Algoritmi per curve e superfici di bezier

Progetto per il corso di Numerical methods for graphics

Jacopo Manetti

Le curve di Bézier

Le curve di Bézier sono un tipo di curva parametrica utilizzata in grafica computerizzata e design per modellare superfici e forme. Inventate da Pierre Bézier, ingegnere della Renault, queste curve sono definite da un insieme di punti di controllo. La forma della curva viene determinata dalla posizione di questi punti.

La formula parametrica per una curva di Bézier di grado n è:

$$\mathrm{B}(\mathrm{t}) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\mathbf{b}_i$$

dove b_i sono i punti di controllo e B_i^n sono i polinomi di Bernstein definiti come:

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Algoritmo di De Casteljau

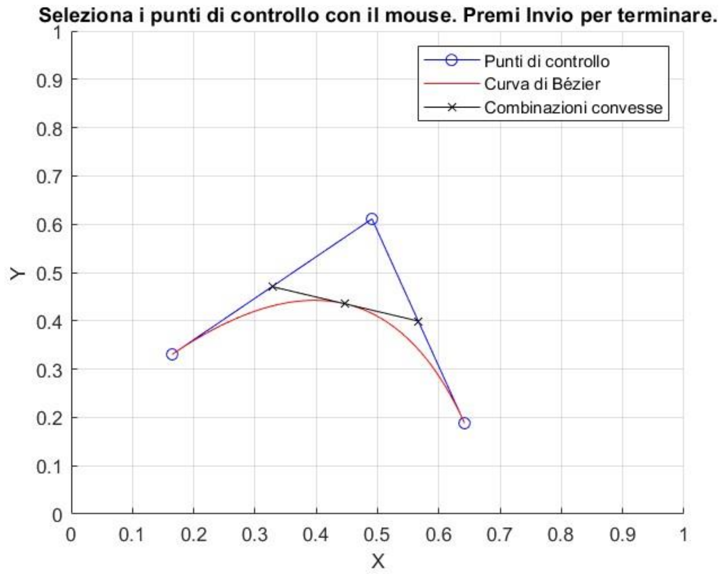
L'algoritmo di De Casteljau è un metodo ricorsivo per valutare le curve di Bézier.
Viene utilizzato un metodo iterativo per interpolare tra i punti di controllo. Il processo può essere descritto come segue:

- Si parte dai punti di controllo $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

- Si calcola una nuova sequenza di punti di controllo intermedi $b_i^r(t)$ come:

$$b_i^r(t) = (1-t)b_i^{r-1}(t) + tb_{i+1}^{r-1}(t)$$

- Si ripete il processo fino a ottenere $b_0^n(t)$, che rappresenta il punto sulla curva.



Algoritmo di Degree Elevation

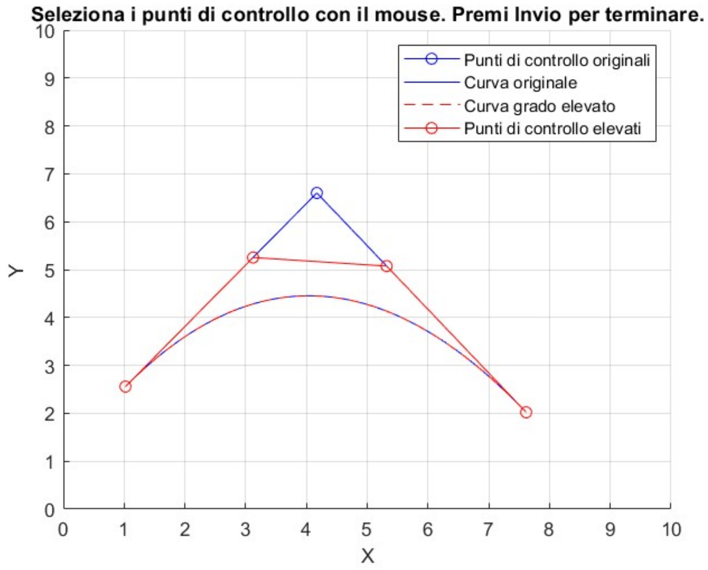
L'algoritmo di Degree Elevation permette di aumentare il grado di una curva di Bézier senza alterarne la forma. Questo si traduce nell'aggiunta di punti di controllo, che rendono la curva più facile da manipolare.

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i B_i^{n+1}(t)$$

Per una curva di Bézier di grado n con punti di controllo $b_0, b_1, \dots, b_n$, i nuovi punti di controllo c_i, per una curva di grado $n+1$ sono calcolati come:

$$c_i = \frac{i}{n+1} b_{i-1} + \frac{n-i+1}{n+1} b_i \quad \text{per } i = 1, \dots, n$$

E con $c_0 = b_0$ e $c_{n+1} = b_n$



Algoritmo di Subdivision

L’algoritmo di Subdivision suddivide una curva di Bézier in due curve di Bézier distinte che insieme ricostruiscono l’originale.

Il metodo di DeCasteljau utilizza un processo ricorsivo per calcolare i punti sulla curva di Bézier. Questo stesso processo può essere utilizzato per suddividere la curva.

- Usiamo DeCastelajau come metodo per trovare $b_0^n(t)$, ossia il punto sulla curva in cui si vuole effettuare la divisione.

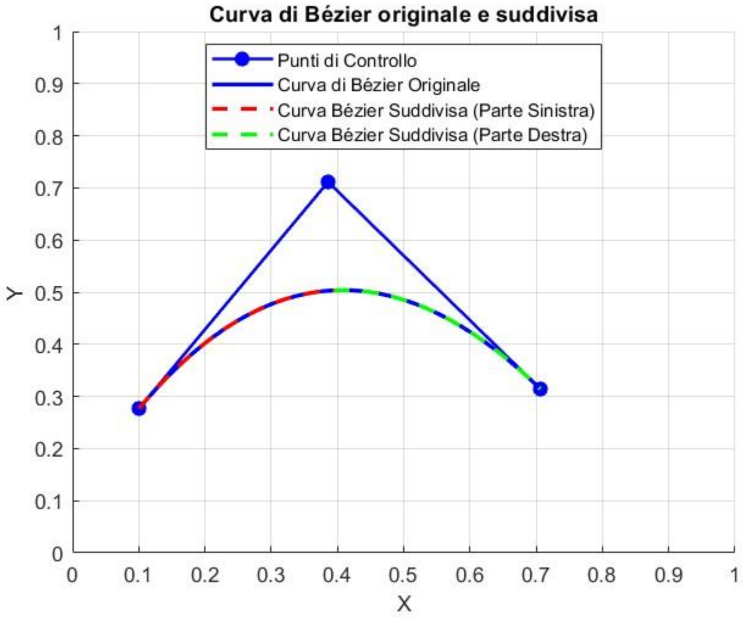
- I nuovi punti di controllo per le curve suddivise sono ottenuti dai punti intermedi calcolati durante la ricorsione.

Le 2 curve saranno del tipo:

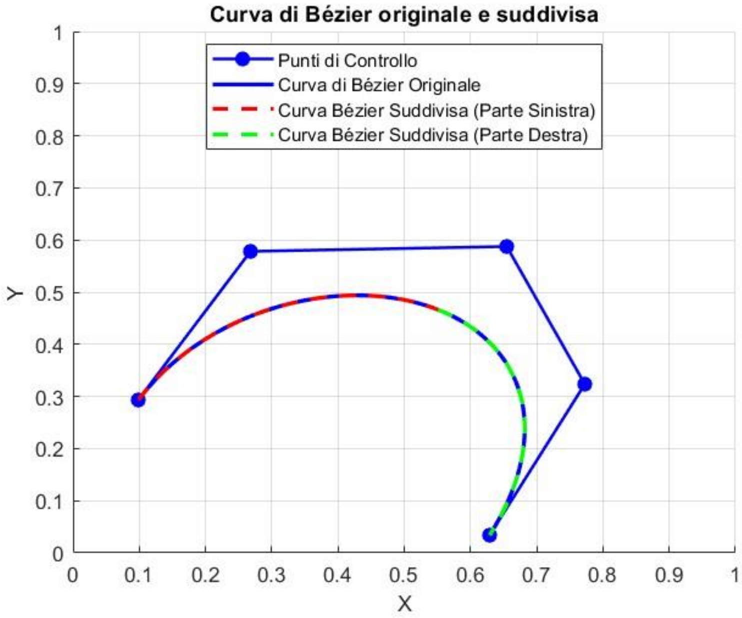
$x^L(s) = \sum_{k=0}^{n} b_0^k(\hat{t}) B_k^n(s)$ con $s = \frac{t}{\hat{t}}$

$x^R(s) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{n-k}(\hat{t}) B_k^n(s)$ con $s = \frac{t-\hat{t}}{1-\hat{t}}$

Algoritmo di Subdivision



Esempio 1



Esempio 2

Le superfici di bézier

Le superfici di Bézier sono superfici a tensore prodotto. Questo significa che possono essere definite come il prodotto cartesiano di due curve di Bézier unidimensionali.

Una superficie di Bézier di grado m in una direzione e di grado n nell'altra direzione può essere costruita prendendo una griglia bidimensionale di punti di controllo e utilizzando i polinomi di Bernstein in entrambe le direzioni.

La formula parametrica per una superficie di Bézier di grado m e n è data da:

$$X(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{i,j} B_i^n(u) B_j^m(v)$$

Dove

- $b_{i,j}$ sono i punti di controllo disposti in una griglia $(m+1) \times (n+1)$
- $B_i^n(u) B_j^m(v)$ sono i polinomi di Bernstein nelle direzioni u e v rispettivamente

DeCasteljau per le superfici

L’algoritmo di De Casteljau per le superfici di Bézier estende l’algoritmo usato per le curve. Viene applicato separatamente per entrambe le direzioni parametriche u e v.

Il procedimento è:

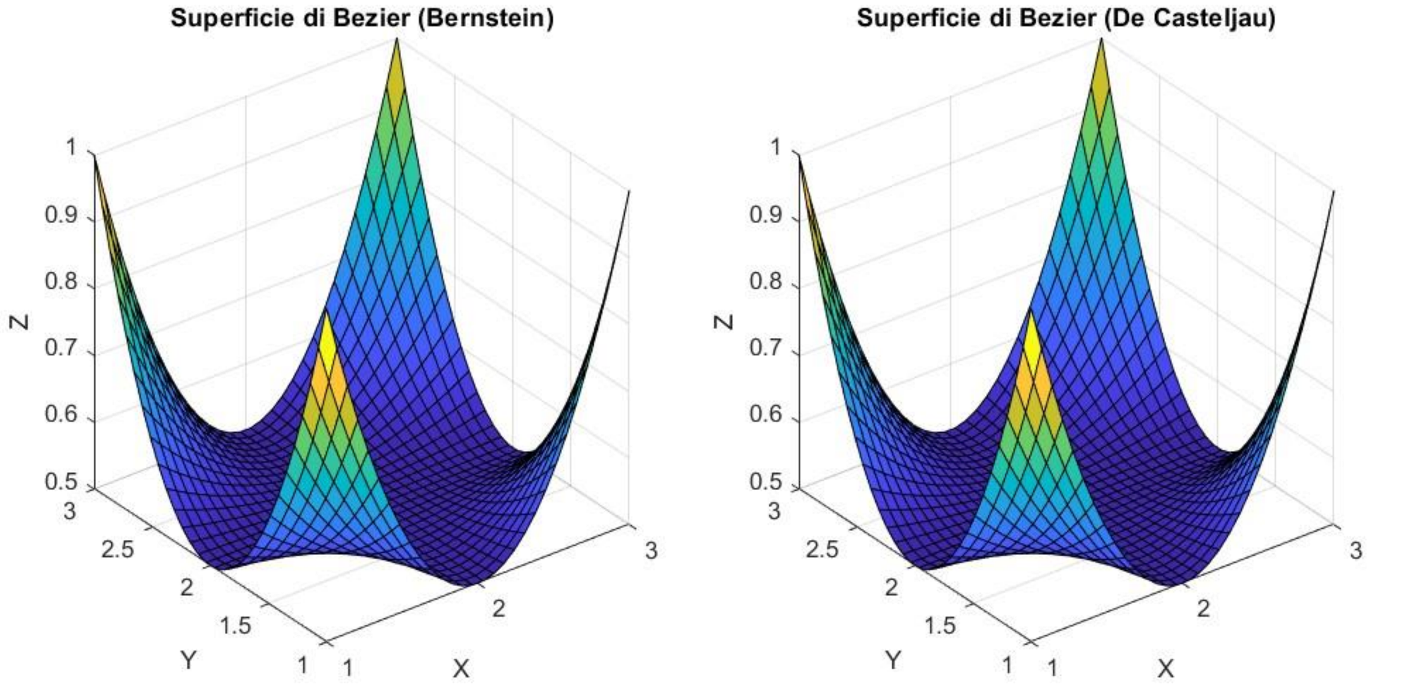
- Per un valore fisso di u, applicare l’algoritmo di De Casteljau lungo una direzione parametrica per ottenere una nuova serie di punti di controllo.
- Ripetere il processo per la direzione v.
- Combinare i risultati per ottenere il punto $B(u, v)$.

Perché usare l’algoritmo di De Casteljau per fare superfici di Bézier al posto della definizione parametrica?

- **Stabilità Numerica**: De Casteljau è numericamente più stabile rispetto ai polinomi di Bernstein, poiché riduce l’accumulo di errori di arrotondamento. (interpolazioni lineari Vs potenze di parametri).

- **Efficienza**: Bèzier richiede il calcolo di tutti i termini dei polinomi di bernstein per ogni punto (u, v) mentre De casteljau tramite interpolazione ripetuta riduce il numero di punti coinvolti ad ogni iterazione.

Superfici di bézier

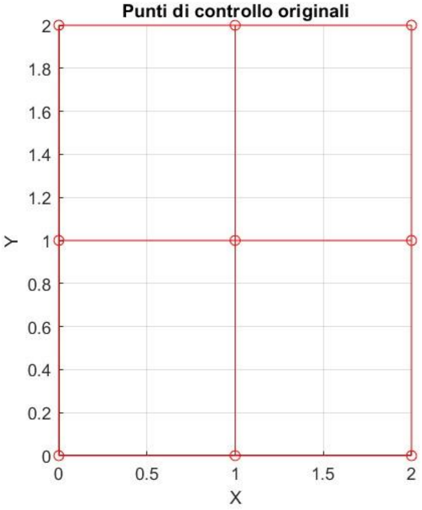


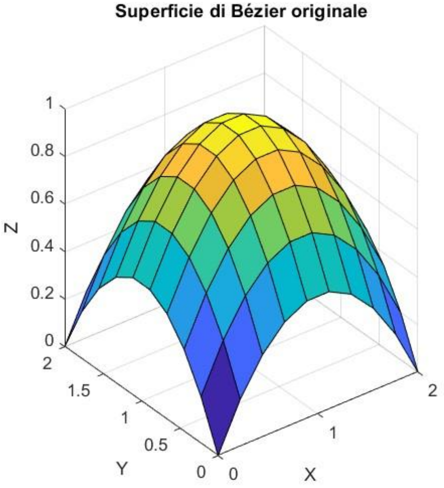
Degree Elevation per le superfici

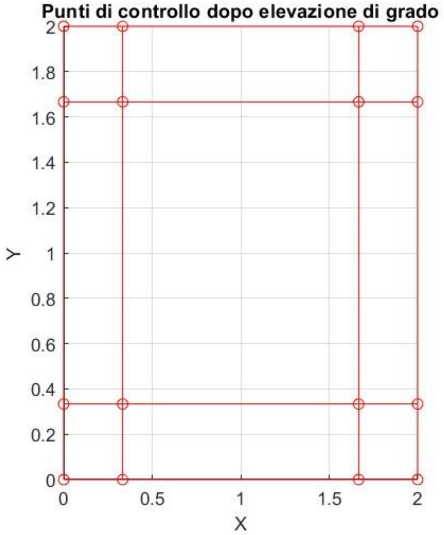
L'algoritmo di degree elevation per superfici di Bézier funziona elevando il grado della superficie lungo entrambe le direzioni u e v. Per una superficie di Bézier con griglia di punti di controllo $c_{i,j}$, i nuovi punti di controllo $c'_{i,j}$ sono calcolati separatamente per ogni direzione, utilizzando le formule di degree elevation per le curve che abbiamo visto prima.

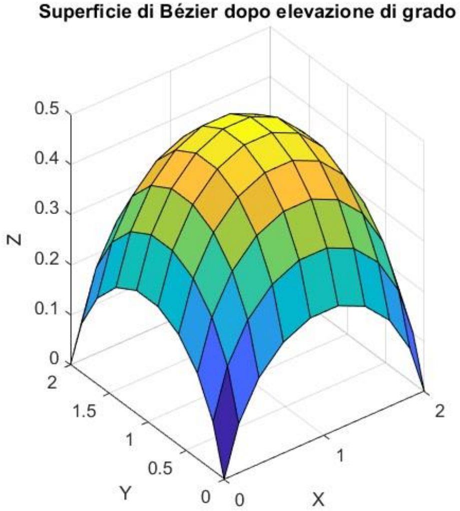
Dopo aver applicato l'algoritmo si ottiene una nuova superficie di Bézier con un grado più alto rispetto alla superficie originale. Questo processo avviene senza alterare la forma geometrica della superficie, ma aumentando il numero di punti di controllo necessari per definire la superficie.

Degree Elevation per le superfici









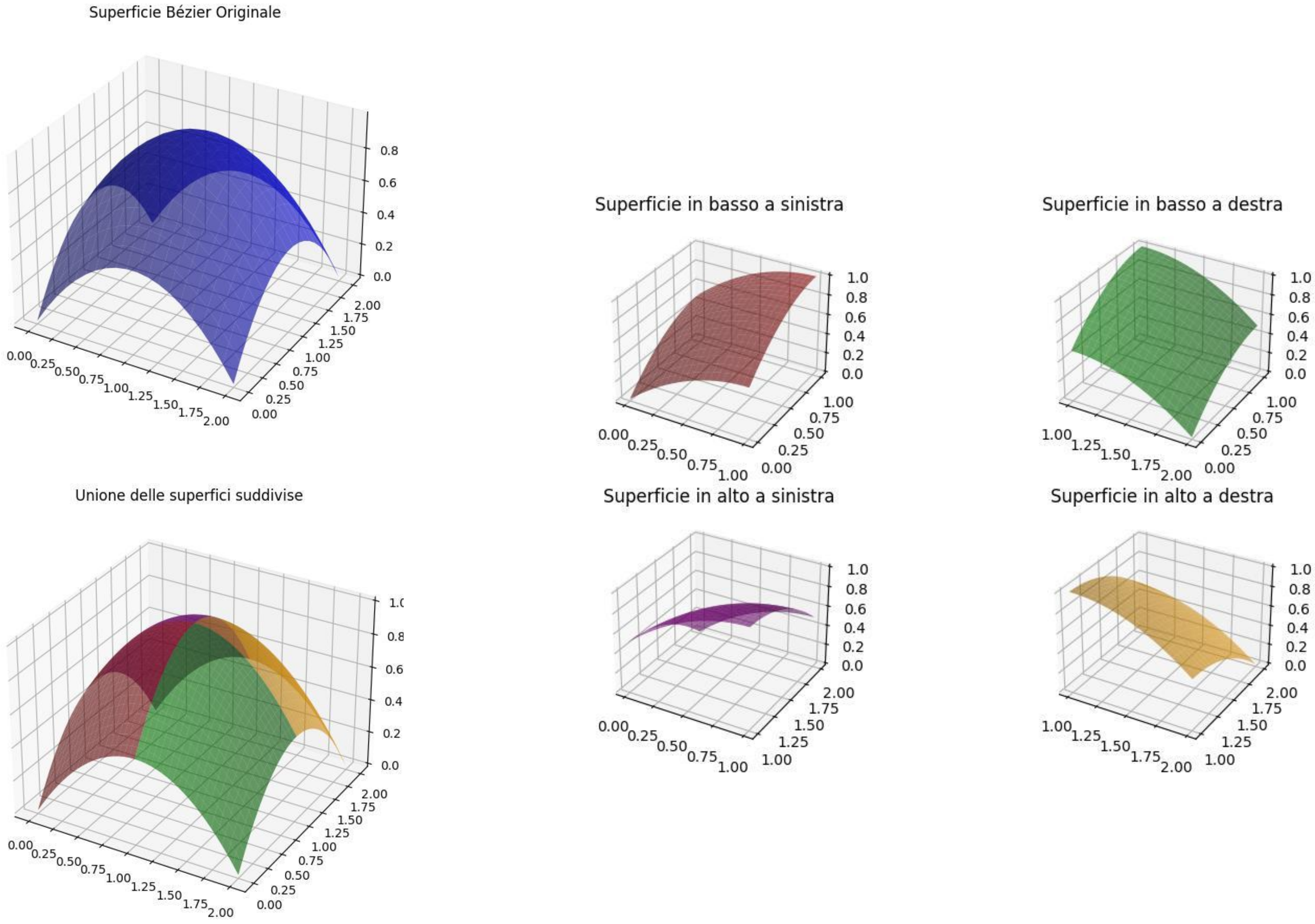
Subdivision per le superfici

L'algoritmo di subdivision per superfici di Bézier divide una superficie in quattro superfici più piccole. Il procedimento è:

- Suddividere la superficie lungo una direzione (ad esempio u) utilizzando l'algoritmo di De Casteljau per ottenere due superfici.
- Suddividere ciascuna delle superfici risultanti lungo la seconda direzione (v).

Questo processo produce quattro superfici più piccole, ciascuna con una parte dei punti di controllo originali.

Subdivision per le superfici



Grazie per l’attenzione!

Progetto per il corso di Numerical methods for graphics

Jacopo Manetti