia asimmetrica per evitare bias nell'andamento dei prezzi.

Si ha quindi la probabilità di scelta del prezzo  $D(p)$  data da:

$$r = \text{Normal}(0, \sigma_p) \quad (13)$$

$$p = \pi_t(1 + r) \quad \text{if} \quad r \geq 0 \quad (14)$$

$$p = \pi_t(1 - r)^{-1} \quad \text{if} \quad r < 0 \quad (15)$$

dove  $\sigma_p$  è un parametro per regolare la fluttuazione dei prezzi, che nella simulazione è stato impostato a  $\sigma_p = 0.001$ .

*Scelta delle quantità.* Le probabilità sulle quantità sono invece le probabilità condizionate all'azione, considerando l'indipendenza dal prezzo e la sola dipendenza dalla scelta e stato interno dell'agente. Seguendo la definizione in 4 e la previsione 7 si può quindi decomporre come

$$D^a(q, p|\alpha_t, P_t) = D^a(q|\alpha_t, P_t)D(p) \quad (16)$$

Mentre l'azione di non fare nulla sarà definita semplicemente da  $D^n(q, p|\alpha, P_t) = \delta(q)\delta(p)$ , per l'acquisto e la vendita si possono definire due ansatz:

$$f^b \equiv D^b(q|\alpha_t, P_t) = D^b(q|\sigma_t, w_t, S_t) \quad (17)$$

$$f^s \equiv D^s(q|\alpha_t, P_t) = D^s(q|\sigma_t, w_t, S_t) \quad (18)$$

Per una scelta interpretabile di queste assunzioni, si può studiare qual è mediamente l'esito degli scambi e ragionare a ritroso: considerando la quantità  $\Sigma_t$  definita in 1 si ha che al tempo successivo  $t+1$  la proporzione di ricchezza che un agente avrà allocato in forma di asset sarà in media:

$$\langle \Sigma_{t+1} \rangle = \sum_a \int_{(p,q)} \Sigma_{t+1} D_t^a(p, q|\sigma_t, w_t; S_t) dp dq \quad (19)$$

Sostituendo la definizione di  $\Sigma$  e le probabilità di azione definite nel paragrafo precedente, approssimando la probabilità sul prezzo <sup>2</sup> si dimostra nell'appendice B che questo porta a:

$$\langle \Sigma_{t+1} \rangle = \Sigma_t + \frac{\pi_t}{\sigma_t \pi_t + v_t} [D(b|\sigma_t, w_t; S_t) \langle q \rangle_b - D(s|\sigma_t, w_t; S_t) \langle q \rangle_s] \quad (20)$$

dove  $\langle q \rangle_b$  e  $\langle q \rangle_s$  sono le quantità mediamente acquistate o vendute.

La mappa così definita da  $\Sigma_t$  a  $\langle \Sigma_{t+1} \rangle$  ha un punto fisso  $\Sigma^*$  in corrispondenza di  $\sigma^*, w^*$  che soddisfano:

$$\frac{\langle q \rangle_s - \langle q \rangle_b}{\langle q \rangle_s + \langle q \rangle_b} = b(S_t) \quad (21)$$

e poiché questa mappa è una contrazione, si ha che per sentiment fisso questa equazione definirà implicitamente uno stato di equilibrio stabile a cui l'agente convergerà nel tempo. La dimostrazione di questa convergenza e le sue conseguenze sono discusse più approfonditamente nell'appendice B, e sono visibili nelle

---

<sup>2</sup>come discusso nell'appendice B questa approssimazione è valida se "il sistema è abbastanza regolare"

figure 3 e 4. Per quanto la convergenza ed equilibrio stabile siano realizzati solamente quando sentiment ed ambiente rimangono invariati, l'equazione 20 dà un'indicazione chiara sul comportamento medio degli agenti in ogni situazione, com'è visibile negli scatter plot nelle figure 8 e 9.

Nel sistema così costruito, il valore effettivo di questo stato di equilibrio dipenderà solo dalle scelte degli ansatz  $b, f^b, f^s$ . Si può notare come per l'ansatz scelto  $b = S_t$  si può definire una classe di funzioni  $f^b, f^s$  tali che la condizione di equilibrio sia esattamente <sup>3</sup>

$$\Sigma_t^* = P_t^{up} \quad (22)$$

Ovverosia, **l'agente tenderà ad allocare la propria ricchezza in un asset, nella stessa proporzione della probabilità con cui prevede che il suo valore aumenterà nel futuro.** Questa scelta mette quindi in relazione la sua previsione e l'esito effettivo delle sue scelte, fornendo una chiave di lettura molto interpretabile del suo comportamento. Diverse scelte di ansatz porterebbero a condizioni di equilibrio simili, ma ho scelto delle funzioni  $f^b, f^s$  che soddisfacessero questa lettura per la sua semplicità.

Per ricavare questa classe di equivalenza, imponendo 22, applicando la definizione 7, l'assunzione 11 ed esplicitando la condizione di equilibrio 21, si ha che le funzioni  $f^b, f^s$  devono essere tali che  $\sigma^*, w^*$  possano soddisfare:

$$\frac{\int_{q=0}^{q=\sigma^*} q f^s(q|\sigma^*, w^*, S_t) dq - \int_{q=0}^{q=w^*/\pi_t} q f^b(q|\sigma^*, w^*, S_t) dq}{\int_{q=0}^{q=\sigma^*} q f^s(q|\sigma^*, w^*, S_t) dq + \int_{q=0}^{q=w^*/\pi_t} q f^b(q|\sigma^*, w^*, S_t) dq} = \frac{\sigma^* - v^*}{\sigma^* + v^*} \quad (23)$$

Questa condizione è verificata da tutte le funzioni  $f^b, f^s$  tali che, dato un qualsiasi  $C \geq 1$  si ha:

$$\int_{q=0}^{q=\sigma^*} q f^s(q|\sigma^*, w^*, S_t) dq = \frac{\sigma^*}{C} \quad (24)$$

$$\int_{q=0}^{q=w^*/\pi_t} q f^b(q|\sigma^*, w^*, S_t) dq = \frac{w^*}{\pi_t C} \quad (25)$$

ovverosia *se in vendita ed acquisto, gli agenti scambiano mediamente la stessa proporzione della loro disponibilità di denaro ed asset*.

Queste condizioni sono verificate da  $f^b, f^s$  uniformi sulle  $q$  permesse dalla disponibilità dell'agente, per le quali  $C = 2$ . Da come si può vedere nella prossima sezione, questo ansatz porta però ad agenti il cui  $\Sigma_t$  è con più probabilità agli estremi (fig.3).

Volendo invece che non solo  $\Sigma_t$  converga in media a  $P^{up}$  ma anche che questo sia il valore più probabile, si può considerare una  $C(\Sigma_t, S_t)$  il cui valore varia in funzione dello stato dell'agente. Si possono così definire delle  $f^s, f^b$  in maniera tale che le quantità scambiate diminuiranno -sia per vendite che acquisti- con il suo avvicinarsi allo stato di equilibrio.

---

<sup>3</sup>questa condizione è valida ad ogni istante temporale  $t$  anche per sentiment variabile nel tempo; nel caso di sentiment fisso la dipendenza dal tempo può essere omessa e dato tempo sufficiente rappresenterà una condizione di convergenza

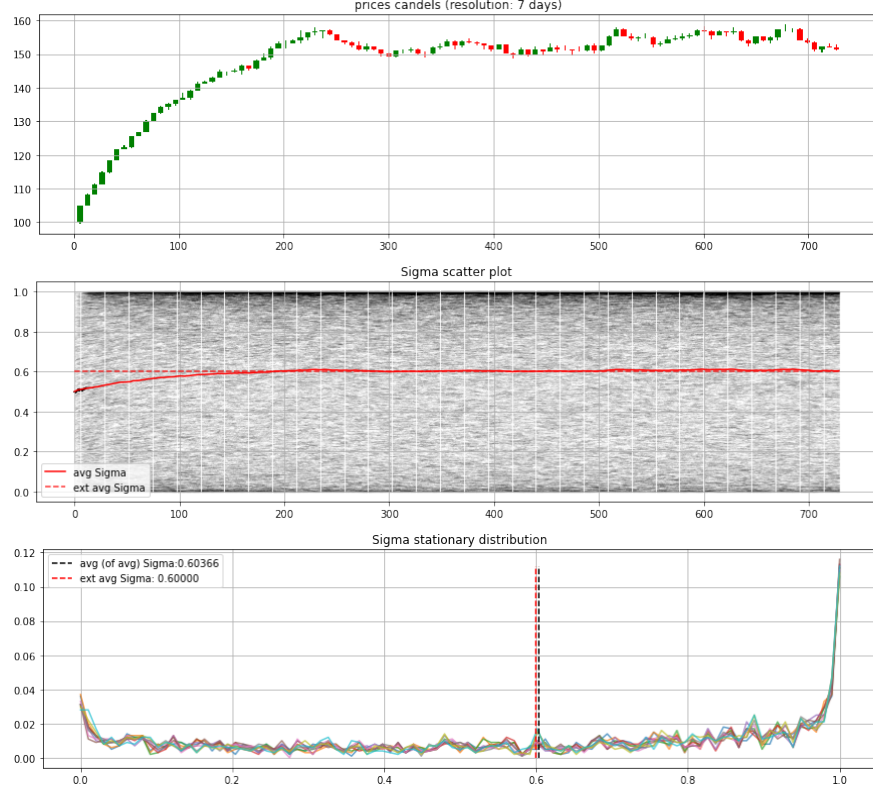


Figure 3: Simulazione con  $f^s, f^b$  uniformi sulla disponibilità dell'agente. In alto, il grafico a candele dell'andamento dei prezzi; in mezzo, lo scatter plot dei  $\Sigma_t$  degli agenti. In basso la distribuzione delle  $\Sigma_t$  nelle ultime iterazioni, che può essere considerata la distribuzione stazionaria raggiunta all'equilibrio

Questo risultato è ottenibile assumendo  $f^b, f^s$  delle opportune parametrizzazioni della funzione Beta; si definisce quindi:

$$f^s(q|\sigma_t, w_t, S_t) = \sigma_t \quad \text{Beta}\left(\frac{q}{\sigma_t} | \mu\eta, (1-\mu)\eta\right) \quad (26)$$

$$f^b(q|\sigma_t, w_t, S_t) = \frac{w_t}{\pi_t} \quad \text{Beta}\left(\frac{q\pi_t}{w_t} | \mu\eta, (1-\mu)\eta\right) \quad (27)$$

$$\mu(\Sigma_t, S_t) = \frac{1}{C} \quad \sim \quad |\Sigma_t - P^{up}| \quad (28)$$

Dove  $\mu$  sarà la media della funzione  $Beta$  e  $\eta$  un parametro di ampiezza (si veda l'appendice B per trattazione dettagliata). Le conseguenze di questi ansatz sulle quantità scambiate sono rappresentate nella figura 9. Come si vede nella figura 4, questo fa sì che il valore  $\Sigma_t = P^{up}$  sia non solo la media ma anche la moda della distribuzione stazionaria.

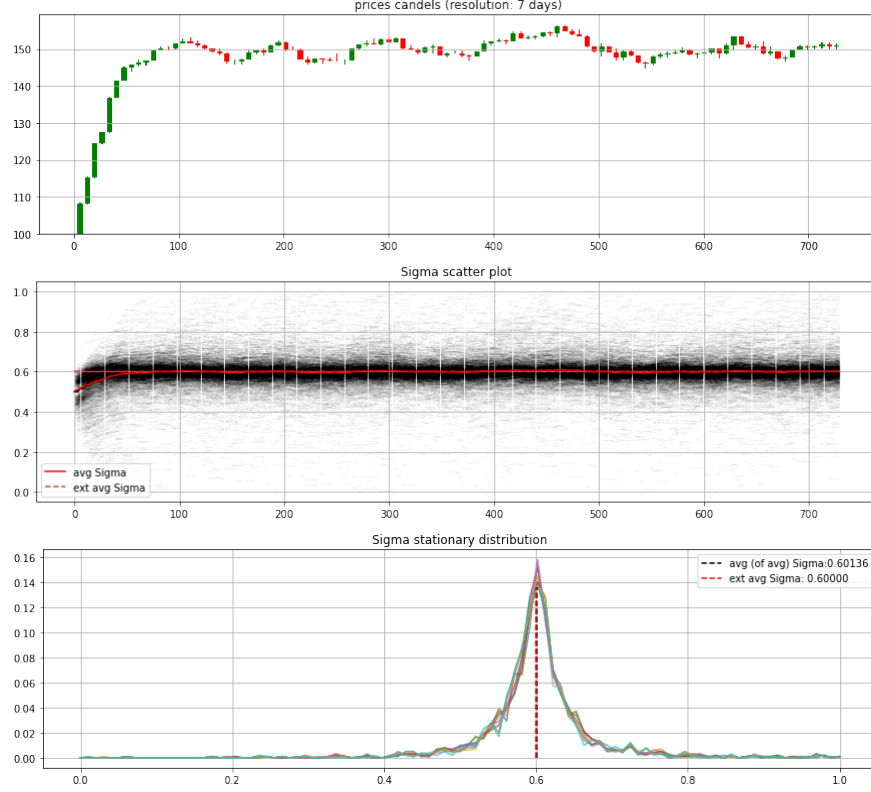


Figure 4: Simulazione con funzioni sulle quantità scambiate definite come 26. In alto, il grafico a candele dell'andamento dei prezzi; in mezzo, lo scatter plot dei  $\Sigma_t$  degli agenti. In basso la distribuzione delle  $\Sigma_t$  nelle ultime iterazioni, che può essere considerata la distribuzione stazionaria raggiunta all'equilibrio

#### 4. Simulazione

Per riassumere, le assunzioni sul sentiment 5, sulla previsione 7, sull'azione 11, sulla scelta di prezzo 13, e quantità -a scelta tra uniforme o 26- definiscono il comportamento degli attori.

La simulazione è quindi realizzata con 1000 di questi agenti identici, dotati delle stesse regole di comportamento e stesse condizioni iniziali di ricchezza e quantità dell'asset. Nel prossimo paragrafo, mostrerò come la scelta di  $f^b, f^s$  uniformi portino alla convergenza attesa della media sullo stato di ricchezza degli agenti; nella sezione 4.2 mostrerò invece le conseguenze della scelta  $f^b, f^s$  tramite funzione Beta definite con le eq.26; nel paragrafo 4.3 infine realizzerò diverse simulazioni con questa scelta ma parametrizzazione differente di sentiment degli agenti, per poi eseguire un fit lineare ed esponenziale sulla  $\langle \Sigma_t \rangle$  e ricavare euristicamente il tempo caratteristico della transizione allo stato di equilibrio  $\Sigma^*$ .

Un approfondimento sul risultato dei fit per diverse parametrizzazioni e le diverse  $f^s, f^b$  è nell'appendice C, mentre qui presenterò solo i risultati salienti.

##### 4.1. Distribuzione uniforme sulla quantità scambiata

La simulazione è qui realizzata partendo da una  $\Sigma_0 = 0.5$  che stabilisce una condizione iniziale di equilibrio quando il sentiment è neutrale ( $S = 0$ ). Il sentiment degli agenti è impostato invece a  $S_0 = 0.2$  che può

esser interpretato come una situazione iniziale di shock del sentiment, al seguito del quale tutti gli attori di mercato sviluppano un'opinione positiva sul valore futuro dell'asset.

Nei della figura 3 si può vedere vedere come le  $\Sigma_t$  degli agenti tendano a una distribuzione stazionaria, mantenuta da agenti posti all'estremo destro (agenti che allocano interamente la propria ricchezza nell'asset) e sinistro (agenti che non possiedono l'asset).

Il prezzo a cui convergerà l'asset è calcolabile ricordando che le quantità di denaro ed asset nel mercato rimangono costanti, e che quindi mediamente gli agenti deterranno sempre la stessa quantità dell'asset e di denaro: sarà quindi dato da

$$\pi^* \quad tc \quad \frac{\sigma_0 \pi^*}{\sigma_0 \pi^* + w_0} = \Sigma^* \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^*}{\pi_0} = \frac{\Sigma^* / (1 - \Sigma^*)}{\Sigma_0 / (1 - \Sigma_0)} \quad (29)$$

Il tempo di convergenza dipende invece dalla velocità con cui gli agenti tendono ad agire (dunque dall'ansatz  $d$ ), le quantità che scambiano (dunque gli ansatz  $f^b, f^s$ ) ed il rapporto tra venditori e compratori (dunque l'ansatz  $b$ ). Poiché le simulazioni si sono dimostrate persistenti nella loro evoluzione, una stima di questi tempi può essere ottenuta da un fit sul loro andamento.

Questa disposizione degli agenti agli estremi non è necessariamente il comportamento atteso da attori reali, motivo per il quale come discusso sopra ho introdotto anche degli ansatz più articolati (dalle equazioni 26) sulle scelte delle quantità di vendita/acquisto.

#### 4.2. Distribuzioni Beta sulla quantità scambiata

La simulazione presentata in questo paragrafo è realizzata esattamente come nel paragrafo precedente, con la sola differenza degli ansatz  $f^b, f^s$  definiti secondo le eq.26. Prezzo atteso e stato medio degli agenti convergono alle stesse quantità, ma la distribuzione delle  $\Sigma_t$  tende ora a concentrarsi sulla sua media. La preferenza di questi ansatz rispetto ai precedenti è arbitraria e rimanda a come si assume si comporti un agente reale, mentre qui mi limiterò a presentarne le conseguenze.

Come si può vedere dall'andamento dei prezzi in figura 4 la convergenza avviene più velocemente rispetto al caso uniforme: questo è dovuto al fatto che -come si può vedere dalla figura 9- gli scambi degli agenti saranno più concentrati proprio intorno a quei valori che lo porteranno all'equilibrio.

#### 4.3. Fit sui prezzi e stima dei tempi caratteristici

Ripetendo per più volte questa simulazione, dalla figura 5 si può vedere come il modello sia consistente nel generare andamenti del prezzo simili. Questo si può quindi interpretare come una determinabilità del comportamento macroscopico degli agenti, che pur agiscono microscopicamente in base a comportamenti probabili; l'andamento dei prezzi è dunque in questo modello un processo stocastico, e la convergenza un fenomeno emergente.

Il tempo caratteristico della transizione all'equilibrio può essere stimato con dei fit su questi andamenti. Per capire come l'evoluzione del sistema cambi al variare della sua parametrizzazione ho quindi scelto un insieme di valori del sentiment e ripetuto la simulazione 5 volte per ogni parametrizzazione. Scegliendo una



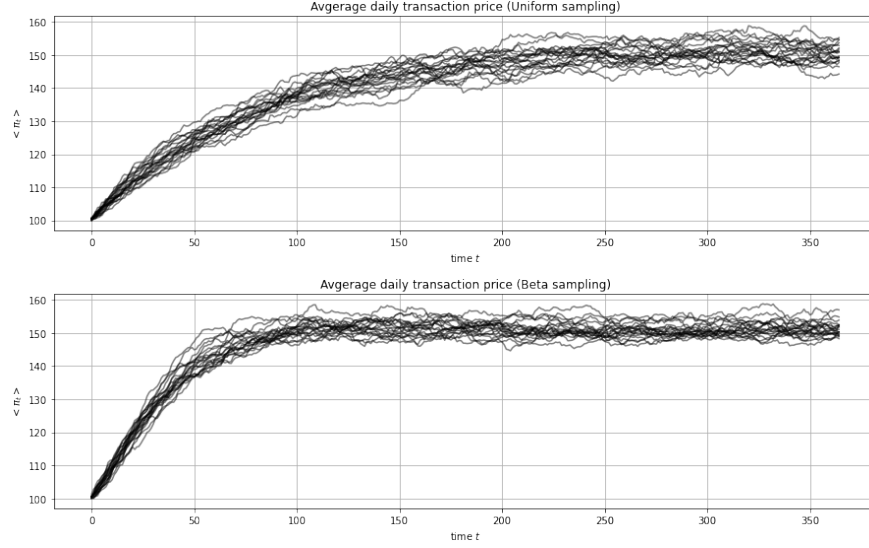


Figure 5: Prezzi di chiusura in 20 simulazioni ripetute per le due diverse strategie di sampling delle quantità. In alto, i risultati assumendo  $f^s, f^b$  uniformi; in basso i risultati assumendo  $f^s, f^b$  come definito nelle eq.26

$\Sigma_0 = 0$  e variando il sentiment degli agenti, i risultati del fit e coefficienti sono mostrati in figura 7 quando  $f^b, f^s$  sono distribuzioni uniformi. Scegliendo invece di mantenere costante un offset di  $\Sigma^* - \Sigma_0 = 0.15$  i risultati sono invece mostrati in appendice C e figura 12, insieme allo stesso procedimento realizzato per  $f^b, f^s$  definiti con le funzioni beta secondo le eq.26.

Il fit è realizzato sulla proporzione di ricchezza allocata nell'asset al tempo  $t$ , in particolare sul valore assoluto della distanza media degli agenti dall'equilibrio  $|\langle \Sigma^* - \Sigma_t \rangle|$  per osservare come questa tenda a zero o tutt'al più ad un minimo dato dalle fluttuazioni. La scelta di  $f^b, f^s$  uniformi genera andamenti di questo valore che si adattano molto bene ad un decadimento esponenziale, mentre la scelta con distribuzioni Beta sembra adattarsi bene ad un fit lineare nei primi step temporali, poiché come si vede da 5 in questo caso la transizione all'equilibrio è più rapida.

Dai coefficienti del fit in figura 7 si vede inoltre la persistenza della simulazione: l'intercetta è sempre vicina al valore effettivo di  $|\Sigma^* - 0.5|^4$  mentre il parametro del fit ha un andamento regolare e con una varianza relativamente bassa.

Nello specifico, il parametro del fit esponenziale (ottenuto sui primi 100 step temporali) ci dà una stima del tempo caratteristico: per sentiment in modulo maggiore, come si vede dalle funzioni in fig.1, la reazione degli agenti sarà maggiore e dunque il tempo caratteristico minore. Valori più alti per gli estremi sono invece dovuti al fatto che tutti gli agenti condividono lo stesso sentiment: si crea in questi casi una situazione in cui molti più agenti decidono di vendere/comprare rispetto a quanti vogliano comprare/vendere, e poiché in

---

<sup>4</sup>con l'unica differenza che poiché nella libreria le metriche sono valutate sempre a fine step temporale -sui valori di chiusura della giornata- il valore iniziale di  $\Sigma_0$  non è rappresentato, ed il primo step risulterà sempre già spostato rispetto al suo valore (in questo caso leggermente più in basso)

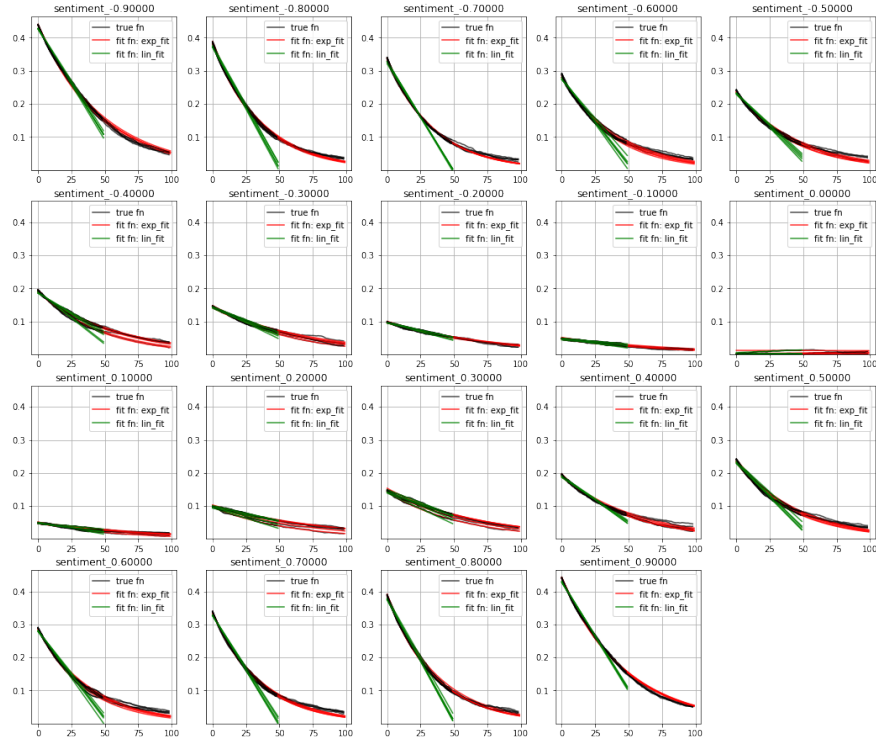


Figure 6: Fit lineare ed esponenziale con scelta di  $f^s, f^b$  uniformi: sopra, gli andamenti dei prezzi di chiusura con le funzioni del fit lineare ed esponenziale; sotto i coefficienti ottenuti per questi fit

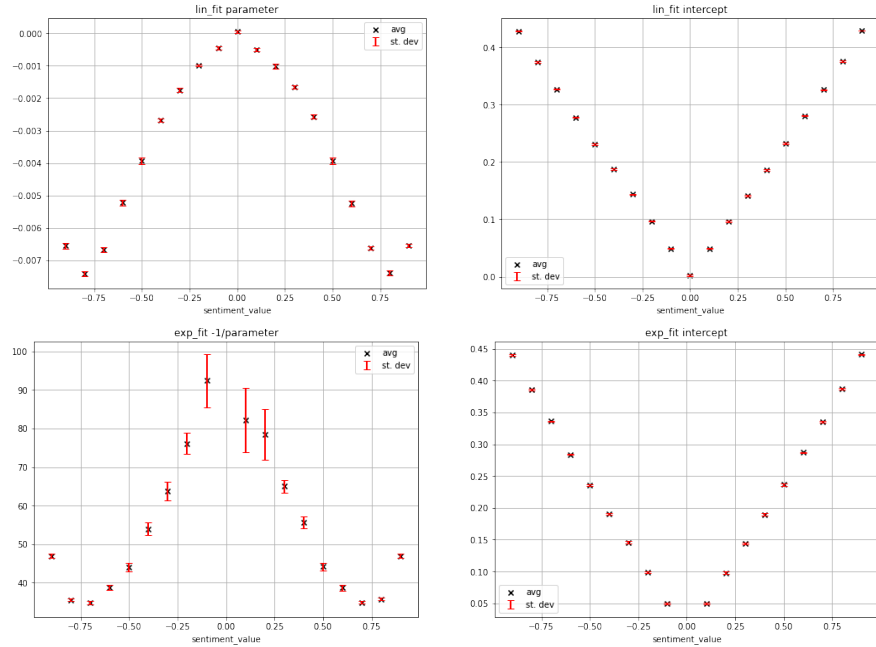


Figure 7: I grafici in alto sono i coefficienti ottenuti per il fit esponenziale, quelli in basso per il fit lineare. A destra i valori dell'intercetta. Il grafico in alto a sinistra, in particolare, raffigura  $-\lambda^{-1}$  quindi il tempo caratteristico del processo di convergenza assunto come decadimento esponenziale

questo modello gli scambi avvengono solo incrociando richieste di vendita ed acquisto questo porta solamente a un rallentamento del mercato. Questo comportamento "patologico" agli estremi è quindi dovuto a una bassa risoluzione nel rappresentare l'infrastruttura economica reale, in cui la presenza di attori con grandi fondi di liquidità ed asset (broker) garantisce ci siano sempre corrispettivi a richieste di acquisto o vendita. Il parametro del fit lineare (ottenuto sui primi 50 step temporali) ci dà una misura della velocità di reazione iniziale allo shock del mercato, e come atteso sarà maggiore per valori di sentiment maggiori in valore assoluto, con lo stesso andamento "patologico" agli estremi.

Infine, guardando ai risultati delle simulazioni per sentiment di segno opposto, si ritrova la simmetria assunta in 11 sulla tendenza a vendere e comprare: poiché la tendenza a vendita ed acquisto  $b(S_t)$  è dispari<sup>5</sup>, gli shock positivi e negativi del sentiment genereranno andamenti speculari.

## 5. Conclusioni

Il modello riproduce in maniera ragionevole quanto ci si potrebbe attendere da uno shock nel sentiment nel mercato, e con la sua semplicità risulta sia maneggevole (andando a lavorare sugli ansatz  $d, b, f^b, f^s$ ) che interpretabile (grazie alla condizione di convergenza a  $\Sigma^* = P^{up}$  ed il rapporto tra gli ansatz ed assunzioni comportamentali).

Il fatto che il sistema converga a un valore calcolabile, dà inoltre il vantaggio di stabilità del modello e versatilità per applicazioni più articolate: la simulazione presentata nella sezione 4 è chiaramente una situazione molto specifica e semplificata, ma presenta un comportamento microscopico e macroscopico che può essere alla base di situazioni più complesse. L'appendice D presenta brevemente alcune di queste situazioni e mostra come il comportamento sottostante sia fondamentalmente lo stesso.

Il comportamento "patologico" agli estremi nelle figure 7 e 10 e mostra invece uno dei limiti di queste simulazioni: la semplificazione dell'infrastruttura del mercato, in cui gli scambi avvengono solo tra compratori/venditori fa sì che in situazioni di grande sbilanciamento tra domanda ed offerta il mercato rallenti. Questo non è il comportamento atteso nel mercato reale, in cui la presenza di attori con grande liquidità e di broker permette sempre la possibilità di effettuare scambi e situazioni di sbilanciamento tra domanda ed offerta si traducono in forti aumenti e diminuzioni del prezzo. Un possibile sviluppo potrebbe essere quindi implementare un'infrastruttura di mercato più articolata, ed introdurre attori che operino come broker per avere fondi di liquidità/asset, garantire sempre la possibilità di scambi ed eventualmente stabilire prezzi di mercato.

Oltre a questo, per avere una struttura di mercato più articolata si potrebbero implementare più beni tra i quali gli attori possono distribuire la propria ricchezza. Questo richiederebbe estendere le definizioni 5, 7, 9 a più asset, e sarebbe interessante riprodurre la stessa condizione di equilibrio dell'eq22 con agenti che dividono la propria ricchezza in parti proporzionali alle diverse previsioni.

---

<sup>5</sup>dalla definizione 9, si ha che  $b(S_t) = -b(-S_t)$  implica  $D(b|S_t) = D(s| - S_t)$

Le assunzioni sul comportamento degli agenti sono inoltre assunte simmetriche rispetto a vendita/acquisto, mentre si è osservato come nei casi reali i fenomeni di "sell off" siano più rapidi dei fenomeni di "buy in" [11]. Un altro possibile sviluppo potrebbe essere quindi introdurre un'asimmetria nella tendenza alla vendita/acquisto in relazione al sentiment, agendo sugli ansatz  $d, b$  in 11 e rompere quella simmetria per riprodurre i cosiddetti fenomeni di "panic selling". Allo stesso modo, si potrebbero testare diverse regole comportamentali per simulare quali di queste possano generare delle bolle speculative.

Il framework introdotto permette infatti molta libertà nel definire comportamenti più articolati ed eterogenei, agendo sugli ansatz posti ed introducendo partizioni di agenti operanti secondo regole diverse. Una buona norma per i modelli ad agenti è discutibilmente quella di introdurre agenti dotati di molte regole semplici [9], e quanto discusso nelle sezioni 2 e 3 permette proprio questo.

I vantaggi di questo approccio consistono quindi nella maneggevolezza ed interpretabilità dei modelli costruiti, che come visto nella sezione 3 e 4 possono creare simulazioni che siano non solo persistenti nell'evoluzione ma anche calcolabili.

Mentre in questo studio non ho esplorato la possibilità di usare questo framework in task di previsione, l'approccio definito in questo progetto potrebbe quindi essere una strategia affidabile per realizzare modelli basati su diverse ipotesi comportamentali, e indagare così i diversi scenari che ne possono emergere.

## References

- [1] Black, F., and M. Scholes, (1972): *The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency* Journal of Finance, 27, 399-417 <https://doi.org/10.2307/2978484>
- [2] Heston, S. (1993): *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*. Review of Financial Studies, 6, 327-343. <https://doi.org/10.1093/rfs/6.2.327>
- [3] Le Floch, F., Oosterlee, C.W (2019): *Model-free stochastic collocation for an arbitrage-free implied volatility: Part I*. Decisions Econ Finan 42, 679–714 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10203-019-00238-x>
- [4] Mrázek, M. & Pospíšil, J. (2017): *Calibration and simulation of Heston model*. Open Mathematics, 15(1), 679-704. <https://doi.org/10.1515/math-2017-0058>
- [5] Crisóstomo, R (2014): *An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration Using Matlab*. CNMV Working Paper No 58. <http://doi.org/10.2139/ssrn.2527818>
- [6] Steinbacher, M., Raddant, M., Karimi, F. et al. (2021): *Advances in the agent-based modeling of economic and social behavior*. SN Bus Econ 1, 99 (2021). <https://doi.org/10.1007/s43546-021-00103-3>
- [7] Edmonds et al. (2019): *Different Modelling Purposes* Journal of Artificial Societies and Social Simulation 22 (3) 6. doi: 10.18564/jasss.3993
- [8] Epstein, J.M. et al. (2014): *Agent Zero: Toward Neurocognitive Foundations for Generative Social Science*.
- [9] Dawid, Herbert and Delli Gatti, Domenico (2018): *Agent-Based Macroeconomics*. Bielefeld Working Papers in Economics and Management No. 02-2018. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3112074>
- [10] Lebaron, Blake. (2002). *Building the Santa Fe artificial stock market*.
- [11] Yutao Chen, Shuzhen Zhu, Haoyuan He, (2021): *The Influence of Investor Emotion on the Stock Market: Evidence from an Infectious Disease Model*, Discrete Dynamics in Nature and Society, vol. 2021, Article ID 5520276. <https://doi.org/10.1155/2021/5520276>
- [12] Wikipedia: *Beta distribution*: [https://en.wikipedia.org/wiki/Beta\\_distribution#Alternative\\_parameterizations](https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_distribution#Alternative_parameterizations)
- [13] Krämer, W. Kahneman, D. (2011): *Thinking, Fast and Slow*. Stat Papers 55, 915 (2014). <https://doi.org/10.1007/s00362-013-0533-y>

## 6. Appendice A: Previsione dell'agente

Nel caso più generale, ho definito la previsione dell'agente con:

$$P(\tilde{p}, \tilde{t} | \{\pi_\tau\}_{\tau=0}^{\tau=t}; \alpha_t, S_t) \quad (30)$$

Tramite questa funzione, l'agente assegna una probabilità di osservare il prezzo  $\tilde{p}$  al tempo futuro  $\tilde{t}$ , in base alla storia dei prezzi osservata  $\{\pi_\tau\}_{\tau=0}^{\tau=t-1}$ , influenzato dal suo stato interno  $\alpha_t, S_t$ . Questa forma permette previsioni articolate all'agente, poiché

- La dipendenza puntuale dai tempi futuri  $\tilde{t}$  gli permette di distinguere il breve termine dal lungo termine, ed eventualmente previsioni specifiche per ogni tempo.
- La dipendenza dalla serie temporale dei prezzi  $\{\pi_\tau\}_{\tau=0}^{\tau=t-1}$  gli permette inferenze basate su eventuali pattern e trend.
- La dipendenza dal suo stato interno  $\alpha_t, S_t$  presume che l'agente possa agire influenzato dal suo stato emotivo, da eventuali obiettivi o condizionamenti interni.

Questa definizione può essere sconvolgente se si vuol mantenere semplice ed interpretabile un modello, ma può permettere da un lato di sviluppare simulazioni in cui gli agenti hanno comportamenti complessi, dall'altro può generalizzare una ampia classe di comportamenti più semplici.

Nella sezione 2 si è ad esempio fatta l'approssimazione che l'agente ignori trend e pattern nei prezzi, e valuti la sua previsione basandosi solo sul suo sentiment ed ultimo prezzo osservato. Questo significa usare come funzione di previsione il propagatore

$$P(\tilde{p}, \tilde{t} | \pi, t; \alpha_t, S_t) \quad (31)$$

Da questa funzione, si può ricavare la probabilità stimata dall'agente che in tutti i tempi futuri il prezzo sia maggiore o minore di quello osservato al tempo corrente:

$$P_t(up) = \frac{\int_{\tilde{t}=t}^{\tilde{t}=\infty} \int_{\tilde{p}=\pi}^{\tilde{p}=+\infty} P(\tilde{p}, \tilde{t} | \pi, t; S_t) d\tilde{p} d\tilde{t}}{\int_{\tilde{t}=t}^{\tilde{t}=\infty} \int_{\tilde{p}=0}^{\tilde{p}=+\infty} P(p, \tau | \pi, t; S_t) d\tilde{p} d\tilde{t}} = \frac{\int_{\tilde{t}=t}^{\tilde{t}=\infty} \int_{\tilde{t}=\pi}^{\tilde{t}=+\infty} P(\tilde{p}, \tilde{t} | \pi, t; S_t) d\tilde{p} d\tilde{t}}{\int_{\tilde{t}=t}^{\tilde{t}=\infty} d\tilde{t}} \quad (32)$$

$$P_t(down) = 1 - P_t(up) \quad (33)$$

dove nell'equivalenza sulla prima equazione si è usata la condizione di normalizzazione del propagatore rispetto alla variabile  $\tilde{p}$

$$\int_{\tilde{p}=0}^{\tilde{p}=+\infty} P(\tilde{p}, \tilde{t} | \pi, t; S_t) d\tilde{p} = 1 \quad any \quad \tilde{t} \quad (34)$$

mentre nella seconda equazione si assume "up" e "down" siano mutualmente esclusive (con il caso di prezzo stabile incluso in "up").

Definendo ora

$$S_t = P_t(up) - P_t(down) \quad (35)$$

e combinandola con la seconda equazione si ricava così la definizione 5 poiché  $S_t = 2P_t(up) - 1$

Queste definizioni sono già sufficienti a giustificare il modello usato nelle sezioni 3 e 4, dove per semplicità non è stato necessario ricavare ulteriori dettagli sulla funzione  $P$ .

Può tuttavia essere interessante farlo per ragionare sul ritorno atteso dell'agente nel caso generale.

Dalle proprietà del propagatore si può definire il prezzo che mediamente l'agente si aspetta di osservare nel futuro:

$$\Pi_{\tilde{t}} = \int_{\tilde{p}=0}^{\tilde{p}=+\infty} \tilde{p} P(\tilde{p}, \tilde{t} | \pi, t; S_t) d\tilde{p} \quad (36)$$

$$\Pi = \frac{\int_{\tilde{t}=t}^{\tilde{t}=\infty} \Pi_{\tilde{t}} d\tilde{t}}{\int_{\tilde{t}=t}^{\tilde{t}=\infty} d\tilde{t}} \quad (37)$$

Nello specifico, la quantità  $\Pi_{\tilde{t}}$  è il prezzo che mediamente si aspetta di trovare, guardando il mercato al tempo  $\tilde{t}$ ; la quantità  $\Pi$  è invece il prezzo che mediamente si aspetta di trovare, guardando il mercato in tempi random nel futuro. Con questi si può definire:

$$R_{\tilde{t}} = \frac{\Pi_{\tilde{t}}}{\pi_t} \quad R = \frac{\Pi}{\pi_t} \quad (38)$$

Il primo sarà la proporzione di guadagno attesa, acquistando al tempo  $t$  e vendendo al tempo  $\tilde{t}$ , mentre la seconda sarà il guadagno atteso vendendo ad un tempo indefinito nel futuro. Queste quantità dipenderanno dalla specifica forma della  $P$ , scelta in modo da soddisfare 35. In questo modo si è stabilito quindi un legame funzionale tra la previsione dell'agente ed il guadagno medio atteso.

Nei casi che ho studiato in questo progetto l'unico vincolo sulla forma esplicita di  $P$  è dato dall'eq.35, e poiché la decisione dell'agente è presa considerando solo la probabilità di crescita/decrecita data dall'eq.7 il ritorno atteso è indeterminato ma anche irrilevante.

Un modello più realistico prevederebbe tuttavia maggiore capacità di inferenza degli agenti, in grado di distinguere breve/lungo termine ed eventualmente diverse decisioni in base al rischio percepito in un asset. In questo caso, si potrebbe costruire una funzione di decisione che varia in base alle quantità definite nelle eq. 38: agenti definiti in questo modo potrebbero elaborare strategie in funzione di diversi orizzonti temporali, ed eventualmente valutare il tradeoff tra possibili guadagni e perdite in un asset prima di decidere come agire.

## 7. Appendice B: Decisione dell'agente

Nel caso più generale, ho definito la decisione dell'agente con una probabilità sul suo spazio delle scelte e il suo stato interno:

$$D(q, p | \alpha_t; P_t) \quad (39)$$

Considerando  $\alpha_t = (\sigma_t, w_t)$  questa può essere scritta come

$$D(q, p | \sigma_t, w_t; P_t) \quad (40)$$

Ricordando che:

- $\sigma_t, w_t$  sono rispettivamente la quantità di asset e denaro di cui l'agente dispone al tempo  $t$
- $q, p$  sono rispettivamente la quantità ed il prezzo a cui decide di effettuare lo scambio
- $\pi_t$  il prezzo dell'asset al tempo  $t$
- $\Sigma_t = \frac{\sigma_t \pi_t}{\sigma_t \pi_t + w}$  la proporzione della sua ricchezza totale, allocata al tempo  $t$  in forma di asset

su può innanzitutto dividere questa distribuzione di probabilità nelle sue componenti mutuamente esclusive:

$$D(a | \sigma_t, w_t; P_t) = \int_{q, p \in a} D(q, p | \sigma_t, w_t; P_t) dq \quad (41)$$

$$\sum_a D(a | \sigma_t, w_t; P_t) = 1 \quad (42)$$

dove la prima è la probabilità che l'agente effettui l'azione  $a$ , mentre la seconda la condizione di normalizzazione<sup>6</sup>. Si può ora assumere che la decisione dell'azione non dipenda dallo stato dell'agente, ma solamente dalla sua previsione.

Occupandosi invece della scelta di prezzo e quantità si può definire

$$D^a(q, p | \sigma_t, w_t; P_t) = \frac{D(q, p | \sigma_t, w_t; P_t)}{D(a | \sigma_t, w_t; P_t)} \quad (43)$$

$$\int_{q, p} \sum_a D(a | \sigma_t, w_t; P_t) D^a(q, p | \sigma_t, w_t; P_t) dq dp = 1 \quad (44)$$

Dove la prima è la formula inversa per probabilità condizionata, e la seconda la condizione di normalizzazione che ne deriva.

Se si considerano indipendenti la scelta di prezzo e quantità, si può ulteriormente separare questa probabilità in:

$$D^a(q, p | \sigma_t, w_t; P_t) = \eta^a(p | \sigma_t, w_t; P_t) f^a(q | \sigma_t, w_t; P_t) \quad (45)$$

---

<sup>6</sup>con  $q, p \in a$  si intende prezzo e quantità ammissibili dall'azione. Che saranno quindi  $q > 0$  per l'acquisto,  $q = 0$  per il non fare nulla e  $q < 0$  per la vendita



La condizione di normalizzazione sarà quindi:

$$\int_{q,p} \sum_a D(a) \eta^a(p) f^a(q) dq dp = 1 \quad (46)$$

dove tutte le altre dipendenze sono omesse per semplicità di notazione. Si può quindi ragionare separatamente per le tre componenti della decisione.

Riguardo la decisione dell'azione, considerando le tre azioni mutuamente esclusive di fare nulla/comprare/vendere, dalla condizione di normalizzazione abbiamo che

- la probabilità di vendita è vincolata da  $D(s) = 1 - D(n) - D(b)$
- la probabilità di vendita o acquisto è data dalla probabilità che l'agente *non* non faccia nulla, quindi  $D(b|\neg n) + D(s|\neg n) = 1$

Questi tre eventi sono quindi univocamente definiti da due valori  $d \in [0, 1], b \in [-1, 1]$  tali che:

$$d = D(\neg n) \quad ; \quad b = D(b|\neg n) - D(s|\neg n) \quad (47)$$

Si può assumere ora che le azioni saranno dipendenti dalla sola previsione, quindi tramite l'eq.35 si definisce:

$$D(a|\sigma_t, w_t; P_t) = D(a|S_t) \quad (48)$$

e con questo il sistema di equazioni sulle probabilità di azioni diventa:

$$d(S_t) = D(\neg n|S_t) \quad (49)$$

$$b(S_t) = D(b|\neg n; S_t) - D(s|\neg n; S_t) \quad (50)$$

Il vantaggio di definire gli ansatz in questo modo sta nel fatto che:

- $d(S_t)$  è direttamente interpretabile come la tendenza dell'agente a fare qualcosa rispetto al suo sentiment; la parità di questa funzione indica una simmetria di questa tendenza rispetto a sentiment negativi o positivi
- $b(S_t)$  è direttamente interpretabile come la tendenza dell'agente all'acquisto rispetto alla vendita, nel momento in cui decide di fare qualcosa; quando questa funzione è dispari, si avrà simmetria rispetto a sentiment opposti nella probabilità di vendere o acquistare

Invertendo queste definizioni si ottiene che:

$$D(n|S_t) = 1 - d(S_t) \quad (51)$$

$$D(b|S_t) = d(S_t) \frac{1 + b(S_t)}{2} \quad (52)$$

$$D(n|S_t) = d(S_t) \frac{1 - b(S_t)}{2} \quad (53)$$

Riguardo la scelta del prezzo  $\eta(p|\sigma_t, w_t; P_t)$  si può per semplicità assumere che sia indipendente da qualsiasi parametro, ed estratta come indicato nella sezione 3 nell'eq 13. Quindi  $\eta(p)$  sarà data da

$$r = \text{Normal}(0, \sigma_p) \quad (54)$$

$$p = \pi_t(1 + r) \quad \text{if} \quad r \geq 0 \quad (55)$$

$$p = \pi_t(1 - r)^{-1} \quad \text{if} \quad r < 0 \quad (56)$$

Scelto in questo modo, si avrà una simmetria tra prezzi maggiori e minori di quello corrente

$$\frac{\pi_t}{\eta(p)_{p < \pi_t}} = \frac{\eta(p)_{p \geq \pi_t}}{\pi_t} \quad (57)$$

che eviterà bias sistematici di crescita o salita dei prezzi.

Da queste definizioni sulla probabilità di azioni 11 e scelta dei prezzi 13, si può ragionare per generiche funzioni sulle quantità e dimostrare che per scelte adeguate di  $f^s, f^b$  il sistema soddisferà condizioni di convergenza. Per farlo, è utile definire:

$$\Omega_t = \frac{\sigma_t \pi_t - w_t}{\sigma_t \pi_t + w_t} = 2\Sigma_t - 1 \quad (58)$$

e notare che dopo uno scambio a generiche quantità e prezzo  $q, p$  (indicando con  $q < 0$  le vendite) si ha:

$$\Omega_{t+1} = \frac{(\sigma_t + q)\pi_t - (w_t - q\pi_t)}{(\sigma_t + q)\pi_t + (w_t - q\pi_t)} = \Omega_t + 2\frac{qp}{\sigma_t \pi_t + w_t} \quad (59)$$

La media di questo valore, per un agente che si trova allo stato  $\Omega_t$  al tempo  $t$  sarà:

$$\langle \Omega_{t+1} \rangle = \Omega_t + 2\frac{\langle q \rangle \langle p \rangle}{\sigma_t \pi_t + w_t} \quad (60)$$

dove  $\langle qp \rangle = \langle q \rangle \langle p \rangle$  poiché le probabilità di azioni hanno domini disgiunti e si è assunto in precedenza che per ogni azione le probabilità su quantità e prezzi siano separabili. Per proseguire, è necessario approssimare la scelta del prezzo ad una delta di Dirac sul prezzo corrente.

$$\eta^a(p) \simeq \delta(p - \pi_t) \quad (61)$$

Questa approssimazione è necessaria poiché lo sbilanciamento di domanda ed offerta porterà a maggiori richieste di acquisto/vendita, che saranno ognuna realizzata al prezzo più conveniente per il venditore/compratore; per questa convenienza del venditore/compratore il prezzo tenderà a salire o scendere e questo comporterà un cambio di  $\Omega_t$  anche quando l'agente non effettua scambi. Con questa approssimazione si semplifica quindi la dipendenza di  $\Omega_t$  da tutti gli scambi effettuati da altri agenti e si può ragionare come se l'agente agisse tendendo verso l'equilibrio per ogni prezzo che osserva.

Questa approssimazione è ragionevole fintantoché il sistema sarà "abbastanza regolare" nell'evoluzione, ed il prezzo cambierà più lentamente di quanto gli agenti tenderanno all'equilibrio. Questo è sempre verificato per un sistema di agenti identici e sentiment invariati -come nello studio svolto in sez. 3,4- ma potrebbe essere

un'approssimazione troppo forte per agenti eterogenei e/o prezzi che cambiano irregolarmente e velocemente<sup>7</sup>.

In questo modo il calcolo della media dello stato si riduce ad un calcolo sulla media della quantità scambiata:

$$\langle \Omega_{t+1} \rangle = \Omega_t + 2 \frac{\pi_t}{\sigma_t \pi_t + w_t} \langle q \rangle \quad (62)$$

Usando le definizioni per le probabilità di azione 41 e di quantità 45, si ha:

$$\langle q \rangle = \sum_a [D(a|S_t) \int_{q \in a} q f^a(q|\sigma_t, w_t; S_t) dq] \quad (63)$$

La seconda componente dentro la sommatoria è ora la quantità media scambiata quando l'agente ha preso la decisione  $a$ , che per notazione possiamo indicare con  $\langle q \rangle_a$ ; in particolare:

$$\langle q \rangle_n = 0 \quad (64)$$

$$\langle q \rangle_b = \int_{q=0}^{q=w_t/\pi_t} q f^b(q|\sigma_t, w_t; S_t) dq \quad (65)$$

$$\langle q \rangle_s = \int_{q=0}^{q=\sigma_t} q f^s(q|\sigma_t, w_t; S_t) dq \quad (66)$$

e con queste, indicando con segno negativo le quantità vendute si ha:

$$\langle \Omega_{t+1} \rangle = \Omega_t + 2 \frac{\pi_t}{\sigma_t \pi_t + w_t} [D(b|S_t) \langle q \rangle_b - D(s|S_t) \langle q \rangle_s] \quad (67)$$

La mappa  $\Omega_t \rightarrow \langle \Omega_{t+1} \rangle$  ha quindi un punto fisso quando:

$$D(b|S_t) \langle q \rangle_b = D(s|S_t) \langle q \rangle_s \quad (68)$$

Ricordando le definizioni date nell eq.51 delle probaiblità di azione, questa diventa:

$$d(S_t) \frac{1+b(S_t)}{2} \langle q \rangle_b = d(S_t) \frac{1-b(S_t)}{2} \langle q \rangle_s \quad (69)$$

Ovverosia

$$\frac{\langle q \rangle_s - \langle q \rangle_b}{\langle q \rangle_s + \langle q \rangle_b} = b(S_t) \quad (70)$$

---

<sup>7</sup>non ho approfondito la validità di questa approssimazione in generale, ma ho osservato discrepanze dal comportamento atteso solo per sentiment varaibili con oscillazioni estremamente ampie e veloci (situazioni discutibilmente irrealistiche). La convergenza esatta è inoltre realizzata solo per sistemi in cui il sentiment varia abbastanza lentamente da permettere agli agenti di raggiungere l'equilibrio, mentre in casi più articolati può essere assunta come un'indicazione della sola tendenza. Come si può vedere in appendice D, questa tendenza dà tuttavia un'indicazione già quantitativamente attendibile del comportamento medio degli agenti, nelle diverse situazioni osservate

Esplicitando nuovamente le quantità medie scambiate, il punto fisso sarà quindi definito da  $\sigma^*, w^*$  tali che:

$$\frac{\int_{q=0}^{q=\sigma^*} q f^s(q|\sigma^*, w^*; S_t) dq - \int_{q=0}^{q=w^*/\pi_t} q f^b(q|\sigma^*, w^*; S_t) dq}{\int_{q=0}^{q=\sigma^*} q f^s(q|\sigma^*, w^*; S_t) dq + \int_{q=0}^{q=w^*/\pi_t} q f^b(q|\sigma^*, w^*; S_t) dq} = b(S_t) \quad (71)$$

Questa condizione definisce implicitamente il punto fisso, *per qualsiasi scelta di  $d, b, f^b, f^s$* .

In particolare si può imporre che

$$\Omega^*(S_t) = b(S_t) \quad (72)$$

stabilendo una corrispondenza tra l'ansatz che definisce la sua tendenza a comprare/vendere ed il suo stato di equilibrio. Nello specifico, per la scelta  $b(S_t) = S_t$  posta nell'eq.11 si ha inoltre che  $\Sigma_t^* = P_t^{up}$ , con l'interpretazione vista in 22.

Esplicitando l'eq71, con la 72 si ha ora:

$$\frac{\int_{q=0}^{q=\sigma^*} q f^s(q|\sigma^*, w^*; S_t) dq - \int_{q=0}^{q=w^*/\pi_t} q f^b(q|\sigma^*, w^*; S_t) dq}{\int_{q=0}^{q=\sigma^*} q f^s(q|\sigma^*, w^*; S_t) dq + \int_{q=0}^{q=w^*/\pi_t} q f^b(q|\sigma^*, w^*; S_t) dq} = \frac{\sigma^* \pi_t - w^*}{\sigma^* \pi_t + w^*} \quad (73)$$

e per degli ansatz  $f^b, f^s$  che soddisfino questa condizione è sufficiente trovare delle funzioni tali per cui:

$$\frac{< q >_s}{\sigma_t} = \frac{< q >_b}{w_t/\pi_t} \quad (74)$$

ovverosia scegliere degli ansatz per i quali *le quantità medie scambiate siano proporzionali alla disponibilità dell'agente, simmetricamente rispetto a vendita ed acquisto*.

Per un valore  $C \in [1, \infty[$  che è al più una funzione sullo stato dell'agente, gli ansatz  $f^s, f^b$  dovranno quindi soddisfare:

$$\int_{q=0}^{q=\sigma_t} q f^s(q|\sigma_t, w_t; S_t) dq = \frac{\sigma_t}{C(\Omega_t; S_t)} \quad (75)$$

$$\int_{q=0}^{q=w_t/\pi_t} q f^b(q|\sigma_t, w_t; S_t) dq = \frac{w_t/\pi_t}{C(\Omega_t; S_t)} \quad (76)$$

Prima ancora di ricavarne delle forme esplicite, questo è sufficiente a dire che  $\Omega^*(S_t)$  è un punto fisso *stabile*, per qualsiasi valore del sentiment  $S_t$ . Sostituendo i valori medi delle eq. 75 e le definizioni di  $D(a|S_t)$  delle eq.51 si ottiene infatti:

$$< \Omega_{t+1} > = \Omega_t + \frac{\pi_t}{\sigma_t \pi_t + w_t} \frac{d(S_t)}{C(\Omega_t; S_t)} [w_t/\pi_t (1 + b(S_t)) - \sigma_t (1 - b(S_t))] \quad (77)$$

e da questa, con un po' di algebra:

$$< \Omega_{t+1} > = \Omega_t \left[ 1 - \frac{d(S_t)}{C(\Omega_t, S_t)} \right] + \frac{b(S_t) d(S_t)}{C(\Omega_t, S_t)} \quad (78)$$

Poiché  $d \in [0, 1]$  e  $C \geq 1$  si ha che

$$\left| \frac{\partial < \Omega_{t+1} >}{\partial \Omega_t} \right| \leq 1 \quad (79)$$

ovverosia la mappa dallo stato  $\Omega_t$  allo stato medio dopo lo scambio è una contrazione. Questo prova che per delle assunzioni sulle probabilità di azione delle eq.51 ed approssimando l'eq.13, imporre che le distribuzioni

sulle quantità seguano la condizione 75 è sufficiente a dimostrare che lo stato  $\Omega^*$  definito dall'eq.73 è un punto fisso stabile. Per valori fissi del sentiment e/o dato un tempo sufficiente, l'agente convergerà quindi a questo stato di equilibrio<sup>8</sup>.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \Omega_t \rangle = \Omega^* \quad (80)$$

E' interessante notare come questa convergenza valga per qualsiasi scelta di  $d, b$  fintantoché le quantità medie vendute ed acquistate siano in proporzione simmetriche rispetto alla disponibilità dell'agente (ovvero  $f^s, f^b$  soddisfano la condizione 75); le specifiche scelte di questi ansatz forniranno condizioni di equilibrio differenti date in generale dall'eq.70, e la scelta di porre  $b(S_t) = \Omega^*(S_t)$  è dettata solamente dal voler avere risultati facilmente interpretabili.

Occupandosi di trovare esplicitamente questi ansatz  $f^s, f^b$  si nota innanzitutto che una scelta possibile è di distribuzioni uniformi su tutta la disponibilità dell'agente; con queste si ha che:

$$\int_{q=0}^{q=\sigma_t} q \frac{1}{\sigma_t} dq = \frac{\sigma_t}{2} \quad (81)$$

$$\int_{q=0}^{q=w_t/\pi_t} q \frac{\pi_t}{w_t} dq = \frac{w_t/\pi_t}{2} \quad (82)$$

Per le quali quindi  $C = 2$  e si ha il comportamento del sistema visto nella sezione 4.1. L'agente in questo caso sceglierà una quantità da scambiare randomicamente tra tutta la sua disponibilità (e mediamente a metà), come si vede nella figura 8

Una scelta più interessante è quella data da degli ansatz che possano invece dipendere dallo stato dell'agente. Per ottenere una classe di funzioni di questo tipo ho usato le proprietà delle distribuzioni Beta [12], che può essere riparametrizzata in funzione della propria media e di un parametro della sua ampiezza. Per definizione si ha che dati due parametri  $\alpha, \beta$  e considerando  $\tilde{q} \in [0, 1]$ :

$$\langle \text{Beta}(\tilde{q}|\alpha, \beta) \rangle = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (83)$$

La riparametrizzazione si realizza ponendo

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \langle \text{Beta}(\tilde{q}|\alpha, \beta) \rangle \in [0, 1] \quad (84)$$

$$\eta = \alpha + \beta > 0 \quad (85)$$

Che invertite danno:

$$\alpha = \mu\eta \quad (86)$$

$$\beta = (1 - \mu)\eta \quad (87)$$

---

<sup>8</sup>La condizione 75 è *sufficiente* ma potrebbe esser più stringente della minima condizione necessaria; potrebbe infatti innanzitutto essere generalizzata a più punti di equilibrio locali, in funzione di scelte di  $C$  non monotone rispetto ai suoi parametri. Una trattazione più rigorosa richiederebbe inoltre la prova dell'esistenza di una distribuzione stazionaria ed il suo calcolo; la stabilità del punto fisso di  $\Omega_t \rightarrow \langle \Omega_{t+1} \rangle$  non garantisce di per sé che la distribuzione sia stazionaria, ma osservando le simulazioni ho ritenuto ragionevole assumerne l'esistenza e limitarmi a calcolarne la convergenza in media

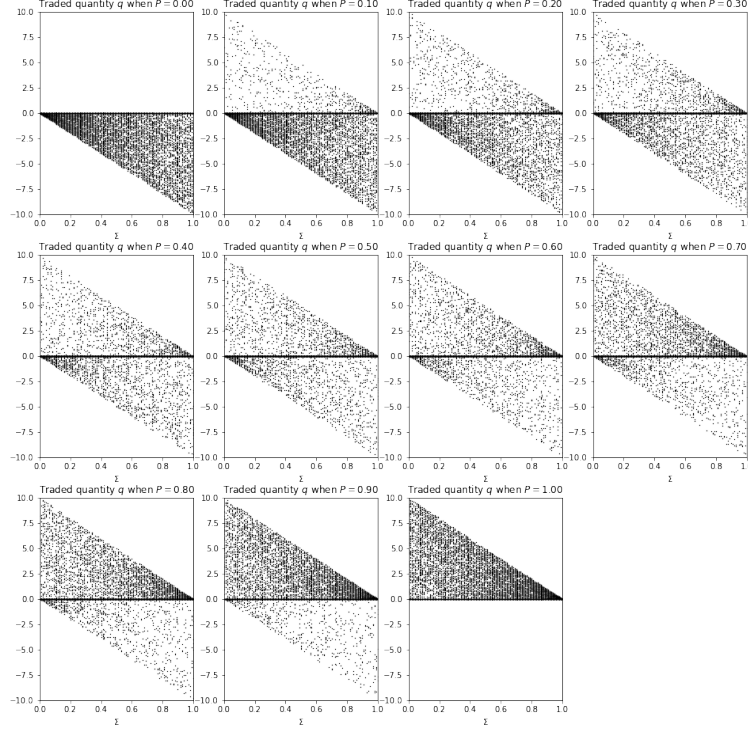


Figure 8: Esito delle decisioni dell'agente quando l'ansatz è definito con distribuzione uniforme: sull'ordinata la quantità che l'agente vorrà scambiare (misurata in quantità di asset  $q$ ), sull'ascisse il valore di  $\Sigma_t$  nel momento in cui la effettua. Ogni grafico rappresenta il diverso comportamento al variare del sentiment  $S_t$ , quindi della sua previsione

In queste variabili, il parametro  $\mu$  è la media della funzione, mentre  $\eta$  è inversamente proporzionale all'ampiezza intorno a quest'ultima. Poiché il dominio della funzione  $Beta$  è in  $\tilde{q} \in [0, 1]$ , potrà infine essere usata per fare sampling su un dominio  $[0, M]$  moltiplicando  $M$  al valore estratto. Si possono quindi definire

$$f^s(q|\sigma_t, w_t, S_t) = \sigma_t \quad Beta\left(\frac{q}{\sigma_t} | \mu\eta, (1-\mu)\eta\right) \quad (88)$$

$$f^b(q|\sigma_t, w_t, S_t) = \frac{w_t}{\pi_t} \quad Beta\left(\frac{q\pi_t}{w_t} | \mu\eta, (1-\mu)\eta\right) \quad (89)$$

ed in questo modo le medie di distribuzioni saranno:

$$\langle q \rangle_s = \sigma_t \langle Beta\left(\frac{q}{\sigma_t} | \mu\eta, (1-\mu)\eta\right) \rangle = \sigma_t \mu \quad (90)$$

$$\langle q \rangle_b = \frac{w_t}{\pi_t} \langle Beta\left(\frac{q\pi_t}{w_t} | \mu\eta, (1-\mu)\eta\right) \rangle = \frac{w_t}{\pi_t} \mu \quad (91)$$

Da cui per le definizioni date in precedenza si ha  $\mu = \frac{1}{C(\Omega_t, S_t)} \in [0, 1]$ . Se il comportamento che si assume per l'agente implica che questo "tenda ad avvicinarsi all'equilibrio", si può ora scegliere una funzione  $\mu(\Omega_t, S_t) \rightarrow 0$  quando  $\Omega_t \rightarrow b(S_t)$ . In particolare, la simulazione in sez.4 è realizzata usando:

$$\tilde{\mu}(\Omega_t, S_t) = \frac{|\Omega_t - b(S_t)|}{2} \quad (92)$$

$$\mu(\Omega_t, S_t) = \mu_m(1 - \tilde{\mu}) + (1 - \mu_m)\tilde{\mu} \quad (93)$$

Dove la prima equazione diventa semplicemente  $\tilde{\mu} = |\Sigma_t - P_t^{up}|$  quando si sceglie  $b(S_t) = S_t$ .

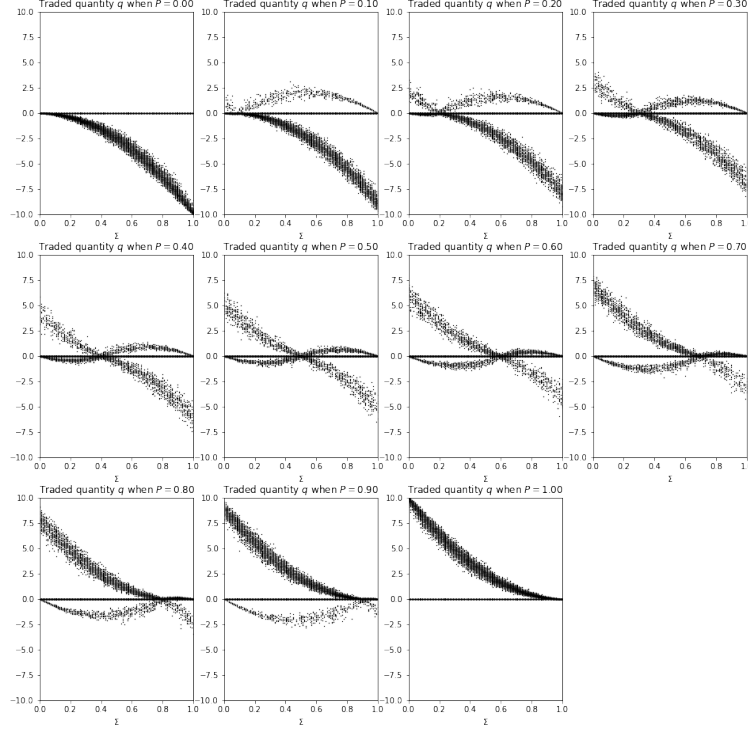


Figure 9: Esito delle decisioni dell'agente quando l'ansatz è definito con funzioni Beta in eq.26: sull'ordinata la quantità che l'agente vorrà scambiare (misurata in quantità di asset  $q$ ), sull'ascisse il valore di  $\Sigma_t$  nel momento in cui la effettua. Ogni grafico rappresenta il diverso comportamento al variare del sentiment  $S_t$ , quindi della sua previsione

I parametri scelti sono stati infine  $\mu_m = 0.02$  ed  $\eta = 0.55$ . Ho osservato che valori maggiori/minori di  $\eta$  aumentavano/diminuivano la densità della distribuzione stazionaria in fig.4 intorno al valore di equilibrio; l'aggiunta del parametro  $\mu_m$  ha invece un'utilità di natura più tecnica: l'effetto della seconda equazione in 92 è di limitare la media delle quantità vendute/acquistate in valore assoluto "abbastanza lontano dallo zero":

$$\inf_{\Omega_t, S_t} [ \langle q \rangle_{s,b} ] \geq \mu_m \quad (94)$$

Questa scelta evita che l'agente si trovi a dover fare sampling delle quantità da scambiare con valori numericamente troppo piccoli, casi in cui ho osservato che il troncamento computazionale può introdurre un bias nel comportamento globale <sup>9</sup>. L'effetto delle scelte 11, 13 e 26 è l'evoluzione riportata nella sezione 4.2;

<sup>9</sup>Nel caso in cui l'agente si trovi a dover richiedere al book scambi di quantità molto vicine allo zero, l'effetto numerico del troncamento può diventare rilevante. In questi casi il tipo numerico immette sistematicamente un bias nel sistema poiché la distribuzione stazionaria non è simmetrica intorno alla media e più spesso verranno tagliati i valori di quegli scambi di persone vicine all'equilibrio e che hanno  $|\Omega_t| \geq \Omega^*$ : il bias favorirà quindi gli scambi di chi ha  $|\Omega_t| < \Omega^*$  e porterà allo stabilirsi di un equilibrio in valore assoluto leggermente maggiore di quello atteso. Questo effetto è trascurabile per valori di  $\Omega^*$  "non troppo grandi", ed in ogni caso nell'ordine di  $10^{-2}|\Omega^*|$ , ma porre la condizione 94 è utile a limitarlo. Non ho approfondito questo problema perché di natura tecnica/numerica ma l'ho osservato (una "diagnostica" è presente nel notebook "appendix C") e le scelte fatte qui sono la conseguenza di diverse osservazioni atte a mantenere le simmetrie assunte e limitare che problemi di questa natura potessero influire troppo sul sistema.

la figura 9 rappresenta inoltre l'esito di queste decisioni al variare del sentiment e dello stato dell'agente  $\Sigma_t$ . In particolare, si ha quindi la condizione di equilibrio desiderata

$$\Sigma_t^* = P_t^{up} \quad (95)$$

E' importante notare come il punto fisso può cambiare con la previsione  $P_t^{up}$  in funzione del tempo, mentre la convergenza esatta  $\langle \Sigma_t \rangle \rightarrow \Sigma^*$  si ha solo per  $P_t^{up} = P^{up}$  costante. Nel caso generico si può invece dire che questa convergenza avverrà in certi tempi caratteristici (come studiato in sez.4 ed appendice C), e/o semplicemente rappresenterà ad ogni istante temporale  $t$  la tendenza media degli agenti (come si può vedere dall'appendice D:9.1). In altre parole, la condizione in eq.21 e nello specifico la eq.22 dicono, *in quale stato gli agenti si vedrebbero in equilibrio, in base alla loro previsione elaborata in ogni specifico istante temporale.*



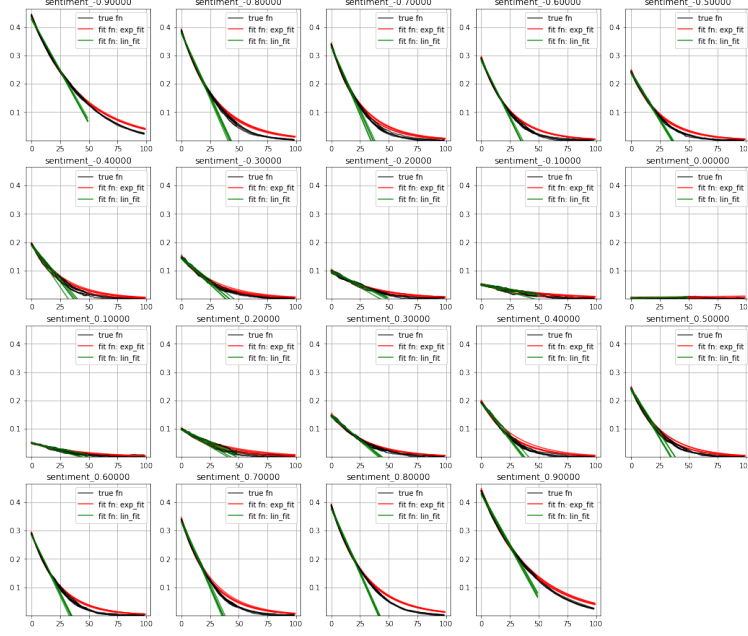


Figure 10: Fit lineare ed esponenziale, per simulazioni realizzate con  $f^s, f^b$  definite con le distribuzioni Beta secondo le eq.26

## 8. Appendice C: Tempi caratteristici

Per studiare la convergenza della quantità  $\langle \Sigma_t \rangle$  verso il valore di equilibrio atteso  $\Sigma^*$  ho eseguito fitting esponenziali e lineari, sia per la scelta di  $f^s, f^b$  uniformi, che per gli ansatz con le funzioni Beta delle eq.26. Per vedere come l'andamento cambiasse con la condizione iniziale e di equilibrio, ho dapprima studiato l'andamento per  $\Sigma_0 = 0.5$  e sentiment fisso  $S$  in un range tra  $-0.9$  e  $0.9$  (quindi  $\Sigma^*$  in un range tra  $0.05$  ed  $0.95$ ).

Nel caso della distribuzione uniforme, i risultati sono quelli mostrati in figura 7 e discussi nella sezione 4.3. Scegliendo  $f^s, f^b$  secondo le eq.26 i risultati sono stati qualitativamente simili, con tempo caratteristico decrescente all'aumentare della quantità  $|\Sigma_0 - \Sigma^*|$ . Anche in questo caso, l'andamento per diverse realizzazioni sembra persistente.

Mentre però nel caso uniforme gli andamenti mostravano un buon accordo con un decadimento esponenziale, in queste simulazioni il sistema sembra convergere più velocemente, e sembra essere invece ben approssimato nella fase iniziale ad una decrescita lineare (fig.10).

Il fit per decadimento esponenziale sta infatti stimando che le distanze degli agenti dall'equilibrio seguano un andamento del tipo:

$$\langle |\Sigma_t - \Sigma^*| \rangle \sim I \exp^{-\lambda t} = I \exp^{-\frac{t}{T}} \quad (96)$$

dove  $I$  è l'intercetta,  $\lambda$  è la costante di decadimento, e  $T$  il tempo caratteristico. Quest'ultimo è per definizione il tempo dopo il quale la quantità osservata si troverà ad uno stato di  $\frac{I}{e}$ : notando che questo fit individua l'intercetta  $I \simeq |\Sigma_0 - \Sigma^*|$  si può definire il tempo caratteristico come il numero di iterazioni richieste nella

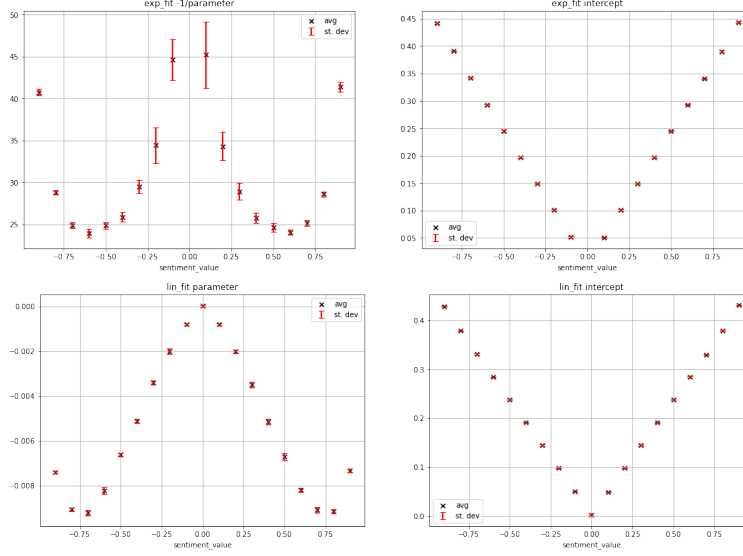


Figure 11: Coefficienti dei fit lineare ed esponenziale, per simulazioni realizzate con  $f^s, f^b$  definite secondo 26

simulazione per raggiungere lo stato:

$$T - tc < \Sigma_T > \simeq \Sigma_0 + \frac{\Sigma^* - \Sigma_0}{e} \quad (97)$$

ovverosia  $T$  è il tempo che il sistema impiega per "realizzare circa il 63% del suo processo di convergenza".

Dalle figure 7 e 11 si vede che in entrambi questi casi, il tempo caratteristico diminuisce all'aumentare del "sentiment dello shock" -quindi dalla distanza della condizione iniziale  $\Sigma_0$  dallo stato di equilibrio  $\Sigma^*$ ; i tempi per gli ansatz beta (26) sono tuttavia sistematicamente minori, ad indicare un processo più veloce.

Un'altra prospettiva per studiare il comportamento del sistema sta invece fissare una distanza  $\Sigma^* - \Sigma_0 = D$  tra condizione iniziale ed equilibrio, per vedere come l'evoluzione cambi al variare del sentiment  $S$ : ho quindi scelto un insieme di valori di sentiment, e seguito le loro definizioni per le quali

$$\Sigma^* = \frac{S+1}{2} \quad ; \quad \Sigma_0 = \frac{S+1}{2} - D \quad (98)$$

dove in particolare ho usato  $D = 0.15$ . Questo significa simulare sistemi in cui avviene uno shock di sentiment della stessa quantità, ma a partire da situazione iniziale differente; il valore positivo di  $D$  indica inoltre uno shock "positivo", al seguito del quale gli agenti tenderanno a voler acquistare.

I risultati ottenuti nel caso uniforme e beta sono mostrati rispettivamente in figura 12 e 13, mentre i coefficienti in figura 14.

Guardando ai coefficienti dei fit, si ritrovano i risultati osservati in precedenza: processi più veloci per gli ansatz beta, ed il comportamento "patologico" discusso in sezione 4 verso gli estremi.

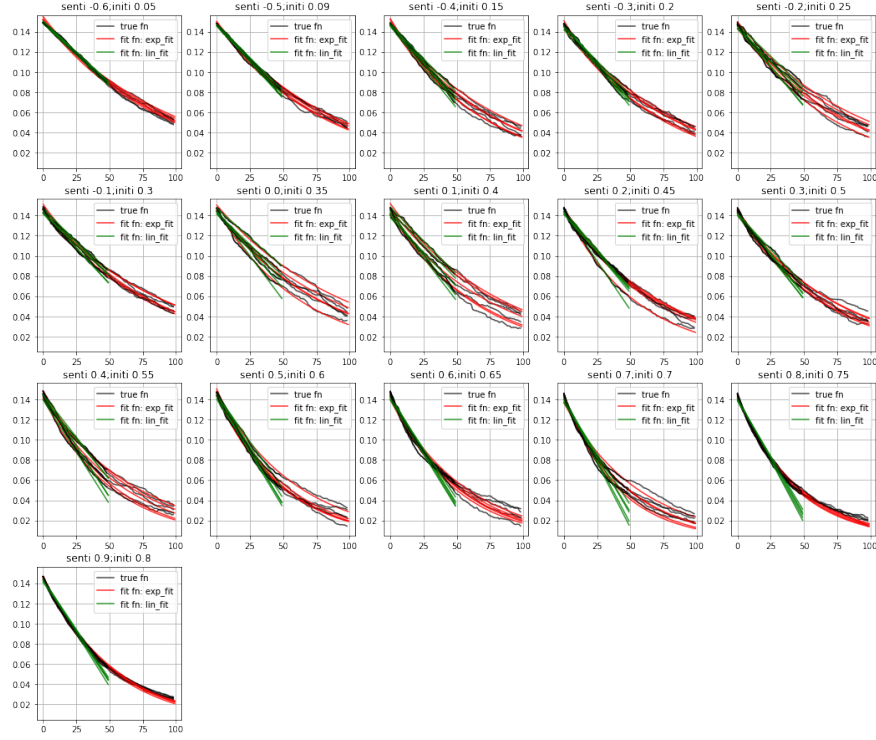


Figure 12: Fit su simulazioni realizzate tenendo costante l'offset  $\Sigma^* - \Sigma_0 = 0.15$ , nel caso di  $f^s, f^b$  uniformi

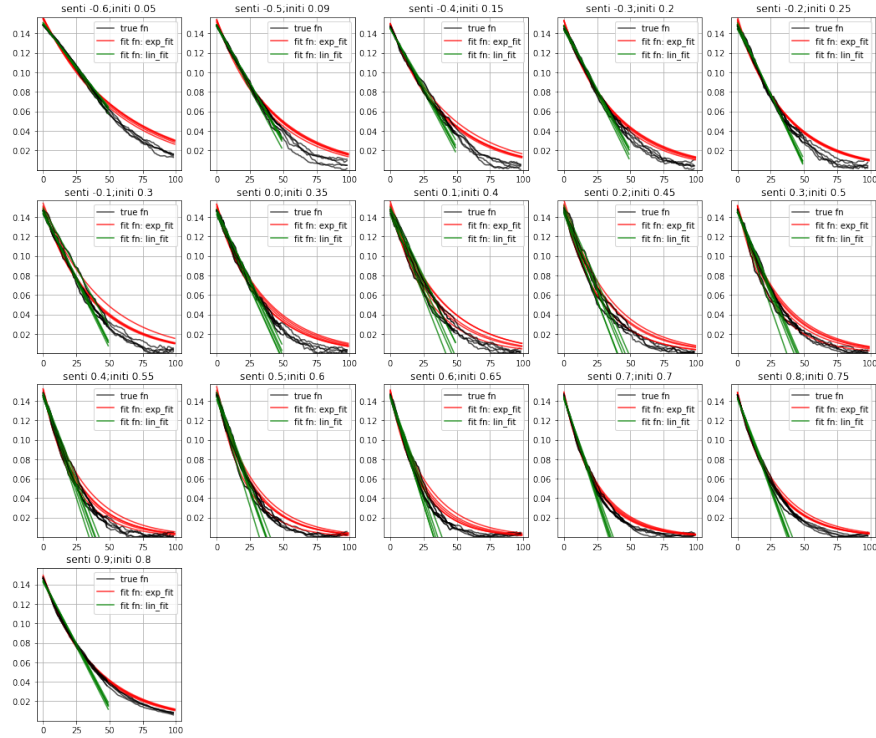


Figure 13: Fit su simulazioni realizzate tenendo costante l'offset  $\Sigma^* - \Sigma_0 = 0.15$ , nel caso di  $f^s, f^b$  definite secondo le eq.26

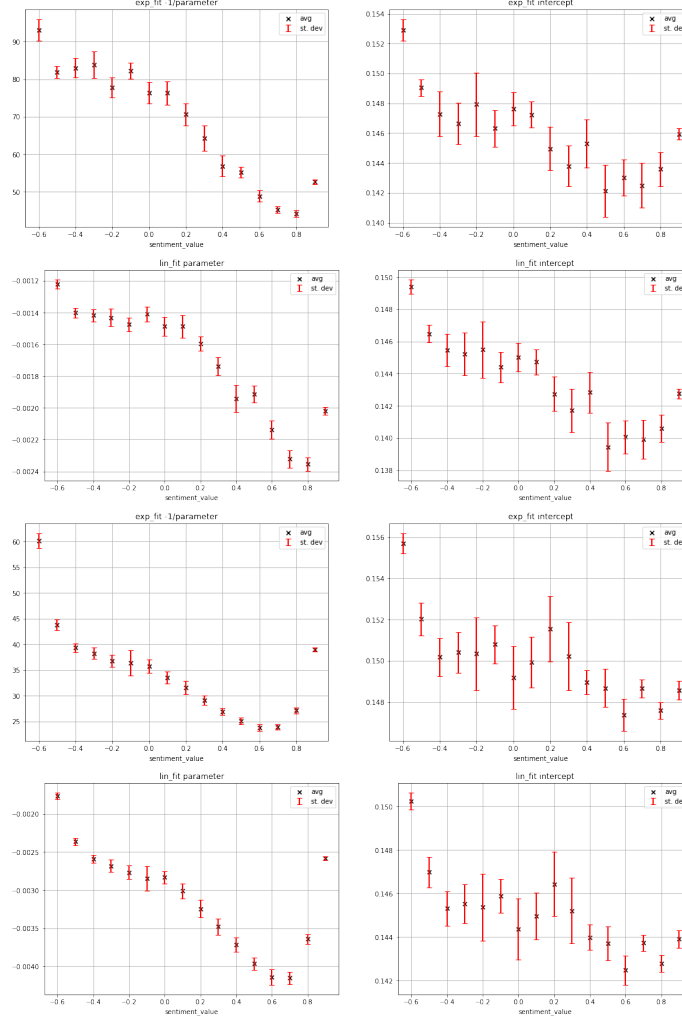


Figure 14: Coefficienti per i fit lineari ed esponenziali, nei test con distanza fissa

Dai tempi caratteristici si intuisce invece che i tempi della convergenza diminuiscono linearmente all'aumentare del sentiment<sup>10</sup>: questo è dovuto al fatto che l'ansatz sulla preferenza di comprare/vendere  $b(S_t)$  è stato effettivamente scelto in 11 come lineare rispetto ad  $S_t$ , quindi per una distanza fissa dal punto di equilibrio si vede come "l'ottimismo degli agenti velocizzi il processo di convergenza". E' quindi interessante notare come si possano trovare relazioni non solo tra le assunzioni fatte e gli stati di equilibrio, ma anche tra questi ansatz ed i tempi caratteristici.

<sup>10</sup>l'andamento non può essere perfettamente lineare, oltre la stocasticità e le "patologie" per casi estremi, poiché al variare del sentiment anche  $d(S_t)$ ; oltre alla preferenza vendita/acquisto della funzione  $b(S_T)$  in queste simulazioni ha quindi un effetto anche la tendenza in sé degli agenti ad agire. Si dovrebbe quindi poter osservare anche una maggiore velocità del processo per sentiment in modulo maggiori; questo effetto di "tendenza all'attivazione" è tuttavia meno rilevante rispetto alla "preferenza di vendita o acquisto" per valori del sentiment vicini allo zero e non osservabile sul campione ristretto usato in questo test

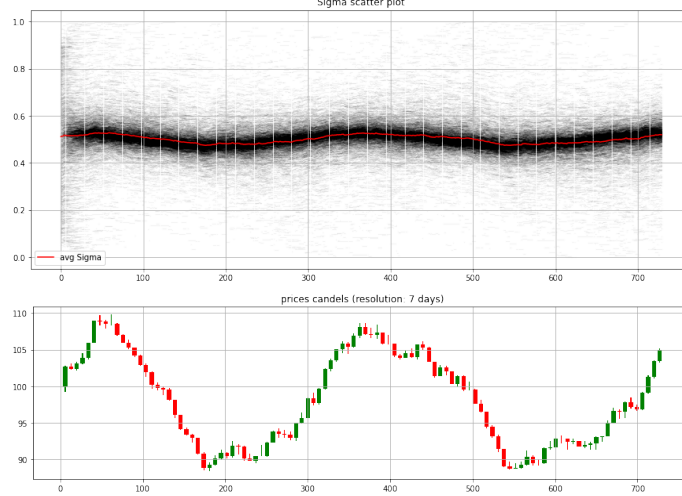


Figure 15: Risultato di una simulazione con sentiment periodico.

## 9. Appendice D: Applicazioni

Nel corpo di questo report mi sono concentrato sul funzionamento di base del modello, definendo solo il comportamento per condizioni costanti nel tempo. Usando quel semplice caso come benchmark è quindi interessante vedere come lo stesso comportamento venga riprodotto dall'agente anche in situazioni più complesse.

Come discusso a fine appendice B infatti, sebbene la convergenza sia osservabile solo per previsioni invarianti nel tempo, il valore  $\Sigma^*$  definito in 22 indica la tendenza ad ogni istante del comportamento medio degli agenti.

Per valutare la stabilità del modello e le sue potenzialità, in questa appendice ho quindi testato diversi meccanismi evoluzione del sentiment, lasciando invariati i processi di previsione e decisione dell'agente. Oltre a meccanismi più articolati ho sviluppato simulazioni con più partizioni di agenti operanti secondo regole diverse, che rappresentano una visione stilizzata di come le previsioni di attori realistici possono cambiare nel mercato.

### 9.1. *Sentiment periodico*

In questa simulazione ho impostato il sentiment come esogeno e periodico in un anno:

$$S_t = A \cos(2\pi \frac{t}{T}) \quad (99)$$

in cui ho scelto  $A = 0.05$  la massima ampiezza dell'oscillazione e  $T = 365$  il periodo.

Il risultato è che ad ogni iterazione  $t$ , gli agenti tenderanno al valore di equilibrio dato da

$$\langle \Sigma_t \rangle \sim \Sigma_t^* = \frac{S_t + 1}{2} \quad (100)$$

che in questo caso sarà  $\Sigma_t^* = \frac{0.05 \cos(2\pi \frac{t}{365})}{2}$ . L'uguaglianza non è esatta perché questa convergenza richiede tempo, mentre il sentiment cambia continuamente. Dalla figura 15 si vede come tuttavia come  $\langle \Sigma_t \rangle$  abbia

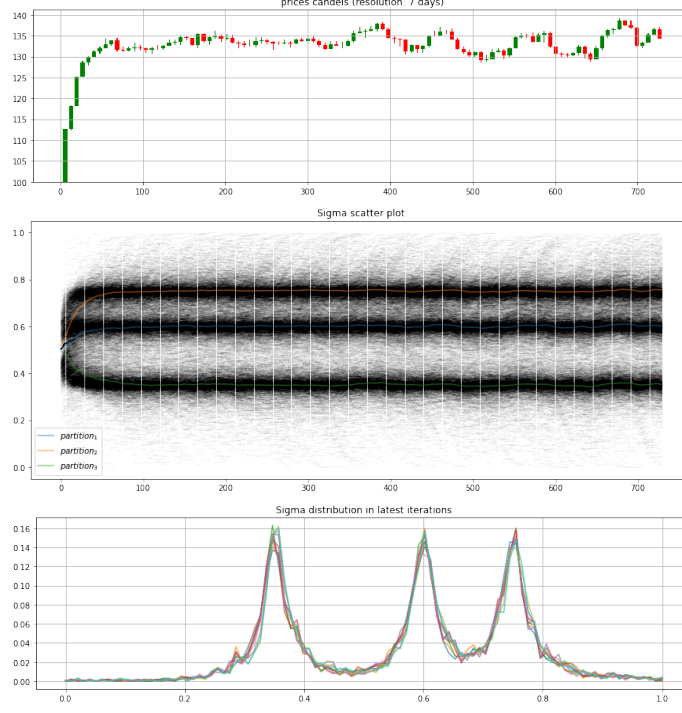


Figure 16: Risultato di una simulazione con 3 partizioni di agenti, ognuna con sentiment fisso

effettivamente un andamento periodico, con una funzione di densità simile a quella osservata in 4; il prezzo, a sua volta segue questo andamento periodico, con fluttuazioni osservabili su ordini temporali più piccoli.

Il risultato ottenuto, ed in particolare l'equazione 100, è valido per qualsiasi partizione in cui un numero statisticamente significativo di agenti segua una certa funzione di sentiment  $S_t$ .

### 9.2. Più partizioni a sentiment fisso

E' interessante vedere cosa succede nel sistema simulando più partizioni, ognuna con la propria funzione di sentiment. Il caso più semplice è quello di più partizioni con un certo sentiment fisso:

$$S_t^i = S^i \quad i \in N_{partizioni} \quad (101)$$

In un simile sistema, il prezzo di equilibrio dipenderà dalla ricchezza in ogni partizione e da fattori che eventualmente le differenziano l'una dall'altra; tuttavia, il comportamento di ognuna sarà lo stesso osservato nella sezione 4.2, dove in ogni partizione alloca mediamente in asset una quantità di ricchezza data da:

$$\langle \Sigma_t^i \rangle = P(up)^i = \frac{S^i + 1}{2} \quad i \in N_{partizioni} \quad (102)$$

ovverosia ogni partizione si comporterà coerentemente con la propria previsione, indipendentemente dall'andamento dei prezzi e dal comportamento del resto del sistema.

Questo comportamento è evidente nella figura 16, ottenuta da una simulazione di 3 partizioni identiche con sentiment  $(S^1, S^2, S^3) = (0.2, 0.5, -0.3)$ ; la distribuzione stazionaria globale di  $\Sigma_t$  sarà inoltre data dalla somma di tre distribuzioni come quella osservata in 4, ognuna con media calcolabile con 102

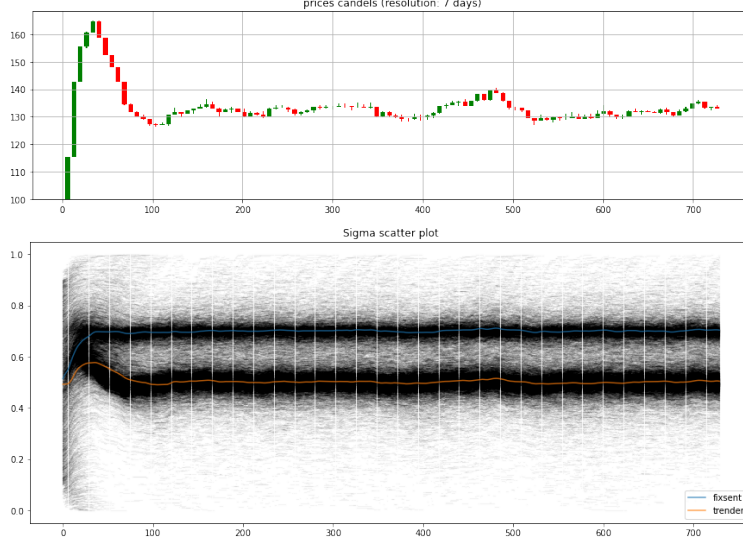


Figure 17: Risultato di una simulazione in cui parte degli agenti del mercato "seguono il trend" (trender), mentre un'altra parte segue un sentiment fisso (fixsent)

### 9.3. Un gruppo di agenti influenzato dal trend

Nei casi visti finora, il sentiment è stato sempre assunto come funzione esogena. Nei casi reali tuttavia, è ragionevole assumere che questa funzione sia autoregressiva e dipenda quindi dall'andamento osservato dei prezzi; in questo modo è possibile introdurre meccanismi di previsione basati sul "seguire il trend" o sul "ritorno alla media" <sup>11</sup>. Assumendo quindi che alcuni agenti seguano il trend, si può stabilire una funzione di sentiment costruita come

$$S_t \sim \frac{\pi_t - \pi_{t-w}}{w\pi_{t-w}} \quad (103)$$

dove  $w$  è una finestra temporale e  $\pi_\tau$  il prezzo osservato ad un iterazione generica  $\tau$ . Il valore a destra della 103 rappresenta la percentuale media di crescita nell'arco temporale  $w$ , ed il sentiment assumerà valori più positivi/negativi tanto quanto il prezzo sarà cresciuto/diminuito in questo periodo.

Assumendo che gli agenti guardino più finestre temporali contemporaneamente, ho realizzato una simulazione in cui una partizione di 1000 agenti segue un sentiment fisso  $S^{fs} = 0.4$ , ed una seconda partizione di 2000 agenti segue un sentiment dato da:

$$S_t = \delta \sum_{w \in \{7, 14, 30, 365\}} \frac{\pi_t - \pi_{t-w}}{w\pi_{t-w}} \quad (104)$$

con  $\delta = 0.05$  un parametro di "suscettibilità" degli agenti ai trend osservati.

Dalla figura 17 si osserva come la partizione a sentiment fisso segua lo stesso comportamento visto in precedenza, ed il prezzo convergerà come atteso. Il contributo degli agenti "trender" è dato dal fenomeno di "overbuying" che si osserva dopo lo shock iniziale: la crescita improvvisa farà sì che gli agenti influenzati dal

<sup>11</sup>Una simulazione in cui gli agenti seguono il principio del ritorno alla media è nel notebook "appendice D"

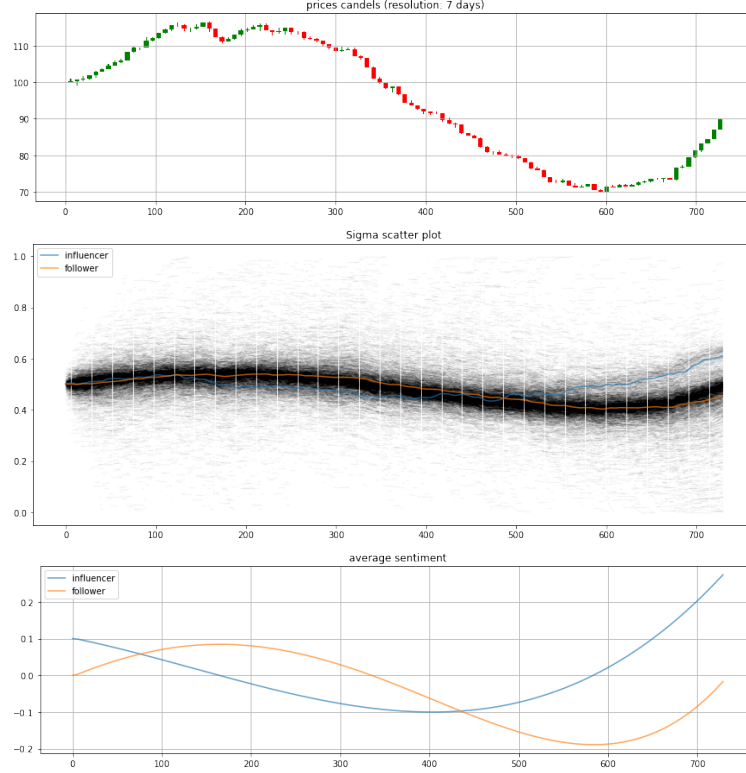


Figure 18: Risultato di una simulazione "su rete sociale"

trend diventino ottimisti su crescita future, cominciando ad acquistare l'asset e creando per un certo periodo un feedback positivo di aumento del loro sentiment.

Il picco di questa fase della simulazione sarà toccato dopo che la partizione "fixsent" avrà raggiunto il suo equilibrio, quindi lo shock iniziale avrà esaurito la sua inerzia ed il sentiment nella partizione "trender" tornerà a scendere fino alla neutralità. Determinare l'esatto valore del massimo prezzo raggiunto non è banale ma dipenderà, tra gli altri fattori, dalla disponibilità economica nella partizione dei "trender" e della loro suscettibilità  $\delta$ .

Questa simulazione è interessante perché riproduce comportamenti tipicamente osservati nel mercato di azioni, in cui crescite e decrescite improvvise raggiungono un massimo/minimo per poi riassetarsi a un valore più moderato.

La simulazione così realizzata e la funzione di sentiment 103 aggiungono "realismo" al sistema, oltre a poter essere eventualmente usati per quantificare e simulare fenomeni di "overbuying", "overselling" ed eventualmente la formazione di bolle speculative.

#### 9.4. Agenti che si influenzano reciprocamente su una rete sociale

Un altro sistema realistico che è possibile simulare in questo framework, è quello in cui il sentiment degli agenti è influenzato in qualche modo dagli altri agenti con cui è in contatto. Si ha quindi una situazione del



tipo

$$S_t^i = f(S_{t-1}^j | j \in Neighbours(i)) \quad (105)$$

In particolare si può pensare di dividere questi agenti in "influencer" e "follower", e far sì che il sentiment dei secondi dipenda dal sentiment dei primi.

Ho quindi realizzato una simulazione in cui il sentiment degli influencer (che possono essere pensati come "fonti di news" e/o nodi della rete che ne condizionano l'opinione) è esogeno e segue una funzione arbitraria

$$S_t^{inf} = S_t \quad (106)$$

Mentre il sentiment di ogni follower è determinato da

$$S_t^i = S_{t-1}^i + \sum_{j \in Neighbours(i) \cap influencers} Normal(S_t^j n_\mu, \sigma) \quad (107)$$

che quindi ad ogni iterazione, aumenterà o diminuirà stocasticamente il proprio sentiment in base al sentiment degli influencers che segue.  $n_\mu = 0.0002, \sigma = 0.0001$  sono parametri che ho scelto per avere un sistema "abbastanza regolare".

La simulazione è inoltre realizzata scegliendo una rete generata random (Erdős-Rényi) ed un bilanciamento di  $\frac{N_{influencers}}{N_{tot}} = \frac{1}{10}$ . La funzione esogena  $S_t$  è un polinomio di terzo grado (in blu in figura 18), che realizza dei periodi di crescita-decrescita-crescita del prezzo.

Con questa realizzazione, il sentiment dei follower crescerà quando quello degli influencer sarà positivo, e decrescerà quando sarà negativo; poiché inoltre è autoregressivo, il sentiment dei follower potrà anche "eccedere" quello degli influencer, diventando molto positivo/negativo in lunghi periodi di positività/negatività degli influencers.

Nonostante l'unica componente "esterna" nel sistema sia il sentiment di una parte degli agenti, si vede come questo influenzi tramite 107 l'evoluzione dell'intero sistema.

Sebbene le scelte in questa simulazione siano molto semplici, un modello simile potrebbe essere usato per indagare come la diffusione di opinioni e/o news su reti sociali possa influenzare il prezzo di un asset.