

# Tre algoritmi per ordinare con informazione parziale

Jacopo Notarstefano

30 marzo 2012

## 1 Introduzione e definizioni preliminari

Sebbene originariamente introdotta come soluzione del già citato problema di teoria dell'informazione, l'entropia di grafo ha trovato applicazione nella dimostrazione di fatti di interesse combinatorico e algoritmico. In particolare un articolo di Kahn e Kim ha evidenziato il collegamento fra l'entropia di grafo e il problema dell'ordinamento con informazione parziale. Tale problema consiste nel determinare un ordine lineare  $\leq$  fissato ma ignoto su di un insieme  $\{v_1, \dots, v_n\}$  per mezzo di query del tipo 'vale  $v_i \leq v_j$  ?', supposto noto un sottoinsieme di queste relazioni.

## 2 Alcuni teoremi di interesse

Dato un grafo  $G$  possiamo trovarne una partizione in insiemi indipendenti tramite l'algoritmo goloso che prova ad espandere

**Definizione.** Sia  $G$  un grafo perfetto e sia  $\{S_1, \dots, S_k\}$  una sua partizione ottenuta con il precedente algoritmo goloso. Chiameremo *punto goloso* il punto  $x$  definito da

$$x = \sum_{i=1}^k \frac{|S_i|}{n} \chi^{S_i}$$

**Teorema 2.1** *Sia  $G$  un grafo perfetto su  $n$  vertici e sia  $x$  un suo punto goloso. Allora, comunque fissato  $\varepsilon > 0$ , vale*

$$H(x) \leq (1 + \varepsilon)H(G) + (1 + \varepsilon) \log \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

## 3 Insertion sort

**Lemma 3.1** *Sia  $P$  un insieme parzialmente ordinato di cardinalità  $n$  e sia  $C$  una catena di lunghezza massima in  $P$ . Vale allora  $|C| \geq n \cdot 2^{-H(P)}$ .*

**Teorema 3.2** *L'algoritmo 1 compie*

## 4 Merge sort naive

## 5 Merge sort

**Definizione.** Sia  $K$  una componente connessa di  $G(x)$ . Se  $K$  è rossa chiamo  $A \cap K$  *catena maggiore* e  $B \cap K$  *catena minore*. Se  $K$  è blu il contrario.

**Definizione.** Sia  $K$  una componente connessa di  $G(x)$ . Dico che  $K$  è *buona* se ogni arco di  $G$  che possiede un estremo nella catena minore di  $K$  ha l'altro estremo nella catena maggiore oppure in una componente connessa di colore opposto.

**Lemma 5.1** *Sia  $x \in STAB(G)$  localmente ottimo. Se  $G(x)$  possiede almeno una componente rossa non banale allora una di esse è buona.*

**Dimostrazione.** Sia  $K$  una componente connessa rossa non banale tale che  $\frac{|A \cap K|}{|K|}$  sia minimo. Vogliamo dimostrare che  $K$  è buona. Sia  $v \in B \cap K$  e sia  $w$  adiacente a  $v$  in  $G$  ma non in  $G(x)$ . Per definizione l'arco di estremi  $v$  e  $w$  non è stretto, quindi  $x_v + x_w < 1$ . In particolare  $x_w < 1$ , quindi  $w$  appartiene ad una qualche componente connessa  $L$  non banale. Se per assurdo  $L$  fosse rossa per ipotesi  $\frac{|A \cap L|}{|L|} \geq \frac{|A \cap K|}{|K|}$ , dunque per ottimalità di  $x$  avremo

$$x_v + x_w = \frac{|B \cap K|}{|K|} + \frac{|A \cap L|}{|L|} \geq \frac{|B \cap K|}{|K|} + \frac{|A \cap K|}{|K|} \geq 1$$

da cui dedurremmo che l'arco di estremi  $v$  e  $w$  è stretto, una contraddizione. Segue quindi che  $L$  è blu oppure non esiste  $w$  adiacente a  $v$  in  $G$  ma non in  $G(x)$ , cioè la tesi.