Tre algoritmi per ordinare con informazione parziale

Jacopo Notarstefano

28 marzo 2012

1 Introduzione e definizioni preliminari

Sebbene originariamente introdotta come soluzione del già citato problema di teoria dell'informazione, l'entropia di grafo ha trovato applicazione nella dimostrazione di fatti di interesse combinatorico e algoritmico. In particolare un articolo di Kahn e Kim ha evidenziato il collegamento fra l'entropia di grafo e il problema dell'ordinamento con informazione parziale. Tale problema chiede di determinare un ordine lineare $\leq$ fissato ma ignoto su di un insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ per mezzo di interrogazioni del tipo '*vale* $v_i \leq v_j$ *?*', supposto noto un sottoinsieme di queste relazioni.

2 Alcuni teoremi di interesse

Dato un grafo G possiamo trovarne una partizione in insiemi indipendenti tramite l'algoritmo goloso che prova ad espandere

Definizione. Sia G un grafo perfetto e sia $\{S_1, \ldots, S_k\}$ una sua partizione ottenuta con il precedente algoritmo goloso. Chiameremo *punto goloso* il punto x definito da

$$x = \sum_{i=1}^{k} \frac{|S_i|}{n} \chi^{S_i}$$

Teorema 2.1 *Sia G un grafo perfetto su n vertici e sia x un suo punto goloso. Allora, comunque fissato $\varepsilon > 0$, vale*

$$H(x) \leq (1+\varepsilon)H(G) + (1+\varepsilon)\log\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

3 Insertion sort

Lemma 3.1 *Sia P un insieme parzialmente ordinato di cardinalità n e sia C una catena di lunghezza massima in P. Vale allora $|C| \geq n \cdot 2^{-H(\overline{P})}$.*

Teorema 3.2 *L'algoritmo 1 compie*

4 Merge sort naive

5 Merge sort