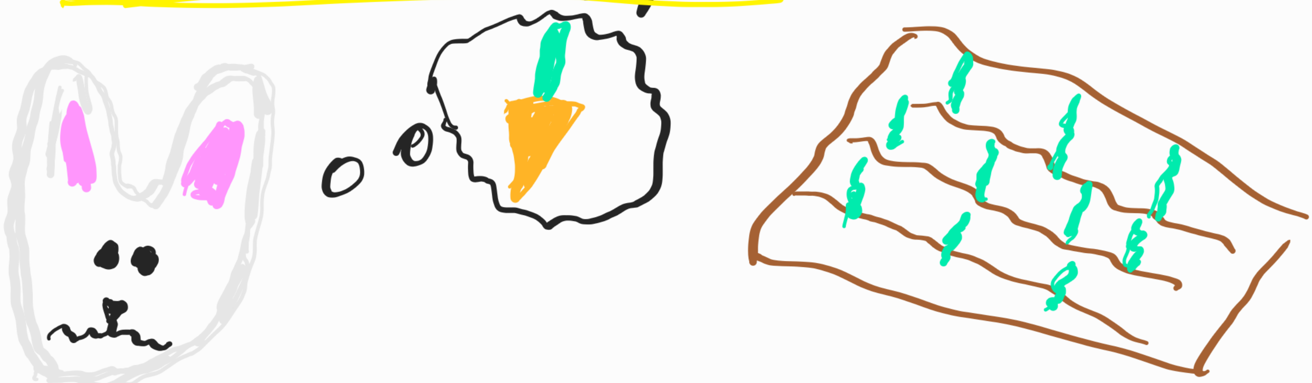
Explica búsqueda lineal y región de confianza a un niño de 5 años

Para empezar el problema hay que entender que queremos hacer. Imagínate que el sr. conejito desea hacer una ensalada de zanahorias y desea ir a diferentes campos para recolectarlas. Sin embargo, el conejito no quiere desperdiciar su tiempo en los campos porque si se hace de noche se quedará con hambre. Así que si proponemos una función $f(x_1, \ldots, x_n)$ con x_i el tiempo que tardará en el campo i y f la funcion que mide el tiempo, considerando idas y regresos. El conejito busca encontrar el tiempo que debe tomar en cada campo de tal forma que se tarde lo menos posible



Para ello, el conejito decide usar dos métodos diferentes

Busqueda lineal: Para tomar una decisión, el conejito decide tomar un tiempo en cada campo para pensar si funciona. Sin embargo siente que podría hacer menos tiempo. Por ello, decide mover un poco sus tiempos, ya sea pasar más tiempo o menos en un cierto campo, por lo que a su tiempo $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Sin embargo, el conejito no está tan seguro si el tiempo que quiere agregar o quitar de ciertos campos afecte mucho sus tiempos de ida y de regreso. Por lo que decide agregarle tantos ajustes como vea necesario, es decir

$$\min_{\alpha > 0} f(x_k + \underbrace{p_k + \ldots + p_k}_{\alpha \text{ veces}}) = \min_{\alpha > 0} f(x_k + \alpha p_k)$$

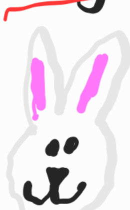
De esa forma, el conejito puede ver qué tanta ventaja obtuvo al ajustar el tiempo. Sin embargo, a pesar de que es fácil de idear, al conejito le puede ser muy desgastante hacer tantas sumas y perdería tiempo haciendo todas, por lo que piensa en otra alternativa

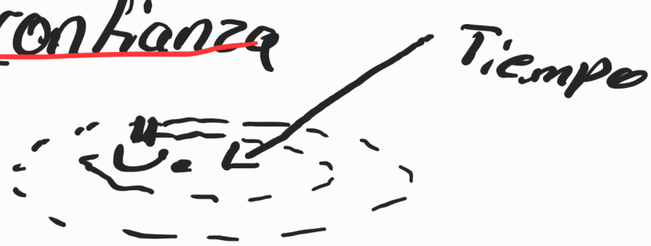
Después de tantos intentos, el conejito pensó que aún podía hacer menos tiempo. Por lo que tomó todos los tiempos que hizo y creó otro recorrido que se portara parecido en su madriguera, a la que llamó m.

Tomando sus ideas de mover el tiempo, elige un nuevo tiempo y busca un cierto movimiento con el que tenga la confianza que se parezca. Por lo que busca ajustar su tiempo un cierto p, tal que haga pequeña su función de tiempo, por lo que busca

$$\min_{p} \; m_k(x_k+p)$$

Dependiendo de cómo ve que actúan sus tiempos, decide ajustar sus tiempos hasta que logre confiar. Así que dibuja un círculo donde pueda pensar en cómo llegar al tiempo más pequeño en el que confiará, por lo que lo llamó la región de confianza





2 Sea f cuadrática convexa

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$$

Prueba que el minimizador de una dimensión sobre una dimensión en la línea $x_k + \alpha p_k$ es

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$$

El problema nos dice básicamente

$$\min_{\alpha} f(x_k + \alpha p_k) = \phi(\alpha)$$

Por hipótesis, sabemos que Q es def. pos. porque f es cuadrática convexa

$$\frac{d}{d\alpha}\phi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} f(x_k + \alpha p_k)$$

$$\overset{\text{Regla Cadena}}{=} \nabla f(x_k + \alpha p_k)^T p_k$$

Para que α_k sea minimizador, necesitamos que

$$\nabla f(x_k + \alpha_k p_k)^T p_k = 0 \quad \circledast$$

Como $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x - b^T x$

$\Rightarrow \nabla f(x) = Qx - b$ (#)

Por hipótesis sabemos que como f es convexa y el mínimo es de una dimensión, este es único

Sustituyendo (#) en (*)

$$\left[Q(x_k + \alpha_k p_k) - b\right]^T p_k = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\left[Qx_k - b\right]^T p_k + \alpha_k p_k^T Q p_k = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\nabla f(x_k)^T p_k + \alpha_k p_k^T Q p_k = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_k p_k^T Q p_k = -\nabla f(x_k)^T p_k$$

Como Q es def pos $\Rightarrow p_k^T Q p_k > 0$

$$\therefore \alpha_k = \frac{-\nabla f(x_k)^T p_k}{p_k^T Q p_k}$$

Nota: Como f es convexa cuadrática, α_k es mínimo

Santiago Ruiz 174667