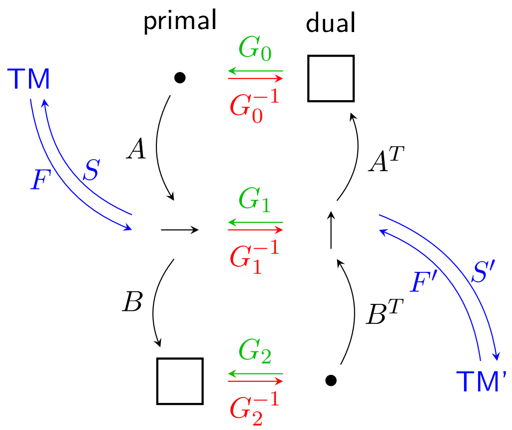
Documentation des différentes versions du code

On propose plusieurs façons de discrétiser la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli donnée par

$$AT(u,v) = \int_\Omega (u-g)^2 \ \mathrm{dx} + \int_\Omega v^2|\nabla u|^2 \ \mathrm{dx} + \lambda \int_\Omega \varepsilon|\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}(1-v)^2 \ \mathrm{dx}.$$

Pour le choix des métriques et des différentes discrétisations, on se base sur le schéma suivant :



0.1 Algorithme.

L'algorithme général est de la forme :

Algorithm `discrete-AT`

Constant

- $\lambda, \lambda_{end}, \varepsilon_0, n$ `= given by the user`

Variable

- u, g : *p-form*
- v : *k-form* `{` $k = p$ *possible* `}`

Begin

- $u, g \leftarrow$ `input image`
- $v \leftarrow 1$
- `Initialisation of` G_i `and` G_i^{-1}

```
  While λ > λ_end Do
      ε ← ε_0
      For i from 1 to 4 Do
          For k from 1 to n Do
              Solve EL equation M_{u_k,v_k} u = c to compute u_{k+1}
              Solve EL equation N_{u_{k+1},v_k} v = d to compute v_{k+1}
          EndFor
          ε ← ε/2
      EndFor
      λ ← λ/√2
  EndWhile
End
```

0.2 at-sansTenseur-0p-1p.cpp

Type des variables u, g, v. On place les fonctions sur les cellules suivantes :

- g : 0-forme du primal
- u : 0-forme du primal

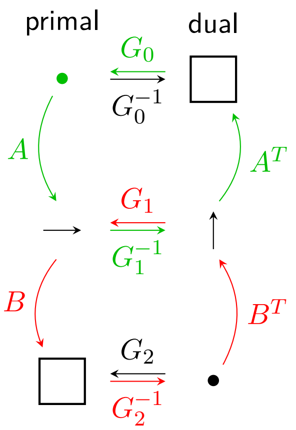
$\longrightarrow$ v : 1-forme du primal

Fonctionnelle discrétisée. Pour discrétiser la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli, on effectue les opérations suivantes :

$* \ \alpha \int_\Omega (u-g)^2 \ \mathrm{dx} = \alpha \langle u-g, u-g \rangle_{0_p} = \alpha (u-g)^T G_0^{-1} (u-g)$

$* \ \int_\Omega v^2 |\nabla u|^2 \ \mathrm{dx} = \left\langle v^T A u, v^T A u \right\rangle_{1_p} = u^T A^T v G_1^{-1} v^T A u = u^T A^T \mathrm{diag}(v^2) G_1^{-1} A u$

$* \ \lambda\varepsilon \int_\Omega |\nabla v|^2 \ \mathrm{dx} = \lambda\varepsilon . v^T (G_1^{-1} B^T G_2^{-1} B + A G_0 A^T G_1^{-1}) v$



ou encore :
$\lambda\varepsilon \int_\Omega |\nabla v|^2 \ \mathrm{dx} = \lambda\varepsilon \left(\langle Bv, Bv \rangle_{2_p} + \left\langle A^T G_1^{-1} v, A^T G_1^{-1} v \right\rangle_{0_d} \right) = \lambda\varepsilon . v^T (B^T G_2^{-1} B + G_1^{-1} A G_0 A^T G_1^{-1}) v$

$* \ \frac{\lambda}{4\varepsilon} \int_\Omega (1-v)^2 \ \mathrm{dx} = \frac{\lambda}{4\varepsilon} \langle 1-v, 1-v \rangle_{1_p} = \frac{\lambda}{4\varepsilon} (1-v)^T G_1^{-1} (1-v)$

On minimisera donc la fonctionnelle donnée par la somme de ces 4 termes :

$$AT(u,v) = \alpha(u-g)^T G_0^{-1}(u-g) + u^T A^T \mathsf{diag}(v^2) G_1^{-1} Au + \lambda\varepsilon v^T (AG_0A^TG_1^{-1} + G_1B^TG_2^{-1}B)v + \frac{\lambda}{4\varepsilon}(1-v)^T G_1^{-1}(1-v)$$

Equations d'Euler-Lagrange. Des variations de AT on déduit les équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$\begin{cases} \left[A^T \mathsf{diag}(v^2) G_1^{-1} A + \alpha G_0^{-1}\right] u = \alpha G_0^{-1} g \\ \left[\mathsf{diag}(|Au|^2) G_1^{-1} + \lambda\varepsilon(AG_0A^TG_1^{-1} + G_1B^TG_2^{-1}B) + \frac{\lambda}{4\varepsilon} G_1^{-1}\right] v = \frac{\lambda}{4\varepsilon}\mathbf{1} G_1^{-1} \end{cases}$$

Choix de la métrique. On souhaite conserver le terme $\int_\Omega (u-g)^2 \,\mathrm{dx}$ constant dans le carré $[0,1]^2$, donc on fixe $G_0^{-1} = h^2 Id$.
Il en découle le choix suivant pour les métriques :

$G_0^{-1} = h^2 \cdot Id$	$G_0 = \frac{1}{h^2} \cdot Id$
$G_1^{-1} = h \cdot Id$	$G_1 = \frac{1}{h} \cdot Id$
$G_2^{-1} = Id$	$G_2 = Id$

Remarques diverses.

Dans cette version, on a directement remplacé les matrices G_i et G_i^{-1} par $1,\ h,\ h^2,\ 1/h$ ou $1/h^2$, de sorte que la métrique n'est pas facilement modifiable dans cette version. Si l'on souhaite changer la métrique dans ce code, il faudrait calculer à nouveau les poids induits pour chaque terme et les remplacer un à un dans chacune des étapes du calcul.

0.3 at-tenseur-0p-1p.cpp

Type des variables u, g, v. On place les fonctions sur les cellules suivantes :

- g : 0-forme du primal
- u : 0-forme du primal

$\longrightarrow$ v : 1-forme du primal

Fonctionnelle discrétisée. On minimise la fonctionnelle donnée par :

$$AT(u,v) = \alpha(u-g)^T G_0^{-1}(u-g) + u^T A^T \mathsf{diag}(v^2) G_1^{-1} Au + \lambda\varepsilon v^T (AG_0A^TG_1^{-1} + G_1B^TG_2^{-1}B)v + \frac{\lambda}{4\varepsilon}(1-v)^T G_1^{-1}(1-v)$$

Equations d'Euler-Lagrange. Des variations de AT on déduit les équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$\begin{cases} \left[A^T \mathsf{diag}(v^2) G_1^{-1} A + \alpha G_0^{-1}\right] u = \alpha G_0^{-1} g \\ \left[\mathsf{diag}(|Au|^2) G_1^{-1} + \lambda\varepsilon(AG_0A^TG_1^{-1} + G_1B^TG_2^{-1}B) + \frac{\lambda}{4\varepsilon} G_1^{-1}\right] v = \frac{\lambda}{4\varepsilon}\mathbf{1} G_1^{-1} \end{cases}$$

Choix de la métrique. On souhaite conserver le terme $\displaystyle\int_\Omega (u-g)^2 \ \mathrm{dx}$ constant dans le carré $[0,1]^2$, donc on fixe $G_0^{-1} = h^2 Id$.
Et on souhaite de plus corriger la mesure du périmètre, donc modifier la métrique sur les arêtes. Pour cela, on effectue un précalcul du tenseur des structures et on définit alors

$$G_1^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{h}{1-\frac{\lambda_1^2}{\lambda_{max}^2}\left(1-\frac{1}{\|v_1\|_1}\right)}\right).$$

Il en découle le choix suivant pour les métriques :

$$G_0^{-1} = h^2 \cdot Id \qquad\qquad G_0 = \frac{1}{h^2}\cdot Id$$

$$G_1^{-1} = \frac{h}{1-\frac{\lambda_1^2}{\lambda_{max}^2}\left(1-\frac{1}{\|v_1\|_1}\right)}\cdot Id \qquad\qquad G_1 = \frac{1-\frac{\lambda_1^2}{\lambda_{max}^2}\left(1-\frac{1}{\|v_1\|_1}\right)}{h}\cdot Id$$

$$G_2^{-1} = Id \qquad\qquad G_2 = Id$$

Remarques diverses.

Dans cette version, on a directement remplacé les matrices G_i et G_i^{-1} par $1,\ h,\ h^2,\ 1/h$ ou $1/h^2$, de sorte que la métrique n'est pas facilement modifiable dans cette version. Si l'on souhaite changer la métrique dans ce code, il faudrait calculer à nouveau les poids induits pour chaque terme et les remplacer un à un dans chacune des étapes du calcul.

On rajoute les fonctions suivantes :
♯include "RealFFT.h"
♯include "VTKWriter.h"
♯include "structureTensor.h"

0.4 at-0p-1p.cpp

Type des variables u, g, v. On place les fonctions sur les cellules suivantes :

- g : 0-forme du primal
- u : 0-forme du primal

$\longrightarrow$ v : 1-forme du primal

Fonctionnelle discrétisée. On minimise la fonctionnelle donnée par :

$$AT(u,v) = \alpha(u-g)^T G_0^{-1}(u-g) + u^T A^T \mathrm{diag}(v^2) G_1^{-1} A u + \lambda\varepsilon v^T (A G_0 A^T G_1^{-1} + G_1 B^T G_2^{-1} B) v + \frac{\lambda}{4\varepsilon}(1-v)^T G_1^{-1}(1-v)$$

Equations d'Euler-Lagrange. Des variations de AT on déduit les équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$\begin{cases} \left[A^T \mathrm{diag}(v^2) G_1^{-1} A + \alpha G_0^{-1}\right] u = \alpha G_0^{-1} g \\ \left[\mathrm{diag}(|Au|^2) G_1^{-1} + \lambda\varepsilon(A G_0 A^T G_1^{-1} + G_1 B^T G_2^{-1} B) + \frac{\lambda}{4\varepsilon} G_1^{-1}\right] v = \frac{\lambda}{4\varepsilon} \mathbf{1} G_1^{-1} \end{cases}$$

Choix de la métrique. On calcule la métrique en selon le rapport $G_i^{-1} = \dfrac{|\sigma'_{n-i}|}{|\sigma_i|}$.
Il en découle le choix suivant pour les métriques :

$G_0^{-1} = h^2 \cdot Id$	$G_0 = \dfrac{1}{h^2} \cdot Id$
$G_1^{-1} = Id$	$G_1 = Id$
$G_2^{-1} = \dfrac{1}{h^2} \cdot Id$	$G_2 = h^2 \cdot Id$

Remarques diverses.

On peut corriger la métrique sur les arêtes grâce au tenseur des structures et définir alors $w_{G_1} = 1 - \dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_{max}^2}\left(1 - \dfrac{1}{\|v_1\|_1}\right)$.
Dans ce cas, $G_1^{-1} = \dfrac{1}{w_{G_1}} \cdot Id$ et $G_1 = w_{G_1} \cdot Id$.

0.5 at-TM-0p-1p.cpp

Type des variables u, g, v. On place les fonctions sur les cellules suivantes :

- g : 0-forme du primal
- u : 0-forme du primal

$\longrightarrow$ v : 1-forme du primal

Fonctionnelle discrétisée. On utilise cette fois-ci les opérateurs $\sharp$ et $\flat$, dont on note les matrices respectivement S et F. On effectue donc les opérations suivantes :

* $\alpha \displaystyle\int_\Omega (u-g)^2 \ \mathrm{dx} = \alpha \langle u-g, u-g\rangle_{0_p} = \alpha(u-g)^T G_0^{-1}(u-g)$
* $\displaystyle\int_\Omega v^2 |\nabla u|^2 \ \mathrm{dx} = \left\langle v^\sharp, v^\sharp\right\rangle_{1_p} . \left\langle (Au)^\sharp, (Au)^\sharp\right\rangle_{1_p} = v^T S^T S v . u^T A^T S^T S A u$
* $\lambda\varepsilon \displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 \ \mathrm{dx} = \lambda\varepsilon\left(\left\langle G_2^{-1}Bv, G_2^{-1}Bv\right\rangle_{0_d} + \left\langle G_0 A^T G_1^{-1} v, G_0 A^T G_1^{-1} v\right\rangle_{0_p}\right) = \lambda\varepsilon . v^T (B^T G_2^{-1} B + G_1^{-1} A G_0 A^T G_1^{-1}) v$
* $\dfrac{\lambda}{4\varepsilon} \displaystyle\int_\Omega (1-v)^2 \ \mathrm{dx} = \dfrac{\lambda}{4\varepsilon}\left\langle (1-v)^\sharp, (1-v)^\sharp\right\rangle_{1_p} = \dfrac{\lambda}{4\varepsilon}(1-v)^T S^T S (1-v)$

On discrétise alors la fonctionnelle de la façon suivante :

$$AT(u,v) = \alpha(u-g)^T G_0^{-1}(u-g) + v^T S^T S v . u^T A^T S^T S A u + \lambda\varepsilon . v^T (B^T G_2^{-1} B + G_1^{-1} A G_0 A^T G_1^{-1}) v + \frac{\lambda}{4\varepsilon}(1-v)^T S^T S (1-v)$$

Equations d'Euler-Lagrange. Des variations de AT on déduit les équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \left[v^T S^T S v . A^T S^T S A + \alpha G_0^{-1}\right] u &= \alpha G_0^{-1} g \\ \left[u^T A^T S^T S A u . S^T S + \lambda\varepsilon(B^T G_2^{-1} B + G_1^{-1} A G_0 A^T G_1^{-1}) + \frac{\lambda}{4\varepsilon} S^T S\right] v &= \frac{\lambda}{4\varepsilon} \mathbf{1} S^T S \end{aligned}\right.$$

Choix de la métrique. On calcule la métrique en selon le rapport $G_i^{-1} = \dfrac{|\sigma'_{n-i}|}{|\sigma_i|}$.
Il en découle le choix suivant pour les métriques :

$$
\begin{array}{l|l}
G_0^{-1} = h^2 \cdot Id & G_0 = \dfrac{1}{h^2} \cdot Id \\
G_1^{-1} = Id & G_1 = Id \\
G_2^{-1} = \dfrac{1}{h^2} \cdot Id & G_2 = h^2 \cdot Id
\end{array}
$$

Remarques diverses.

Il semblerait (?) que les opérateurs $\sharp$ et $\flat$ induisent la métrique automatiquement, à savoir respectivement $1/h$ et h.

On pourrait corriger la métrique comme précedemment avec un précalcul du tenseur des structures.

0.6 at-2p-1p.cpp

Type des variables u, g, v. On place les fonctions sur les cellules suivantes :

- ☐ g : 2-forme du primal
- ☐ u : 2-forme du primal
- $\longrightarrow$ v : 1-forme du primal

Fonctionnelle discrétisée. On minimise la fonctionnelle donnée par :
TODO : fonctionnelle

Equations d'Euler-Lagrange. Des variations de AT on déduit les équations d'Euler-Lagrange suivantes :
TODO : EL

Choix de la métrique. On calcule la métrique en selon le rapport $G_i^{-1} = \dfrac{|\sigma'_{n-i}|}{|\sigma_i|}$.
Il en découle le choix suivant pour les métriques :

$$
\begin{array}{l|l}
G_0^{-1} = h^2 \cdot Id & G_0 = \dfrac{1}{h^2} \cdot Id \\
G_1^{-1} = Id & G_1 = Id \\
G_2^{-1} = \dfrac{1}{h^2} \cdot Id & G_2 = h^2 \cdot Id
\end{array}
$$

Remarques diverses.

On peut corriger la métrique sur les arêtes grâce au tenseur des structures et définir alors
$w_{G_1} = 1 - \dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_{max}^2}\left(1 - \dfrac{1}{\|v_1\|_1}\right)$.
Dans ce cas, $G_1^{-1} = \dfrac{1}{w_{G_1}} \cdot Id$ et $G_1 = w_{G_1} \cdot Id$.