Proprietà e teoremi notevoli

Jacopo Notarstefano

11 aprile 2012

1 Proprietà notevoli dell'entropia di grafo

1.1 Monotonia

Lemma 1.1 *Siano F e G grafi tali che $V(G) = V(F)$ ma $E(F) \subset E(G)$. Allora comunque scelta P densità discreta sui vertici avremo $H(F, P) \leq H(G, P)$.*

Dimostrazione. Osserviamo che se $E(F) \subset E(G)$ allora $\mathrm{VP}(G) \subset \mathrm{VP}(F)$. Sfruttando la terza definizione di entropia di grafo abbiamo immediatamente la tesi, infatti stiamo prendendo il minimo della stessa funzione obiettivo su un insieme più grande. □

1.2 Subadditività

Lemma 1.2 *Siano F e G grafi di comune insieme dei vertici V. Sia $F \cup G$ il grafo di vertici V ed insieme degli archi $E(F) \cup E(G)$. Comunque scelta P densità discreta sui vertici avremo*

$$H(F \cup G, P) \leq H(F, P) + H(G, P)$$

Dimostrazione. Siano $\mathbf{a} \in \mathrm{VP}(F)$ e $\mathbf{b} \in \mathrm{VP}(G)$ i vettori che realizzino il minimo delle rispettive entropie. Osserviamo che l'intersezione di un insieme indipendente di F e di un insieme indipendente di G è un insieme indipendente in $F \cup G$. In altri termini il prodotto scalare dei loro vettori caratteristici è il vettore caratteristico di un insieme indipendente di $F \cup G$. Pertanto, sfruttando la convessità del politopo dei vertici, il prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ appartiene a $\mathrm{VP}(F \cup G)$. Ma allora possiamo scrivere

$$H(F, P) + H(G, P) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{a_i} + \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{b_i} = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{a_i b_i} \geq H(F \cup G, P)$$

□

1.3 Additività per sostituzioni

Siano F e G grafi su insiemi di vertici disgiunti, sia v un vertice di G. Chiamiamo grafo ottenuto sostituendo F a v, e scriviamo $G_{v \leftarrow F}$, il grafo ottenuto da G cancellando v e connettendo ogni vertice adiacente a v con ogni vertice di una copia isomorfa di F. Supponiamo inoltre che P sia una densità sui vertici di G e che Q sia una densità sui vertici di F. Allora possiamo definire una $P_{v \leftarrow Q}$ in modo che la coppia $(G_{v \leftarrow F}, P_{v \leftarrow Q})$ sia un grafo probabilistico. Per fare questo poniamo

$$P_{v \leftarrow Q}(x) = \begin{cases} P(x) & \text{se } x \in V(G) - \{v\} \\ P(v)Q(x) & \text{se } x \in V(F) \end{cases}$$

Lemma 1.3 *Siano F e G grafi su insiemi di vertici disgiunti, sia v un vertice di G. Siano inoltre P una densità sui vertici di G e Q una densità sui vertici di F. Allora abbiamo*

$$H(G_{v \leftarrow F}, P_{v \leftarrow Q}) = H(G, P) + P(v)H(F, Q)$$

Dimostrazione. TODO □

Corollario 1.4 *Sia (G, P) un grafo probabilistico e siano $G_1 \dots G_n$ le sue componenti connesse. Poniamo $P_i(x) = P(x)[P(V(G_i))]^{-1}$ per $x \in V(G_i)$. Allora abbiamo*

$$H(G, P) = \sum_{i=1}^{n} P(V(G_i))H(G_i, P_i)$$

Dimostrazione. Consideriamo il grafo su n vertici $\{v_1 \dots v_n\}$ privo di archi, e sia Q la densità discreta tale che $Q(v_i) = P(V(G_i))$. Otteniamo la tesi applicando n volte il lemma precedente, sostituendo ad ogni passo il vertice v_i con la componente connessa G_i. □

1.4 Entropia di grafo completo

Proposizione 1.5 *Sia K_n il grafo completo su n vertici. Comunque scelta P densità discreta sui vertici avremo*

$$H(K_n, P) = H(P)$$

Dimostrazione. Sfruttando la terza definizione di entropia di grafo sappiamo che

$$H(K_n, P) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{q_i}$$

per certi $q_1 \dots q_n$ positivi. Osserviamo inoltre che nel grafo completo gli insiemi indipendenti sono soltanto $\varnothing$ e i singoletti dei vertici. Pertanto il politopo dei vertici è l'$n-$simplesso, ma poiché sappiamo che la funzione obiettivo è minima sul bordo deduciamo che

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = 1.$$

Applichiamo ora la diseguaglianza sulle somme dei logaritmi ed otteniamo che il minimo è realizzato per

$$q_i = p_i \quad \forall i$$

$\square$

Osservazione. Come anticipato nell'introduzione abbiamo riottenuto l'entropia di Shannon come caso particolare dell'entropia di grafo.