【例9-44】 价格平衡模型问题。

在Leontiff成为诺贝尔奖金获得者的历史中，线性代数曾起过重要的作用，我们来看看他的基本思路。假定一个国家或区域的经济可以分解为n个部门，这些部门都有生产产品或服务的独立功能。设单列n元向量x是这些n个部门的产出，组成在Rn空间的产出向量。先假定该社会是自给自足的经济，这是一个最简单的情况。因此各经济部门生产出的产品，完全被自己部门和其它部门所消费。Leontiff提出的第一个问题是，各生产部门的实际产出的价格p应该是多少，才能使各部门的收入和消耗相等，以维持持续的生产。

Leontiff的输入输出模型中的一个基本假定是：对于每个部门，存在着一个在Rn空间单位消耗列向量vi，它表示第i个部门每产出一个单位（比如100万美金）产品，由本部门和其他各个部门消耗的百分比。在自给自足的经济中，这些列向量中所有元素的总和应该为1。把这n个vi，并列起来，它可以构成一个n×n的系数矩阵，可称为内部需求矩阵V。

举一个最简单的例子，假如一个自给自足的经济体由三个部门组成，它们是煤炭业、电力业和钢铁业。它们的单位消耗列向量和销售收入列向量p如下8-1所示。

表8-1 单位消耗列向量和销售收入列向量p

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 由下列部门购买 | 每单位输出的消耗分配 | | | 销售价格p（收入） |
| 煤炭业 | 电力业 | 钢铁业 |
| 煤炭业 | 0.0 | 0.4 | 0.6 | pc |
| 电力业 | 0.6 | 0.1 | 0.2 | pe |
| 钢铁业 | 0.4 | 0.5 | 0.2 | ps |

如果电力业产出了100个单位的产品，有40个单位会被煤炭业消耗，10个单位被自己消耗，而被钢铁业消耗的是50个单位，各行业付出的费用为：



这就是内部消耗的计算方法，把几个部门都算上，可以写出：

各部门消耗成本==销售收入=

其中： 

于是总的价格平衡方程可以写成为：

p – Vp = 0

( I – V ) p =0

此等式右端常数项为零，是一个齐次方程。它有非零解的条件是系数行列式等于零，或者用行阶梯简化来求解。

用MATLAB语句写出其解的表示式：

V=[0.,0.4,0.6;0.6,0.1,0.2;0.4,0.5,0.2],

U0 = rref([[eye(3)-V],zeros(3,1)])

程序运行的结果为



这个结果是合理的，简化行阶梯形式只有两行，说明[I-V]的秩是2，所以它的行列式必定为零。由于现在有三个变量，只有两个方程，必定有一个变量可以作为自由变量。记住U0矩阵中各列的意义，它们分别是原方程中pc，pe，ps，的系数，所以简化行阶梯矩阵U0表示的是下列方程：



这里取ps为自由变量，所以煤炭业和电力业的价格应该分别为钢铁业价格的0.94和0.85倍。如果钢铁业产品价格总计为100万元，则煤炭业的产品价格总计为94万，电力业的价格总计为85万。