Entropia di grafo e il problema dell'ordinamento con informazione parziale

Jacopo Notarstefano

20 Luglio 2012

Il problema dell'ordinamento con informazione parziale

Definizione

Sia $P = (V, \leq_P)$ un insieme parzialmente ordinato. Diciamo che un ordine totale $<$ è un'estensione lineare di $\leq_P$ se, $\forall v_i, v_j \in V$,

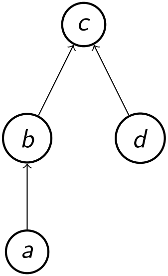
$$v_i \leq_P v_j \implies v_i < v_j.$$

Denotiamo inoltre con $e(P)$ il numero di estensioni lineari di P.

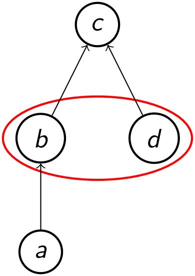
Definizione

Sia $P = (V, \leq_P)$ un insieme parzialmente ordinato. Il problema dell'ordinamento con informazione parziale consiste nel determinare un'estensione lineare $<$ fissata ma ignota per mezzo di domande del tipo "È vero che $v_i < v_j$?", detti confronti.

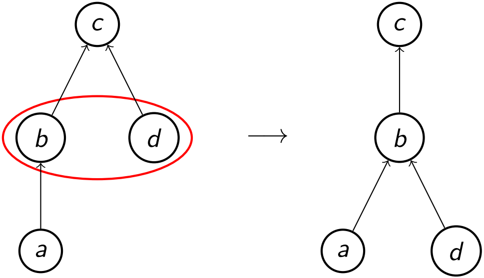
Esempio di ordinamento con informazione parziale



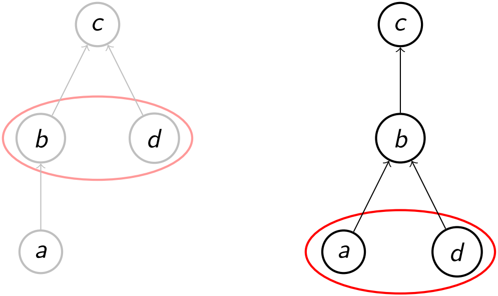
Esempio di ordinamento con informazione parziale



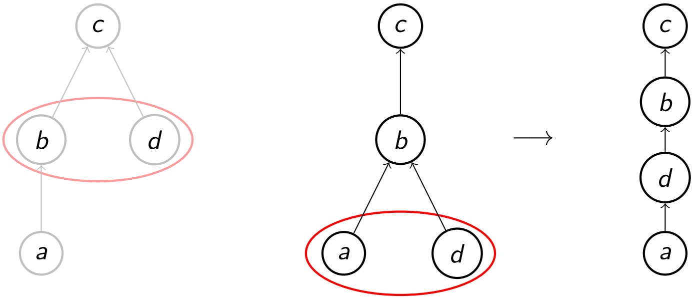
Esempio di ordinamento con informazione parziale



Esempio di ordinamento con informazione parziale



Esempio di ordinamento con informazione parziale



Stato dell'arte

Sia P un insieme parzialmente ordinato di cardinalità n. Sono necessari $\Omega(\log_2 e(P))$ confronti affinché un algoritmo risolutivo sia corretto.

	#Confronti	Complessità
Fredman 1976	$\log e(P) + 2n$	superpolinomiale
Kahn & Saks 1984	$O(\log e(P))$	superpolinomiale
Kahn & Kim 1995	$O(\log e(P))$	polinomiale*
Cardinal et al. 2010	$O(\log e(P))$	polinomiale

* usa a ogni passo il metodo dell'ellissoide.

Insiemi indipendenti e politopo dei vertici

Definizione

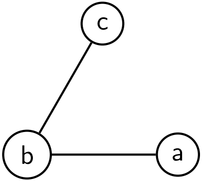
Sia $G = (V, E)$ un grafo. Chiamiamo insieme indipendente (o stabile) un sottoinsieme dei vertici W tale che il sottografo indotto $G(W)$ sia vuoto.

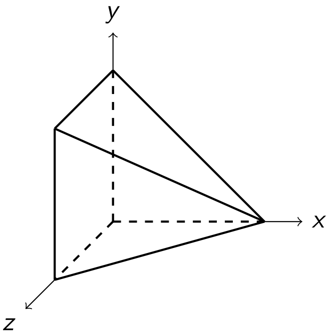
Definizione

Sia G un grafo. Chiamiamo politopo dei vertici l'involucro convesso $STAB(G)$ dei vettori caratteristici degli insiemi indipendenti, cioè:

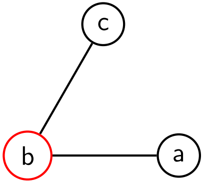
$$STAB(G) = conv\left\{\chi^S \in \{0,1\}^V \mid S \subset V,\, S \text{ insieme indipendente}\right\}$$

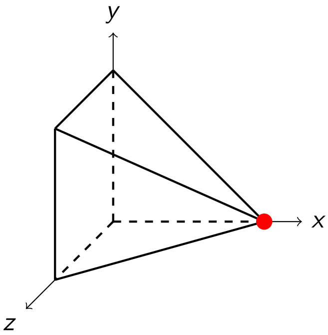
Esempio di politopo dei vertici



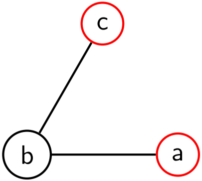


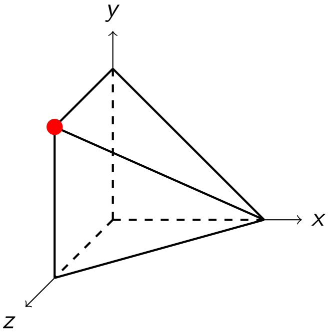
Esempio di politopo dei vertici





Esempio di politopo dei vertici





Definizione di entropia di grafo

Definizione

Sia G un grafo e $STAB(G)$ il politopo dei vertici di G. Chiamiamo entropia di grafo il seguente minimo:

$$H(G) = \min_{\substack{\mathbf{a} \in STAB(G) \\ \mathbf{a} > 0}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{a_i}$$

Storia dell'entropia di grafo

- Definizione originale di Körner (1973), motivata da un problema di teoria dell'informazione.
- Ne sono state date più definizioni equivalenti dall'aspetto molto diverso e sono note varie applicazioni in ambito algoritmico e combinatoriale.
- Körner e Marton (1988) hanno dato una stima più precisa del numero di funzioni di hash perfetto di un insieme.
- Esiste un interessante collegamento con la teoria dei grafi perfetti di Berge (1961).

Grafi perfetti

Definizione

Sia G un grafo. Chiamiamo cricca un sottografo completo e massimale, numero di cricca $\omega(G)$ la massima cardinalità di una cricca.

È ovvio che $\omega(G) \leq \chi(G)$. Per quali grafi vale l'uguaglianza?

Definizione (Berge 1961)

Sia G un grafo. Diciamo che G è perfetto se, per ogni sottografo indotto H, si ha $\omega(H) = \chi(H)$.

Entropia e grafi perfetti

Teorema (Csiszár, Körner, Lovász, Marton, Simonyi 1990)

Sia G un grafo. Se G è perfetto allora

$$H(G) + H(\overline{G}) = \log n.$$

Da questo è possibile dedurre il seguente

Teorema (Lovász 1972)

Sia G un grafo. Allora G è perfetto se e soltanto se $\overline{G}$ è perfetto.

Relazione con gli insiemi parzialmente ordinati

Definizione

Sia $P = (V, \leq_P)$ un insieme parzialmente ordinato. Chiamiamo grafo di confrontabilità il grafo $G(P)$ di insieme di vertici V e un arco fra $v_i, v_j \in V$ se sono confrontabili secondo $\leq_P$.

Scriviamo $H(\overline{P})$ per indicare $H(\overline{G}(P))$. Vale:

Teorema (Kahn, Kim 1995)

$$\log e(P) \leq nH(\overline{P}) \leq c \log e(P)$$

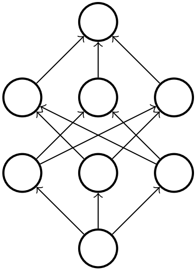
dove $c = 1 + 7 \log e \approx 11.1$.

"Merge sort naïve" con informazione parziale

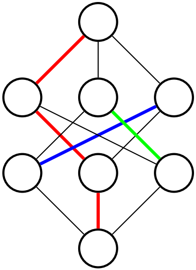
Algoritmo 1 "Merge sort naïve" con informazione parziale

// Preparazione
trova una decomposizione golosa di P in catene $C_1, \ldots, C_k$
$\mathcal{C} \leftarrow \{C_1, \ldots, C_k\}$
// Ordinamento
while $|\mathcal{C}| > 1$ **do**
    seleziona da $\mathcal{C}$ due catene di lunghezza minima C e C'
    fondi C e C' in tempo lineare, ottenendo C''
    cancella C e C' da $\mathcal{C}$, aggiungi C''
end while
return l'unica catena di $\mathcal{C}$

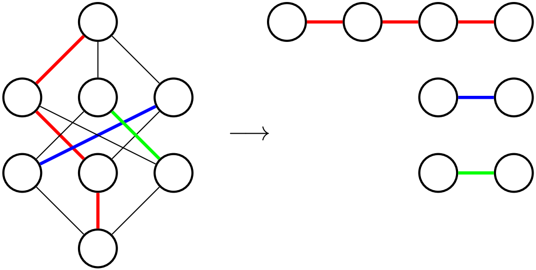
Esempio di “Merge sort naïve”



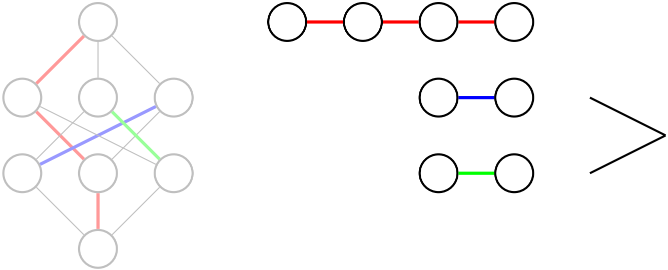
Esempio di "Merge sort naïve"



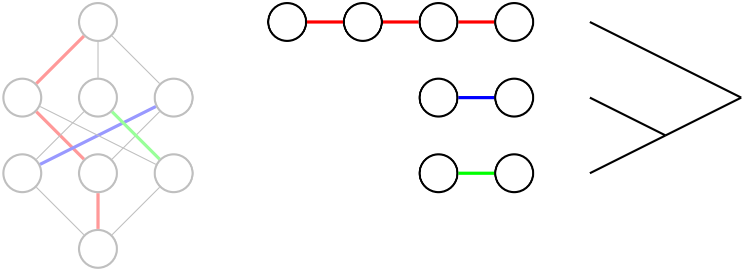
Esempio di "Merge sort naïve"



Esempio di "Merge sort naïve"



Esempio di "Merge sort naïve"



Numero di confronti del "Merge sort naïve"

Proposizione

Sia P un insieme parzialmente ordinato di cardinalità n. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, l'algoritmo "Merge sort naïve" risolve il problema dell'ordinamento parziale impiegando al più

$$(1+\varepsilon)\log e(P) + (1+\varepsilon)\left(\log e + \log\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1\right)\cdot n$$

confronti.

Il problema della fusione con informazione parziale

Definizione

Chiamiamo problema della fusione con informazione parziale il caso particolare del problema dell'ordinamento con informazione parziale in cui P è un insieme parzialmente ordinato partizionabile in due catene disgiunte A e B.

Proposizione

Esiste un algoritmo ("Merge") che risolva il problema della fusione con informazione parziale impiegando al più $6 \log e(P)$ confronti.

Il Teorema di Cardinal et al.

Teorema (Cardinal, Fiorini, Joret, Jungers, Munro 2010)

Sia P un insieme parzialmente ordinato. Esiste un algoritmo che risolve il problema dell'ordinamento con informazione parziale impiegando al più $c \log e(P)$ confronti e un numero polinomiale di operazioni elementari, dove $c \approx 15.08$.

"Merge sort" con informazione parziale

Algoritmo 2 "Merge sort" con informazione parziale

1: trova una catena A di lunghezza massima in P
2: applica l'algoritmo "Merge sort naïve" a $P - A$, ottieni la catena B
3: applica l'algoritmo "Merge" all'ordine parziale corrente P'
4: **return** la catena risultante

Dimostrazione del Teorema di Cardinal et al. 1/2

Dimostrazione

- *Trovare una catena di lunghezza massima non richiede confronti.*
- *Sappiamo che l'algoritmo "Merge sort naïve" impiega al più*

$$(1+\varepsilon)\log e(P-A) + (1+\varepsilon)\left(\log e + \log\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)+1\right)\cdot|P-A|$$

  confronti $\forall\,\varepsilon > 0$.
- *L'ultima fusione comporta al più* $6\log e(P')$ *confronti.*

Dimostrazione del Teorema di Cardinal et al. 2/2

Dimostrazione

Con qualche passaggio algebrico otteniamo che il numero di confronti effettuato dall'algoritmo "Merge sort" è maggiorato, $\forall\, \varepsilon > 0$, *da*

$$\left(1+\varepsilon+2\left((1+\varepsilon)\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)+\ln 2\right)+6\right)\log e(P).$$

Basta allora porre $\varepsilon \approx 0.351198$ *e otteniamo la tesi.*

Ringraziamenti

Grazie dell'attenzione!