# Entropia di grafo e il problema dell'ordinamento con informazione parziale

Il concetto di entropia di una sorgente fu introdotto da Claude E. Shannon nel fondamentale articolo "A Mathematical Theory of Communication" [5].

**Definizione.** Sia $X$ una sorgente che a ogni istante discreto emetta un simbolo $v_i$ nell'alfabeto finito $\{v_1, \ldots, v_n\}$ con probabilità $p_i$ per $1 \leq i \leq n$. Chiamiamo *entropia di* $X$ la quantità

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i}.$$

Dalla sua introduzione sono state proposte più generalizzazioni, fra cui ricordiamo in particolare l'entropia di Rényi [4]. In questa tesi andremo a esporre un'ulteriore generalizzazione dovuta a Janos Körner, nota come "entropia di grafo" [3]. Infatti, oltre a generalizzare la nozione di entropia di una sorgente, questa entropia consente di assegnare a un grafo un numero che ne rappresenti la complessità. Ciò si ottiene interpretando il grafo come rappresentante la relazione di distinguibilità dei simboli emessi da una sorgente discreta. Più precisamente, detta $X$ una sorgente come nella precedente definizione, associamo a essa un grafo di insieme dei vertici $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e un arco $(v_i, v_j)$ ogni volta che i simboli $v_i$ e $v_j$ sono distinguibili. Vorremmo quindi riottenere la classica nozione di entropia di una sorgente nel caso di totale distinguibilità, ovvero di grafo completo.

La definizione rigorosa di entropia di grafo comporta alcune difficoltà tecniche, la cui soluzione costituisce l'obiettivo del primo capitolo. Nel secondo capitolo passeremo a esporre le principali proprietà dell'entropia di grafo, fra cui la monotonia e una forma di subadditività. Enunceremo inoltre l'interessante relazione con i grafi perfetti, cioè quei grafi per cui numero cromatico e numero di cricca coincidono. Ne dedurremo alcuni lemmi sui grafi di confrontabilità associati agli insiemi parzialmente ordinati. Questi risultati verranno sfruttati nel terzo capitolo per descrivere algoritmi che risolvano il problema dell'ordinamento con informazione parziale. Tale problema consiste nel determinare adattivamente un ordine totale fissato ma ignoto a partire da un insieme parzialmente ordinato. Jeff Kahn e Jeong H. Kim nell'articolo "Entropy and Sorting" evidenziarono per primi il collegamento esistente fra il problema dell'ordinamento con informazione parziale e l'entropia del grafo a esso associato [2]. Essi esibirono inoltre un algoritmo per la soluzione di tale problema in un numero asintoticamente ottimo di confronti e per giunta polinomiale nelle operazioni elementari, ma che a ogni passo fa uso del metodo dell'ellissoide. In un recente articolo Jean Cardinal et al. hanno invece esibito tre algoritmi per la soluzione dello stesso problema in un numero asintoticamente ottimo di confronti e comunque polinomiali nelle operazioni elementari, senza però far uso del metodo dell'ellissoide [1]. Nel terzo capitolo verranno illustrati in dettaglio questi ultimi tre algoritmi.

Sull'entropia di grafo è stata scritta un'esauriente rassegna da Gábor Simonyi nel 1995 e una versione più aggiornata nel 2001 [6], [7].

## Riferimenti bibliografici


[1] J. Cardinal, S. Fiorini, G. Joret, R.M. Jungers e J.I. Munro. “Sorting under Partial Information (without the Ellipsoid Algorithm)”. In: *Proceedings of the 42nd ACM symposium on Theory of computing*. 2010, pp. 359–368.

[2] J. Kahn e J.H. Kim. “Entropy and Sorting”. In: *Journal of Computer and System Sciences* 51.3 (1995), pp. 390–399.

[3] J. Körner. “Coding of an information source having ambiguous alphabet and the entropy of graphs”. In: *6th Prague Conference on Information Theory*. 1973, pp. 411–425.

[4] A. Rényi. “On measures of information and entropy”. In: *Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Statist. and Prob.* Vol. 1. 1961, pp. 547–561.

[5] C.E. Shannon. “A Mathematical Theory of Communication”. In: *Bell Syst. Tech. J.* 27 (1948), pp. 379–423, 623–656.

[6] G. Simonyi. “Graph Entropy: A Survey”. In: *Combinatorial Optimization: Papers from the DIMACS Special Year* (1995), pp. 399–441.

[7] G. Simonyi. “Perfect graphs and graph entropy: An updated survey”. In: *Perfect Graphs*. A cura di J.L.R. Alfonsín e B.A. Reed. Wiley, 2001, pp. 293–328.