**【例9-39】**人口迁徙模型问题。

设在一个大城市中的总人口是固定的。人口的分布则因居民在市区和郊区之间迁徙而变化。每年有6%的市区居民搬到郊区去住，而有2%的郊区居民搬到市区。假如开始时有30%的居民住在市区，70%的居民住在郊区，问十年后市区和郊区的居民人口比例是多少？30年、50年后又如何？

这个问题可以用矩阵乘法来描述。把人口变量用市区和郊区两个分量表示，即其中xc为市区人口所占比例，xs为郊区人口所占比例，k表示年份的次序。在k=0的初始状态：。

一年以后，市区人口为；

郊区人口，用矩阵乘法来描述，可写成：



此关系可以从初始时间到k年,扩展为,用下列MATLAB程序进行计算：

A=[0.94,0.02;0.06,0.98]

x0=[0.3;0.7]

x1=A\*x0,

x10=A^10\*x0

x30=A^30\*x0

x50=A^50\*x0

程序运行的结果为：



无限增加时间k，市区和郊区人口之比将趋向一组常数0.25/0.75。为了弄清为什么这个过程趋向于一个稳态值，我们改变一下坐标系统。在这个坐标系统中可以更清楚地看到乘以矩阵A的效果。选u1为稳态向量[0.25,0.75]T的任意一个倍数，令u1=[1,3]T和u2=[-1,1]T。可以看到，用A乘以这两个向量的结果不过是改变向量的长度，不影响其相角（方向）：





初始向量x0可以写成这两个基向量u1和u2的线性组合；



因此

式中的第二项会随着k的增大趋向于零。如果只取小数点后两位，则只要k>27，这第二项就可以忽略不计而得到



适当选择基向量可以使矩阵乘法结果等价于一个简单的实数乘子，避免相角项出现，使得问题简单化。这也是方阵求特征值的基本思想。

这个应用问题实际上是所谓马尔可夫过程的一个类型。所得到的向量序列x1,x2,...,xk称为马尔可夫链。马尔可夫过程的特点是k时刻的系统状态xk完全可由其前一个时刻的状态xk-1所决定，与k-1时刻之前的系统状态无关。