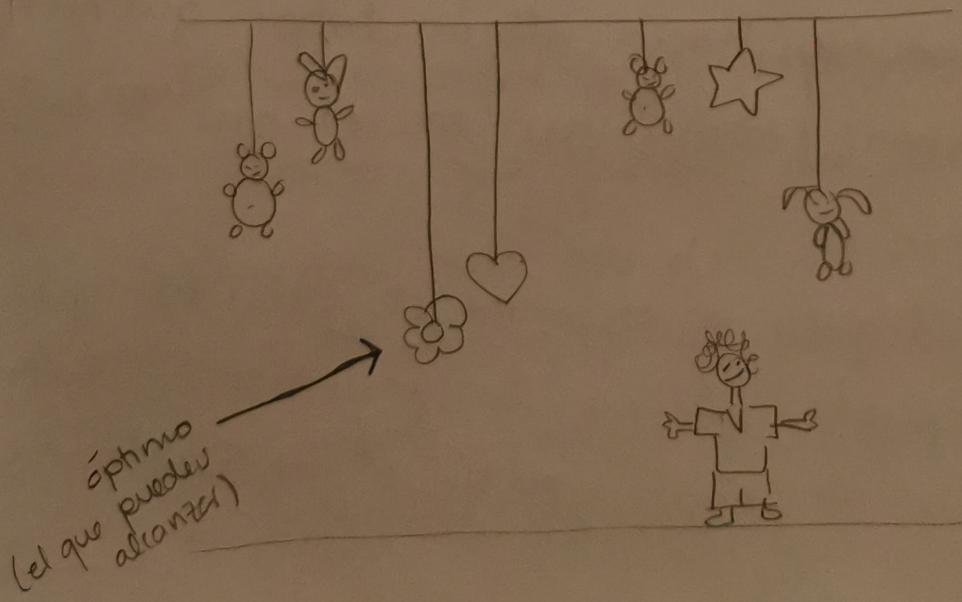


1.1.1

Antes de comenzar con estos dos métodos, tienes que saber en qué situación estamos:

Imagina que estás parado en un salón con peluches colgados desde el techo a diferentes alturas. Eres capaz de alcanzar únicamente uno de esos peluches (el que se encuentra más abajo visto desde el techo).

Para encontrar este peluche deberás, a partir de donde te encuentras parado, ir caminando por todo el lugar de tal forma que puedas lograr encontrar este peluche.



Hay 2 formas de hacerlo:

②

- Búsqueda Lineal

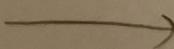
Desde el lugar en donde estás parado, tendrás que decidir muy bien cada paso que des pues de eso dependerá que puedas ganar / encontrar el peluche.

Para cada paso que des, deberás elegir primero hacia dónde lo darás (es decir, en frente, hacia los lados, etc.). Una vez que elijas hacia dónde darás el paso, deberás decidir de qué tamaño darás el paso.

Esto último lo harás mirando hacia la dirección que elegiste y ubicando un peluche que se encuentre más abajo que en el que se encuentra actualmente arriba de ti.

Este prueba / decisión tendrás que hacerla cada que des un paso. Te detendrás cuando ya no seas capaz de moverte hacia algún lugar que tenga un peluche más abajo que en el que te encuentras actualmente.

Puede que llegues a encontrar el peluche que alcanzar o puede que no lo encuentres, todo dependerá de en dónde inicies el recorrido y



de las decisiones que tomarás sobre los pasos
que darás. ③

Región de confianza

Supongamos ahora que puedes moverte solo dentro de un círculo alrededor de donde te encuentras y no puedes moverte fuera de este círculo.

Nosotros te diremos de qué tamaño es este círculo. Guarda vaya a decidir hacia dónde y de qué tamaño dar el paso, lo harás mirando hacia arriba y viendo en donde se encuentra el peluche más abajo (sin que debas salir del círculo)

Una vez que lo identifiques, deberás ver si eres capaz de dar ese paso (quizá tus piernas no son tan largas para poder darlo). Si no eres capaz de dar un paso de ese tamaño, entonces haremos el círculo más pequeño y repetiremos el procedimiento hasta que puedas dar un paso.

Esto lo haremos cada que dar un nuevo paso y te detendrás hasta que ya no haya un peluche más abajo dentro del círculo en el que te encuentras en ese momento

④

[1.1.2]

Demostración

Si tenemos f una cuadrática convexa $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x - b^T x$

Demuestra que el minimizador de una dimensión sobre la línea $x_k + \alpha p_k$ es:

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$$

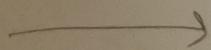
Para empezar, sabemos que como f es convexa, entonces su heredana Q es definida positiva y simétrica.

También sabemos que: $\nabla f(x) = Qx - b$ y que existe un único x^* mínimo que satisface:

$$Qx - b = 0 \Leftrightarrow Qx = b$$

• Nosotros queremos minimizar $f(x_k + \alpha p_k)$, es decir, minimizar:

$$f(x_k + \alpha p_k) = \frac{1}{2} (x_k + \alpha p_k)^T Q (x_k + \alpha p_k) - b^T (x_k + \alpha p_k)$$



Denvamos $f(x_k + \alpha p_k)$ respecto de α :

(5)

$$\frac{1}{2} (\nabla f_k^T + p_k^T) Q (x_k + \alpha p_k) + \frac{1}{2} (x_k + \alpha p_k)^T Q (\nabla f_k + p_k) - b^T (\nabla f_k + p_k)$$

Desarrollando y tomando en cuenta que $Q^T = Q$
por simetría; y que $b = Q x_k$:

$$= \frac{1}{2} \nabla f_k^T Q (x_k + \alpha p_k) + \frac{1}{2} p_k^T Q (x_k + \alpha p_k) + \frac{1}{2} x_k^T Q (\nabla f_k + p_k)$$

$$+ \frac{1}{2} \alpha p_k^T Q (\nabla f_k + p_k) - b^T p_k - b^T \nabla f_k$$

$$= \cancel{\frac{1}{2} \nabla f_k^T Q x_k} + \frac{1}{2} \nabla f_k^T p_k + \cancel{\frac{1}{2} p_k^T Q x_k} + \frac{\alpha}{2} p_k^T Q p_k$$

$$+ \cancel{\frac{1}{2} b^T Q \nabla f_k} + \cancel{\frac{1}{2} x_k^T Q p_k} + \frac{1}{2} p_k^T \nabla f_k + \frac{\alpha}{2} p_k^T Q p_k$$

$$- \cancel{b^T p_k} - \cancel{b^T \nabla f_k}$$

$$= \nabla f_k^T p_k + \alpha p_k^T Q p_k = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}}$$

igualando a cero