

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Marion Foare

Thèse dirigée par **Jacques-Olivier Lachaud**
et codirigée par **Dorin Bucur**

préparée au sein du **LAMA, Université Savoie Mont Blanc**
et de l'**École Doctorale MSTII**

Analyse anisotropique des images par des méthodes variationnelles et géométriques

Thèse soutenue publiquement le **date**,
devant le jury composé de :

Prenom et Nom

titre et affiliation, Président

Zakaria Belhachmi

Professeur, LMIA, Université de Haute Alsace, Rapporteur

Olivier Lézoray

Professeur, GREYC, Université Caen Normandie, Rapporteur

Prenom et Nom

titre et affiliation, Examinateur

Jacques-Olivier Lachaud

Professeur, LAMA, Université Savoie Mont Blanc, Directeur de thèse

Dorin Bucur

Professeur, LAMA, Université Savoie Mont Blanc, Co-Directeur de thèse



TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|-----|
| Index des notations | vii |
| Introduction | 1 |
| 1 ANALYSE D'IMAGES | 9 |
| 1.1 Notations | 9 |
| 1.2 Débruitage et restauration d'image | 10 |
| 1.2.1 Méthode du maximum a posteriori (MAP) | 10 |
| 1.2.2 Méthode quadratique | 11 |
| 1.2.3 Méthode de la Variation Totale (TV) | 12 |
| 1.2.4 Le problème de Mumford-Shah | 13 |
| 1.3 Défloutage | 16 |
| 1.4 Segmentation | 16 |
| 1.4.1 Méthodes de seuillage et de partitionnement | 16 |
| 1.4.2 Détection de contours | 18 |
| 1.4.3 Approches région | 18 |
| 1.5 Inpainting | 20 |
| 1.5.1 Méthodes variationnelles pour l'inpainting | 20 |
| 1.5.2 Inpainting par association de patchs | 21 |
| 2 FONCTIONNELLE DE MUMFORD-SHAH ANISOTROPE ET APPROXIMA- TION VARIATIONNELLE | 23 |
| 2.1 Notions préliminaires | 23 |
| 2.1.1 Espaces BV, SBV | 24 |
| 2.1.2 Γ -convergence | 27 |
| 2.2 Fonctionnelle de Mumford-Shah anisotrope | 30 |
| 2.2.1 Existence des solutions | 31 |
| 2.2.2 Régularité Alhfors des solutions | 31 |
| 2.3 Approximation par Γ -convergence de la fonctionnelle de Mumford-Shah ani- sotrope | 35 |
| 2.4 Rôle des paramètres | 37 |
| 2.5 Premiers résultats numériques | 37 |
| 2.5.1 Processus d'optimisation | 37 |
| 2.5.2 Choix de l'anisotropie | 38 |

| | |
|--|-----------|
| 2.5.3 Application en restauration d'image | 40 |
| 2.6 Conclusion | 44 |
| 3 NOTIONS DE CALCUL DISCRET | 45 |
| 3.1 Motivations | 45 |
| 3.2 Formes différentielles et opérations sur les formes | 46 |
| 3.2.1 Formes différentielles de degré k | 46 |
| 3.2.2 Produit extérieur | 47 |
| 3.2.3 Produit scalaire | 48 |
| 3.2.4 Étoiles de Hodge | 49 |
| 3.2.5 Opérateurs musicaux \sharp et \flat | 50 |
| 3.2.6 Différentielle extérieure et théorème de Stokes | 51 |
| 3.2.7 Discrétisation des opérateurs classiques | 52 |
| 3.3 Complexe cellulaire et surface discrète | 53 |
| 3.4 Calcul discret | 56 |
| 3.4.1 Formes différentielles discrètes | 56 |
| 3.4.2 Étoiles de Hodge discrètes | 57 |
| 3.4.3 Opérations et opérateurs discrets | 57 |
| 3.4.4 Opérateurs de différentiation en dimension 2 | 58 |
| 3.5 Conclusion | 61 |
| 4 FONCTIONNELLES D'AMBROSIO-TORTORELLI DISCRÈTES ET APPLICATIONS EN ANALYSE D'IMAGE | 63 |
| 4.1 Formulations discrètes de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli | 64 |
| 4.1.1 Formulation exclusivement sur les sommets | 64 |
| 4.1.2 Formulation sur les sommets et les arêtes $AT_\varepsilon^{0,1}$ | 64 |
| 4.1.3 Formulation sur les faces et les sommets $AT_\varepsilon^{2,0}$ | 66 |
| 4.1.4 Remarques sur les formulations discrètes | 67 |
| 4.2 Processus d'optimisation | 67 |
| 4.2.1 Équations d'Euler-Lagrange | 67 |
| 4.2.2 Convergence des solutions discrètes | 68 |
| 4.2.3 Algorithme et détails d'implémentation | 68 |
| 4.3 Influence des paramètres | 70 |
| 4.3.1 Espace-échelle sur ε et épaisseur des contours | 70 |
| 4.3.2 Espace-échelle sur λ et quantité de discontinuités | 71 |
| 4.3.3 Espace-échelle sur α et réglage du flou initial | 72 |
| 4.4 Utilisation de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli pour la restauration d'image | 73 |
| 4.4.1 Reconstruction d'images en niveaux de gris et en couleurs | 73 |
| 4.4.2 Robustesse au bruit | 75 |
| 4.4.3 Comparaisons avec la littérature | 75 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.5 | Autres applications en analyse d'image | 84 |
| 4.5.1 | Segmentation non contrainte | 84 |
| 4.5.2 | Inpainting | 84 |
| 4.6 | Discussions | 88 |
| 4.6.1 | Apports du calcul discret | 88 |
| 4.6.2 | Limitations | 89 |
| 4.7 | Conclusion | 89 |
| 5 | APPLICATION AU LISSAGE DU CHAMP DE NORMALES ET À LA DÉTECTION DE SAILLANCES D'UNE SURFACE DE \mathbb{R}^3 | 91 |
| 5.1 | Fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli pour la détection de saillances | 91 |
| 5.2 | Estimateurs discrets du champ de normales | 93 |
| 5.3 | Méthodes d'extraction de saillances | 94 |
| 5.4 | Résultats numériques | 95 |
| 5.4.1 | Détails d'implémentation | 95 |
| 5.4.2 | Robustesse au bruit | 95 |
| 5.4.3 | Comparaisons avec la littérature | 97 |
| 5.5 | Discussions | 100 |
| 5.5.1 | Stabilité vis-à-vis du champ de normales en entrée | 100 |
| 5.5.2 | Limites de la méthodes | 103 |
| 5.6 | Conclusion | 104 |
| 6 | PROBLÈME D'OPTIMISATION DE FORMES AVEC CONDITION AU BORD DE ROBIN | 107 |
| 6.1 | Problème d'isolation optimale | 107 |
| 6.1.1 | Modélisation du problème d'isolation | 107 |
| 6.1.2 | Fonctionnelle relaxée dans SBV | 109 |
| 6.1.3 | Analyse de la première valeur propre du p -Laplacien Robin | 110 |
| 6.2 | Existence de solutions | 114 |
| 6.3 | Régularité partielle des solutions | 117 |
| 6.3.1 | Existences de bornes strictement positives sur les solutions | 117 |
| 6.3.2 | Fermeture de l'ensemble des sauts | 121 |
| 6.3.3 | Régularité intérieure des solutions | 123 |
| 6.4 | Résultats de Γ -convergence | 124 |
| 6.4.1 | Approximation par la méthode d'Acerbi et Braides | 124 |
| 6.4.2 | Approximation non locale | 126 |
| 6.5 | Résultats numériques en 1D | 133 |
| 6.5.1 | Calcul analytique en dimension 1 | 133 |
| 6.5.2 | Processus d'optimisation | 134 |
| 6.5.3 | Résultats numériques et discussions | 136 |

| | |
|---|-----|
| 6.6 Résultats numériques en 2D | 143 |
| 6.6.1 Calcul analytique en dimension 2 | 143 |
| 6.6.2 Méthode des solutions fondamentales | 144 |
| 6.6.3 Résultats numériques | 144 |
| 6.7 Conclusion | 145 |
| Conclusion | 146 |
| Bibliographie | 149 |

INDEX DES NOTATIONS

Opérateurs.

| | |
|----------------------|--|
| ∇ | Gradient |
| ∇_Γ | Gradient tangentiel |
| Δ | Laplacien |
| Δ_p | p -Laplacien |
| div | Divergence |
| rot | Rotationnel |
| \mathfrak{f}_E | Valeur moyenne de l'intégrande sur E |

Ensembles particuliers.

| | |
|--------------------------------|--|
| $\subset\subset$ | Inclusion compacte |
| $\partial\Omega$ | Bord du domaine Ω |
| $\operatorname{diam}(\Omega)$ | Diamètre du domaine Ω |
| $\operatorname{Per}_\Omega(E)$ | Périmètre d'un espace E dans Ω |
| ν | Normale orientée au bord d'un domaine |
| $\mathcal{B}(r)$ | Boule ouverte de centre O et rayon r |
| $\bar{\mathcal{B}}(r)$ | Boule fermée de centre O et rayon r |
| $\mathcal{B}(r, x)$ | Boule ouverte de centre x et rayon r |
| $\bar{\mathcal{B}}(r, x)$ | Boule fermée de centre x et rayon r |
| $\mathcal{B}_{ \Omega }$ | Boule (quelconque) de mesure égale à la mesure de Ω |
| ω_N | Mesure de la boule unité de \mathbb{R}^N |

Fonctions, espaces de fonctions et notions liées.

| | |
|----------------------------|--|
| $C^1(\Omega)$ | Espace des fonctions dérivables dont la dérivée est continue |
| $C_c^\infty(\Omega)$ | Espace des fonctions infiniment dérivables à support compact |
| $L^p(\Omega)$ | Espace des fonctions dont la puissance p est intégrable |
| $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ | Espace des fonctions dont la puissance p est intégrable localement |

| | |
|-----------------------------|---|
| $L^\infty(\Omega)$ | Espace des fonctions bornées |
| $W^{1,p}(\Omega)$ | Espace de Sobolev |
| $H^1(\Omega)$ | Espace de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ |
| $BV(\Omega)$ | Espace des fonctions à variation bornée |
| $SBV(\Omega)$ | Espace des fonctions spéciales à variation bornée |
| $SBV^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ | Espace des fonctions positives dont le carré est dans $SBV(\Omega)$ |
| | |
| $ Du (\Omega)$ | Variation totale de u |
| Du | Gradient d'une fonction u de BV |
| $D^a u$ | Partie absolument continue du gradient d'une fonction u de BV |
| $D^j u$ | Partie de sauts du gradient d'une fonction u de BV |
| $D^c u$ | Partie Cantorienne du gradient d'une fonction u de BV |
| u^+, u^- | Limites approximatives de u |
| \mathcal{J}_u | Ensemble des sauts de u |

Mesures.

| | |
|-----------------|---|
| $ \cdot $ | Mesure d'un ensemble |
| \mathcal{H}^n | Mesure de hausdorff de dimension n |
| \llcorner | Restriction de la mesure à un sous-ensemble |

Convergence.

| | |
|--|---|
| \longrightarrow | Convergence simple |
| \xrightarrow{E} | Convergence dans E |
| $\xrightarrow[\text{unif.}]{E}$ | Convergence uniforme dans E |
| $\xrightarrow{\Gamma}$ | Γ -convergence |
| \liminf | Limite inférieure |
| \limsup | Limite supérieure |
| $\varepsilon = \varepsilon_1 \searrow \varepsilon_2$ | Décroissance du paramètre de Γ -convergence ε de la valeur initiale ε_1 à la valeur finale ε_2 avec un ratio ε_r |

Calcul Discret.

| | |
|--------------|---|
| $\vec{\Phi}$ | Vecteur de \mathbb{R}^N |
| Φ | k -forme (éventuellement discrète) |
| Φ | Vecteur des coefficients de la k -forme discrète Φ |

| | |
|------------------------|---|
| \wedge | Produit extérieur de formes |
| $\langle ., . \rangle$ | Produit scalaire sur les k -formes |
| \star | Étoile de Hodge |
| \star_k | Étoile de Hodge des k -formes discrètes primales |
| $\bar{\star}_k$ | Étoile de Hodge des k -formes discrètes duals |
| \flat | Opérateur de transformation des vecteurs en 1-formes primales |
| $\bar{\flat}$ | Opérateur de transformation des vecteurs en 1-formes duals |
| \sharp | Opérateur de transformation des 1-formes primales en vecteurs |
| $\bar{\sharp}$ | Opérateur de transformation des 1-formes duals en vecteurs |
| \mathbf{d} | Dérivée extérieure |
| \mathbf{d}_k | Opérateur de différentiation des k -formes primales |
| $\bar{\mathbf{d}}_k$ | Opérateur de différentiation des k -formes duals |
| G | Tenseur métrique sur les vecteurs |
| G_k | Métrique sur les k -formes primales |
| \bar{G}_k | Métrique sur les k -formes duals |
| \mathbf{A} | Matrice de l'opérateur \mathbf{d}_0 |
| \mathbf{A}' | Matrice de l'opérateur $\bar{x}_2 \bar{\mathbf{d}}_0 \star_1$ |
| \mathbf{B} | Matrice de l'opérateur \mathbf{d}_1 |
| \mathbf{B}' | Matrice de l'opérateur $\bar{x}_1 \bar{\mathbf{d}}_1 \star_2$ |
| \mathbf{L}_1 | Matrice du edge Laplacian $\mathbf{A} G_0 \mathbf{A}^T G_1^{-1} + G_1 \mathbf{B}^T G_2^{-1} \mathbf{B}$ |
| \mathbf{M}_{01} | Matrice de l'opérateur $\frac{1}{2} \mathbf{A} $ |

Abréviations.

| | |
|------|----------------------------|
| MAP | Maximum A Posteriori |
| TV | Variation Totale |
| DEC | Calcul Extérieur Discret |
| DC | Calcul Discret |
| PSNR | Peak Signal-to-Noise Ratio |
| SSIM | Structural SIMilarity |

Notations pour les images (chapitres 1 à 4).

| | |
|----------|---|
| Ω | Rectangle de l'image |
| K | Ensemble des discontinuités présentes dans l'image |
| g | Fonction représentative des couleurs de l'image donnée |
| u | Fonction représentative des couleurs de l'image restaurée |
| v | Fonction approchant $1 - \chi_K$ |

Notations pour les surfaces de \mathbb{R}^3 (chapitre 5).

| | |
|----------|---|
| Ω | Surface digitale de \mathbb{R}^3 |
| K | Ensemble des saillances de l'objet |
| g | Champ de vecteurs normaux unitaire à la surface en entrée |
| u | Champ de vecteurs normaux à la surface restauré |
| v | Fonction approchant $1 - \chi_K$ |

Notations pour le problème d'isolation optimale (chapitre 6).

| | |
|---------------------------------|--|
| g | Fonction modélisant la température donnée |
| u | Fonction modélisant la température recherchée |
| D | Rectangle de l'image |
| K | Domaine fixé sur lequel la température est contrainte (égale à g) |
| Ω | Support de u |
| λ_1^D | Première valeur propre du (p -) Laplacien Dirichlet |
| $\lambda_1(\mathcal{B}, \beta)$ | Première valeur propre du (p -) Laplacien Robin |

INTRODUCTION

A l'ère du tout numérique et de la réalité augmentée, des milliers d'images font notre quotidien : on pense bien entendu aux photographies, aux images médicales, aux documents numériques, mais aussi aux images satellites et sismiques, aux cartes de profondeur, aux coupes d'objets 3D, etc. La gestion de ces images, que ce soit pour leur transfert, leur compréhension, ou même leur modification, nécessite toujours plus de méthodes de traitement et d'analyse précises et rapides, allant de la segmentation à la compression en passant par la restauration.

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons plus particulièrement à la restauration d'image avec des méthodes variationnelles. Les recherches dans ce domaine ont connu un essor considérable depuis les années 80, où les premières formulations variationnelles ont vu le jour, et en particulier la très connue fonctionnelle de Mumford-Shah [Mumford et Shah 1989]. Ainsi, les méthodes convexes, notamment celles reposant sur la variation totale (TV), ou encore les approches par coupure de graphes ont rapidement gagné en popularité grâce à leur efficacité et leur rapidité, au détriment des approches non-convexes utilisant la Γ -convergence, qui offrent très peu de garanties et sont difficiles à optimiser. L'objectif de ce travail est de réconcilier non-convexité et efficacité, en proposant une méthode numérique pour la minimisation de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli, approximation qui Γ -converge vers la fonctionnelle de Mumford-Shah, qui soit compétitive avec l'état de l'art.

La thèse est divisée en six chapitres. Les chapitres 1, 2 et 3 sont des chapitres où l'on présente l'état de l'art, des méthodes et des notions, et peuvent être lus indépendamment des autres. Les chapitres 4 et 5 nécessitent la connaissance des concepts présentés aux chapitres 2 et 3. Le chapitre 6 présente quant à lui un tout autre problème variationnel, et peut être lu de manière indépendante.

Chapitre 1 : Analyse d'images

Dans ce premier chapitre, on propose un aperçu de l'état de l'art concernant les méthodes variationnelles pour l'analyse d'image. On s'intéresse ainsi à des problèmes de la forme

$$\min_u \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \beta R(u)$$

où Ω désigne le rectangle de l'image, g représente les niveaux de gris (ou les couleurs) d'une image donnée, potentiellement dégradée, u est l'image restaurée que l'on cherche à reconstruire et R est une fonction de régularisation.

Naturellement, on choisit des fonctions régularisantes R quadratiques, afin que l'équation d'Euler-Lagrange soit linéaire. Une première possibilité est de considérer $R(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$, qui permet ainsi de pénaliser les fortes variations dans l'image, et donc de lisser une image qui serait bruitée par exemple. Malheureusement, ce type de régularisation n'est pas très robuste en présence d'un fort bruit : si la valeur d'un pixel de bruit est trop éloignée de ses proches voisins, le processus de minimisation tendra à conserver le pixel bruité plutôt que de l'éliminer.

Plus récemment, plusieurs auteurs se sont intéressés à la variation totale de la restauration u comme terme de régularisation. Ce choix permet ainsi de convexifier le problème, et donc de s'assurer de l'existence d'un minimum global. Numériquement, de nombreux algorithmes existent par ailleurs pour l'optimisation convexe, qui permettent une convergence très rapide des minimiseurs vers la solution attendue. L'utilisation de la variation totale rend aussi le problème plus robuste au bruit, mais crée des à-plats de couleurs artificiels.

Une des alternatives à l'utilisation de la variation totale est de conserver le terme de régularisation $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ et d'ajouter en plus un terme de pénalisation de la longueur des discontinuités. Ce problème, connu sous le nom de problème de Mumford-Shah, est cependant non convexe, et nécessite de travailler avec des approximations de celui-ci.

Nous montrerons dans la suite de ce chapitre comment ces méthodes ont été naturellement étendues pour le défloutage, la segmentation d'image et l'inpainting, en modifiant le terme d'attache aux données.

La plupart des méthodes présentées dans ce chapitre seront comparées à celles que nous proposerons au chapitre 4.

Chapitre 2 : Fonctionnelle de Mumford-Shah anisotrope et approximation variationnelle

Parmi les nombreuses méthodes variationnelles pour la segmentation et la restauration d'image, l'une des plus étudiées dans la littérature est la fonctionnelle de Mumford-Shah. Elle possède la particularité de régulariser à la fois le gradient de l'approximation u mais aussi de pénaliser la longueur de l'ensemble des discontinuités K au sein de l'image. Le problème de Mumford-Shah consiste à résoudre

$$\min_{K,u} \alpha \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap K)$$

où $\alpha, \lambda > 0$ sont des paramètres, dont le rôle sera discuté dans le chapitre 2, et \mathcal{H}^{N-1} désigne la mesure de Hausdorff de dimension $(N - 1)$. Si le premier terme impose à la reconstruction u d'être proche de la donnée g , le second contraint u à être lisse par morceaux, tandis que le troisième pénalise la longueur des discontinuités.

En l'état, la fonctionnelle de Mumford-Shah est très difficile à minimiser puisqu'elle dépend d'un couple (K, u) d'objets a priori indépendants. On souhaiterait alors s'affranchir de la dépendance en K , l'ensemble des discontinuités, ce qui nécessite de travailler dans un espace dans lequel le gradient d'une fonction prend en compte les discontinuités. Nous utiliserons ainsi les espaces de fonctions à variation bornée, qui vérifient une telle propriété.

La deuxième difficulté rencontrée lors de la minimisation de la fonctionnelle de Mumford-Shah est la manipulation de la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^{N-1} . On présentera alors un autre type de convergence, la Γ -convergence, qui permet d'approcher la mesure d'un domaine en approchant l'indicatrice de celui-ci par une suite de fonctionnelles dépendantes d'un paramètre.

Dans la suite de ce chapitre, on s'intéressera à un problème plus général avec anisotropie écrit pour une norme p , $p > 1$:

$$\min_{K,u} \alpha \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^p dx + \lambda \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap K)$$

Et on démontrera l'existence de minimiseurs au problème de Mumford-Shah relaxé dans l'espace des fonctions (spéciales) à variation bornée par un calcul direct. Un théorème de compacité dû à [Ambrosio et al. 2000] nous permettra de conclure. Concernant la régularité des minimiseurs, nous utiliserons la théorie des presque-quasi-minimiseurs [Bucur et Luckhaus 2014] et le résultat récent de [Bucur et Giacomini 2015, th. 2.3] de compacité de l'ensemble des sauts pour démontrer qu'une solution du problème relaxé correspond bien à une solution classique du problème de Mumford-Shah.

Nous nous intéresserons ensuite à l'optimisation numérique d'une approximation par Γ -convergence de la fonctionnelle de Mumford-Shah, proposée par [Ambrosio et Tortorelli 1990; 1992], et définie par

$$\text{AT}_\varepsilon(u, v) = \alpha \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega} v^2 |\nabla u|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} \varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{(1-v)^2}{4} dx$$

Dans cette fonctionnelle, on voit l'apparition d'une fonction v , qui vaut 1 sur une région lisse et 0 sur les discontinuités. Pour des valeurs de ε grandes, la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli est proche d'une fonctionnelle convexe, et la bande sur laquelle $v \approx 0$ est large et contient l'ensemble des discontinuités. Lorsque ε tend vers 0, cette bande s'affine progressivement, jusqu'à devenir unidimensionnelle ; dès lors, v vaut 1 presque-partout, et 0 seulement sur les discontinuités.

Numériquement, nous proposons à la fin du chapitre une implémentation utilisant des différences finies pour le calcul des gradients. Nous discuterons aussi d'une implémentation utilisant quant à elle des éléments finis, proposée par [Bourdin et Chambolle 2000]. Dans les deux cas, les résultats montreront des contours épais, dûs au non respect du processus de Γ -convergence numériquement, au sens où l'on ne peut pas réellement faire tendre ε vers 0.

Chapitre 3 : Notions de calcul discret

Les difficultés numériques rencontrées au chapitre 2 avec l'utilisation des schémas classiques (différences finies, éléments finis) proviennent de la discréétisation des opérateurs de différentiation, qui dépendent alors du pas h .

Apparu au début du XIX^e siècle pour la compréhension des circuits électriques, le calcul (extérieur) discret est une alternative au calcul vectoriel continu classique, qui permet de faire du calcul différentiel dans le domaine discret. La différence fondamentale entre les approches de discréétisation et le calcul discret est que dans le premier cas, on souhaite calculer une approximation d'une solution continue sur un échantillon de points représentatifs du domaine d'étude continu, de telle sorte que la solution approchée converge vers la solution continue quand on raffine le pas de discréétisation. Tout l'enjeu est alors de choisir un échantillonage le plus représentatif possible du domaine étudié. Dans le second cas, on ne cherche pas à approcher un quelconque domaine continu : on travaille uniquement sur un domaine discret, par exemple un graphe ou, dans notre cas, une surface digitale.

Que ce soit en calcul discret ou avec des approches de discréétisations, les opérateurs sont définis en lien avec l'espace sur lequel on travaille. Ainsi, le calcul discret fournit des opérateurs de différentiation possèdant les mêmes propriétés dans le domaine discret que les opérateurs du calcul vectoriel classique en continu. En particulier, l'ensemble des opérateurs vérifient le théorème de Stokes.

Dans ce chapitre, nous proposons une introduction aux notions de calcul discret, selon l'approche proposée par [Grady et Polimeni 2010], en présentant tout d'abord les concepts de formes différentielles. On explicite notamment les liens entre le calcul vectoriel et la géométrie différentielle, ainsi que la construction des opérations et opérateurs sur les formes différentielles.

Puis nous introduisons les notions de complexes cellulaires discrets, et notamment de surfaces digitales, composées d'un ensemble de cellules de dimensions 0, 1 et 2, autrement appelées sommets, arêtes et faces respectivement. À la fin de ce chapitre, nous nous intéressons aux formes différentielles discrètes de dimension k , définies sur les cellules de dimension k du complexe cellulaire, et construites de manière analogue aux formes différentielles précédemment présentées. Les opérations et opérateurs sont en tous points similaires, et nous proposons une écriture matricielle pour chacun d'entre eux.

Chapitre 4 : Fonctionnelles d'Ambrosio-Tortorelli discrètes et applications en analyse d'image

Dans ce chapitre, nous proposons d'utiliser les outils de calcul discret présentés au chapitre 3 pour écrire plusieurs versions discrètes de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli. Nous travaillons ainsi avec une surface digitale du plan, naturellement associée à une image, sur laquelle nous discutons des choix possibles pour placer les différentes fonctions g , u et v .

Dans tous les cas, le point clé est de choisir u et v des formes différentielles discrètes de dimensions différentes, autrement dit de placer u et v sur des cellules du complexe de dimensions différentes, de telle sorte que v soit en fait situé entre les valeurs de u , exactement là où l'on s'attend à retrouver un contour.

Nous montrons ensuite les résultats de minimisation des deux formulations proposées pour le débruitage d'images en niveaux de gris et en couleurs. Les différentes expérimentations montrent qu'il est possible de retrouver des contours unidimensionnels, situés exactement entre les pixels, puisque c'est là que nous avons choisi de définir la fonction v . Nous nous comparons par ailleurs avec des méthodes de restauration présentées au chapitre 1, à savoir la méthode TV [Getreuer 2012a; Duran *et al.* 2013], une relaxation convexe de la fonctionnelle de Mumford-Shah proposée par [Strelakowski et Cremers 2014], et plusieurs relaxations de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli [Kee et Kim 2014].

Nous proposons de plus deux autres applications, en segmentation sans contrainte et en inpainting. Si dans le premier cas, nous retrouvons des résultats similaires à ceux de [Strelakowski et Cremers 2014] notamment, pour l'inpainting le modèle proposé n'intègre pour l'instant pas de modèle de texture, le rendant très peu compétitif avec les méthodes de la littérature présentées au chapitre 1.

Nous concluons ce chapitre avec une discussion sur les limites du modèle.

Chapitre 5 : Application au lissage du champ de normales et à la détection de saillances d'une surface de \mathbb{R}^3

Dans ce chapitre, on s'intéresse à une autre application de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli discrète pour le lissage du champ de normales d'une surface digitale plongée dans \mathbb{R}^3 et la détection de saillances.

Une surface digitale de l'espace est un sous-espace de \mathbb{Z}^3 , qui approche au plus près le bord d'un volume, et qui résulte en général de la binarisation ou de la segmentation d'images 3D par résonance magnétique (IRM, tomographie, *etc.*). Mais la structure particulière de ce type de surface induit nécessairement des artefacts sur le bord discret de l'objet,

Il est possible d'adapter la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli pour cette nouvelle application, on considérant g le champ de vecteurs normaux en entrée, et u une version lissée de ce champ. Dans ce contexte, v représente les discontinuités dans le champ de normales, ce qui correspond exactement aux saillances de l'objet.

On présente ainsi plusieurs méthodes pour l'estimation du champ de vecteurs normaux, nécessaire à l'initialisation de notre fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli, parmi lesquelles une approche par mesure de covariance [Merigot *et al.* 2011], une transformée de Hough avec aléa [Boulch et Marlet 2012] et une méthode utilisant les invariants intégraux [Pottmann *et al.* 2007; Coeurjolly *et al.* 2014]. Puis on présente des méthodes de la littérature pour la détection de saillances, avec lesquelles nous nous comparons dans la suite, en particulier les approches de [Merigot *et al.* 2011; Pauly *et al.* 2003; Mellado *et al.* 2012] originellement

proposées pour des nuages de points, et une dernière conçue spécialement pour les surfaces digitales [Levallois *et al.* 2015].

À la fin du chapitre, nous proposons plusieurs résultats de lissage et de détection de saillances, ainsi qu'une analyse de l'apport de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli discrète sur les estimateurs de normales utilisés en entrée.

Chapitre 6 : Problème d'optimisation de formes avec condition au bord de Robin

Ce chapitre traite d'un tout autre problème variationnel, autour de l'isolation optimale d'un domaine. On considère un domaine K , chauffé à une température constante g . Et on souhaite isoler ce domaine avec un matériau isolant occupant un certain espace Ω . Pour cela, on regarde la température u , et on minimise à la fois une norme du gradient de la température et la quantité de matériau $|\Omega|$ nécessaire à l'isolation du domaine K . Cela revient à résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 0 & \text{dans } \Omega \setminus K \\ u = g & \text{sur } K \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} + \beta |u|^{p-2} u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et à résoudre le problème de minimisation

$$\min_{\Omega \supseteq K} \min_{\substack{u \in W^{1,p}(\Omega) \\ u=g \text{ sur } K}} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\partial\Omega} |u|^p d\mathcal{H}^{N-1} + \gamma |\{u > 0\}|.$$

On recense de nombreux travaux autour du Laplacien, notamment pour des conditions au bord de Dirichlet [Alt et Caffarelli 1981]. Très récemment, les recherches se sont tournées vers l'étude théorique du laplacien de Robin [Bucur et Luckhaus 2014; Bucur et Giacomini 2015; Bucur *et al.* 2016; Caffarelli et Kriventsov 2016], sans toutefois proposer de résultats numériques.

Dans ce chapitre, nous nous proposons donc d'essayer de comprendre les mécanismes internes de la fonctionnelle et de ses différentes approximations afin d'implémenter une méthode numérique pour la résolution du problème.

Cela nécessite dans un premier temps de se placer dans un cadre théorique plus général, avec l'étude du p -laplacien Δ_p de Robin. Nous démontrons dans un premier temps l'existence de solution au problème d'isolation pour le p -laplacien de Robin, en utilisant un résultat de [Bucur et Giacomini 2015, Prop. 3.3] et les étapes de la preuve proposées par [Caffarelli et Kriventsov 2016] dans le cas linéaire ($p = 2$). Nous prouvons ensuite que la solution est Alfhors régulière.

Dans la suite du chapitre, nous étudions la Γ -convergence de deux approximations. L'une, locale, est basée sur un résultat de [Acerbi *et al.* 1998]. La seconde, à caractère non local,

est nouvelle et inspirée des travaux de [Braides et Dal Maso 1997] pour la fonctionnelle de Mumford-Shah.

Numériquement, on se consacre dans un premier temps à l'étude du problème en dimension 1. Cela nous permet de simplifier la fonctionnelle et de calculer une solution explicite pour un jeu de paramètres choisi. Nous implémentons ensuite les deux approximations proposées avec un schéma aux différences finies classique, et discutons des résultats obtenus et des difficultés rencontrées. L'extension à la dimension deux étant difficile compte tenu des problèmes rencontrés en dimension un, nous proposons des résultats utilisant une méthode d'optimisation de formes de [Bogosel 2015; 2016].

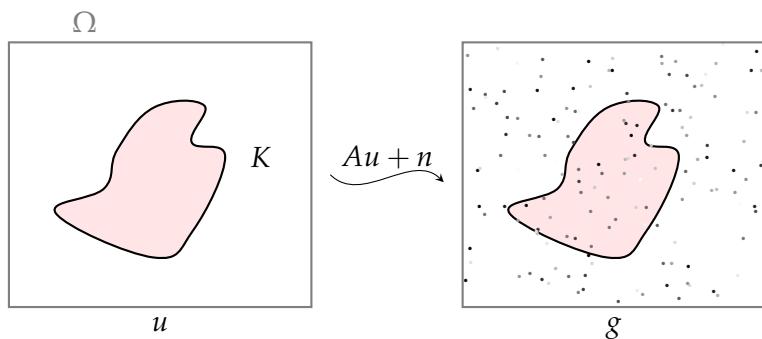
ANALYSE D'IMAGES

À l'heure du tout numérique, les données se multiplient : images, vidéos, images 3D, etc., et il est fréquent que certaines données soient altérées, soit à cause du procédé d'acquisition, soit à cause du moyen de transmission, ou encore par un traitement numérique postérieur. Aussi, les méthodes pour le traitement et l'analyse numérique des images se sont très fortement développées au cours des vingt dernières années.

Dans ce chapitre, nous introduirons les notations utilisées dans toute la suite, puis nous nous attacherons à présenter quelques-unes des méthodes les plus connues de la littérature pour le débruitage et la restauration d'images, le défloutage, la segmentation, ou encore l'inpainting.

1.1 Notations

On se donne une image dégradée définie sur Ω , un domaine ouvert et borné de \mathbb{R}^2 , et on représente ses niveaux de gris (resp. ses couleurs) par une fonction $g \in L^\infty(\Omega)$ (resp. $g \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$) à valeurs dans $[0, 1]$. Connaissant l'image dégradée g , on souhaite reconstruire l'image "parfaite", notée u , telle que $g = Au + n$, où n représente un bruit (typiquement, un bruit gaussien d'espérance 0 et de variance σ), et A est un opérateur linéaire, par exemple un opérateur de flou, ou un opérateur de masquage. On note de plus K le compact de $\bar{\Omega}$ représentant l'ensemble des discontinuités de g .



On notera que ce point de vue continu n'est pas le seul possible pour modéliser les images. En effet, il existe d'autres approches qui consistent à voir les images comme des fonctions discrètes (en morphologie par exemple), ou des fonctions discrètes périodiques (pour les

algorithmes de traitement du signal en fréquentiel). Elles ne seront cependant pas abordées dans ce travail et nous nous concentrerons cette la formulation continue.

1.2 Débruitage et restauration d'image

Les modèles de débruitage et de restauration d'images sont très largement étudiés dans la littérature. Dans cette section, nous nous concentrerons essentiellement sur les modèles énergétiques, et qui n'intègrent pas de modèle de bruit.

1.2.1 Méthode du maximum a posteriori (MAP)

Les méthodes variationnelles connues actuellement trouvent leurs origines dans la formulation bayésienne proposée par [Geman et Geman 1984]. Pour simplifier, on suppose que $A = Id$, et on se place dans le cadre discret, de telle sorte que $g = (g_{i,j})_{i,j}$ et $u = (u_{i,j})_{i,j}$. On souhaite retrouver l'image u à partir de l'observation dégradée g en résolvant le problème inverse

$$g = u + n$$

D'un point de vue Bayésien, cela signifie que l'on cherche à maximiser la connaissance que l'on a de u étant donnée celle que l'on a de la donnée g , autrement dit à maximiser la densité a posteriori $P(u|g)$. D'après le théorème de Bayes, on sait que

$$P(u|g)P(g) = P(g|u)P(u)$$

Or $P(g|u) = P(u + n|u) = P(n) = P(g - u)$. En supposant que la densité a priori $P(u)$ est de la forme $e^{-\rho(u)}$ et que le bruit est gaussien, on en déduit alors que

$$P(u|g) = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma}||g-u||_2^2} \cdot e^{-\rho(u)}}{\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2\sigma}||g-u||_2^2} \cdot e^{-\rho(u)} du} \quad (1.1)$$

Chercher l'image u qui maximise (1.1) revient finalement à résoudre le problème de minimisation

$$\min_u \frac{1}{2\sigma} ||g - u||_2^2 + \rho(u) \quad (1.2)$$

1.2.2 Méthode quadratique

On peut généraliser l'approche du maximum a posteriori au cas continu, pour un bruit quelconque. Le problème (1.2) se réécrit alors

$$\min_{u \in L^2(\Omega)} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \beta R(u) \quad (1.3)$$

où $\beta > 0$ est un paramètre qui permet de contrôler l'influence de chacun des deux termes et R est une fonction de régularisation à déterminer. On notera par ailleurs que le choix de β est dépendant de la variance σ du bruit. La minimisation d'une telle énergie correspond à ce que l'on souhaite intuitivement faire pour réduire le bruit d'une image. En effet, on cherche à régulariser notre image tout en conservant les informations de contour; il reste alors à choisir une "bonne" régularisation R .

Classiquement, on choisit R quadratique, par exemple $\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx$ ou $\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$, de sorte à pénaliser les fortes variations de u . Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent alors respectivement

$$(\beta + 1)u = g$$

et

$$-\beta \Delta u + u = g$$

Dans les deux cas, les équations d'Euler-Lagrange sont linéaires. On remarque que pour le premier choix de régularisation, la reconstruction u est en fait proportionnelle à g ; on régularise ponctuellement, sans tenir compte des pixels voisins. Ainsi, en présence d'une donnée bruitée, la reconstruction conservera une certaine quantité de bruit, comme le montre la figure 1.1. Dans le second cas, la pénalisation du gradient de u fait apparaître un laplacien, et donc une diffusion. Cependant, un tel choix pour R ne préserve pas les discontinuités de l'image.

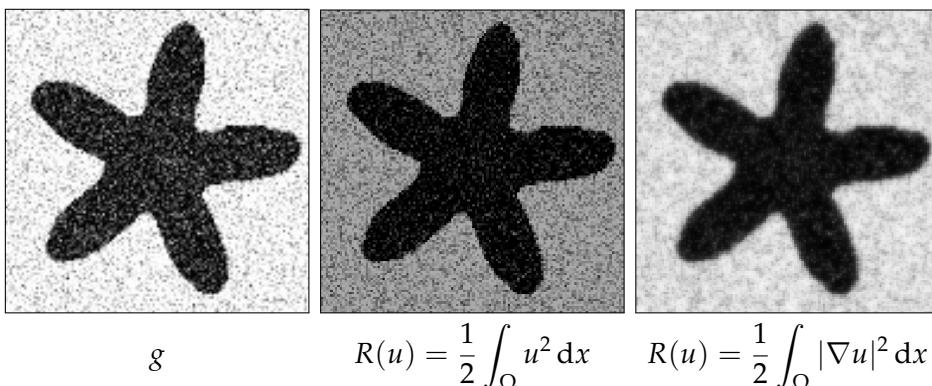


FIGURE 1.1 – Restauration d'image par la méthode quadratique pour différents choix de régularisation R .

1.2.3 Méthode de la Variation Totale (TV)

L'idée d'introduire la variation totale $TV(u) = \int_{\Omega} |Du|$ comme terme de régularisation fut proposée par Rudin, Osher et Fatemi [Rudin *et al.* 1992]. Il s'agit d'une généralisation du terme $\int_{\Omega} |\nabla u| dx$ pour les fonctions à variation bornée.

Ce choix permet non seulement de convexifier la fonctionnelle, et donc d'avoir des garanties d'atteindre numériquement le minimum global, mais en plus de pénaliser le gradient tout en préservant les discontinuités [Strong et Chan 2003]. Ces deux atouts majeurs ont contribué au fort développement des méthodes utilisant la variation totale en restauration d'image [Rudin et Osher 1994; Chambolle et Lions 1997; Blomgren et Chan 1998; Osher *et al.* 2005; Duran *et al.* 2015; 2016] ; la liste n'étant bien entendu pas exhaustive.

Numériquement, il est dès lors possible d'utiliser l'ensemble des outils et algorithmes disponibles en optimisation convexe [Buades *et al.* 2005; Wang *et al.* 2008; Beck et Teboulle 2009], et notamment les algorithmes de type primal-dual [Chan *et al.* 1999; Chambolle 2004; Zhu et Chan 2008; Pock *et al.* 2009; Esser *et al.* 2010; Chambolle et Pock 2011].

Toutefois, outre la perte de contraste dans les reconstructions, un problème très connu de l'utilisation de la variation totale est la création d'à-plats de couleur artificiels, appelé effet de staircasing. La figure 1.2 illustre un exemple de restauration sur une image réelle où l'on voit nettement que la méthode préfère les régions constantes par morceaux que lisses par morceaux.

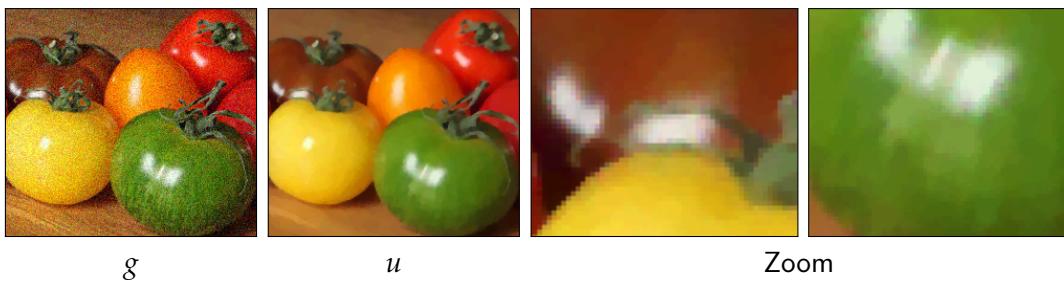


FIGURE 1.2 – Restauration d'image avec la méthode de la variation totale et mise en évidence de l'effet de staircasing. Implémentation de [Duran *et al.* 2013].

De nombreux travaux sont actuellement en cours pour tenter de corriger cet effet, en étudiant notamment des termes de régularisation plus complexes impliquant la variation totale d'ordres plus élevés [Bredies *et al.* 2010; Knoll *et al.* 2011; Bredies 2014].

Une formulation discrète de la variation totale a par ailleurs été récemment proposée par [Condat 2016]. Cette nouvelle définition tient compte de l'information sur les demi-points de la grille et permet une estimation plus juste de la variation totale dans le domaine discret que celles actuellement proposées.

Pour plus de détails concernant les problèmes variationnels impliquant la variation totale, nous renvoyons le lecteur au chapitre d'introduction [Chambolle *et al.* 2010].

1.2.4 Le problème de Mumford-Shah

Si la régularisation par la variation totale permet de conserver les discontinuités, elle échoue à reconstruire certaines régions lisses par morceaux, sans que l'on puisse prévoir lesquelles. Aussi, David Mumford et Jayant Shah ont choisi d'exploiter la régularisation spatiale offerte par le terme $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ tout en ajoutant des termes correctifs afin d'améliorer la reconstruction des discontinuités.

Leur idée consiste dans un premier temps à considérer un terme de régularisation de la forme $\int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx$, autrement dit à ne pas penaliser le gradient au travers de l'ensemble K des discontinuités. Notons que cet ensemble K est a priori inconnu, et devient donc une donnée du problème :

$$\min_{u \in L^2(\Omega), K \subset \bar{\Omega}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \beta \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx \quad (1.4)$$

La figure 1.3 illustre un exemple de restauration avec le problème (1.4). On observe que les contours sont effectivement préservés, ainsi que certains pixels fortement bruités.

L'idée novatrice de Mumford et Shah fut d'ajouter un terme de pénalisation de la longueur des discontinuités, exprimée en fonction de la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^1 . En effet, lorsqu'un pixel de bruit est conservé, il est alors doublement pénalisé, à la fois par le terme de gradient et par le terme de longueur. Le problème de Mumford-Shah [Mumford et Shah 1989] consiste finalement à résoudre

$$\min_{u, K} \alpha \int_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 dx + \beta \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^1(\Omega \cap K) \quad (1.5)$$

où $u \in H^1(\Omega)$, $K \subset \Omega$ est un ensemble fermé et α, β, λ sont des paramètres permettant de contrôler chacun des termes.

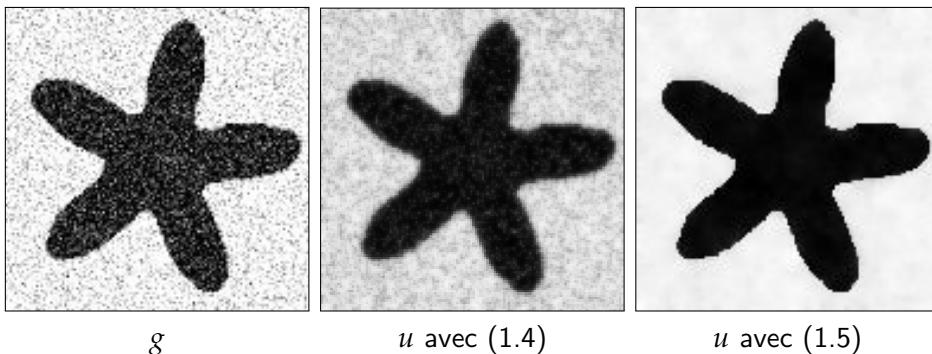


FIGURE 1.3 – Restauration d'image par la fonctionnelle de Mumford-Shah sans terme de longueur (1.4) puis avec (1.5)

Il s'agit en fait d'un problème à la fois de reconstruction et de segmentation d'images. On cherche en effet une fonction u proche de la donnée g (premier terme), lisse sauf au travers des contours (second terme), ainsi que l'ensemble des contours des régions d'intérêt dont la longueur est contrôlée (troisième terme). On notera par ailleurs que la fonctionnelle de Mumford-Shah permet de reconstruire des contours potentiellement ouverts.

La troisième image de la figure 1.3 montre l'apport du terme pénalisant la longueur des contours.

Cependant, la fonctionnelle de Mumford-Shah est très difficile à minimiser à cause du terme de longueur des discontinuités. Ainsi, de nombreux travaux traitent d'approximations de la fonctionnelle de Mumford-Shah, dont voici une liste non exhaustive.

Relaxations convexes de Mumford-Shah. L'un des principaux inconvénients de la fonctionnelle de Mumford-Shah est qu'elle n'est pas convexe. Aussi, plusieurs auteurs ont cherché à convexifier la fonctionnelle, tout d'abord dans sa version simplifiée où on suppose que u est constante par morceaux, ce qui annule le terme $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ dans la fonctionnelle (1.5) [Lellmann et Schnörr 2011; Chambolle *et al.* 2012]. Dans ce cas, ils cherchent un ensemble de fonctions $(u_i)_{i=1,\dots,k}$ telles que chacune séparément approche la fonction caractéristique de l'une des k sous-régions de l'image, sous la contrainte que $\sum_{i=1}^k u_i = 1$. Ils utilisent alors le fait que la longueur du contour de chacune des régions est égale à la variation totale de sa fonction caractéristique, et donc de la fonction u_i lui correspondant.

Les relaxations convexes de la fonctionnelle lisse par morceaux (1.5) [Bouchitté 1998; Alberti *et al.* 2003; Pock *et al.* 2009; Strekalovskiy *et al.* 2012] reposent sur le concept de calibration, en référence à la théorie des calibrations pour les surfaces minimales (voir [Morgan 1990]). On dit qu'un champ de vecteurs calibre une surface orientée S s'il est à divergence nulle, de norme inférieure à 1, et s'il coïncide avec le champ de vecteurs normaux S . Si un tel champ existe, alors S est minimale parmi toutes les surfaces orientées de même bord que S . Ils montrent que la minimisation de la fonctionnelle de Mumford-Shah revient en fait à chercher une calibration des sous-graphes de u .

Plus récemment, [Strelakovsky et Cremers 2014] ont proposé une relaxation différente, moins coûteuse numériquement que la méthode des calibrations. Pour cela, ils choisissent un terme de régularisation dans (1.3) de la forme $R(u) = \min\{|\nabla u|^2, \lambda\}$. Ainsi, ils définissent explicitement l'ensemble des discontinuités $K = \{x \in \Omega : |\nabla u| \geq \sqrt{\lambda}\}$. Numériquement, ils utilisent l'algorithme primal-dual de [Chambolle et Pock 2011], et parviennent à reconstruire l'image et les contours en temps réel.

Approximations par Γ -convergence. Dans les années 1970, De Giorgi [De Giorgi 1975; De Giorgi et Franzoni 1975] a introduit un nouveau type de convergence, appelée Γ -convergence, qui permet d'approcher une fonctionnelle par une suite de fonctionnelles dépendantes d'un

paramètre. La particularité de la Γ -convergence est que lorsque l'on souhaite minimiser une fonctionnelle, il suffit en fait de trouver une suite de minimiseurs de son approximation par Γ -convergence. Cette propriété forte a incité Ambrosio et Tortorelli à proposer une approximation qui Γ -converge vers la fonctionnelle de Mumford-Shah [Ambrosio et Tortorelli 1990; 1992], définie par

$$\text{AT}_\varepsilon(u, v) = \alpha \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega} v^2 |\nabla u|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} \varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{(1-v)^2}{4} dx \quad (1.6)$$

Dans cette fonctionnelle, la fonction v est une fonction continue qui approche $1 - \chi_K$. Ainsi, dans une région lisse, $v = 1$: le second terme est bien identique au terme de gradient de la fonctionnelle de Mumford-Shah (1.5), tandis que les deux derniers termes sont nuls, tout comme le terme de longueur dans (1.5). Au contraire, en présence d'une discontinuité, $v \approx 0$. Dès lors, le second terme, normalement calculé sur $\Omega \setminus K$, s'annule, et la longueur apparaît essentiellement dans les deux derniers termes. Le fait de substituer la fonction v à l'ensemble des contours K permet non seulement d'écrire les intégrales sur le domaine Ω tout entier, mais aussi de s'affranchir du calcul de la mesure de Hausdorff.

La fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli est certes non convexe, mais contrairement aux relaxations convexes de la fonctionnelle de Mumford-Shah, elle conserve la capacité à reconstruire à la fois l'image et l'ensemble des discontinuités. Cette approximation, ainsi que la Γ -convergence, seront au cœur de ce travail et font l'objet d'une présentation plus détaillée au chapitre 2.

Relaxations convexes de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli. Kee et Kim ont récemment proposé dans [Kee et Kim 2014] plusieurs relaxations convexes du terme $\int_{\Omega} v^2 |\nabla u|^2$ de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli (1.6), basée sur une méthode de convexification introduite par [McCormick 1976]. En supposant que u est L -lipschitzienne, ils présentent

- la relaxation de McCormick : $\int_{\Omega} \max\{0, L^2 v^2 + |\nabla u|^2 - L^2\} dx,$
- la relaxation quadratique : $\int_{\Omega} \max\{\eta(L^2 v^2 + |\nabla u|^2 - L^2), L^2 v^2 + |\nabla u|^2 - L^2\} dx,$
- la relaxation linéaire : $\int_{\Omega} \max\{\eta(Lv + |\nabla u| - L), L^2 v^2 + |\nabla u|^2 - L^2\} dx.$

pour $\eta \in]0, 1]$. Ils démontrent que la relaxation linéaire est la meilleure puisqu'elle regularise soit $\int_{\Omega} |\nabla u|^2$ soit la variation totale, limitant ainsi l'effet de staircasing inhérent à l'utilisation de la variation totale tout en préservant les discontinuités.

1.3 Défloutage

Le défloutage est une technique particulière de restauration d'image, qui consiste à reconstruire une image nette à partir d'une donnée $g = Au + n$ floutée par l'opérateur A , et potentiellement bruitée. Ce problème inverse est cependant mal posé, car souvent l'opérateur A , a priori inconnu, est presque singulier (voire même il n'admet pas d'inverse). Les solutions sont alors très sensibles au bruit.

L'ensemble des méthodes variationnelles proposées à la section 1.2 peuvent être adaptées au défloutage, à condition de modifier le terme d'attache aux données par $\int_{\Omega} |Au - g|^2 dx$. Dans certains travaux, l'opérateur A est supposé connu, ou estimé par un prétraitement [Oliveira *et al.* 2009; Krishnan et Fergus 2009; Beck et Teboulle 2009; Getreuer 2012b]. D'autres méthodes, dites de déconvolution aveugle, proposent quant à elles de retrouver à la fois A et u [Kundur et Hatzinakos 1996; Chan et Wong 1998; Levin *et al.* 2009] ; pour une liste exhaustive des méthodes proposée pour la déconvolution aveugle, nous invitons le lecteur à se référer au récent livre [Campisi et Egiazarian 2016].

1.4 Segmentation

La segmentation consiste à partitionner l'image en plusieurs sous-régions significatives. Les applications sont nombreuses, par exemple en imagerie médicale, pour la détection de tumeurs ou de tissus malades, ou pour la détection d'objets (vidéo surveillance, reconnaissance faciale, *etc.*). On trouve essentiellement trois classes de méthodes dans la littérature : la première regroupe des méthodes d'analyse de l'histogramme, la seconde propose des approches contours, tandis que la troisième est composée de méthodes de type croissance de régions.

1.4.1 Méthodes de seuillage et de partitionnement

Seuillage. L'approche la plus simple pour la segmentation d'image est le seuillage. On partitionne ainsi l'image en deux régions, constituées des points dont la valeur est supérieure ou inférieure à un certain seuil s . Le seuil peut être choisi arbitrairement, ou par analyse des pics de l'histogramme.

Le principal inconvénient du seuillage est sa très forte sensibilité au bruit, puisque chaque pixel est classé dans l'une ou l'autre des régions en fonction seulement de sa valeur. La figure 1.4 montre plusieurs exemples.

Partitionnement par les K -means. L'algorithme des K -means permet de partitionner une image en K régions en associant chaque point x à la région dont la valeur moyenne, encore appelée centre, est la plus proche de la valeur $g(x)$ en x . Ainsi, chaque région de

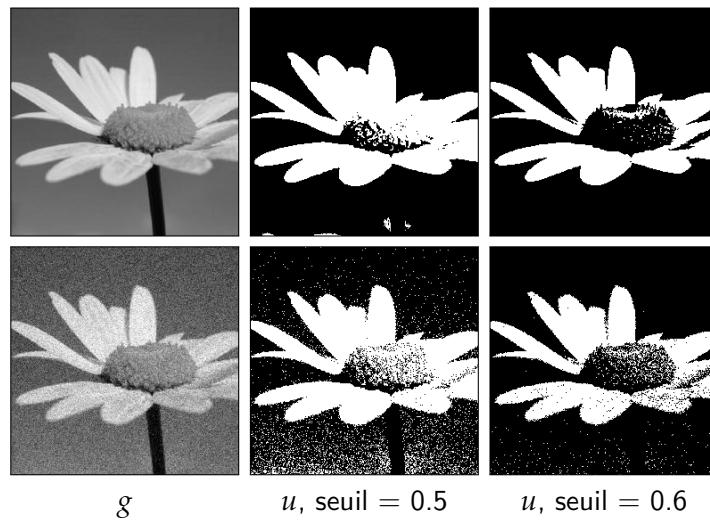


FIGURE 1.4 – Segmentation par seuillage d'une image avec et sans bruit, pour différents seuils.

centre c_i est définie par $R_i = \{x \in \Omega : \text{dist}(g(x), c_i) < \text{dist}(g(x), c_j) \forall j \neq i\}$. Pour cela, on initialise chacun des K centres, soit en leur assignant des valeurs (entre 0 et 1) aléatoirement, soit par analyse des pics de l'histogramme de l'image, puis on ajoute chaque point x de l'image à la région R_i dont il est la plus proche dans l'espace des couleurs. Le centre de la région est finalement recalculé en moyennant l'ensemble des valeurs associées aux points de R_i .

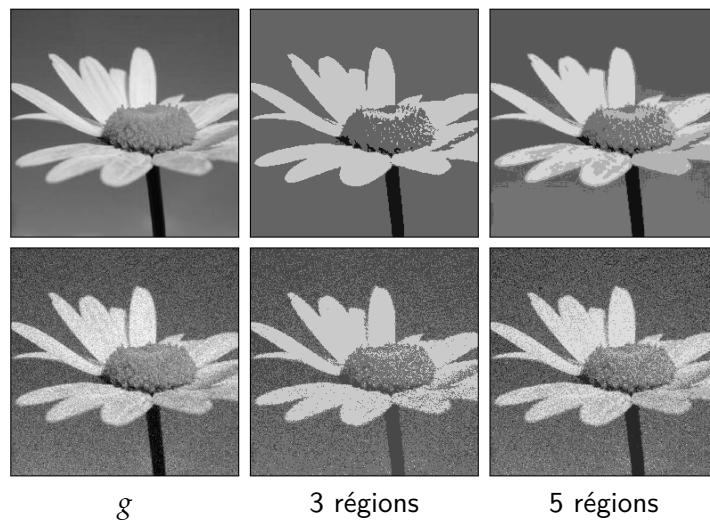
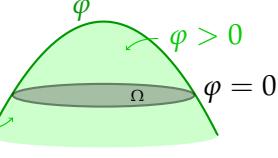


FIGURE 1.5 – Segmentation par K -means d'une image avec et sans bruit.

1.4.2 Détection de contours

Level sets et contours actif. L'idée de [Osher et Sethian 1988] fut d'associer à l'image une fonction de signe φ telle que les contours K soient le niveau zéro de la fonction φ .

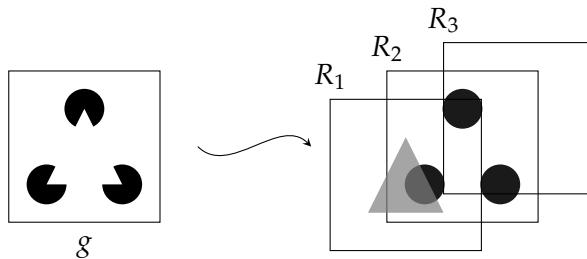
L'ensemble des contours K évolue alors dans le sens de la normale à une vitesse c , ce qui revient à résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c |\nabla \varphi| \quad (1.7)$$


Les travaux utilisant l'approche level set sont nombreux, on recense par exemple une formulation level set pour la fonctionnelle de Mumford-Shah [Chan et Vese 2001b], une méthode à plusieurs régions [Brox et Weickert 2004], une autre sans réinitialisation [Li et al. 2005; 2010], ou encore avec prise en compte de la couleur et de la texture [Cremers et al. 2007].

1.4.3 Approches région

2.1D sketch. Peu après la présentation de la fonctionnelle de Mumford-Shah, Nitzberg et Mumford ont proposé une méthode de segmentation basée sur la fonctionnelle de Mumford-Shah en y intégrant une notion de profondeur [Nitzberg et Mumford 1990]. Ils considèrent que l'image g est le résultat de la projection de plusieurs images superposées et ordonnées, chacune comportant une région R_i et telles que $\Omega = \bigcup_{i=1}^K R_i$. La façon dont se superposent les régions donnent une information de profondeur, et il s'agit alors de reconstruire l'ensemble des régions à partir de leur partie visible dans g . Le schéma explicatif ci-dessous est issu de l'article [Nitzberg et Mumford 1990].



Méthodes par champ de phase. Étant donnée une image g , l'idée est de chercher une approximation u qui soit constante par morceaux. Cela signifie que $\nabla u = 0$ en dehors

des discontinuités de l'image. On peut alors écrire une version constante par morceaux du problème de Mumford-Shah (1.5), encore appelé problème de la partition minimale :

$$\min_{u,K} \alpha \int_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap K) \quad (1.8)$$

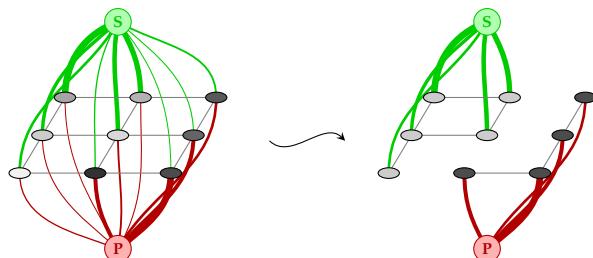
Il existe une approximation par Γ -convergence [Modica et Mortola 1977] qui permet d'approcher les fonctions caractéristiques de chacune des régions.

Plus récemment, Chan et Vese ont proposé un modèle très similaire [Chan et Vese 2001a; Chan *et al.* 2000], pour des images comportant seulement deux régions K_{in} et K_{out} , qui désignent respectivement le domaine délimité par K et son complémentaire dans Ω . Ils laissent la possibilité de l'ajout d'un terme de pénalisation de l'aire de la région K_{in} , bien qu'en pratique ils ne l'utilisent pas. La fonctionnelle à minimiser s'écrit

$$\min_{u_1, u_2, K} \alpha_1 \int_{K_{\text{in}}} |u_{\text{in}} - g|^2 dx + \alpha_2 \int_{K_{\text{out}}} |u_{\text{out}} - g|^2 dx + \lambda.\text{length}(K) + \mu.\text{area}(K_{\text{in}}) \quad (1.9)$$

où $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\lambda, \mu \geq 0$ sont des paramètres fixés et u_{in} et u_{out} sont les valeurs moyennes de u sur K_{in} et K_{out} respectivement. Afin de s'affranchir de la dépendance en K , ils utilisent une fonction signe et réécrivent leur fonctionnelle avec la méthode des contours actifs.

Approches graphes. L'image est discréétisée en un graphe (en général, aligné sur la grille) dont les sommets \mathcal{V} portent les valeurs des pixels et les arêtes \mathcal{E} connectent les sommets entre eux. On ajoute par ailleurs deux sommets extérieurs à l'image, la source S et le puits P , qui représentent les deux régions de la segmentation finale. On connecte ces deux sommets S et P à l'ensemble des sommets \mathcal{E} (voir schéma ci-dessous, tiré de [Boykov et Jolly 2001]), et on associe à toutes les arêtes un poids, introduit dans [Boykov et Jolly 2001]. La méthode consiste à calculer une coupure minimale du graphe de sorte qu'à la fin du processus, la source et le puits soient complètement déconnectés ; les sommets connectés à la source appartiennent alors à la première région, ceux connectés au puits à la seconde.



Les travaux utilisant les coupures de graphe pour la segmentation sont très nombreux, avec des extensions aux dimensions supérieures [Boykov *et al.* 2001], l'ajout de contraintes [Boykov et Funka-Lea 2006] ou encore sur des graphes arbitraires [Grady et Alvino 2009].

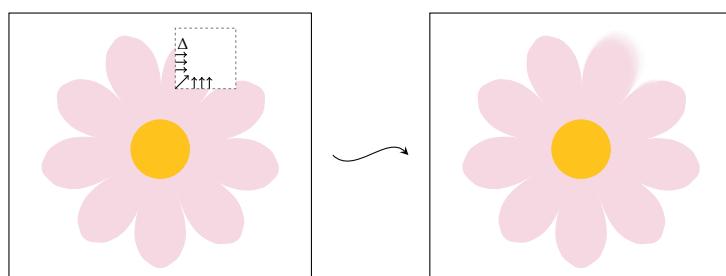
1.5 Inpainting

L'inpainting est une technique de restauration d'image qui consiste à reconstruire une partie manquante de l'image, détériorée à cause soit du processus d'acquisition, soit du retrait manuel d'un objet de l'image. Ainsi, les applications sont très nombreuses, parmi lesquelles : la restauration d'images anciennes et dégradées, la retouche d'images (retrait d'un élément dans l'image), les effets spéciaux, etc.

Dans la littérature, on distingue essentiellement deux familles de méthodes pour l'inpainting : les méthodes variationnelles et les méthodes par association de patchs.

1.5.1 Méthodes variationnelles pour l'inpainting

L'idée principale de cette approche est de supposer que l'information manquante en un pixel est cohérente et peut être totalement retrouvée avec les informations connues dans un voisinage proche autour de ce pixel.



L'article [Nitzberg et Mumford 1990], qui présente une technique de segmentation (voir section 1.4.3, 2.1D sketch), est l'un des premiers où l'inpainting apparaît, sans pour autant être cité. En effet, pour reconstituer le "2.1D sketch", ils ont en fait besoin de reconstruire les parties occultées par les autres régions. Plus tard, [Masnou et Morel 1998] proposent une méthode basée sur les lignes de niveaux, dont la courbure doit être minimale.

Le terme inpainting apparaît la première fois dans [Bertalmio et al. 2000], où les auteurs construisent un modèle dans lequel l'information au bord de la zone dégradée est propagée petit à petit dans le sens de la normale rentrante. Cette philosophie est en fait assez proche de celle des restaurateurs d'oeuvres d'art, qui diffusent l'information disponible au bord de la partie dégradée.

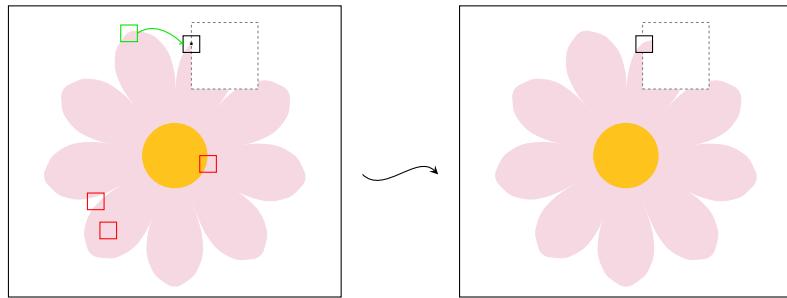
Des approches variationnelles utilisant des outils de restauration d'image sont ensuite apparues, notamment des méthodes de variation totale [Shen et Chan 2002], ou des variantes de la fonctionnelle de Mumford-Shah [Eseedoglu et Shen 2002; Belhachmi et al. 2015]

Le principal défaut des méthodes variationnelles pour l'inpainting est qu'il n'est pas possible de reconstruire la texture de la zone dégradée. Aussi, [Bertalmio et al. 2003] et [Elad et al. 2005] ont proposé des méthodes qui consistent à décomposer l'image en une composante de

structure (dite *cartoon*) et une composante de texture, puis à reconstruire la structure avec une approche variationnelle et la texture grâce à une méthode d'inpainting par patchs.

1.5.2 Inpainting par association de patchs

L'inpainting par association de patchs consiste à étudier les similarités entre les éléments connus du voisinage d'un pixel manquant x et les éléments des voisinages de même taille, appelés patchs, autour de chacun des pixels connus de l'image. Ainsi, le patch correspondant le plus au voisinage connu de x est recopié à la place de celui-ci.



Initialement introduite par [Efros et Leung 1999] pour la synthèse de texture, la méthode d'association de patchs a été récemment adaptée pour l'inpainting [Criminisi et al. 2004] du fait de la qualité des résultats obtenus. Cette approche offre en effet la possibilité de reconstruire à la fois la structure et la texture manquantes, ce qui n'est pas possible avec des méthodes variationnelles seules.

2

FONCTIONNELLE DE MUMFORD-SHAH ANISOTROPE ET APPROXIMATION VARIATIONNELLE

Proposée il y a une trentaine d'années par David Mumford et Jayant Shah, la fonctionnelle de Mumford-Shah est depuis lors l'une des plus étudiées dans le domaine de l'analyse d'images. Bien que non convexe, et très difficile à minimiser en pratique, elle permet pourtant de reconstruire une version lisse par morceaux d'une image dégradée tout en préservant les discontinuités de l'image.

Dans ce chapitre, nous rappelerons dans une première section les notions relatives aux espaces de fonctions à variations bornées et à la Γ -convergence. Puis nous poserons en détails le problème de Mumford-Shah, au cœur de ce travail, et démontrerons l'existence et la régularité partielle des solutions dans le cas général anisotrope avec une p -norme. Dans la troisième section, nous étudierons la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli, qui Γ -converge vers la fonctionnelle de Mumford-Shah, et nous discuterons dans la dernière partie des problèmes liés à la résolution numérique du problème de minimisation avec des schémas classiques.

Contributions.

À la section 2.2.1, nous démontrerons l'existence de solutions au problème de minimisation de la fonctionnelle de Mumford-Shah anisotrope avec une p -norme.

Puis à la section 2.2.2, nous prouverons la régularité Ahlfors des solutions, grâce à un récent résultat de [Bucur et Giacomini 2015].

Enfin, nous présenterons à la section 2.5 une méthode numérique pour la minimisation de l'approximation d'Ambrosio-Tortorelli avec un schéma aux différences finies. Nous mettrons en évidence les limites des schémas classiques en comparant avec une méthode utilisant des éléments finis proposée par [Bourdin et Chambolle 2000].

2.1 Notions préliminaires

Pour l'étude de la fonctionnelle de Mumford-Shah (1.5) nous avons besoin de travailler dans un espace plus général que l'espace de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$, ce pourquoi nous introduisons dans le premier paragraphe l'espace $BV(\Omega)$ des fonctions à variation bornée sur Ω , en nous

basant sur le livre de [Ambrosio et al. 2000]. Puis, nous rappellerons les notions relatives à la Γ -convergence, particulièrement adaptée à l'étude des problèmes variationnels, du fait notamment de résultats concernant la semi-continuité et la convergence des minimiseurs.

Dans toute la suite, on notera \mathcal{H}^n la mesure de Hausdorff de dimension $n \geq 0$. On rappelle que pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^N$,

$$\mathcal{H}^n(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\omega_n}{2^n} \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(E_i))^n : \text{diam}(E_i) \leq \varepsilon, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \right\} \right] \quad (2.1)$$

où ω_n désigne le volume de la boule unité de dimension n et $\text{diam}(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} \|x - y\|$.

En particulier, \mathcal{H}^N coincide avec la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N .

2.1.1 Espaces BV, SBV

L'espace des fonctions à variation bornée joue un rôle fondamental dans le cadre de l'étude des problèmes variationnels à discontinuité libre [De Giorgi et Ambrosio 1989]. En effet, un problème à discontinuité libre consiste à rechercher une fonction présentant éventuellement de fortes discontinuités (les sauts) et qui minimise une fonctionnelle différentielle composée de termes géométriques.

L'idée d'Ambrosio et De Giorgi était alors de substituer une fonction à un domaine inconnu D , par exemple, sa fonction caractéristique χ_D , et de considérer que le bord de D est en fait l'ensemble des points où χ_D fait un saut. Cela nécessite toutefois de travailler dans un espace plus général que l'espace de Sobolev $W^{1,1}$, ce dernier ne contenant pas les fonctions à "sauts".

Définition 2.1 (Fonction à variation bornée).

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On dit que $u \in L^1(\Omega)$ est une fonction à variation bornée sur Ω s'il existe une mesure de Borel μ telle que pour tout champ $\theta \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$

$$-\int_{\Omega} u \operatorname{div} \theta \, dx = \int_{\Omega} \theta \cdot d\mu \quad \forall \theta \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

On définit alors la **variation totale** de u sur Ω par

$$|Du|(\Omega) = \sup_{\substack{\theta \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \\ \|\theta\|_\infty \leq 1}} \int_{\Omega} u \operatorname{div} \theta \, dx$$

Et on note $BV(\Omega)$ l'espace des fonctions à variation totale bornée sur Ω , muni de la norme

$$\|u\| = \|u\|_{L^1} + |Du|(\Omega).$$

Exemple 2.2. Intuitivement, cette définition signifie qu'une fonction $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est à variation bornée si, graphiquement, le chemin parcouru par $u(x)$ sur (Oy) lorsque x parcourt l'intervalle I est fini. Par exemple, la fonction de Heaviside est une fonction à variation bornée, tandis que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, ne l'est pas, bien qu'elle soit bornée.

Théorème 2.3. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Alors $W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$.

Cet espace permet de définir les notions de périmètre généralisé pour un ensemble non régulier et de sauts d'une fonction de BV .

Définition 2.4 (Ensemble de périmètre fini).

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On dit que $E \subset \Omega$ est de **périmètre fini** dans Ω si $\chi_E \in BV(\Omega)$, où χ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E . Et on pose

$$\text{Per}_\Omega(E) := |D\chi_E|(\Omega) = \sup_{\substack{\theta \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \\ \|\theta\|_\infty \leq 1}} \int_E \operatorname{div} \theta \, dx.$$

Proposition 2.5 (Formule de la co-aire).

Soit $v \in L^1(\Omega)$. Alors

$$|Dv|(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Per}_\Omega(\{v > t\}) \, dt.$$

Proposition 2.6 (Inégalité de Sobolev).

Il existe $C_N \in \mathbb{R}$ une constante telle que pour tout $v \in BV(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Dv| \, dx \geq C_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\frac{N}{N-1}} \, dx \right)^{\frac{N-1}{N}}.$$

Définition 2.7 (Ensemble des sauts de u).

Soit $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On définit la densité d'un point x par rapport à un ensemble mesurable E par

$$D(x, E) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|E \cap B(x, \rho)|}{|B(x, \rho)|} = \delta \in [0, 1],$$

quand cette limite existe.

Et on pose les limites approximatives (quand elles existent)

$$u^+(x) := \inf\{t \in \mathbb{R} : D(x, \{u > t\}) = 0\}$$

et

$$u^-(x) := \sup\{t \in \mathbb{R} : D(x, \{u < t\}) = 0\}.$$

Par définition, l'**ensemble des sauts** de u est l'ensemble

$$\mathcal{J}_u := \{x \in \mathbb{R}^N : u^+(x) > u^-(x)\}.$$

Le théorème suivant donne la décomposition du gradient, défini au sens des distributions :

Théorème 2.8 (Structure du gradient d'une fonction de BV).

Soit $u \in \text{BV}(\mathbb{R}^N)$. Le gradient Du de u se décompose en la somme de trois composantes

$$Du = D^a u + D^j u + D^c u$$

telles que

- i) $D^a u$ est absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue) et vérifie pour tout ensemble borélien $B \subseteq \mathbb{R}^N$

$$D^a u(B) = \int_B \nabla u(x) \, dx$$

- ii) $D^j u$ est portée par \mathcal{J}_u et vérifie pour tout ensemble borélien $B \subseteq \mathbb{R}^N$

$$D^j u(B) = \int_{B \cap \mathcal{J}_u} (u^+(x) - u^-(x)) \nu_u(x) \, d\mathcal{H}^{N-1}$$

où pour $x \in \mathcal{J}_u$ \mathcal{H}^{N-1} — p.p., $\forall t \in [u^-(x), u^+(x)]$, $\nu_u(x) = \nu_{\{u>t\}}(x)$ désigne le champ de vecteurs normaux à \mathcal{J}_u

- iii) $D^c u$ est singulière avec la mesure de Lebesgue et s'annule sur les ensembles qui sont des réunions dénombrables de sous-ensembles de mesure \mathcal{H}^{N-1} finie.

On appelle $D^a u$, $D^j u$ la partie de sauts et $D^c u$ la partie cantorienne du gradient.

Le théorème précédent montre que le gradient d'une fonction de BV est correctement défini le long des discontinuités. Ainsi, l'espace BV permet de réécrire les problèmes à discontinuités libre indépendamment de l'ensemble des discontinuités K , en assimilant ce dernier à l'ensemble des sauts \mathcal{J}_u .

La partie cantorienne de la différentielle rend toutefois la manipulation des fonctions de l'espace BV difficile au sens où l'on ne sait pas toujours précisément estimer cette partie-là de la différentielle. Il s'avèrera alors en général nécessaire de considérer des fonctions $u \in \text{BV}(\Omega)$ dont la partie cantorienne du gradient est nulle.

Définition 2.9 (Fonction spéciale à variation bornée).

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On dit que $u \in \text{BV}(\Omega)$ est une **fonction spéciale à variation bornée** sur Ω si $D^c u = 0$. On note $\text{SBV}(\Omega)$ l'espace des fonctions spéciales à variation bornée sur Ω .

Cet espace est très utilisé dans la théorie des problème à discontinuité libre notamment pour le théorème suivant de compacité d'Ambrosio (voir [Ambrosio *et al.* 2000, théorèmes 4.7 et 4.8]).

Théorème 2.10 (Théorème de compacité d'Ambrosio).

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier et $p > 1$. Et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\text{SBV}(\Omega)$ qui vérifie

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx + \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{J}_{u_n}) + \|u_n\|_{\infty} \leq C < \infty$$

Alors il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{SBV}(\Omega)$ et $u \in \text{SBV}(\Omega)$, $\nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$, telles que

- i) $u_{n_k} \rightarrow u$ fortement dans $L^1(\Omega)$,
- ii) $\nabla u_{n_k} \rightharpoonup \nabla u$ faiblement dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$,
- iii) $\mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{J}_u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{J}_{u_{n_k}})$.

Remarque 2.11. Puisque $L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert, le point ii) implique que $\|\nabla u\|_{L^2}$ est semi-continue inférieurement pour la convergence faible, i.e.

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leq \liminf_{k \rightarrow 0} \|\nabla u_{n_k}\|_{L^2}. \quad (2.2)$$

Pour plus de précisions au sujet des espaces de fonctions à variations bornées, nous renvoyons le lecteur au livre [Ambrosio *et al.* 2000].

2.1.2 Γ -convergence

La théorie de la Γ -convergence fut introduite par De Giorgi dans le cadre de l'étude de problèmes variationnels. Elle a beaucoup d'applications en optimisation de formes, pour des problèmes qui nécessitent le calcul du périmètre, ou plus généralement de la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^{N-1} , d'un ensemble inconnu D . Ce genre de problème est souvent relaxé, et le domaine remplacé par une fonction le décrivant. La Γ -convergence permet ainsi de calculer la mesure de D en approchant l'indicatrice χ_D de celui-ci par des fonctions continues.

Nous rappellerons dans cette section la définition ainsi que quelques propriétés de la Γ -convergence. Nous invitons le lecteur à se référer aux livres de [Braides 1998; 2002] pour plus de détails.

Définition 2.12 (Γ -convergence).

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite de fonctions $(f_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ **Γ -converge** vers une fonction f dans X quand $\varepsilon \rightarrow 0$, et on notera $f_{\varepsilon} \xrightarrow{\Gamma} f$, si pour tout $u \in X$,

- i) pour toute suite $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ convergente vers u on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \geq f(u)$$

ii) il existe une suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ convergente vers u telle que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq f(u)$$

La fonction f est appelée Γ -limite de f_ε , et est notée $f = \Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon$.

Proposition 2.13.

Soit (f_ε) une suite qui Γ -converge vers une fonction f dans X . Alors :

- i) f est semi-continue inférieurement, i.e. $\forall u_0 \in X, \forall u_\varepsilon \rightarrow u_0, \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} f(u_\varepsilon) \geq f(u_0)$;
- ii) pour toute fonction continue $g : X \rightarrow [0, +\infty[$, $f_\varepsilon + g \xrightarrow{\Gamma} f + g$ dans X ;
- iii) si (u_ε) est une suite de minimiseurs de (f_ε) telle que $u_\varepsilon \xrightarrow{X} u$, alors u est un minimiseur de f .

Remarque 2.14. Il est très important de noter que la Γ -convergence de deux suites (f_ε) et (g_ε) vers f et g respectivement n'implique pas que $f_\varepsilon + g_\varepsilon$ Γ -converge vers $f + g$.

L'intérêt principal de la Γ -convergence réside dans le point iii) de la proposition 2.13. En effet, numériquement, il nous suffit alors de trouver un minimiseur d'une fonctionnelle qui Γ -converge vers notre problème d'origine, en l'occurrence dans notre cas la fonctionnelle de Mumford-Shah.

Théorème 2.15 (Modica-Mortola).

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N borné à bord Lipschitzien, $p > 1$ et $p' = \frac{p}{p-1}$. Et soit $W : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue s'annulant seulement en 0 et 1.

On considère les fonctionnelles définies sur $L^1(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ par

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} \left[\frac{\varepsilon^{p-1}}{p} |\nabla u|^p + \frac{1}{\varepsilon p'} W(u) \right] dx & \text{si } u \in W^{1,p}(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$F(u) = \begin{cases} c_p \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{J}_u) & \text{si } u \in SBV(\Omega) \text{ et } u \in \{0,1\} \text{ p.p.} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{où } c_p = \int_0^1 (W(s))^{1/p'} ds.$$

Alors $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$ dans $L^1(\Omega)$.

Ce dernier théorème, démontré par [Modica et Mortola 1977], établit qu'il est possible d'approcher le périmètre d'un domaine $D \subset \Omega$, égal à $\mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{J}_u)$, par une suite de fonctions elliptiques. Prenons par exemple $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite minimisante pour la fonctionnelle F_ε définie dans le théorème 2.15 de Modica-Mortola, avec $p = 2$ et $W(u) = u^2(1-u)^2$. Un tel

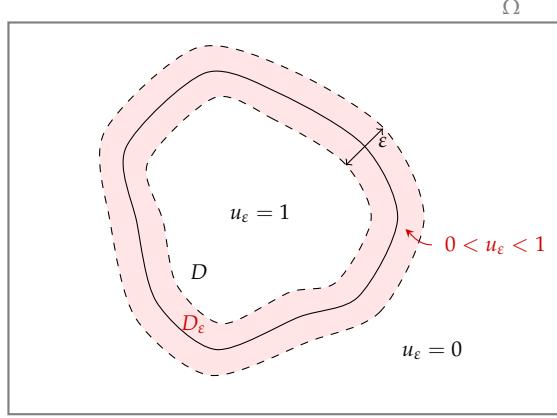


FIGURE 2.1 – Comportement d'une suite minimisante u_ε pour la fonctionnelle F_ε du théorème 2.15 de Modica-Mortola. Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_\varepsilon \rightarrow \chi_D$, et

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \xrightarrow{\Gamma} c_p \mathcal{H}^1(\mathcal{J}_{u_\varepsilon}) = \text{Per}_\Omega(D).$$

choix pour W constraint alors fortement u_ε à prendre les valeurs 0 ou 1 à la limite. Aussi, on approche χ_D par une suite de fonctions continues, telles que $0 < u_\varepsilon < 1$ sur l'ensemble $D_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : d(x, \partial D) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$, en rouge sur la figure 2.1. Sur cet ensemble, on a de plus $\nabla u_\varepsilon \approx \frac{1}{\varepsilon}$. Ainsi,

$$\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \approx \frac{1}{\varepsilon} \text{Area}(D_\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon \text{Per}_\Omega(D) = \text{Per}_\Omega(D).$$

Pour une version avec anisotropie du théorème 2.15, on se réfère à [Braides 1998].

Théorème 2.16 (Modica-Mortola avec anisotropie).

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N borné à bord Lipschitzien, $p > 1$ et $p' = \frac{p}{p-1}$. Et soient $W : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue s'annulant seulement en 0 et 1 et $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[$ une norme.

On considère les fonctionnelles définies sur $L^1(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ par

$$F_\varepsilon^\varphi(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} \left[\frac{\varepsilon^{p-1}}{p} \varphi^p(\nabla u) + \frac{1}{\varepsilon p'} W(u) \right] dx & \text{si } u \in W^{1,p}(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$F^\varphi(u) = \begin{cases} c_p \int_{\mathcal{J}_u} \varphi(v) d\mathcal{H}^{N-1} & \text{si } u \in \text{SBV}(\Omega) \text{ et } u \in \{0, 1\} \text{ p.p.} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où $c_p = \int_0^1 (W(s))^{1/p'} ds$.

Alors $F_\varepsilon^\varphi \xrightarrow{\Gamma} F^\varphi$ dans $L^1(\Omega)$.

2.2 Fonctionnelle de Mumford-Shah anisotrope

La fonctionnelle de Mumford-Shah présentée à la section 1.2.4 est écrite dans sa version originale et isotrope, mais il est possible de la généraliser afin d'introduire une anisotropie sur la mesure de la longueur des contours, et obtenir notamment une meilleure reconstruction des parties angulaires [Foare 2013; Vicente 2015].

Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $\varphi : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow [0, +\infty[$ une norme, et $g \in L^\infty(\Omega)$ une image donnée. On note de plus ν la normale orientée. On cherche un couple (K, u) tel que $u \in H^1(\Omega)$ soit une reconstruction lisse par morceaux de g , et K un ensemble fermé de Ω représente l'ensemble des discontinuités. La fonctionnelle de Mumford-Shah est définie pour tout $p > 1$ et pour tous $\alpha, \lambda > 0$ par

$$\mathcal{MS}(K, u) = \alpha \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^p dx + \lambda \int_K \varphi(\nu) d\mathcal{H}^{N-1} \quad (2.3)$$

Et on s'intéressera au problème de minimisation suivant :

$$\min \left\{ \mathcal{MS}(K, u) : K \subset \bar{\Omega} \text{ fermé}, u \in H^1(\Omega \setminus K) \right\} \quad (2.4)$$

Mais la minimisation de la fonctionnelle de Mumford-Shah (2.3) telle que présentée initialement par Mumford et Shah nécessite la manipulation d'un couple (K, u) d'objets a priori indépendants. Aussi, nous relaxons la fonctionnelle (2.3) dans $SBV(\Omega)$ afin de nous affranchir de la dépendance en K , i.e. pour $u \in SBV(\Omega)$ on définit

$$MS(u) = \alpha \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \lambda \int_{\mathcal{J}_u} \varphi(\nu) d\mathcal{H}^{N-1} \quad (2.5)$$

et le problème de minimisation relaxé associé

$$\min \{ MS(u) : u \in SBV(\Omega) \} \quad (2.6)$$

Nous démontrerons dans un premier temps l'existence de solutions au problème de minimisation de la fonctionnelle de Mumford-Shah anisotrope relaxée (2.5), en utilisant un théorème de compacité d'Ambrosio. Puis nous nous intéresserons à la régularité partielle des solutions, au sens où nous allons montrer que l'optimum $u^* \in SBV(\Omega)$ de la fonctionnelle anisotrope relaxée (2.5) est en fait un couple (K, u) , avec $u \in H^1(\Omega)$ et $K \subset \bar{\Omega}$ fermé, solution du problème initial (2.4). Dans le cas isotrope, la démonstration est due à [De Giorgi et al. 1989; Dal Maso et al. 1992]. Dans le cas anisotrope, seul le cas $p = 2$ a été démontré par [Foare 2013], et utilise la formule de monotonie de [Bucur et Luckhaus 2014]. Pour $p \neq 2$ en revanche, on ne peut pas utiliser la formule de monotonie, et on utilisera le récent résultat de [Bucur et Giacomini 2015].

2.2.1 Existence des solutions

Sans perdre de généralité, on peut supposer que $\alpha = \lambda = 1$. Pour démontrer l'existence de solution au problème relaxé (2.6) on se donne une suite minimisante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{SBV}(\Omega)$ pour la fonctionnelle relaxée (2.5).

Comme g est dans $L^\infty(\Omega)$, on déduit par troncature que l'on peut prendre (u_n) bornée, i.e. $(u_n) \subset L^\infty(\Omega)$ et $\|u_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty$. On suppose que cette suite vérifie de plus

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx + \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{J}_{u_n}) + \|u_n\|_\infty \leq C < \infty \quad (2.7)$$

On peut dès lors appliquer le théorème 2.10 de compacité d'Ambrosio, et extraire une sous-suite $(u_{n_k}) \subset \text{SBV}(\Omega)$ convergente vers $u \in \text{SBV}(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$, avec $\nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$, vérifiant les points *i*) à *iii*) du théorème 2.10.

Par ailleurs, d'après le théorème 2.16 de Modica-Mortola avec anisotropie, on sait que le terme de périmètre $\int_{\mathcal{J}_u} \varphi(v) d\mathcal{H}^{N-1}$ est la Γ -limite d'une suite de fonctions dépendant d'un paramètre ε . La proposition 2.13 *i*) implique donc que la fonction $\int_{\mathcal{J}_u} \varphi(v) d\mathcal{H}^{N-1}$ est semi-continue inférieurement sur Ω pour la convergence L^1 des fonctions SBV.

En injectant alors la sous-suite (u_{n_k}) dans la fonctionnelle relaxée (2.5), on obtient grâce aux assertions *i*) et *ii*) (remarque 2.11) du théorème 2.10 de compacité d'Ambrosio, et à la proposition 2.13 *i*)

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} & \left[\int_{\Omega} |u_{n_k} - g|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}|^p dx + \int_{\mathcal{J}_{u_{n_k}}} \varphi(v) d\mathcal{H}^{N-1} \right] \\ & \geq \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \int_{\mathcal{J}_u} \varphi(v) d\mathcal{H}^{N-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

i.e. :

$$\text{MS} \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \text{MS}(u_{n_k}) \quad (2.9)$$

Cette dernière inégalité prouve l'existence d'un minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah relaxée (2.5). \square

2.2.2 Régularité Alhfors des solutions

Nous avons prouvé l'existence de minimiseurs pour le problème de Mumford-Shah relaxé (2.6). Cependant, rien n'assure l'existence de solutions pour le problème de Mumford-Shah originel (2.4). Il s'agit dès lors de démontrer la régularité primaire des solutions, au sens où nous allons montrer que l'optimum $u^* \in \text{SBV}(\Omega)$ de la fonctionnelle relaxée (2.5) est en fait un couple (K, u) , avec $u \in H^1(\Omega \setminus K)$ et K fermé, solution du problème (2.4).

La preuve se déroulera en trois étapes :

- **Fermeture de \mathcal{J}_u**

Sous-étape 1 : une solution u de (2.6) est un presque-quasi minimiseur pour \mathcal{MS} ;

Sous-étape 2 : \mathcal{J}_u est fermé dans Ω ;

- **Régularité de u**

La démonstration d'Ambrosio [Ambrosio et al. 2000] concerne le cas isotrope, aussi nous allons donner la preuve dans le cas anisotrope.

- **Compacité de \mathcal{J}_u**

La démonstration repose sur le résultat de [Bucur et Giacomini 2015, théorème 2.3] et nécessite tout d'abord de montrer que l'optimum $u \in SBV(\Omega)$ du problème relaxé est un presque-quasi minimiseur dans l'esprit de la définition initialement donnée par [Bucur et Luckhaus 2014, définition 2.1].

Définition 2.17 (Presque-quasi minimiseur).

Soient $\Lambda \geq 1$, $\alpha > 0$, $c_\alpha \geq 0$. On dit qu'une fonction $u \in SBV(\Omega)$, telle que $\nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$, est un presque-quasi minimiseur, si pour tout point $x \in \Omega$, $\forall 0 < \rho < d_{\partial\Omega}(x)$, $\forall v \in SBV(\Omega)$ telle que $\{u \neq v\} \subseteq \mathcal{B}(x, \rho)$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}(x, \rho)} |\nabla u|^p dx + \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{J}_u \cap \bar{\mathcal{B}}(x, \rho)) \\ & \leq \int_{\mathcal{B}(x, \rho)} |\nabla v|^p dx + \Lambda \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{J}_v \cap \bar{\mathcal{B}}(x, \rho)) + c_\alpha \rho^{N-1+\alpha} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sous-étape 1 : Soit $u \in SBV(\Omega)$, telle que $\nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$, un minimiseur de la fonctionnelle de Mumford-Shah (2.3). Alors $\forall v \in SBV(\Omega)$, $\nabla v \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \int_{\mathcal{J}_u} \varphi(v) d\mathcal{H}^{N-1} \\ & \leq \int_{\Omega} |v - g|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx + \int_{\mathcal{J}_v} \varphi(v) d\mathcal{H}^{N-1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

En particulier pour $\{v \neq u \text{ sur } \mathcal{B}(x, \rho)\}$, ce qui implique

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}(x, \rho)} |u - g|^2 dx + \int_{\mathcal{B}(x, \rho)} |\nabla u|^p dx + \int_{\mathcal{B}(x, \rho) \cap \mathcal{J}_u} \varphi(v) d\mathcal{H}^{N-1} \\ & \leq \int_{\mathcal{B}(x, \rho)} |v - g|^2 dx + \int_{\mathcal{B}(x, \rho)} |\nabla v|^p dx + \int_{\mathcal{B}(x, \rho) \cap \mathcal{J}_v} \varphi(v) d\mathcal{H}^{N-1} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Or on peut minimiser le dernier terme comme suit

$$\int_{\mathcal{B}(x,\rho) \cap \mathcal{J}_u} \min(\varphi(v)) d\mathcal{H}^{N-1} \leq \int_{\mathcal{B}(x,\rho) \cap \mathcal{J}_u} \varphi(v) d\mathcal{H}^{N-1} \quad (2.13)$$

Mais comme φ est continue, elle atteint son minimum sur S^{N-1} . De plus, φ étant une norme, cela assure que $\min_{S^{N-1}} \varphi > 0$. En notant $C_1 = \min_{S^{N-1}} \varphi$, on a donc

$$\int_{\mathcal{B}(x,\rho) \cap \mathcal{J}_u} \varphi(v) d\mathcal{H}^{N-1} \geq \int_{\mathcal{B}(x,\rho) \cap \mathcal{J}_u} C_1 d\mathcal{H}^{N-1} = C_1 \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{B}(x,\rho) \cap \mathcal{J}_u) \quad (2.14)$$

En notant $C_2 = \max_{S^{N-1}} \varphi$ et en majorant de même le dernier terme du membre de droite dans (2.12), on obtient finalement

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}(x,\rho)} |u - g|^2 dx + \int_{\mathcal{B}(x,\rho)} |\nabla u|^p dx + C_1 \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{B}(x,\rho) \cap \mathcal{J}_u) \\ & \leq \int_{\mathcal{B}(x,\rho)} |v - g|^2 dx + \int_{\mathcal{B}(x,\rho)} |\nabla v|^p dx + C_2 \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{B}(x,\rho) \cap \mathcal{J}_v) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Maintenant, comme $g \in L^\infty(\Omega)$, g est bornée, i.e. : $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq g \leq M$. En particulier, dans notre contexte g représente une image, et donc $0 \leq g \leq M, M > 0$. En appliquant le principe du maximum à g et u , on peut majorer grossièrement le premier terme

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(x,\rho)} |u - g|^2 dx & \leq \int_{\mathcal{B}(x,\rho)} M^2 dx \\ & \leq M^2 |\mathcal{B}(x,\rho)| \\ & \leq M^2 \omega_{N-1} \rho^N \end{aligned}$$

Et en majorant de même $\int_{\mathcal{B}(x,\rho)} |v - g|^2 dx$, on en déduit que

$$\int_{\mathcal{B}(x,\rho)} |v - g|^2 dx - \int_{\mathcal{B}(x,\rho)} |u - g|^2 dx \leq C_3 \omega_{N-1} \rho^N, \text{ avec } C_3 \geq 0 \quad (2.16)$$

En combinant les inégalités (2.15) et (2.16), on obtient finalement

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}(x,\rho)} |\nabla u|^p dx + C_1 \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{B}(x,\rho) \cap \mathcal{J}_u) \\ & \leq \int_{\mathcal{B}(x,\rho)} |\nabla v|^p dx + C_2 \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{B}(x,\rho) \cap \mathcal{J}_v) + C_3 \omega_{N-1} \rho^N \end{aligned} \quad (2.17)$$

A changement d'échelle près pour avoir $C_1 = 1$, on a montré que $u \in SBV(\Omega)$ est un presque-quasi minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah (2.3).

Etape 2 : On peut maintenant conclure quant à la fermeture de \mathcal{J}_u en utilisant le théorème [Bucur et Giacomini 2015, théorème 2.3] dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 2.18 (Fermeture essentielle de l'ensemble des sauts).

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert à bord C^1 . Soit $u \in SBV(\Omega)$, telle que $\nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$, un presque-quasi minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah (2.3). Etant donnée $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et ρ_0 dépendant seulement de $\tilde{\Omega}$ tels que pour tous $x \in \mathcal{J}_u$, $x \in \tilde{\Omega}$ et $\rho < \rho_0$

$$\varepsilon_0 \rho^{N-1} \leq \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{J}_u \cap \mathcal{B}(x, \rho)) \leq \frac{1}{\varepsilon_0} \rho^{N-1}$$

En particulier,

$$\mathcal{H}^{N-1}((\bar{\mathcal{J}}_u \setminus \mathcal{J}_u) \cap \Omega) = 0$$

i.e. l'ensemble des sauts de u est essentiellement fermé dans Ω' .

Dans le cas particulier de la fonctionnelle de Mumford-Shah, $\Omega' = \Omega$. Ce théorème établit donc que l'ensemble des sauts \mathcal{J}_u est fermé dans Ω , et donc compact.

• Régularité de u

Puisque $u \in SBV(\Omega) \subset BV(\Omega)$, d'après le théorème 2.8 on peut décomposer le gradient de la façon suivante

$$Du = D^a u + D^j u + D^c u \quad (2.18)$$

Sur l'ouvert $\Omega \setminus \mathcal{J}_u$, on a naturellement $D^j u = 0$. Et par définition de $u \in SBV(\Omega)$, la partie Cantorienne de la différentielle de u est nulle. La différentielle de u est donc exclusivement égale à sa partie absolument continue.

De plus, l'hypothèse $g \in L^\infty(\Omega)$ induit naturellement que $g \in L^\infty(\Omega \setminus \mathcal{J}_u)$ et donc que g est bornée sur $\Omega \setminus \mathcal{J}_u$. D'après le principe du maximum, u est donc bornée sur le complémentaire de \mathcal{J}_u , ce qui implique que $u \in L^\infty(\Omega \setminus \mathcal{J}_u) \subset L^2(\Omega \setminus \mathcal{J}_u)$. Et $Du = D^a u \in L^\infty(\Omega \setminus \mathcal{J}_u) \subset L^2(\Omega \setminus \mathcal{J}_u)$. Ainsi, $u \in H^1(\Omega \setminus \mathcal{J}_u)$.

Finalement, l'optimum $u \in SBV(\Omega)$ de la fonctionnelle relaxée (2.5) est en fait un couple (\mathcal{J}_u, u) , tel que $\mathcal{J}_u \subset \tilde{\Omega}$ est compact et $u \in H^1(\Omega \setminus \mathcal{J}_u)$, solution du problème de Mumford-Shah (2.4). Il suffit donc de résoudre le problème relaxé (2.6) et l'ensemble des contours K est égal à l'ensemble des sauts \mathcal{J}_u de la fonction approchée u . \square

Remarque 2.19. Dans le cas où $p = 2$, nous avons démontré [Foare 2013] la compacité de l'ensemble des sauts de u en utilisant la formule de monotonie de [Bucur et Luckhaus 2014], en parallèle des travaux [Vicente 2015]. Il s'agit de prendre une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points réguliers de \mathcal{J}_u telle que $y_n \rightarrow y$, et de montrer grâce à [Bucur et Luckhaus 2014, théorème 2.2] que

$$\lim_{y \rightarrow 0} E(\rho, y) > 0, \quad (2.19)$$

où

$$E(\rho, y) := \min \left\{ \frac{\int_{\mathcal{B}(y, \rho)} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{J}_u \cap \bar{\mathcal{B}}(y, \rho))}{\rho^{N-1}}, \frac{c_N \Lambda^{2-N}}{N-1} \right\} \\ + (N-1) \frac{c_\alpha}{\alpha} \rho^\alpha.$$

On conclut en utilisant le résultat [De Giorgi *et al.* 1989, théorème 3.6] qui établit que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{B}(y, \rho)} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{J}_u \cap \bar{\mathcal{B}}(y, \rho))}{\rho^{N-1}} = 0 \Rightarrow y \in \Omega \setminus \mathcal{J}_u \quad \mathcal{H}^{N-1} - p.p. \quad (2.20)$$

Or (2.20) implique que si $y \in \Omega \setminus \mathcal{J}_u \quad \mathcal{H}^{N-1} - p.p.$ alors $\lim_{\rho \rightarrow 0} E(\rho, y) = 0$, en contradiction avec (2.19).

Ainsi, le problème de Mumford-Shah relaxé (2.6) admet une solution u^* , suffisamment régulière, de sorte que *in fine* (\mathcal{J}_{u^*}, u^*) est une solution du problème originel (2.4).

Toutefois, la difficulté induite par le calcul numérique du terme de longueur $\int_{\mathcal{J}_u} \varphi(v) d\mathcal{H}^{N-1}$ demeure. Parmi les nombreuses approximations de la fonctionnelle de Mumford-Shah, nous nous intéresserons dans ce travail à l'approximation par Γ -convergence d'Ambrosio-Tortorelli.

2.3 Approximation par Γ -convergence de la fonctionnelle de Mumford-Shah anisotrope

Dans le cas où $p = 2$, Ambrosio et Tortorelli ont proposé la première approximation par Γ -convergence de la fonctionnelle de Mumford-Shah relaxée dans [Ambrosio et Tortorelli 1990; 1992], en s'inspirant de l'idée de Modica et Mortola d'approcher le périmètre par une fonction elliptique (cf théorème 2.15). Plus tard, l'approximation a été généralisée par [Focardi 2001] au cas d'une norme $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[$ quelconque. Pour $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$, on définit la suite de fonctionnelles suivantes

$$\text{AT}_\varepsilon(u, v) = \alpha \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega} v^2 |\nabla u|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \varphi^2(\nabla v) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{(1-v)^2}{4} dx \quad (2.21)$$

Théorème 2.20 (Ambrosio-Tortorelli-Focardi).

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N borné à bord Lipschitzien. Et soit $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[$ une norme. On définit la suite de fonctionnelles sur $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \rightarrow [0, +\infty[$

$$G_\varepsilon^\varphi(u, v) = \begin{cases} AT_\varepsilon(u, v) & \text{si } u, v \in W^{1,2}(\Omega) \text{ et } 0 \leq v \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$G^\varphi(u, v) = \begin{cases} MS(u) & \text{si } u, v \in SBV(\Omega) \text{ et } v = 1 \text{ p.p.} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors G_ε^φ Γ -converge vers G^φ dans $L^1(\Omega)$.

En dimension 2, u modélise toujours une version lisse par morceaux de la donnée image g . La nouvelle fonction v approche quant à elle continuement $1 - \chi_K$. Quand ε tend vers 0, la largeur de l'ensemble $\{v < 1\}$ tend vers 0 ; à convergence, $v = 1$ p.p., et $\{v = 0\}$ est un ensemble de mesure de Hausdorff de dimension 1 nulle qui représente exactement l'ensemble des discontinuités K . Aussi, bien que non convexe, cette fonctionnelle présente l'avantage de fournir à la fois une reconstruction lisse par morceaux, via u , et l'ensemble des contours, donné par $\{v = 0\}$, contrairement à la plupart des approximations de Mumford-Shah qui ne permettent d'obtenir que l'un ou l'autre.

L'approximation générale proposée par [Focardi 2001, théorème 3.1] couvre aussi le cas vectoriel dans la mesure où la fonction $f : (x, s, z) \mapsto |z|^2$, définie pour $(x, s, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n}$, est (quasi-) convexe. Supposons que $u = (u_1, \dots, u_c)$ et $g = (g_1, \dots, g_c)$, où $c = 1$ pour une image en niveaux de gris et $c = 3$ pour une image couleur. Le point clé est de coupler chaque composante de u avec une seule et même fonction v . Ainsi, on réécrit la fonctionnelle AT_ε dans le cas vectoriel

$$\begin{aligned} AT_{\varepsilon, N}(u, v) = \alpha \sum_{i=1}^c \int_{\Omega} |u_i - g_i|^2 dx + \sum_{i=1}^c \int_{\Omega} v^2 |\nabla u_i|^2 dx \\ + \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \varphi^2(\nabla v) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{(1-v)^2}{4} dx \quad (2.22) \end{aligned}$$

Remarque 2.21. Les premiers à avoir proposé l'idée d'introduire une variable modélisant les contours sont [Geman et Geman 1984] au milieu des années 80. Ils considèrent dans leur cas les points milieux de la grille, autrement dit les points dans $L_d = \left\{ l_{i+\frac{1}{2}, j}, l_{i, j+\frac{1}{2}} \right\}$, et leur attribuent les valeurs 0 ou 1 avec la règle suivante : lorsqu'un contour est détecté entre deux pixels, le point entre ces deux pixels prend la valeur 1, sinon, il prend la valeur 0.

2.4 Rôle des paramètres

La constante α , en facteur du terme d'attache à la donnée dans la fonctionnelle de Mumford-Shah (2.3), est un paramètre de contraste, au sens où plus α est faible, plus le terme de lissage prédomine en-dehors des contours, réduisant ainsi le contraste. Au contraire, un α plus grand force l'approximation u à être proche de la donnée image g . Ainsi, pour une application en restauration d'image par exemple, le choix de α sera guidé essentiellement par la donnée, et inversement proportionnel au taux de dégradation de celle-ci. Si l'on souhaite plutôt utiliser la fonctionnelle de Mumford-Shah pour de la segmentation ou du cartooning, on préférera choisir α proche de 0, afin de lisser au maximum l'image, et laisser l'algorithme de minimisation segmenter l'image en un nombre fini de régions.

Quant à λ , qui pénalise le terme de mesure du périmètre, il nous donne un contrôle sur la longueur, et donc la quantité de discontinuités que l'on autorise à l'optimum. Un raffinement de λ au cours du processus d'optimisation nous permettra par ailleurs de faire apparaître les contours de façon hiérarchique, et d'éventuellement exploiter l'espace-échelle induit (voir section 4.3.2).

2.5 Premiers résultats numériques

2.5.1 Processus d'optimisation

Dérivées directionnelles. La fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli (2.21) n'étant pas convexe, on choisit une minimisation par descente de gradient alternée. Pour cela, on calcule analytiquement les dérivées directionnelles :

$$\frac{dAT_\varepsilon}{du}(u, v) = 2\alpha(u - g) - 2v^2\Delta u - 4v\nabla v\nabla u \quad (2.23)$$

et

$$\frac{dAT_\varepsilon}{dv}(u, v) = 2v|\nabla u|^2 + 2\lambda\varepsilon\Delta v - \frac{\lambda}{2\varepsilon}(1 - v) \quad (2.24)$$

Discrétisation. On discrétise l'image de taille $N \times M$ sur la grille $[0, 1]^2$. On définit alors

$$h_x = \frac{1}{N}, \quad h_y = \frac{1}{M}$$

$$x_i = i.h_x, \quad i \in \{0, \dots, N\}$$

$$y_j = j.h_y, \quad j \in \{0, \dots, M\}$$

Et on note $u(x_i, y_j) = u_{i,j} \quad \forall (i, j) \in \{0, \dots, N\} \times \{0, \dots, M\}$.

On choisit un schéma aux différences finies centrées pour le calcul du gradient

$$\nabla u_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} \\ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

ainsi que pour le laplacien

$$\Delta u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} \quad (2.26)$$

Pour plus de simplicité, on ne traitera dans ce chapitre que des images carrées de taille $N \times N$, et on notera $h = h_x = h_y$.

Algorithme. L'algorithme d'optimisation est le suivant :

Algorithme 1 : OPTIMIZE-AT($g : N \times N$ matrix, $(\alpha, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_r) : \text{reals}$)

```

1 Var  $u : N \times N$  matrix,  $(v, v') : N \times N$  matrices,  $\varepsilon : \text{real}$  ;
2 begin
3    $u \leftarrow g$ ,  $v \leftarrow \mathbf{1}$ ,  $\varepsilon \leftarrow \varepsilon_1$ ;
4   while  $\varepsilon \geq \varepsilon_2$  do
5     repeat
6        $v' \leftarrow v$ ;
7        $u^{n+1} \leftarrow u^n - \delta_u \frac{\text{dAT}_\varepsilon}{\text{du}}$ ;
8        $v^{n+1} \leftarrow v^n - \delta_v \frac{\text{dAT}_\varepsilon}{\text{dv}}$ ;
9     until  $\|v - v'\|$  is small;
10     $\varepsilon \leftarrow \varepsilon / \varepsilon_r$  ;
11  return  $(u, v)$  ;

```

2.5.2 Choix de l'anisotropie

Norme p

Nous regarderons dans un premier temps φ égale à la norme p , pour $p = 2$, ce qui nous ramène au cas isotrope, puis pour p proche de 1, $1 < p < 2$. Intuitivement, ce second choix est dû au fait que la boule unité de la norme 1 est représentée dans \mathbb{R}^2 par un carré dont les diagonales sont portées par les axes (Ox) et (Oy) . On voit naturellement apparaître deux directions privilégiées orthogonales, qui devraient permettre de limiter l'effet d'arrondissement des angles lors des calculs numériques.

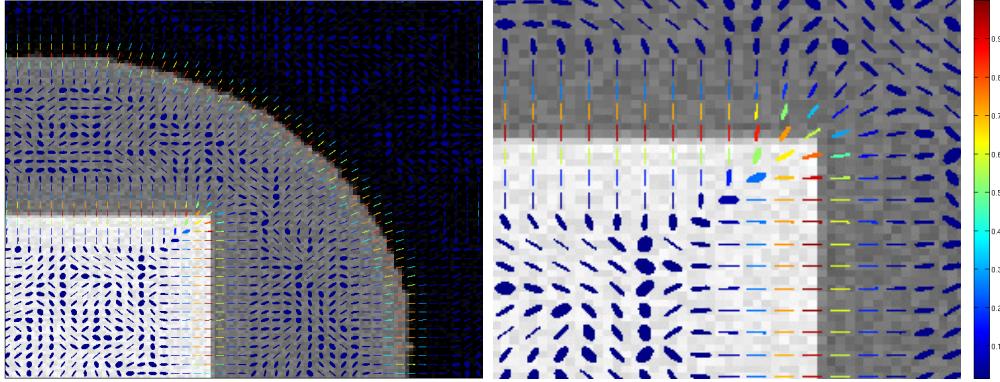


FIGURE 2.2 – Illustration du tenseur de structure (2.27) sur une image synthétique bruitée. En chaque point $(x, y) \in \Omega$, on dessine une ellipse dont les axes sont les vecteurs propres du tenseur, et la couleur est la valeur de la fonction $c : (x, y) \mapsto \frac{\lambda_1(x, y)}{\max_{\Omega} \lambda_1}$.

Métrique Riemannienne

Nous choisissons dans un seconde temps une métrique Riemannienne pour l'anisotropie φ . Dès lors, $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[$ est définie par

$$\varphi(\nu) = \sqrt{\nu^\top T \nu}$$

où T est une matrice symétrique définie positive, qui met en évidence les directions principales autour de chaque point. En analyse d'image, on utilise le tenseur de structure, outil classique introduit par [Kass et Witkin 1987]. Il s'agit d'une application associant à chaque point (x, y) de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ une matrice $T_{x,y} \in \mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R})$, de sorte qu'au voisinage de (x, y) , les vecteurs propres de la matrice $T_{x,y}$ s'alignent avec les directions principales localement autour de x , à savoir celle du gradient et de la tangente. L'importance de chacune des directions est alors déterminée par les valeurs propres associées à chacun des vecteurs propres de $T_{x,y}$.

Soient $\rho > 0$ et G_ρ une gaussienne d'écart-type ρ . On pose $I = G_\rho * g$, et on note I_x et I_y les dérivées partielles de l'image filtrée I par rapport à x et y respectivement. Le tenseur de structure est finalement calculé en convoluant le produit tensoriel $\nabla I \otimes \nabla I$ avec une gaussienne G_τ de paramètre $\tau > 0$

$$T_{x,y} = \begin{pmatrix} G_\tau * (I_x)^2 & G_\tau * (I_x I_y) \\ G_\tau * (I_y I_x) & G_\tau * (I_y)^2 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

La figure 2.2 illustre un exemple de calcul du tenseur des structures. Les ellipses représentent les directions locales, et la couleur correspond à la valeur de la plus grande valeur propre.

2.5.3 Application en restauration d'image

Numériquement, nous nous sommes dans un premier temps intéressés à la restauration et à la segmentation d'image. Étant donnée g une image en niveaux de gris bruitée, on cherche à reconstruire une image débruitée ainsi que l'ensemble des contours des régions d'intérêt de g en minimisant la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli (2.21).

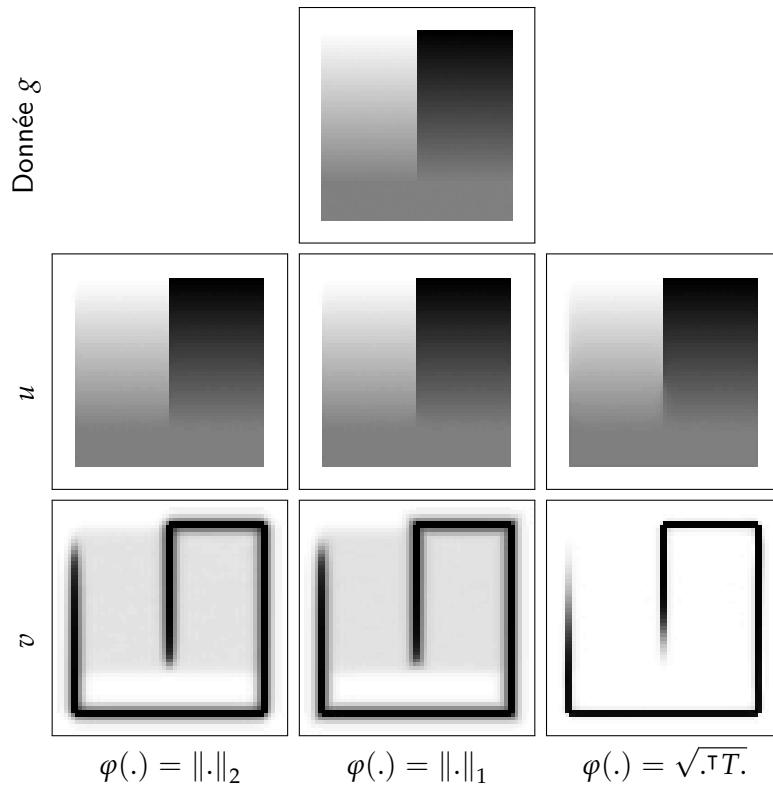


FIGURE 2.3 – Résultats de la minimisation de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli (2.21) avec différents choix de la norme φ pour la restauration et la segmentation d'une image synthétique.

Les figures 2.3 et 2.4 illustrent les résultats de reconstruction et de segmentation d'une image synthétique et d'une image réelle respectivement, selon le processus décrit à la section 2.5.1, pour les différents choix de normes proposés à la section 2.5.2. Ces expérimentations montrent tout d'abord que la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli permet effectivement une reconstruction lisse par morceaux ainsi que l'extraction des discontinuités. Bien que les résultats soient très similaires quel que soit le choix de la norme φ , l'utilisation du tenseur des structures permet tout de même une reconstruction plus nette des contours. On remarquera par ailleurs que cette méthode offre la possibilité de retrouver des contours non nécessairement fermés, ce qui n'est pas le cas par exemple dans les approches de segmentation telles que les contours actifs (voir section 1.4).

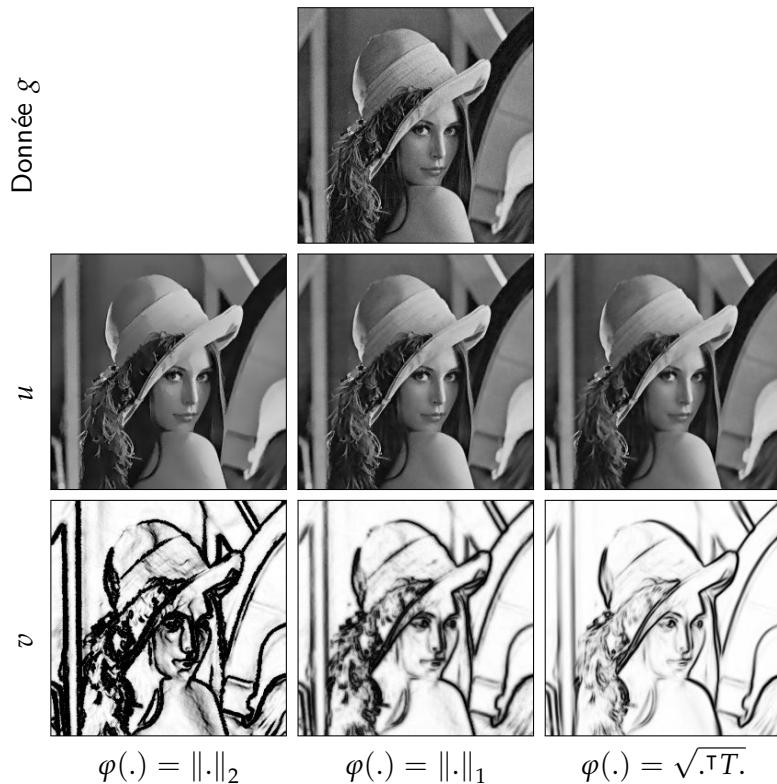


FIGURE 2.4 – Résultats de la minimisation de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli (2.21) avec différents choix de la norme φ pour la restauration et la segmentation d'une image réelle.

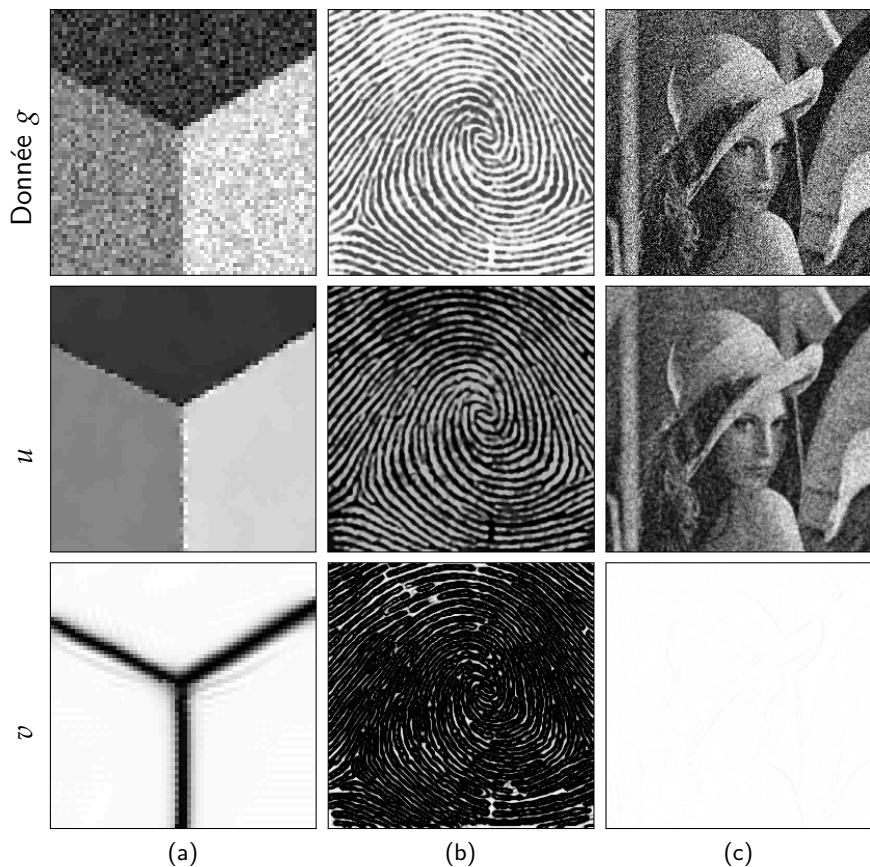


FIGURE 2.5 – Résultats de la minimisation de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli (2.21) pour la restauration et la segmentation d'images, avec $\varphi(v) = \sqrt{v^\top T v}$, T défini par (2.27).

On présente dans la figure 2.5 le résultat de la minimisation de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli (2.21) avec la métrique induite par le tenseur des structures pour différentes images en niveaux de gris. Elle permet de mettre en évidence deux problèmes majeurs rencontrés numériquement.

Le premier est l'épaisseur des contours, d'environ 6 px , que l'on pouvait déjà observer dans les figures (2.3) et (2.4). Ainsi, il serait nécessaire d'appliquer un post-traitement à l'ensemble des contours obtenus afin d'affiner la structure de ceux-ci. Malgré tout, dans les cas où l'image à segmenter présente des structures très fines, comme par exemple l'empreinte digitale de la figure 2.5 (b), l'ensemble des contours est inexploitable.

Le second problème rencontré par la méthode est la faible robustesse au bruit. En effet, le terme couplé $\int_{\Omega} v^2 |\nabla u|^2 dx$ de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli implique que l'image n'est pas lissée au travers des contours, puisque $v \approx 0$. Ainsi, en raison de l'épaisseur des contours précédemment mentionnée, l'image restaurée présente encore du bruit autour des contours, comme on peut l'observer notamment sur la deuxième ligne de la figure 2.5 (a). En présence d'un fort bruit, la méthode échoue complètement à reconstruire les contours, et par conséquent à restaurer l'image (figure 2.5 (c)). Une solution serait de choisir α très petit pour éliminer plus fortement le bruit, au prix cependant de la perte des détails et du réalisme de l'image.

Pourtant, d'après le théorème 2.20, la Γ -convergence de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli nous assure qu'à la limite l'ensemble $\{v = 0\}$ devrait être de mesure de Hausdorff de dimension 1 nulle, et correspondre exactement à l'ensemble des contours. Aussi, nous nous sommes intéressés aux travaux proposant de résoudre le problème d'Ambrosio-Tortorelli avec des éléments finis.

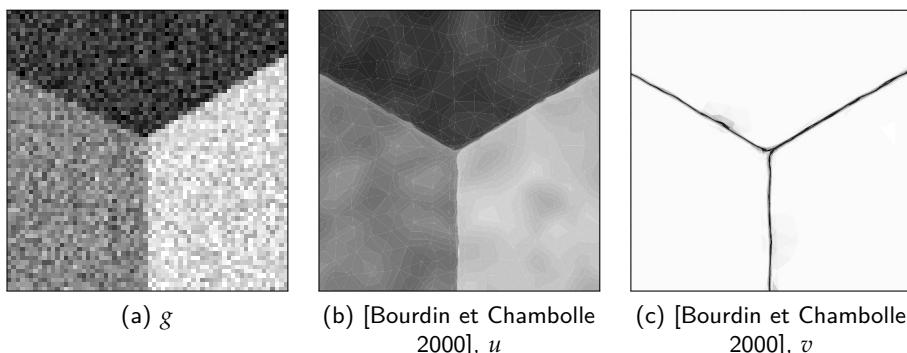


FIGURE 2.6 – Minimisation de AT_ϵ (2.21) avec des éléments finis (extrait de [Bourdin et Chambolle 2000]) sur un point triple de PSNR= 20.3dB.

Dans [Bourdin et Chambolle 2000], les auteurs s'intéressent aussi à la reconstruction d'image via la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli et utilisent des éléments finis sur un maillage triangulaire. Leurs premiers résultats montrant des contours épais, ils optent pour un raffinement progressif du maillage autour des contours. Toutefois, un raffinement classique

introduit des discontinuités artificielles dûes à un mauvais "recollement" des triangles formant le contour (voir [Bourdin et Chambolle 2000, Fig. 4]). Aussi, ils modifient leur algorithme de sorte que la triangulation s'affine et s'aligne avec les discontinuités. La figure 2.6 illustre un exemple de lissage d'un point triple avec le maillage adaptatif qu'ils proposent, extrait de l'article [Bourdin et Chambolle 2000]. Cependant, même si on a visuellement l'illusion d'un contour fin, il fait en réalité cinq ou six triangles d'épaisseur.

Bourdin et Chambolle expliquent ce phénomène, comparable à celui que nous observons avec l'utilisation de différences finies, par le fait qu'on a besoin non seulement que le pas de discrétisation h tende vers 0 pour la convergence du schéma, et que le paramètre de Γ -convergence ε tende vers 0 par définition, mais aussi que $\varepsilon \gg h$ puisque l'épaisseur du contour est d'ordre ε . Dès lors, le processus de Γ -convergence n'est pas réellement respecté. En pratique, on observe que ε ne peut pas être plus petit que 5 à 10 h , expliquant ainsi l'épaisseur des contours à la fin du processus de minimisation, avec ou sans raffinement de maillage.

2.6 Conclusion

Contrairement à la plupart des approximations de Mumford-Shah existantes (voir section 1.2.4), la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli propose non seulement de restaurer l'image, mais aussi de reconstruire l'ensemble des contours, tout comme la fonctionnelle de Mumford-Shah originelle. La théorie de la Γ -convergence assure alors que les minimiseurs de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli (s'ils convergent) convergent vers un minimiseur de Mumford-Shah.

Toutefois, la théorie, quoique très élégante et adaptée au problème qui nous intéresse, pose des difficultés d'implémentation numérique. Les expérimentations présentées à la section 2.5 montrent que les discrétisations classiques types différences finies ou éléments finies ([Bourdin et Chambolle 2000]) permettent en général une bonne restauration de l'image mais échouent dans la reconstruction des contours. Les résultats montrent des contours de plusieurs pixels ou triangles d'épaisseurs, parfois inexploitables, et au travers desquels l'image n'est pas lissée. Les techniques de raffinement de maillage donnent certes l'illusion de contours fins et unidimensionnels ([Bourdin et Chambolle 2000]), mais sont très coûteuses et nécessitent par ailleurs d'aller au-delà de la résolution intrinsèque de l'image.

Ces différents problèmes dans la résolution numérique de (2.4) nous ont conduits à nous tourner vers une approche différente, et inédite dans ce contexte, utilisant le calcul discret. Cela nous permettra de calculer les solutions de manière exacte sur l'image discrétisée, sans toucher à la résolution initiale.

3

NOTIONS DE CALCUL DISCRET

Le calcul discret, tout comme le calcul vectoriel classique, trouve ses origines dans la compréhension de la physique au début du XIX^e siècle. Les premières applications sont dûes à Kirchhoff, qui a étudié les propriétés des circuits électriques dans le contexte de la théorie des graphes. Par la suite, de nombreux mathématiciens tels que Poincaré, Whitney ou encore De Rham, ont contribué au développement de la topologie algébrique et à l'étude de l'espace vu comme un complexe discret, sur lequel il serait possible de définir une alternative discrète à l'ensemble des lois du calcul vectoriel classique.

Dans ce chapitre, nous commençons par introduire les concepts de formes et d'opérateurs différentiels sur les formes. Puis nous nous intéressons à la définition des complexes cellulaires discrets, avant de présenter les notions essentielles du calcul discret.

3.1 Motivations

En calcul vectoriel classique, il est souvent très difficile de calculer les solutions de manière analytique. Aussi, si on souhaite calculer une solution approchée numériquement, il faut discréteriser le problème, autrement dit il faut "découper" le domaine d'étude en plusieurs sous-ensembles pour résoudre le problème localement sur chaque sous-ensemble, puis "recoller" les solutions pour obtenir une approximation de la solution continue. Courant, Friedrich et Lewy introduisirent en 1928 la méthode des différences finies [Courant *et al.* 1928], qui consiste à estimer les valeurs de la fonction recherchée sur les points d'un maillage en tenant compte des valeurs sur les points voisins. Quinze ans plus tard, Courant proposa la méthode des éléments finis [Courant *et al.* 1943]. Cette fois, il s'agit de linéariser l'EDP sur chaque élément du maillage (en général, des triangles), de la résoudre sur chaque noeud, puis d'interpoler la solution pour obtenir une approximation en chaque point du domaine. Dans les deux cas, les méthodes permettent de calculer une solution approchée, qui se trouve finalement être un échantillonnage de la solution continue, et qui converge vers celle-ci quand on raffine le maillage.

Contrairement à la discrétilisation, le calcul discret fournit des opérateurs définis seulement sur des objets discrets, équivalents aux opérateurs continus du calcul vectoriel classique. La différence majeure entre calcul discret et discrétilisation est l'absence de problème continu sous-jacent, au sens où on ne calcule pas un échantillonnage d'une solution continue mais

une solution purement discrète, définie sur le domaine discret, potentiellement différente de la solution continue et non convergente.

Dans la littérature, on distingue deux approches du calcul discret qui présentent quelques différences.

Le Calcul Extérieur Discret (DEC), proposé notamment par [Hirani 2003; Grinspun *et al.* 2006; Desbrun *et al.* 2008; Crane *et al.* 2013], définit des formes différentielles discrètes et les opérateurs de différentiations classiques sur des surfaces triangulées. Ils utilisent par ailleurs l'information géométrique fournie par le plan tangent via les opérateurs \flat et \sharp qui permettent de transformer les formes discrètes en vecteurs et inversement.

L'approche de [Polthier et Preuss 2003; Bobenko et Suris 2009; Romon 2013] est légèrement différente et consiste à définir les opérateurs de différentiation sur des éléments finis P2. Ainsi, ils construisent des opérateurs à partir du continu qui dépendent de la géométrie de leurs éléments, et montrent qu'ils vérifient les propriétés du calcul vectoriel classique, notamment le théorème de Stokes et les relations $\operatorname{div}(\nabla) = \Delta$ et $\operatorname{div}(\operatorname{rot}) = 0$.

Un troisième point de vue est proposé par [Grady et Polimeni 2010]. Le Calcul Discret (DC) qu'ils présentent consiste cette fois-ci à travailler sur un maillage non nécessairement triangulé, vérifiant certaines propriétés (voir section 3.3). Ils considèrent par ailleurs que toute l'information dont ils ont besoin est contenue sur la surface discrète.

Dans le cadre de l'analyse d'image (voir chapitre 4), nous travaillons avec une surface plongée dans le plan. Aussi, il n'est pas nécessaire de prendre en compte la topologie de la surface, et il est naturel de discréteriser l'image sur une grille plutôt que sur un maillage triangulé. Concernant l'application au lissage du champ de normales d'une surface discrète de l'espace (présentée au chapitre 5), il pourrait être nécessaire d'adopter le point de vue de Hirani *et al.*. Toutefois, nos données sont trop fortement bruitées pour que nous puissions nous fier à la géométrie. Pour toutes ces raisons, nous avons choisi de suivre l'approche proposée par [Grady et Polimeni 2010].

3.2 Formes différentielles et opérations sur les formes

On souhaite généraliser en dimension quelconque les théorèmes d'intégration classiques, tels que le théorème fondamental du calcul intégral en dimension 1, ou encore la formule de Green en dimension 2.

3.2.1 Formes différentielles de degré k

Pour cela, nous nous intéressons à des champs de formes k -linéaires, appelées formes différentielles de degré k , associant un scalaire à tout k -vecteur.

Les formes de degré 0, encore appelées **0-formes**, sont l'exemple le plus élémentaire, puisque ce sont simplement les fonctions continues à valeurs dans \mathbb{R} .

Maintenant, soit E un espace vectoriel de dimension N . Considérons une base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ de E . Alors tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de la base, autrement dit $\vec{u} = \sum u_i \vec{e}_i$, où $\{u_i\}_i \subset \mathbb{R}$. De manière analogue, on peut construire les formes multilinéaires

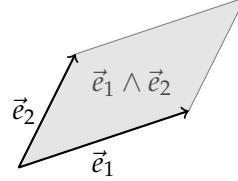
$$\begin{aligned} dx_i : E &\rightarrow \mathbb{R}, \\ dx_i(\vec{e}_j) &= \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall i = 1, \dots, n$, $dx_i(\vec{u}) = u_i$. Ces applications sont des exemples de **1-formes**, et on peut exprimer toute 1-forme en fonction de celles-ci :

$$\Phi_1 = a_1 dx_1 + \dots + a_N dx_N$$

De même que les 1-formes agissent sur les vecteurs, les **2-formes** agissent sur les bi-vecteurs $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j$ construits à partir du produit extérieur entre deux vecteurs. On définit les 2-formes de base

$$dx_i \wedge dx_j(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f = \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j \\ 0 & \text{si } f = \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j. \end{cases}$$



On peut généraliser cette construction de la base des k -formes et définir ainsi des formes différentielles de degré k quelconques.

Définition 3.1 (Forme différentielle de degré k).

Soit E un ouvert de \mathbb{R}^N . Pour $k \leq N$, une **forme différentielle de degré k** , ou plus simplement une **k -forme**, de classe C^r est une expression de la forme

$$\Phi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_N} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \tag{3.1}$$

où $\forall i = 1, \dots, N$, $dx_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, $a_{i_1 \dots i_N} \in C^r(E, \mathbb{R})$ pour $r \in [0, +\infty]$ et \wedge désigne le produit extérieur. On notera par ailleurs \bigwedge^k l'ensemble des k -formes.

Remarque 3.2. Par construction des éléments de la base, la dimension de \bigwedge^k est $\binom{N}{k}$.

3.2.2 Produit extérieur

On peut étendre la notion de produit extérieur de deux k -vecteurs aux k -formes, et construire ainsi une forme de degré plus élevé à partir de deux formes de degrés moindres.

Définition 3.3 (Produit extérieur).

Soient deux formes Φ et Ψ de degrés respectifs k et l telles que

$$\Phi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$\Psi = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq N} b_{j_1 \dots j_l} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}.$$

Le **produit extérieur** de la k -forme Φ et de la l -forme Ψ est une $k+l$ -forme qui s'écrit

$$\Phi \wedge \Psi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} a_{i_1 \dots i_k} b_{j_1 \dots j_l} dx_I \wedge dx_J \quad (3.2)$$

où $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ et $dx_J = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$.

On le retrouve en particulier dans la définition des k -formes, engendrées à partir du produit extérieur des éléments dx_i de la base des 1-formes. Le produit extérieur vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 3.4.

Soient trois formes Φ , Ψ et Λ de degrés respectifs k , l et m . On a :

- i) $\Phi \wedge \Psi = (-1)^{kl} \Psi \wedge \Phi,$
- ii) $(\Phi \wedge \Psi) \wedge \Lambda = \Phi \wedge (\Psi \wedge \Lambda),$
- iii) $\Phi \wedge (\Psi + \Lambda) = \Phi \wedge \Psi + \Phi \wedge \Lambda.$

3.2.3 Produit scalaire

Tout comme pour le calcul vectoriel classique, on peut construire un produit scalaire entre k -formes. On rappelle que dans \mathbb{R}^N muni de la base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{x} = \sum_{i=1}^N x_i \vec{e}_i$ et $\vec{y} = \sum_{i=1}^N y_i \vec{e}_i$ est défini par

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^N x_i y_j \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \sum_{i,j=1}^N x_i y_j g_{i,j}$$

où $g_{i,j} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$. Les produits scalaires des éléments de la base forment ainsi une matrice G de taille $N \times N$, appelé **tenseur métrique**, et qui nous permet de réécrire

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^\top G \vec{y}.$$

On peut définir un produit scalaire sur les 1-formes à partir du produit scalaire sur les vecteurs en remarquant qu'on peut associer à tout vecteur \vec{v} (fixé) une 1-forme α telle que pour tout vecteur \vec{w} ,

$$\alpha(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Ainsi, en utilisant cette relation dans la définition de la 1-forme α , on obtient que les composantes du vecteur \vec{v} sont définies par

$$v_i = \sum_j \alpha_j g^{i,j}$$

où $g^{i,j}$ sont les coefficients de la matrice G^{-1} . Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au livre de [Grady et Polimeni 2010].

Cela implique donc que le produit scalaire de deux 1-formes, et même de deux k -formes $\Phi, \Psi \in \bigwedge^k$, est dépendant de l'inverse G^{-1} du tenseur métrique, et vérifie

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{i,j}^N a_i b_j g_{i,j}.$$

Remarque 3.5. Si on choisit une métrique euclidienne classique, dans ce cas le produit scalaire sur les formes se réduit au produit terme à terme des coefficients des formes.

3.2.4 Étoiles de Hodge

Il existe un opérateur qui permet de faire le lien entre le produit extérieur et le produit scalaire. Cet opérateur, appelé étoile de Hodge, est un opérateur linéaire qui transforme une k -forme en une $(N - k)$ -forme. On notera que cet opérateur est bijectif, puisque $\dim \bigwedge^k = \binom{n}{k} = \binom{n}{N-k} = \dim \bigwedge^{N-k}$.

Par exemple, dans \mathbb{R}^3 , les éléments de la base des 2-formes sont envoyés sur les éléments orthogonaux de la base des 1-formes, avec une orientation :

$$\begin{aligned} \star(dx_1 \wedge dx_2) &= dx_3, \\ \star(dx_2 \wedge dx_3) &= dx_1, \\ \star(dx_1 \wedge dx_3) &= -dx_2. \end{aligned}$$

On le définit de manière général comme suit :

Définition 3.6 (Étoile de Hodge).

L'**étoile de Hodge** est un isomorphisme, tel que pour toute k -forme $\Phi = \sum_I a_I dx_I$,

$$\begin{aligned}\star : \bigwedge^k &\rightarrow \bigwedge^{N-k} \\ \star\Phi &= \sqrt{|G|} \sum_I a_I (\star dx_I)\end{aligned}$$

où G désigne le tenseur métrique sur les vecteurs, et vérifiant les propriétés suivantes pour toutes k -formes Φ et Ψ :

- i) $\star\Phi \wedge \Psi = \star\Psi \wedge \Phi$;
- ii) $\star\star\Phi = (-1)^{k(N-k)}\Phi$;
- iii) pour toute fonction scalaire f , $\star(f\Phi) = f\star\Phi$;
- iv) $\Phi \wedge \star\Phi = 0 \Leftrightarrow \Phi = 0$.

Le produit scalaire de deux k -formes Φ et Ψ vérifie en fait la relation

$$\star\Phi \wedge \Psi = \langle \Phi, \Psi \rangle \text{vol}^N$$

où $\text{vol}^N = \sqrt{|G|} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N$ désigne le volume canonique, normalisé pour qu'il soit de norme unitaire. Cela vient du fait que $\star\Phi \in \bigwedge^{N-k}$, et donc le produit extérieur de $\star\Phi$ et Ψ est une N -forme.

3.2.5 Opérateurs musicaux \sharp et \flat

Dans le cas où $k = 1$, on confond souvent les notions de 1-forme et de vecteur. Or les 1-formes sont des applications linéaires, qui s'écrivent sous la forme $\Phi = a_1 dx_1 + \dots + a_N dx_N$,

et qui prennent comme arguments des vecteurs $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^N .

La confusion vient du fait que le calcul de $\Phi(\vec{y}) = \sum_{i=1,\dots,n} a_i y_i$ revient à multiplier composante par composante les coefficients de Φ et de \vec{y} , autrement dit à calculer le produit

$$(a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Pour transformer une 1-forme en vecteur, ou inversement, on utilise les **opérateurs musicaux** \sharp et \flat . Ces opérateurs sont définis en fonction de la métrique, notée $G = (g_{i,j})$, choisie sur la variété.

Définition 3.7 (Opérateur \sharp).

L'opérateur \sharp amène une 1-forme $\Phi = \sum_i a_i dx_i$ sur un vecteur Φ^\sharp dont chaque composante est donnée par

$$(\Phi^\sharp)_i = \sum_j g_{i,j}^{-1} a_j$$

Définition 3.8 (Opérateur \flat).

L'opérateur \flat amène un vecteur $\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i$ sur une 1-forme \vec{x}^\flat donnée par

$$\vec{x}^\flat = \sum_i \left(\sum_j g_{i,j} x_j \right) dx_i$$

À nouveau, si on travaille avec une métrique euclidienne, les opérateurs \sharp et \flat se résument simplement à mettre les coefficients de la 1-forme sous forme vectorielle, et inversement.

3.2.6 Différentielle extérieure et théorème de Stokes

Il reste à étendre la notion de différentielle des fonctions aux k -formes.

Définition 3.9 (Différentielle extérieure d'une k -forme).

Soit E un ouvert de \mathbb{R}^N . Soient $a_{i_1 \dots i_k} : E \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables et $da_{i_1 \dots i_k}$ leurs différentielles. Et soit $\Phi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ une k -forme de classe C^1 . La **différentielle extérieure** de Φ est la $(k+1)$ -forme définie par

$$\mathbf{d}\Phi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} (da_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad (3.4)$$

L'opérateur \mathbf{d} , appelé **dérivée extérieure**, est défini de manière unique et satisfait les propriétés suivantes :

- i) $\forall \Phi \in \bigwedge^k, \forall \Psi \in \bigwedge^k, \mathbf{d}(\Phi + \Psi) = \mathbf{d}\Phi + \mathbf{d}\Psi$;
- ii) $\forall \Phi \in \bigwedge^k, \forall \Psi \in \bigwedge^l, \mathbf{d}(\Phi \wedge \Psi) = \mathbf{d}\Phi + (-1)^k \Phi \wedge \mathbf{d}\Psi$;
- iii) $\mathbf{d}(\mathbf{d}\Phi) = 0$;
- iv) l'opérateur \mathbf{d} appliqué à une 0-forme correspond à l'opérateur classique de différentiation sur les fonctions.

Le théorème de Stokes généralisé résume le lien fort qu'il existe entre l'opérateur de dérivée extérieure et l'intégration.

Théorème 3.10 (Stokes).

Soit M une variété régulière orientée de dimension $k+1$ dans \mathbb{R}^N et soit Φ une k -forme de classe C^1 dans \mathbb{R}^N . Alors

$$\int_{\partial M} \Phi = \int_M d\Phi. \quad (3.5)$$

Remarque 3.11.

- Si $N = 1$ et $k = 0$, l'énoncé du théorème de Stokes correspond à celui du théorème fondamental de l'analyse.
- Dans le cas $N = 2$ et $k = 1$, on retrouve l'énoncé du théorème de Green.

3.2.7 Discrétisation des opérateurs classiques

L'étoile de Hodge, définie à la section 3.2.4, permet de réécrire les opérateurs du calcul vectoriel classique avec des formes et les opérateurs du calcul discret. La particularité du calcul vectoriel classique est de ne prendre pour argument que des réels (gradient, Laplacien), ou des 1-vecteurs (divergence). Dans toute la suite, on considère donc une 0-forme Φ_0 et une 1-forme Φ_1 .

Opérateur gradient. Le gradient est une opérateur de dérivation qui agit sur les fonctions et rend un (1-)vecteur. Il est donc nécessaire de faire appel à l'opérateur musical pour remonter la 1-forme $d\Phi_0$ sur les vecteurs. On obtient,

$$\nabla\Phi_0 = (d\Phi_0)^\sharp \quad (3.6)$$

Opérateur de divergence. La divergence agit quant à elle sur un champ de vecteurs \vec{X} , et donc sur une 1-forme Φ_1 par l'intermédiaire de l'opérateur \flat , en posant $\vec{X}^\flat = \Phi_1$. De plus, la divergence associe à ce champ de vecteur un scalaire, donc une 0-forme. Ainsi, il est nécessaire d'utiliser l'étoile de Hodge discrète pour revenir sur les 0-formes. On en déduit la définition de la divergence

$$\operatorname{div} \Phi_1 = \star \bar{d} \star \Phi_1 \quad (3.7)$$

Opérateur Laplacien. Le Laplacien est une fonction scalaire, définie comme étant la divergence du gradient. Il suffit donc de composer les définitions discrètes (3.6) et (3.7), avec $\Phi_1 = d\Phi_0$:

$$\Delta\Phi_0 = \star \bar{d} \star d\Phi_0 \quad (3.8)$$

3.3 Complexe cellulaire et surface discrète

La différence majeure entre le calcul discret et le calcul vectoriel classique est que, en calcul discret, on travaille avec un espace discret et fini. On parle alors de **complexe cellulaire de dimension k** , qui est la donnée de **k -cellules**. Par exemple,

- les 0-cellules sont des éléments de dimension 0, autrement dit des points ;
- les 1-cellules ont des éléments de dimension 1, autrement dit des segments ;
- les 2-cellules sont des éléments de dimension 2, autrement dit des polygones.

S'il est possible de définir des complexes plongés dans \mathbb{R}^N de dimension $k \leq N$ quelconque, nous n'aurons besoin dans notre étude que de complexes de dimension 2 plongés dans le plan ou l'espace euclidiens. Aussi, nous nous intéressons plus spécifiquement à ce type de complexe, communément appelé surface discrète.

Définition 3.12 (Surface discrète).

On appelle **surface discrète**, ou **complexe cellulaire de dimension 2**, la donnée

- d'un ensemble de sommets $V = \{v_i\}$,
- d'un ensemble d'arêtes $E = \{e_j\}$ tel que chaque arête connecte deux sommets distincts, i.e. $e = (v_i v_j) = (v_j v_i) \forall e \in E$,
- d'un ensemble de faces $F = \{f_i\}$ tel que chaque face f s'écrive $f = (v_1 \dots v_n)$, où $(v_i v_{i+1}) \in E \forall i = 1, \dots, n$, avec la convention $v_{n+1} = v_1$,

satisfaisant les conditions suivantes :

- i) tout sommet est l'extrémité d'au moins deux arêtes s'il est au bord, d'au moins trois arêtes sinon ;
- ii) toute arête est incidente à une face si elle est au bord, à deux faces sinon ;
- iii) toute face possède au moins trois arêtes (et au moins trois sommets) ;
- iv) pour tout sommet p , on note q_i les sommets pris dans l'ordre des faces contenant p , excepté p lui-même. Si p est au bord, les arêtes $(pq_1), (q_1q_2) \dots (q_{n-1}q_n)(q_np)$ forment une courbe fermée, sinon ce sont les arêtes $(q_i q_{i+1})$ qui forment une courbe fermée ;
- v) l'ensemble des sommets et des arêtes du bord de la surface forme une ou plusieurs courbes discrètes fermées.

Définitions 3.13.

- On dit qu'un sommet p est **incident** à une arête si p est une des extrémités de l'arête, ou à une face si p est l'un des sommets de la face.
- De même on dit qu'une arête e est **incidente** à une face si e est l'une des arêtes qui composent la face.

- Deux sommets p et q sont **adjacents** si $(pq) \in E$.
- Une courbe est une suite de sommets adjacents $p_1 p_2 \dots p_n$. On dit que la courbe est **fermée** si $p_n = p_1$.

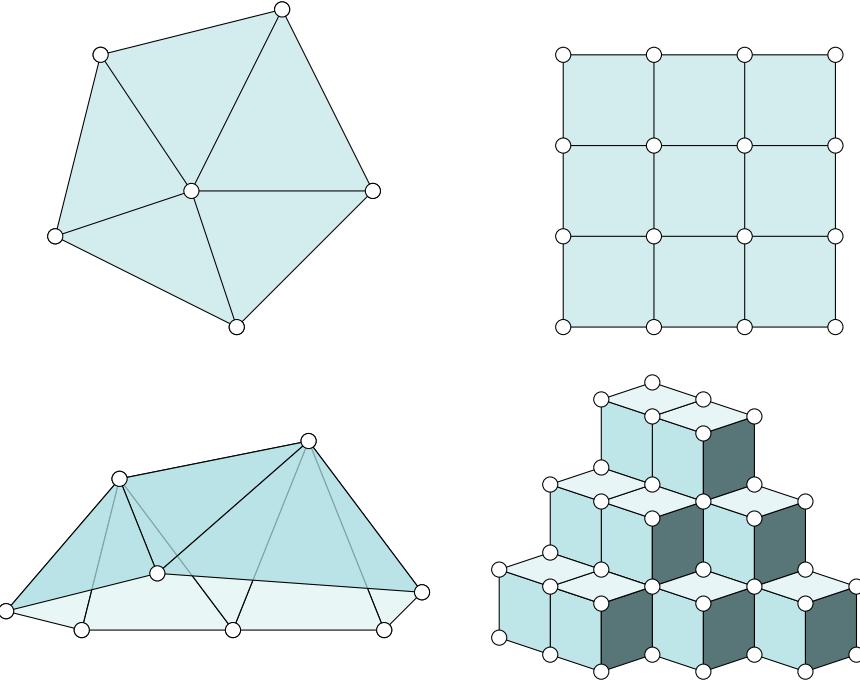


FIGURE 3.1 – Exemples de surfaces discrètes en 2D et 3D. Les surfaces triangulées (colonne de gauche) et les surfaces quadrangulées, encore appelées surfaces digitales (colonne de droite), comptent parmi les surfaces les plus utilisées en pratique.

Si la définition 3.12 ne distingue pas les arêtes $(s_1 s_2)$ et $(s_2 s_1)$, ni les faces $(s_1 s_2 \dots s_n)$ et $(s_n s_{n-1} \dots s_1)$, il est toutefois possible de définir une orientation sur les arêtes et sur les faces en choisissant un "sens de parcours". Ainsi, on différenciera les arêtes orientées $(s_1 s_2)$ et $(s_2 s_1) = -(s_1 s_2)$, ainsi que les faces orientées $(s_1 s_2 \dots s_n)$ et $(s_n s_{n-1} \dots s_1) = -(s_1 s_2 \dots s_n)$.

Définition 3.14 (Surface discrète orientée).

Une surface S est dite **orientée** si toutes les faces de S sont orientées, et si pour toute arête e appartenant à deux faces, les orientations induites par les deux faces sont opposées.

Pour des raisons calculatoires, il peut être nécessaire de tenir compte de l'information dans la direction orthogonale aux arêtes du complexe, par exemple. Aussi, on construit une surface duale, au sens géométrique du terme, à partir de la surface initiale, encore appelée surface primaire.

Définition 3.15 (Surface duale).

Soit S une surface discrète. On construit la **surface duale** \bar{S} de S de la façon suivante :

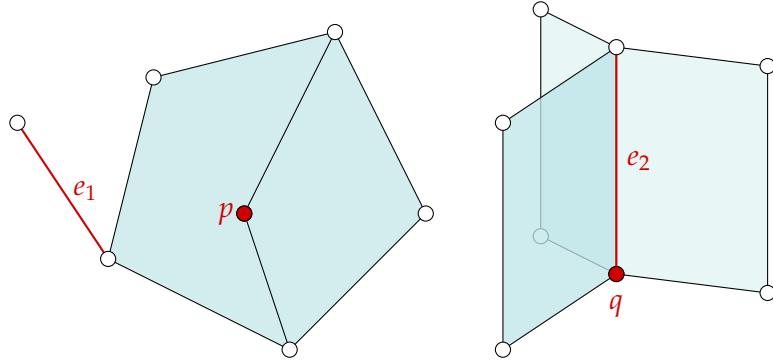


FIGURE 3.2 – Contre-exemples de surfaces qui ne sont pas des surfaces discrètes au sens de la définition 3.12. Le point p contredit l’axiome $i)$, les arêtes e_1 et e_2 contredisent l’assertion $ii)$, et le point q contredit $iv)$.

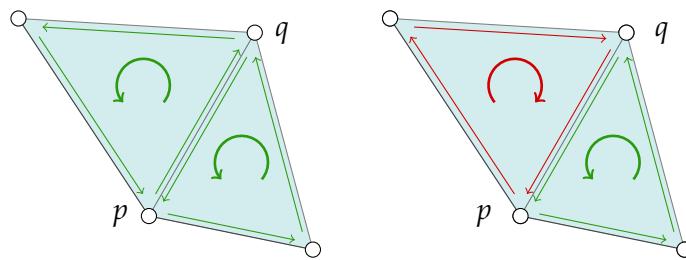


FIGURE 3.3 – Exemple (à gauche) et contre-exemple (à droite) de surfaces orientées. À gauche, les orientations de l’arête (pq) induites par les deux faces qui lui sont adjacentes sont opposées, ce qui n’est pas le cas à droite.

- les sommets de \bar{S} sont les barycentres des faces de S ,
- les arêtes de \bar{S} sont orthogonales aux arêtes de S ,
- les faces de \bar{S} sont délimitées par les sommets et les arêtes de \bar{S} .

L'orientation de la surface duale dépend de celle de la surface primaire.

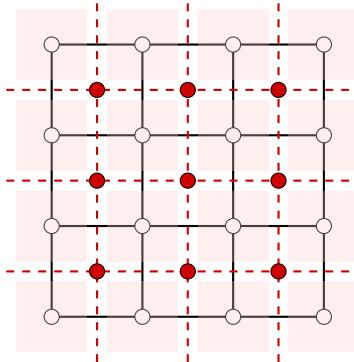


FIGURE 3.4 – Exemple d'une surface discrète (en noir) et de sa surface duale (en rouge). Pour des raisons de lisibilité, les faces du complexe primal ne sont pas affichées.

3.4 Calcul discret

On se place maintenant sur un complexe cellulaire. Si on assimile les k -cellules à des k -vecteurs, on peut ainsi définir les éléments du calcul discret de manière analogue à ceux du calcul extérieur, présentés à la section 3.2. On travaille alors avec des k -formes discrètes et des opérateurs discrets qui vérifient les mêmes propriétés que dans le domaine continu. Pour cette raison, nous présentons dans cette section la version discrète des k -formes et des opérateurs, sans toutefois revenir sur les propriétés de ceux-ci.

3.4.1 Formes différentielles discrètes

En continu, une k -forme, telle que définie à la section 3.2, associe un scalaire à tout k -vecteur du domaine. Dans le cas discret, on travaille sur un complexe cellulaire de dimension k . En faisant l'analogie entre une k -cellule et un k -vecteur, une **k -forme différentielle discrète** associe en fait un scalaire à toute k -cellule. En particulier, il est important de noter qu'une k -forme discrète est constante sur chaque k -cellule.

Dans toute la suite, on notera les k -formes discrètes vectoriellement, autrement dit la k -forme discrète Φ désignera le vecteur des valeurs de Φ sur chacune des k -cellules du complexe. On prendra garde à ne pas confondre le vecteur Φ , qui représente une k -forme, avec le vecteur $\vec{\Phi}$ qui désignerait dans ce cas un vecteur de \mathbb{R}^N .

On notera par ailleurs : les k -formes et les opérateurs attachés au complexe dual.

3.4.2 Étoiles de Hodge discrètes

On peut définir des k -formes discrètes tant sur le complexe primal que sur le complexe dual. On observe que pour toute k -forme primale, la forme discrète définie sur le dual qui lui est associée est de degré $(N - k)$, et lui est orthogonale. On peut dès lors utiliser une version discrète de l'étoile de Hodge pour faire le lien entre une k -forme primale et une $(N - k)$ -forme duale. On note ainsi \star_k l'opérateur qui transforme une k -forme primale en une $(N - k)$ -forme duale, et $\bar{\star}_k$ l'opérateur qui amène une k -forme duale sur une $(N - k)$ -forme primale.

Ainsi, pour toute k -forme primale Φ , on définit la $(N - k)$ -forme duale $\star_k \Phi$ par

$$\star_k \Phi = G_k^{-1} \Phi$$

où G_k désigne le tenseur métrique sur les k -cellules. On remarquera que le tenseur métrique discret est en fait un vecteur de taille le nombre de k -cellules, composé des poids que l'on assigne à chacune des k -cellules. De même, on notant \bar{G}_k le tenseur métrique sur les k -formes duales, pour toute k -forme duale Ψ , on définit la $(N - k)$ -forme primale $\bar{\star}_k \Psi$ par

$$\bar{\star}_k \Psi = \bar{G}_k^{-1} \Psi.$$

Remarque 3.16. La symétrie du tenseur métrique et l'équivalence des produits scalaires sur le primal et le dual impliquent en fait que $\bar{G}_k = G_{N-k}$.

3.4.3 Opérations et opérateurs discrets

Le produit extérieur et le produit scalaire de formes, définis aux sections 3.2.2 et 3.2.3, sont très simplement définis pour les formes discrètes en utilisant la notation vectorielle. Soient Φ, Ψ des formes discrètes, et G_k le tenseur métrique sur les formes de degré k , alors

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_k = \Phi^\top G_k^{-1} \Psi$$

Concernant le produit extérieur, il met en relation des formes de degrés k et l potentiellement différents pour créer une $(k + l)$ -forme. Il nécessite donc de transformer la k -forme et la l -forme en deux $(k + l)$ -formes par moyennage. En particulier, si $k = 0$ et $l \neq 0$, cela revient à utiliser une matrice \mathbf{M}_{0l} qui transforme une 0-forme en une l -forme, ce qui permet d'écrire

$$\Phi \wedge \Psi = \Phi^\top \mathbf{M}_{0l} \Psi = \text{diag}(\mathbf{M}_{0l} \Phi) \Psi$$

De même, on réécrit les opérateurs musicaux \sharp et \flat sous forme matricielle

$$\begin{aligned}\Phi^\sharp &= G_1^{-1} \Phi \\ \vec{x}^\flat &= G_1 \vec{x}\end{aligned}$$

Il est aussi possible d'écrire sous forme matricielle les opérateurs de différentiation \mathbf{d}_k , comme nous le verrons en détails à la section 3.4.4.

Les opérateurs musicaux et de différentiation ont bien entendu leur pendant dual, notés $\bar{\sharp}$, $\bar{\flat}$ et $\bar{\mathbf{d}}_k$. L'ensemble des opérateurs du calcul discret est résumé sur le schéma présenté à la figure 3.5.

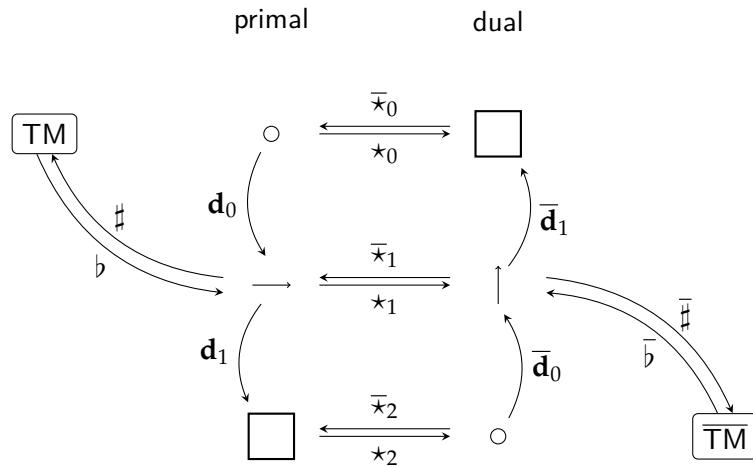
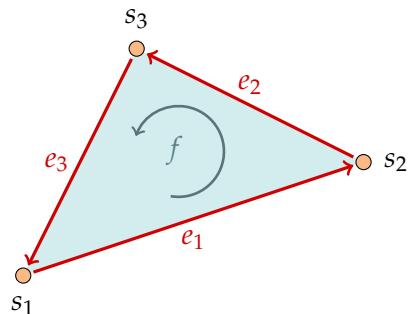


FIGURE 3.5 – Schéma des opérateurs du calcul discret pour une surface discrète quelconque et son dual, où TM désigne le plan tangent, et la symbolique est la suivante :
 ○ : sommet, → : arête, □ : face.

3.4.4 Opérateurs de différentiation en dimension 2

Dans cette section, on se donne une cellule orientée T , et on calcule explicitement les opérateurs de différentiations \mathbf{d}_0 et \mathbf{d}_1 à partir du théorème de Stokes 3.10.



Différentielle d'une 0-forme.

Soit Φ une 0-forme dans \mathbb{R} définie sur le triangle T illustré ci-dessus. D'après le théorème de Stokes 3.10, écrit sur l'arête orientée $e_1 = (s_1 s_2)$, il existe donc une 1-forme notée $\mathbf{d}_0 \Phi$ qui vérifie :

$$\mathbf{d}_0 \Phi(e_1) = \int_{e_1} \mathbf{d}_0 \Phi = \int_{\partial e_1} \Phi = \Phi(s_2) - \Phi(s_1)$$

On remarque que cette définition coïncide exactement avec la définition du gradient par différences finies décentrées sur une grille de pas 1. La différence majeure est cependant que la valeur de la différentielle est associée non plus à un point mais à une arête du complexe cellulaire.

En utilisant la notation vectorielle Φ de Φ , on peut écrire sous forme matricielle la dérivée définie par (3.4.4)

$$\mathbf{d}_0 \Phi = \mathbf{A} \Phi$$

où \mathbf{A} désigne la matrice de l'opérateur \mathbf{d}_0 .

Sur la cellule T , on a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

Dans le cas général, \mathbf{A} est en fait la matrice d'incidence des sommets vers les arêtes de la surface discrète.

Différentielle d'une 1-forme.

Soit Ψ une 1-forme dans \mathbb{R} définie sur T . En écrivant cette fois-ci le théorème de Stokes 3.10 sur la face f , il existe une 2-forme notée $\mathbf{d}_1 \Psi$ qui vérifie :

$$\mathbf{d}_1 \Psi(f) = \int_f \mathbf{d}_1 \Psi = \int_{\partial f} \Psi = \Psi(e_1) + \Psi(e_2) + \Psi(e_3)$$

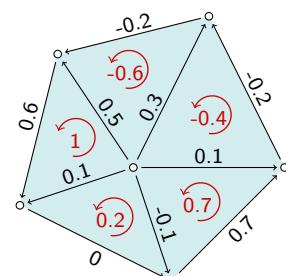
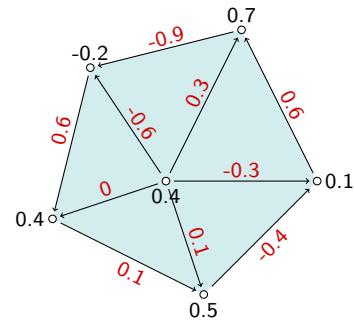
De même que précédemment, on introduit \mathbf{B} la matrice de l'opérateur \mathbf{d}_1 qui permet d'écrire (3.4.4) sous forme matricielle

$$\mathbf{d}_1 \Psi = \mathbf{B} \Psi$$

Sur la cellule T ,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} f$$

Et pour une surface quelconque, \mathbf{B} est la matrice d'incidence des arêtes vers les faces.



Différentielle d'une 2-forme.

En dimension deux, il n'existe pas d'opérateur de différentiation pour les 2-formes. Pour autant, il est possible de considérer des 2-formes sur une surface du plan, et naturel de vouloir les différentier. Aussi, on utilise tout d'abord l'étoile de Hodge \star_2 pour passer sur le complexe dual, puis on dérive sur le dual grâce à l'opérateur \bar{d}_0 , et on revient sur la surface primale avec l'opérateur \bar{x}_1 . On donne un exemple de ces étapes dans la figure 3.6.

L'opérateur d_2 est donc la composée de ces opérateurs, et donc la dérivée d'une 2-forme Φ est une 1-forme primaire $d_2\Phi$ définie par

$$d_2\Phi = \bar{x}_1 \bar{d}_0 \star_2 \Phi = G_1 \mathbf{B}^T G_2^{-1} \Phi$$

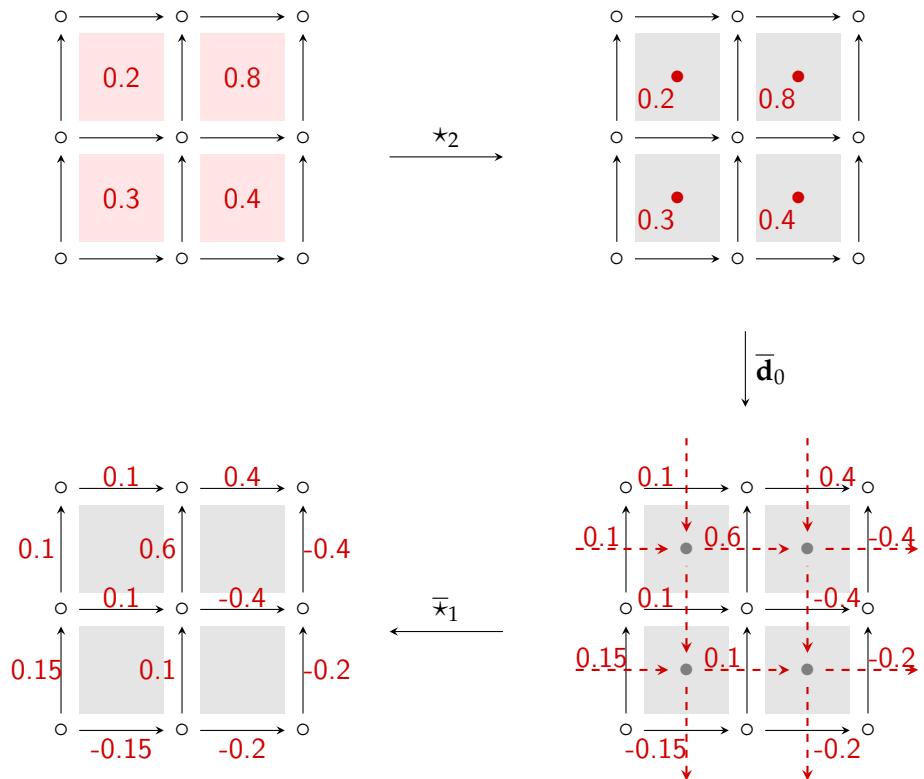


FIGURE 3.6 – Exemple de construction de l'opérateur d_2 de différentiation des 2-formes.

Edge Laplacian.

Comme nous l'avons vu à la section 3.2.7, le Laplacien est un opérateur qui agit sur les 0-formes (ou sur les 2-formes, par dualité). Il est néanmoins possible d'étendre cet opérateur aux 1-formes en utilisant la définition de [Grady et Polimeni 2010] :

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{A}G_0\mathbf{A}^\top G_1^{-1} + G_1\mathbf{B}^\top G_2^{-1}\mathbf{B} \quad (3.9)$$

Cet opérateur, appelé edge Laplacian, est une version discrète du Laplacien vectoriel. Il possède la particularité de conserver l'orientation, ce qui n'est pas le cas du Laplacien sur les 0-formes.

3.5 Conclusion

Les approches classiques telles que les différences finies ou les éléments finis consistent en la discrétisation des opérateurs continus pour calculer des approximations discrètes de ceux-ci. L'apport du calcul discret réside dans la construction d'opérateurs discrets qui permettent de faire du calcul différentiel exact sur les surfaces discrètes. Ainsi, ces opérateurs permettent non seulement de simplifier les formulations, mais aussi la résolution numérique, puisque les opérateurs proposés sont linéaires et essentiellement creux.

De plus, le théorème de Stokes est garanti dans la construction du calcul si ce qui n'est pas le cas des discrétisations usuelles telles que les différences finies.

4

FONCTIONNELLES D'AMBROSIO-TORTORELLI DISCRÈTES ET APPLICATIONS EN ANALYSE D'IMAGE

La théorie de la Γ -convergence permet de construire une approximation de la fonctionnelle de Mumford-Shah, la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli, et nous garantit que les minimiseurs de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli convergent vers un minimiseur de la fonctionnelle de Mumford-Shah. Pour autant, l'utilisation des schémas classiques (différences finies, éléments finis) pour la résolution du problème de minimisation donne des résultats en-deça des espérances. L'ensemble des discontinuités reconstruit est difficilement exploitable sans post-traitement, et l'algorithme se révèle très peu robuste au bruit et au contraste, comme nous l'avons vu au chapitre 2.

Dans ce chapitre, nous présentons une approche utilisant le calcul discret pour la minimisation de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli. Nous exposerons dans un premier temps différentes discrétisations de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli, puis nous discuterons du processus d'optimisation et de l'influence des paramètres sur les expérimentations. Nous présenterons ensuite les résultats de restauration ainsi que des comparaisons avec la littérature sur le sujet. Finalement, nous proposerons d'autres applications parmi lesquelles l'inpainting ou la segmentation d'images.

Contributions.

À la section 4.1, nous proposons deux nouvelles formulations discrètes de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli en utilisant les notions de calcul discret définies au chapitre 3. Nous discuterons par ailleurs d'une formulation utilisant le calcul extérieur discret et plus proche des travaux de [Crane *et al.* 2013].

Puis nous présenterons à la section 4.4 des résultats de reconstruction et de segmentation sur des images en niveaux de gris puis en couleurs, ainsi que des comparaisons avec des méthodes classiques de la littérature.

Enfin, nous proposerons à la section 4.5 d'autres applications aux images, pour l'inpainting ou la segmentation d'images sans contrainte notamment.

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication [Foare *et al.* 2016a] et d'un article annexe [Foare *et al.* 2016b] détaillant plus particulièrement l'implémentation pour permettre la reproductibilité des résultats.

4.1 Formulations discrètes de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli

Les notions définies au chapitre 3 vont nous permettre de formuler plusieurs versions discrètes de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli en réécrivant (2.22) directement avec les opérateurs discrets.

Dans toute la suite, nous utiliserons une surface digitale, naturellement associée aux images, et on choisit une métrique identitaire sur l'ensemble des formes du primal et du dual. On notera de plus les k -formes $g = (g_1, \dots, g_c)$ et $u = (u_1, \dots, u_c)$ où $c = 1$ ou 3 selon que l'on travaille avec une image en niveaux de gris ou en couleurs.

4.1.1 Formulation exclusivement sur les sommets

Dans l'écriture continue de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli (2.21), les fonctions g , u et v sont définies pour chaque point (x, y) du domaine. Ainsi, il paraît naturel de définir les trois fonctions sur les sommets du complexe, aux centres des pixels de l'image (ou, par dualité, sur les faces du complexe). En utilisant les opérateurs discrets définis à la section 3.4, on peut réécrire la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli pour les 0-formes g, u, v

$$\begin{aligned} \text{AT}_\varepsilon^{0,0}(u, v) &= \alpha \sum_{i=1}^c \langle u_i - g_i, u_i - g_i \rangle_0 + \sum_{i=1}^c \left\langle v(\mathbf{d}_0 u_i)^\sharp, v(\mathbf{d}_0 u_i)^\sharp \right\rangle \\ &\quad + \lambda \varepsilon \left\langle (\mathbf{d}_0 v)^\sharp, (\mathbf{d}_0 v)^\sharp \right\rangle + \frac{\lambda}{4\varepsilon} \langle 1 - v, 1 - v \rangle_0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dans cette formulation, seul l'opérateur de dérivation des 0-formes \mathbf{d}_0 apparaît. Or l'exemple traité à la section 3.4.4 montre que l'opérateur \mathbf{d}_0 correspond à la définition du gradient par différences finies, si ce n'est que la valeur de la dérivée est attachée aux arêtes du complexe. En utilisant le \sharp , qui provient de la définition de l'opérateur gradient discret (voir section 3.2.7), l'opérateur $(\mathbf{d}_0 \cdot)^\sharp$ est finalement équivalent au gradient par différences finies.

Ainsi, u et v se situent tous deux sur les sommets du complexe, et la valeur du terme de couplage $\int_\Omega v^2 |\nabla u|^2$ est elle aussi sur les sommets. On se retrouve alors avec une formulation qui présente les mêmes défauts qu'une formulation avec des différences finies ou des éléments finis. Il est donc nécessaire d'interpréter différemment la formulation continue pour exploiter les possibilités offertes par le calcul discret.

4.1.2 Formulation sur les sommets et les arêtes $\text{AT}_\varepsilon^{0,1}$

Notre première approche consiste à concentrer la valeur d'un pixel au centre de celui-ci et d'associer ainsi u et g aux sommets du complexe, centrés en les pixels de l'image, comme

on le faisait dans l'approche par différences finies du chapitre 2. Cependant, contrairement au chapitre 2, ou à la formulation (4.1), nous ne choisissons plus de voir v comme étant la donnée d'un réel sur les points de la grille, mais plutôt comme étant une valeur sur les arêtes du complexe (figure 4.1). Ainsi définies, u et g sont des 0-formes, tandis que v est une 1-forme.

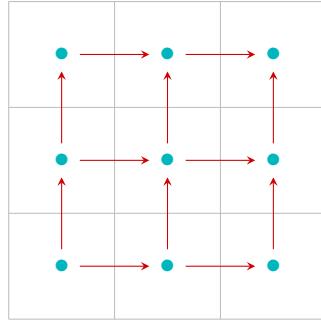


FIGURE 4.1 – Complexe primal utilisé pour la discrétisation de AT_ε avec u, g définies sur les sommets (en bleu) aux centres des pixels (en gris), et v sur les arêtes (en rouge).

Ainsi, en utilisant le edge Laplacian de [Grady et Polimeni 2010], on obtient la fonctionnelle suivante

$$\begin{aligned} \text{AT}_\varepsilon^{0,1}(u, v) = & \alpha \sum_{i=1}^c \langle u_i - g_i, u_i - g_i \rangle_0 + \sum_{i=1}^c \langle v \cdot \mathbf{d}_0 u_i, v \cdot \mathbf{d}_0 u_i \rangle_1 \\ & + \lambda \varepsilon \left(\langle \mathbf{d}_1 v, \mathbf{d}_1 v \rangle_2 + \left\langle \bar{\mathbf{x}}_2 \bar{\mathbf{d}}_1 \star_1 v, \bar{\mathbf{x}}_2 \bar{\mathbf{d}}_1 \star_1 v \right\rangle_0 \right) + \frac{\lambda}{4\varepsilon} \langle 1 - v, 1 - v \rangle_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

En notant $\mathbf{A}' := \bar{\mathbf{x}}_2 \bar{\mathbf{d}}_1 \star_1$, on peut réécrire (4.2) sous forme matricielle

$$\begin{aligned} \text{AT}_\varepsilon^{0,1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \alpha \sum_{i=1}^N (\mathbf{u}_i - \mathbf{g}_i)^\top (\mathbf{u}_i - \mathbf{g}_i) + \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{v} \mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{u}_i + \lambda \varepsilon \mathbf{v}^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{B} + \mathbf{A}' \mathbf{A}'^\top) \mathbf{v} \\ & + \frac{\lambda}{4\varepsilon} (1 - \mathbf{v})^\top (1 - \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

On remarquera par ailleurs que \mathbf{A}' est essentiellement égale à \mathbf{A}^\top , sauf sur les bords.

Intuitivement, cette approche correspond exactement à l'idée initiée par Ambrosio et Tortorelli, et reprise par Geman et Geman (voir remarque 2.21). En effet, dans la fonctionnelle continue d'Ambrosio-Tortorelli (2.21), v est une fonction qui, à la limite, vaut 1 presque partout, de telle sorte que l'ensemble $\{v = 0\}$ modélise exactement les contours et vérifie $\mathcal{H}^1(\{v = 0\}) = 0$. Or, avec une approche par différences finies, il est impossible de représenter un objet de dimension 1 sur la même grille que des objets de dimension 2 (les pixels). Dans notre approche, u, g et v ne vivent pas sur les mêmes cellules. Aussi, à la limite, v peut effectivement représenter un ensemble de dimension 1 sans toutefois disparaître, puisqu'il vit

sur les arêtes, objets de dimension 1, et exactement entre deux pixels, ce qui correspond bien à la définition d'un contour.

4.1.3 Formulation sur les faces et les sommets $\text{AT}_\varepsilon^{2,0}$

Une seconde possibilité est de considérer cette fois-ci u et g non plus comme des 0-formes mais comme des 2-formes : on s'éloigne encore de l'approche par différences finies présentée au chapitre 2 en ne concentrant plus l'information au centre du pixel, mais en la conservant sur toute la surface de celui-ci. Dès lors, v est naturellement placé sur les sommets, ainsi que sur les arêtes par moyennage. La figure 4.2 illustre le nouveau complexe primal utilisé dans cette approche.

$$\begin{aligned} \text{DAT}_\varepsilon^{2,0}(u, v) = \alpha \sum_{i=1}^c \langle u_i - g_i, u_i - g_i \rangle_2 + \sum_{i=1}^c \left\langle v \wedge \bar{\star}_1 \bar{\mathbf{d}}_0 \star_2 u_i, v \wedge \bar{\star}_1 \bar{\mathbf{d}}_0 \star_2 u_i \right\rangle_1 \\ + \lambda \varepsilon \langle \mathbf{d}_0 v, \mathbf{d}_0 v \rangle_1 + \frac{\lambda}{4\varepsilon} \langle 1 - v, 1 - v \rangle_0 \quad (4.4) \end{aligned}$$

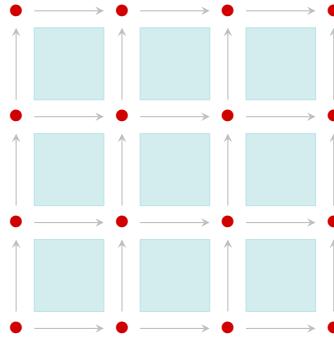


FIGURE 4.2 – Complexe primal utilisé pour la discréétisation de AT_ε avec u, g définies sur les faces (en bleu), et v sur les sommets (en rouge).

Or le produit extérieur entre une 0-forme primale f_0 et une 1-forme primale f_1 est une 1-forme primale qui vérifie

$$f_0 \wedge f_1 = \text{diag}(\mathbf{M}_{01} f_0) f_1 = \text{diag}(f_1) \mathbf{M}_{01} f_0 \quad (4.5)$$

où \mathbf{M}_{01} est une matrice qui envoie les 0-formes sur les 1-formes en prenant la moyenne des valeurs aux extrémités de chaque arête, sans tenir compte de l'orientation. Ainsi, $\mathbf{M}_{01} = \frac{1}{2} |\mathbf{A}|$, et en notant de plus $\mathbf{B}' := \bar{\star}_1 \bar{\mathbf{d}}_0 \star_2$, l'écriture matricielle de (4.4) est donc

$$\text{AT}_\varepsilon^{2,0}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha \sum_{i=1}^N (\mathbf{u}_i - \mathbf{g}_i)^\top (\mathbf{u}_i - \mathbf{g}_i) + \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i^\top \mathbf{B}'^\top \text{diag}(\mathbf{M}_{01} v) \mathbf{B}' \mathbf{u}_i + \lambda \varepsilon \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{v}$$

$$+ \frac{\lambda}{4\epsilon}(\mathbf{1} - \mathbf{v})^\top(\mathbf{1} - \mathbf{v}) \quad (4.6)$$

De même que pour \mathbf{A}' , $\mathbf{B}' \approx \mathbf{B}^\top$ excepté sur les bords.

Remarque 4.1. Cette formulation peut en fait être vue comme une formulation duale de $\text{AT}_\epsilon^{0,1}$, dans la mesure où l'information contenue sur les pixels est alternativement placée sur les sommets ou les faces du complexe.

4.1.4 Remarques sur les formulations discrètes

Le choix des cellules sur lesquelles placer les différentes variables de notre problème en calcul discret n'est pas unique, et a priori pas automatique. Il s'agit en effet d'un choix arbitraire, qui dépend de l'interprétation physique ou mathématique que l'on fait d'un problème donné. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas nécessairement placé u et v sur les sommets, comme semblait pourtant l'indiquer l'opérateur gradient dans la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli continue (2.21).

Parmi les différentes possibilités, il n'est par ailleurs pas trivial de déterminer laquelle est la plus juste, ni même s'il en existe une plus juste que les autres.

4.2 Processus d'optimisation

4.2.1 Équations d'Euler-Lagrange

Tout comme la formulation continue, les formulations discrètes (4.2) et (4.4) sont différentiables par rapport à u et v , et quadratiques. Aussi, en calculant les équations d'Euler-Lagrange associée à la formulation (4.3), la minimisation de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli discrète $\text{AT}_\epsilon^{0,1}$ revient à la résolution du système linéaire

$$\begin{cases} \left[\alpha \mathbf{Id} - \mathbf{A}^\top \text{diag}(\mathbf{v})^2 \mathbf{A} \right] \mathbf{u} \\ \left[\frac{\lambda}{4\epsilon} \mathbf{Id} + \lambda \epsilon (\mathbf{A}' \mathbf{A}'^\top + \mathbf{B}^\top \mathbf{B}) + \text{diag}(\mathbf{A} \mathbf{u})^2 \right] \mathbf{v} \end{cases} = \alpha \mathbf{g} \quad (4.7a)$$

$$= \frac{\lambda}{4\epsilon} \mathbf{1}_1 \quad (4.7b)$$

où $\mathbf{1}_k$ désigne la k -forme identiquement égale à 1. De même, pour la seconde formulation proposée (4.6)

$$\begin{cases} \left[\alpha \mathbf{Id} - \mathbf{B}'^\top \text{diag}(\mathbf{M}_{01} \mathbf{v})^2 \mathbf{B}' \right] \mathbf{u} \\ \left[\frac{\lambda}{4\epsilon} \mathbf{Id} + \lambda \epsilon \mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \mathbf{M}_{01}^\top \text{diag}((\mathbf{B}' \mathbf{u})^2) \mathbf{M}_{01} \right] \mathbf{v} \end{cases} = \alpha \mathbf{g} \quad (4.8a)$$

$$= \frac{\lambda}{4\epsilon} \mathbf{1}_0 \quad (4.8b)$$

On remarquera que dans chacune des équations ci-dessus, la matrice du membre de gauche est très creuse. Ainsi, on utilisera une factorisation de Cholesky pour résoudre alternativement les équations de chacun des systèmes.

4.2.2 Convergence des solutions discrètes

La fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli (2.21) a la particularité d'être convexe par rapport à chacune de ses variables, bien qu'elle ne soit pas globalement convexe. Aussi, la résolution alternée des équations (4.7a)-(4.7b) nous assure qu'à chaque itération, on calcule en fait u_n^* optimal pour $\text{AT}_\varepsilon^{0,1}(u_n, \cdot)$ et v_n^* optimal pour $\text{AT}_\varepsilon^{0,1}(\cdot, v_n)$, les matrices des membres de gauche étant a priori de rang plein ; et de même pour la fonctionnelle discrète $\text{AT}_\varepsilon^{2,0}$. Ainsi, le résultat de descente par bloc de [Bertsekas 1999, Prop. 2.7.1], dont nous rappelons l'énoncé dans notre cas particulier, nous assure de converger vers un point stationnaire (u^*, v^*)

Proposition 4.2.

Soient $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}$ deux ensembles convexes et fermés, et soit l'espace produit $X = X_1 \times X_2$. Soit f une fonction de classe C^1 sur X . On suppose que pour tout $x = (x_1, x_2) \in X$, les minima

$$\min_{\xi \in X_1} f(\xi, x_2) \text{ et } \min_{\mu \in X_2} f(x_1, \mu) \quad (4.9)$$

existent et sont uniques. Soit de plus $(x^k)_k$ la suite de minimiseurs obtenus grâce à l'algorithme de descente par bloc

$$x_1^{k+1} = \operatorname{argmin}_{\xi \in X_1} f(\xi, x_2^k) \quad (4.10)$$

$$x_2^{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mu \in X_2} f(x_1^{k+1}, \mu) \quad (4.11)$$

Alors (x^k) converge vers un point stationnaire.

4.2.3 Algorithme et détails d'implémentation

Algorithme. Numériquement, on choisit une minimisation alternée. Il s'agit alors de résoudre alternativement les équations (4.7a)-(4.7b) (respectivement (4.8a)-(4.8b)) jusqu'à convergence. Concernant le paramètre ε de la Γ -convergence, nous procédons comme précédemment : nous choisissons une valeur initiale ε_1 suffisamment grande, puis nous la raffinons jusqu'à une valeur finale ε_2 afin de mimer le processus de Γ -convergence.

L'algorithme étant similaire en tous points sauf sur les types de u , g et v , nous ne présentons que celui correspondant à la fonctionnelle discrète $\text{AT}_\varepsilon^{2,0}$.

Algorithme 2 : OPTIMIZE-AT($(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_c)$: 2-forms, $(\alpha, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_r)$: reals)

```

1 Var  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_c)$  :  $\bar{\mathcal{G}}$ -forms,  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  : 0-forms,  $\varepsilon$  : real ;
2 begin
3    $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{g}$ ,  $\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{1}$ ;
4    $\varepsilon \leftarrow \varepsilon_1$ ;
5   while  $\varepsilon \geq \varepsilon_2$  do
6     repeat
7        $\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v}$ ;
8       Solve eq.  $\left[ \alpha \mathbf{Id} - \mathbf{B}'^\top \text{diag}(\mathbf{M}_{01}\mathbf{v})^2 \mathbf{B}' \right] \mathbf{u}_i = \alpha \mathbf{g}$  for all  $\mathbf{u}_i$ ;
9       Solve eq.  $\left[ \frac{\lambda}{4\varepsilon} \mathbf{Id} + \lambda \varepsilon \mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \mathbf{M}_{01}^\top \text{diag}(\mathbf{B}'\mathbf{u})^2 \mathbf{M}_{01} \right] \mathbf{v} = \frac{\lambda}{4\varepsilon} \mathbf{1}$  for  $\mathbf{v}$ ;
10      until  $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|$  is small;
11       $\varepsilon \leftarrow \varepsilon/\varepsilon_r$  ;
12  return  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  ;

```

Résultat optimal. Pour chacune des expérimentations, on choisit l'image dont le PSNR, qui mesure la qualité du signal, est le plus élevé, et on affichera l'ensemble des contours $\left\{ v < \frac{1}{2} \right\}$ en rouge sur l'image restaurée u . On montrera aussi les résultats de similarité structurelle (SSIM, [Wang *et al.* 2004]) entre l'image restaurée et l'image originale non bruitée. L'image SSIM tient compte à la fois du contraste, de la luminance et de la structure dans un voisinage autour de chaque point pour établir un score. Les zones foncées de l'image SSIM correspondent ainsi aux régions de faible similarité, les zones plus claires aux régions de forte similarité. Pour une meilleure lisibilité des résultats, nous présentons les images SSIM élevées à la puissance quatre.

Détails d'implémentation. Les méthodes présentées ont été implémentés avec la bibliothèque open-source C++ [DGtal], qui propose des outils de géométrie digitale et de gestion des surfaces en 2D et en 3D. En particulier, on retrouve tous les outils du calcul discret présentés au chapitre 3, ainsi que des algorithmes pour la gestion des formes et des complexes cellulaires.

Les algorithmes de minimisation des fonctionnelles $\text{AT}_\varepsilon^{0,1}$ et $\text{AT}_\varepsilon^{2,0}$ sont disponibles dans le package `imageProcessing` de DGtalTools ([http://dgtal.org/doc/tools/nightly/
imageProcessing](http://dgtal.org/doc/tools/nightly/imageProcessing)), sous les noms de `at-u0-v1` et `at-u2-v0` respectivement.

Vitesse de convergence. Concernant le temps d'exécution, nous présentons à la table 4.1 plusieurs expérimentations, pour des images en niveaux de gris et en couleurs de différentes tailles. On choisit de plus cinq valeurs de $\varepsilon = 4 \searrow 0.25$, et on autorise au maximum 10 itérations pour chaque valeur de ε . En pratique, les deux modèles convergent rapidement pour les grandes valeurs de ε , mais nécessitent en général les 10 itérations pour $\varepsilon \leq 1$.

TABLE 4.1 – Temps de convergence (en secondes) des méthodes $\text{AT}_\varepsilon^{0,1}$ et $\text{AT}_\varepsilon^{2,0}$ pour différentes images proposées à la section 4.4, avec 5 valeurs de $\varepsilon = 4 \searrow 0.25$ et 10 itérations maximum pour chaque ε .

| | Fingerprint (128 × 133) | Barbara (348 × 271) | Koala (246 × 350) | Paon (482 × 356) | Papillon (605 × 418) |
|-------------------------------|----------------------------|------------------------|----------------------|---------------------|-------------------------|
| $\text{AT}_\varepsilon^{0,1}$ | 17 | 347 | 276 | 898 | 1795 |
| $\text{AT}_\varepsilon^{2,0}$ | 5 | 102 | 88 | 323 | 531 |

La méthode $\text{AT}_\varepsilon^{0,1}$ est visiblement plus lente que la méthode $\text{AT}_\varepsilon^{2,0}$, et cela s'explique par le nombre plus important d'arêtes ($2NM - N - M$) que de sommets ou de faces (NM) du complexe associé à une image de taille $N \times M$.

4.3 Influence des paramètres

4.3.1 Espace-échelle sur ε et épaisseur des contours

Comme l'ont montré les expérimentations 2.5 et 2.6 du chapitre 2, section 2.5, il est essentiel que ε tende vers 0, comme l'impose la théorie de la Γ -convergence, pour que les contours s'affinent. Aussi, nous choisissons un ε initial suffisamment grand pour capter les discontinuités, et nous raffinons ensuite progressivement ε . Si l'utilisation de différences finies ou d'éléments finis contraint ε à être supérieur à environ cinq mailles (i.e. $\varepsilon \geq 5$), ce n'est pas le cas avec notre approche puisque la fonction v modélisant les contours n'est pas définie sur les points de la grille.

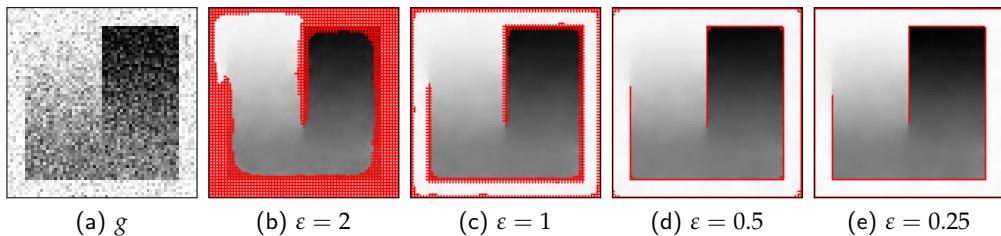


FIGURE 4.3 – Influence du paramètre de Γ -convergence ε sur l'épaisseur des contours, pour $\lambda = 0.006$ et $\alpha = 0.1$ fixés.

La figure 4.3 montre la diminution de l'épaisseur du contour lorsque ε tend vers 0, et l'importance de choisir une valeur initiale pour ε suffisamment grande pour localiser correctement les discontinuités.

4.3.2 Espace-échelle sur λ et quantité de discontinuités

Il est possible de construire un espace-échelle sur le paramètre λ en faisant décroître la valeur initiale λ_1 vers une valeur finale λ_2 choisie par l'utilisateur. Ainsi, en analysant l'espace-échelle, on peut alors déterminer, de manière automatique ou manuelle, le "meilleur résultat" de segmentation, dans un sens à préciser.

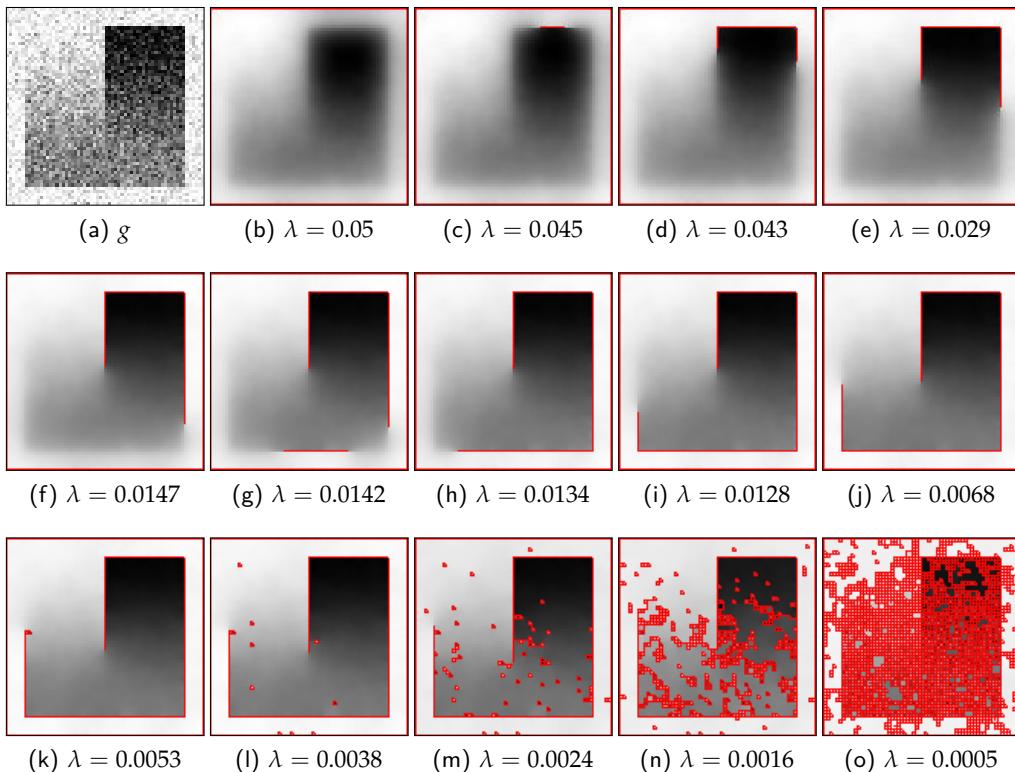


FIGURE 4.4 – Influence du paramètre λ sur la longueur des contours, pour $\alpha = 0.05$ fixé et $\varepsilon = 4 \searrow 0.25$.

La figure 4.4 est un exemple d'espace-échelle sur une image synthétique bruitée 4.4 (a). Pour λ très grand, comme c'est le cas de la figure 4.4 (b), la longueur des contours est trop fortement pénalisée, si bien que v est contraint de rester proche de 1 et donc aucune discontinuité n'apparaît.

Quand λ décroît, les contours apparaissent progressivement (figures 4.4 (c)-(k)). Pour λ très petit, on peut voir sur les figures 4.4 (l)-(o) que l'image n'est plus correctement lissée et que du bruit est conservé. En effet, pour λ proche de 0, le terme de périmètre est presque nul et donc le problème de minimisation devient à la limite

$$\min_{u,v} \left\{ \alpha \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega} v^2 |\nabla u|^2 dx \right\} \quad (4.12)$$

Dès lors, quand λ tend vers 0, le couple optimal tend vers $(g, 0)$, ce qui explique la quantité croissante de bruit conservée quand λ diminue.

Ainsi, le réglage du paramètre λ nous permet de contrôler exactement la quantité de discontinuités que l'on souhaite autoriser.

4.3.3 Espace-échelle sur α et réglage du flou initial

Nous avons vu à la section 4.3.2 que pour λ suffisamment grand, $v \approx 1$ et aucune discontinuité n'est détectée. Le problème de minimisation se réduit alors à

$$\min_u \left\{ \alpha \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right\} \quad (4.13)$$

ce qui revient à résoudre

$$-\Delta u + \alpha u = \alpha g$$

i.e.

$$(\Delta + \alpha \cdot id)u = \alpha g \quad (4.14)$$

Ainsi, pour α proche de 0, l'équation (4.14) se rapproche d'une équation de diffusion. Au contraire, pour $\alpha \gg 1$, le terme de diffusion est négligeable et la solution de l'équation est trivialement $u \approx g$. Il est dès lors possible de régler le flou que nous souhaitons appliquer initialement à notre image.

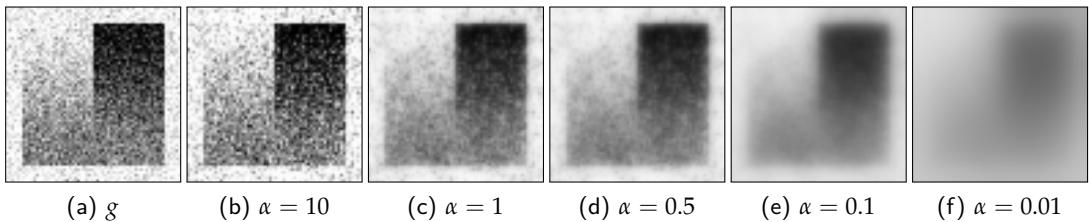


FIGURE 4.5 – Influence du paramètre α sur l'intensité du lissage d'image dégradée avec un bruit gaussien de variance $\sigma = 0.4$, avec $\lambda = 100$ fixé et $\varepsilon = 4 \searrow 0.25$.

La figure 4.5 illustre l'influence du choix du paramètre α sur le lissage de l'image. Comme attendu, plus α est grand et plus u est proche de l'image originale (figures 4.5 (b)-(c)), et plus α est proche de 0, plus l'image est floue (figures 4.5 (e)-(f)).

4.4 Utilisation de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli pour la restauration d'image

Nous proposons dans cette section divers résultats de restauration d'images en niveaux de gris et en couleurs avec les approches proposées à la section 4.1. Nous discuterons des apports de la méthode et nous nous comparerons avec des méthodes proches de la littérature, présentées au chapitre 1.

4.4.1 Reconstruction d'images en niveaux de gris et en couleurs

Les figures 4.6 et 4.7 montrent les résultats de la minimisation des fonctionnelles discrètes $AT_{\varepsilon}^{0,1}$ et $AT_{\varepsilon}^{2,0}$ sur des images en niveaux de gris, les figures 4.8, 4.9 et 4.10, pour des images en couleurs.

La première colonne de la figure 4.6 (a) correspond à l'expérience présentée au chapitre 2 dans les figures 2.5 (a) et 2.6, qui utilisaient respectivement des différences finies et des éléments finis avec raffinement et réalignement de maillage [Bourdin et Chambolle 2000]. L'apport le plus évident de l'approche discrète concerne l'épaisseur des contours. En effet, les figures 2.5 (a) et 2.6 mettent en évidence des contours de plusieurs mailles d'épaisseur, tandis que notre approche permet de reconstruire des contours 1-dimensionnels.

Le fait que l'ensemble des contours se trouve entre les pixels permet par ailleurs de traiter des images avec des structures très fines, comme par exemple une empreinte digitale (figure 4.6 (b)), alors que l'ensemble des contours était inexploitable avec l'utilisation de différences finies (figure 2.5 (b)), et de retrouver des contours précis, comme on peut le voir en particulier sur la figure 4.9 avec la reconstruction des antennes du papillon, ou des plumes du paon de la figure 4.10. Cela concerne aussi les images texturées, comme l'illustre la figure 4.7.

On remarque de plus que la possibilité de reconstruire des contours de dimension 1 rend l'algorithme beaucoup plus robuste au faible contraste, visible par exemple dans la figure 4.6 (c).

On notera finalement que plus le bruit est important, plus il est nécessaire de flouter l'image pour obtenir une bonne reconstruction. Cela implique non seulement une perte des structures très fines, comme les poils d'un animal, mais aussi que dans les zones lisses de l'image, les couleurs de l'image restaurée tiennent compte à la fois des couleurs d'origine mais aussi du bruit. Ces phénomènes, communs à l'ensemble des méthodes variationnelles sans modèle de texture, expliquent pourquoi les régions lisses ont généralement des scores SSIM faibles et apparaissent ainsi en noir sur les images SSIM, alors même que la reconstruction est visuellement celle attendue. On l'observe tout particulièrement sur la figure 4.8.

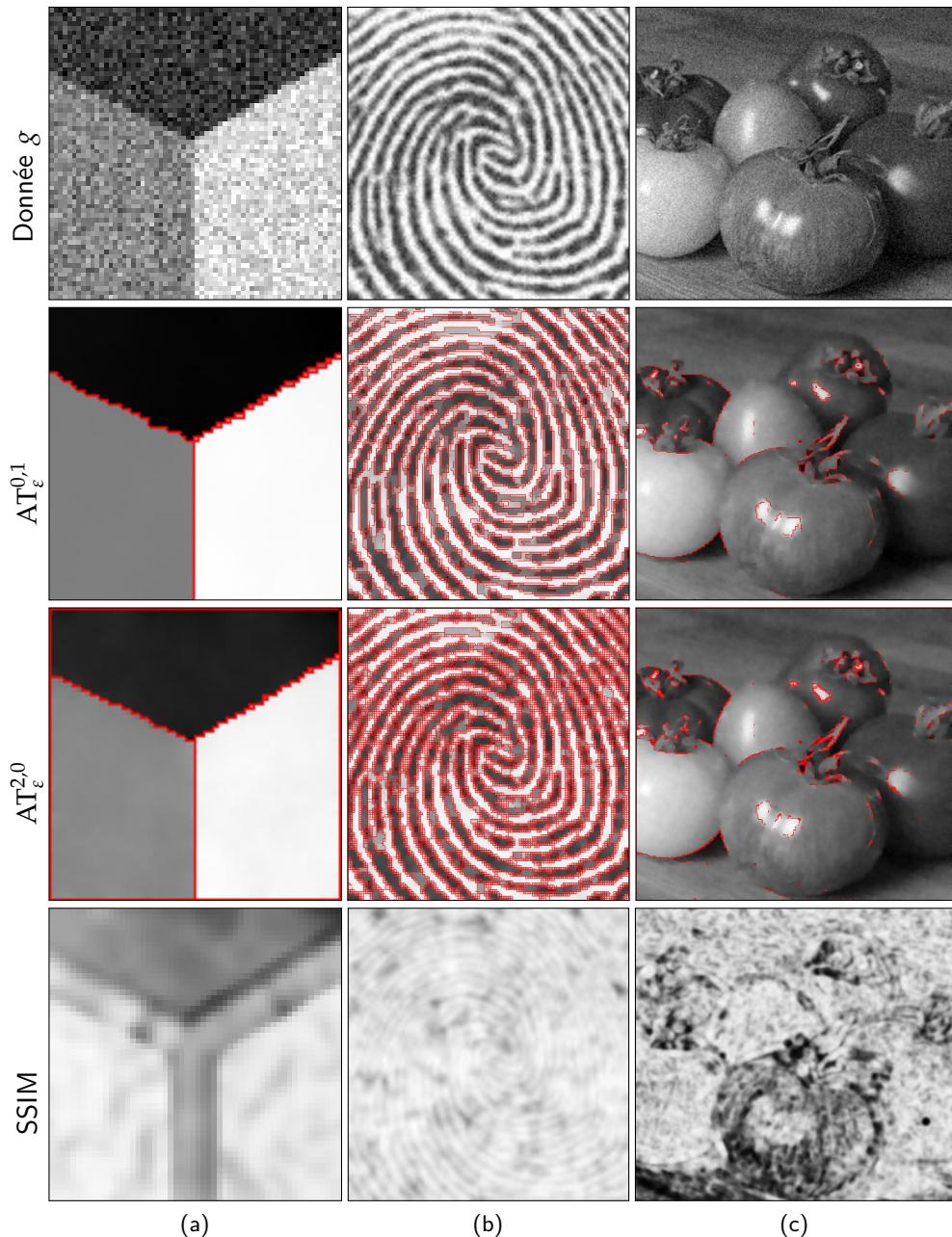


FIGURE 4.6 – Résultats de lissage d'images en niveaux de gris avec les deux fonctionnelles $AT_{\varepsilon}^{0,1}$ et $AT_{\varepsilon}^{2,0}$. Pour l'ensemble des tests, $\varepsilon = 4 \searrow 0.25$. Paramètres :
 $AT_{\varepsilon}^{0,1}$: $\alpha = (0.01, 0.2, 0.3)$ et $\lambda = (0.0009, 0.002, 0.003)$ resp. ;
 $AT_{\varepsilon}^{2,0}$: $\alpha = (0.05, 0.15, 0.3)$ et $\lambda = (0.005, 0.002, 0.0035)$ resp.

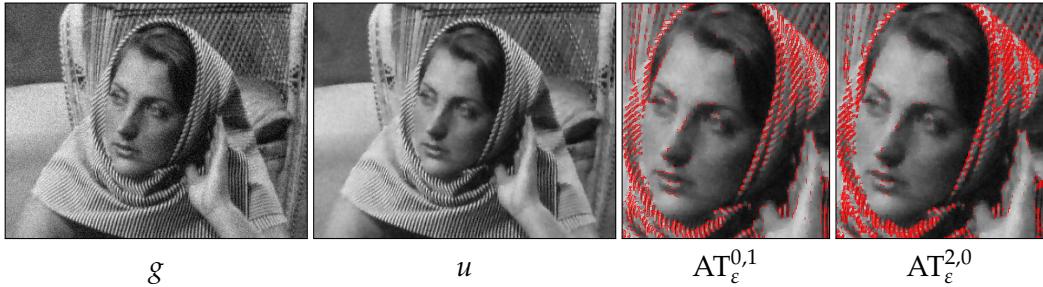


FIGURE 4.7 – Résultat de lissage d'une image texturée dégradée par un bruit gaussien de variance $\sigma = 0.05$. Paramètres : $\varepsilon = 4 \searrow 0.25$; $\text{AT}_\varepsilon^{0,1}$: $\alpha = 0.7$ et $\lambda = 0.0044$; $\text{AT}_\varepsilon^{2,0}$: $\alpha = 0.7$ et $\lambda = 0.0068$.

4.4.2 Robustesse au bruit

La finesse des contours à convergence rend la méthode plus robuste au bruit. La figure 4.11 illustre la reconstruction d'une image synthétique pour différents niveaux de bruit gaussiens de variance σ allant de 0.05 à 0.4, pour les deux fonctionnelles discrètes $\text{AT}_\varepsilon^{0,1}$ et $\text{AT}_\varepsilon^{2,0}$. Conformément au raisonnement de la section 4.3.3, nous choisissons α de manière à éliminer le bruit. Comme évoqué précédemment, l'augmentation de la quantité de bruit nécessite de choisir α de plus en plus petit afin de favoriser la diffusion, avec pour conséquence une reconstruction de moins en moins bonne des couleurs. Mais malgré tout, les deux fonctionnelles parviennent à restaurer le dégradé de l'image originale, et on constate que les contours sont correctement reconstruits.

4.4.3 Comparaisons avec la littérature

Nous présentons dans cette section une comparaison des résultats de notre approche avec ceux obtenus avec les méthodes pour la reconstruction d'image présentées au chapitre 1 : la méthode TV, la relaxation convexe de la fonctionnelle de Mumford-Shah proposée par [Strelakovsky et Cremers 2014], et la relaxation convexe de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli de [Kee et Kim 2014]. Parmi la multitude de travaux concernant la méthode TV, nous nous intéresserons en particulier aux implémentations proposées par [Getreuer 2012a] et [Duran et al. 2013], disponibles sur [IPOL].

Dans la mesure où nous ne possédons pas le code source de la méthode de Kee et Kim, nous comparerons dans un premier temps (figures 4.12 et 4.13) les différentes approches avec les résultats extraits de leur article [Kee et Kim 2014, fig. 4, 5, 6] et nous proposerons ensuite d'autres expérimentations pour les méthodes utilisant la variation totale et une relaxation convexe de la fonctionnelle de Mumford-Shah.

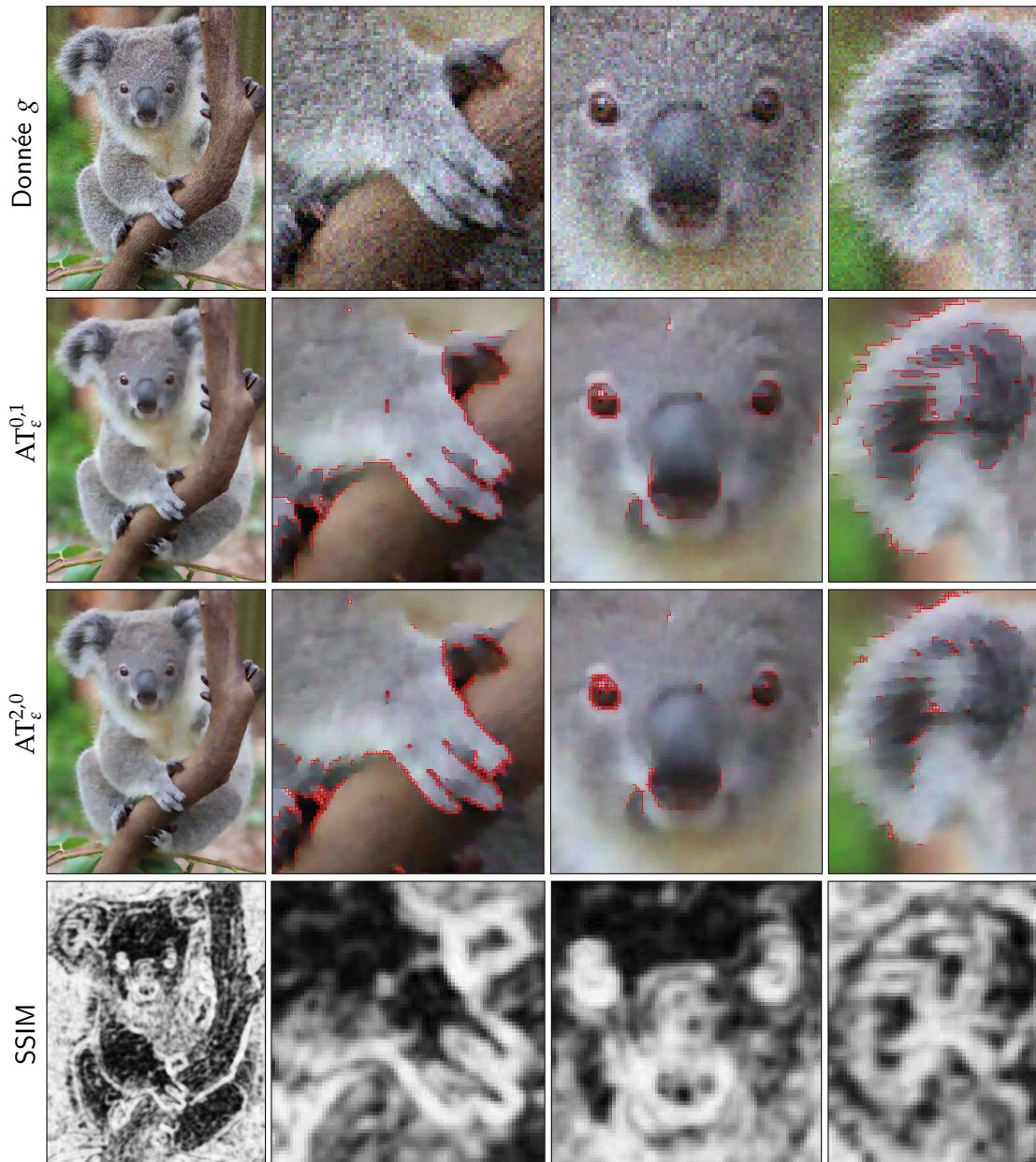


FIGURE 4.8 – Résultats de lissage en couleurs avec les fonctionnelles $AT_\varepsilon^{0,1}$ et $AT_\varepsilon^{2,0}$
dégradée par un bruit gaussien de variance $\sigma = 0.05$.
Paramètres : $\varepsilon = 4 \searrow 0.25$; $AT_\varepsilon^{0,1}$: $\alpha = 0.4$ et $\lambda = 0.02$; $AT_\varepsilon^{2,0}$: $\alpha = 0.4$ et $\lambda = 0.04$.

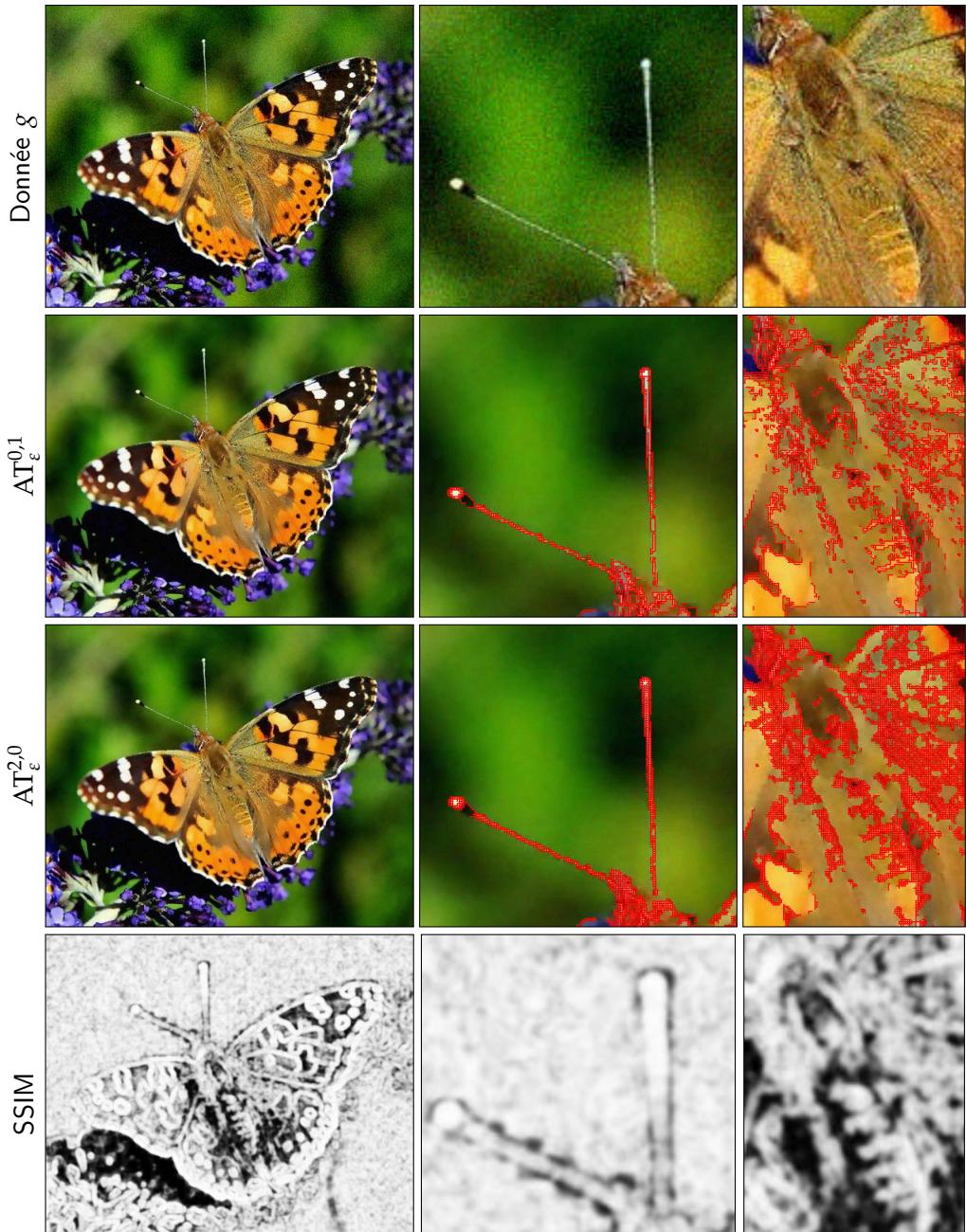


FIGURE 4.9 – Résultats de lissage en couleurs avec les fonctionnelles $AT_\varepsilon^{0,1}$ et $AT_\varepsilon^{2,0}$
dégradée par un bruit gaussien de variance $\sigma = 0.05$.

Paramètres : $\varepsilon = 4 \searrow 0.25$; $AT_\varepsilon^{0,1}$: $\alpha = 0.4$ et $\lambda = 0.004$; $AT_\varepsilon^{2,0}$: $\alpha = 0.4$ et $\lambda = 0.0085$.

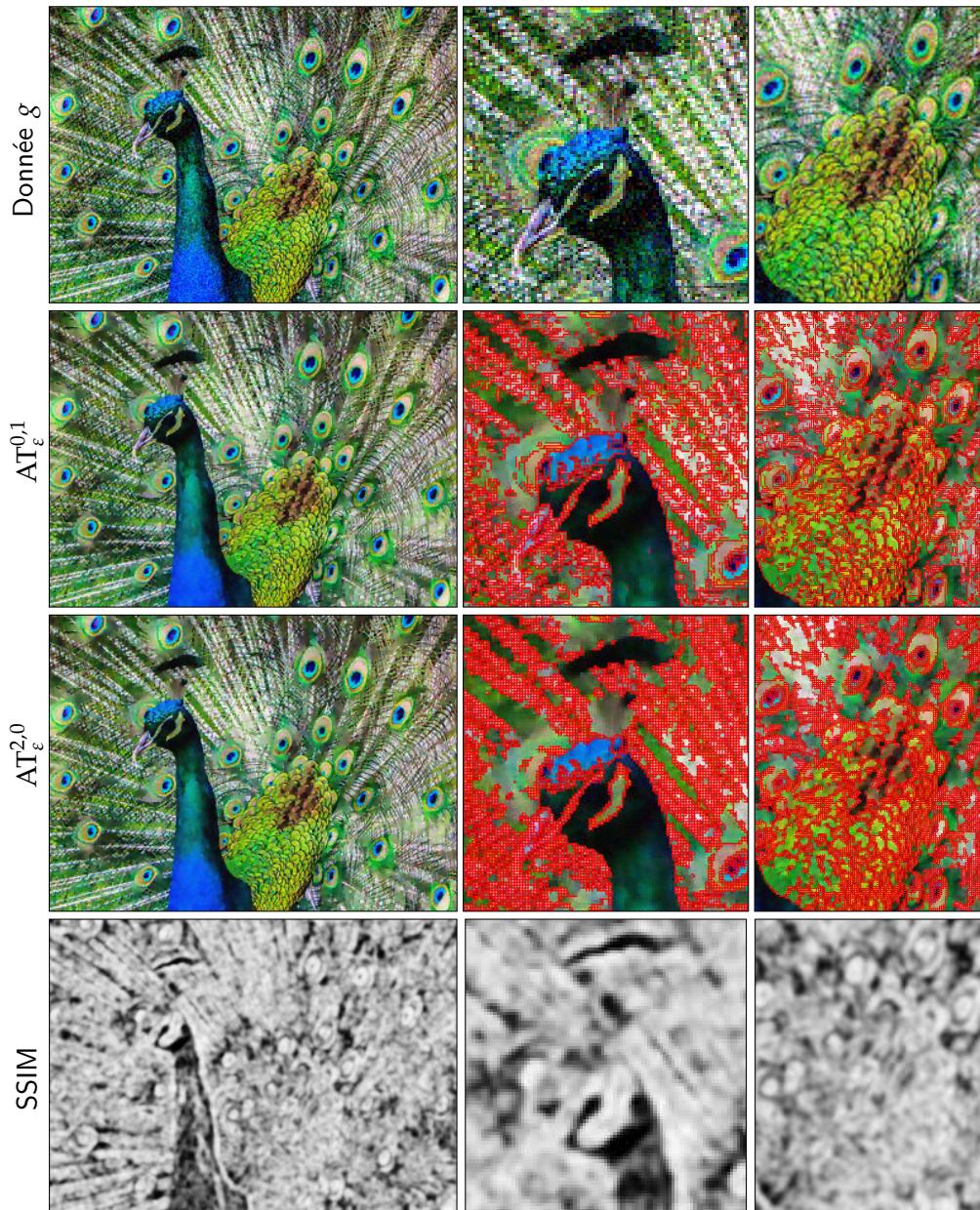


FIGURE 4.10 – Résultats de lissage en couleurs avec les fonctionnelles $AT_{\varepsilon}^{0,1}$ et $AT_{\varepsilon}^{2,0}$
dégradée par un bruit gaussien de variance $\sigma = 0.1$.
Paramètres : $\varepsilon = 4 \searrow 0.25$; $AT_{\varepsilon}^{0,1}$: $\alpha = 0.5$ et $\lambda = 0.0078$; $AT_{\varepsilon}^{2,0}$: $\alpha = 0.5$ et $\lambda = 0.011$.

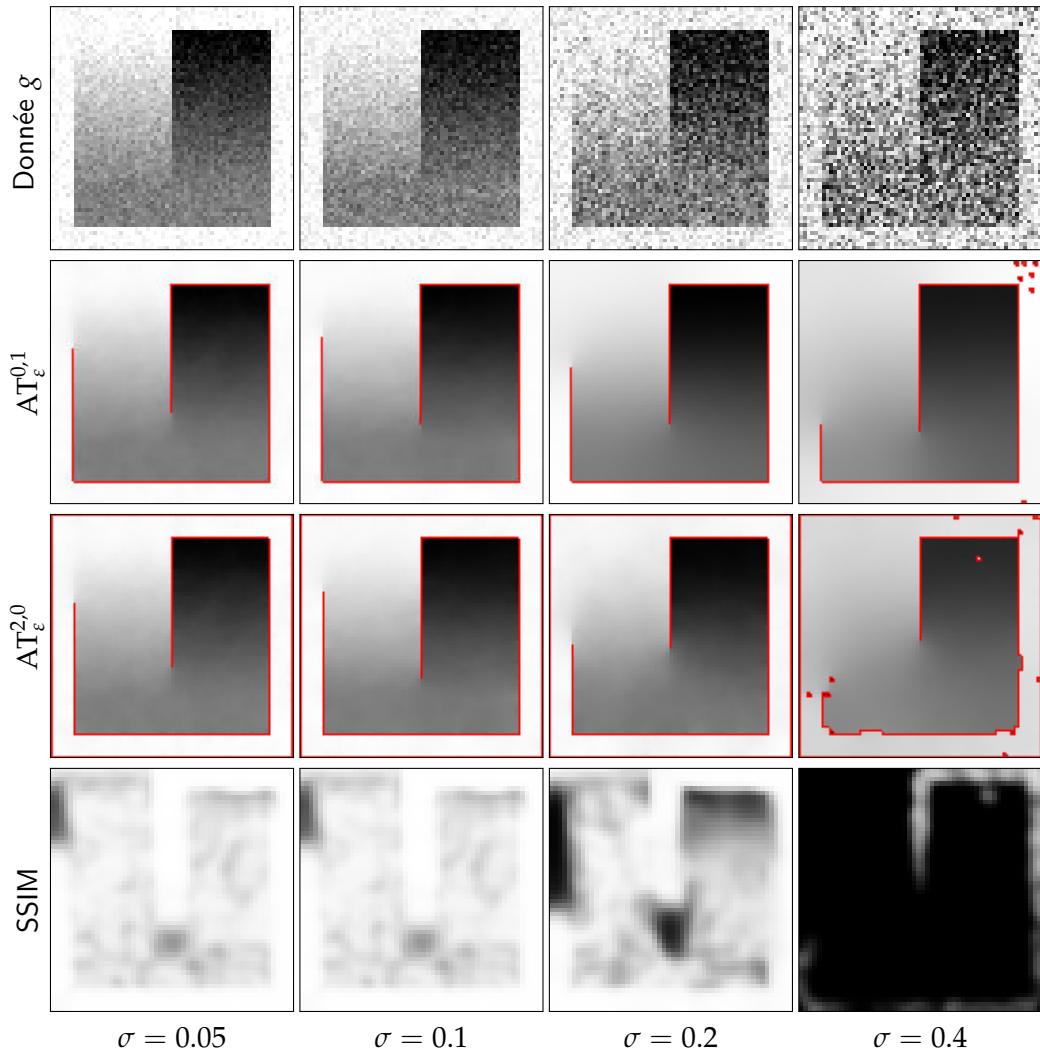


FIGURE 4.11 – Résultats de lissage avec les deux fonctionnelles $AT_\varepsilon^{0,1}$ et $AT_\varepsilon^{2,0}$ en présence d'un bruit de variance σ croissante. Pour l'ensemble des tests, $\varepsilon = 4 \searrow 0.25$.
 $AT_\varepsilon^{0,1} : \alpha = (0.2, 0.1, 0.05, 0.004)$ et $\lambda = (0.0051, 0.0022, 0.0016, 0.0012)$ resp.
 $AT_\varepsilon^{2,0} : \alpha = (0.2, 0.1, 0.05, 0.01)$ et $\lambda = (0.0051, 0.0022, 0.0069, 0.0039)$ resp.

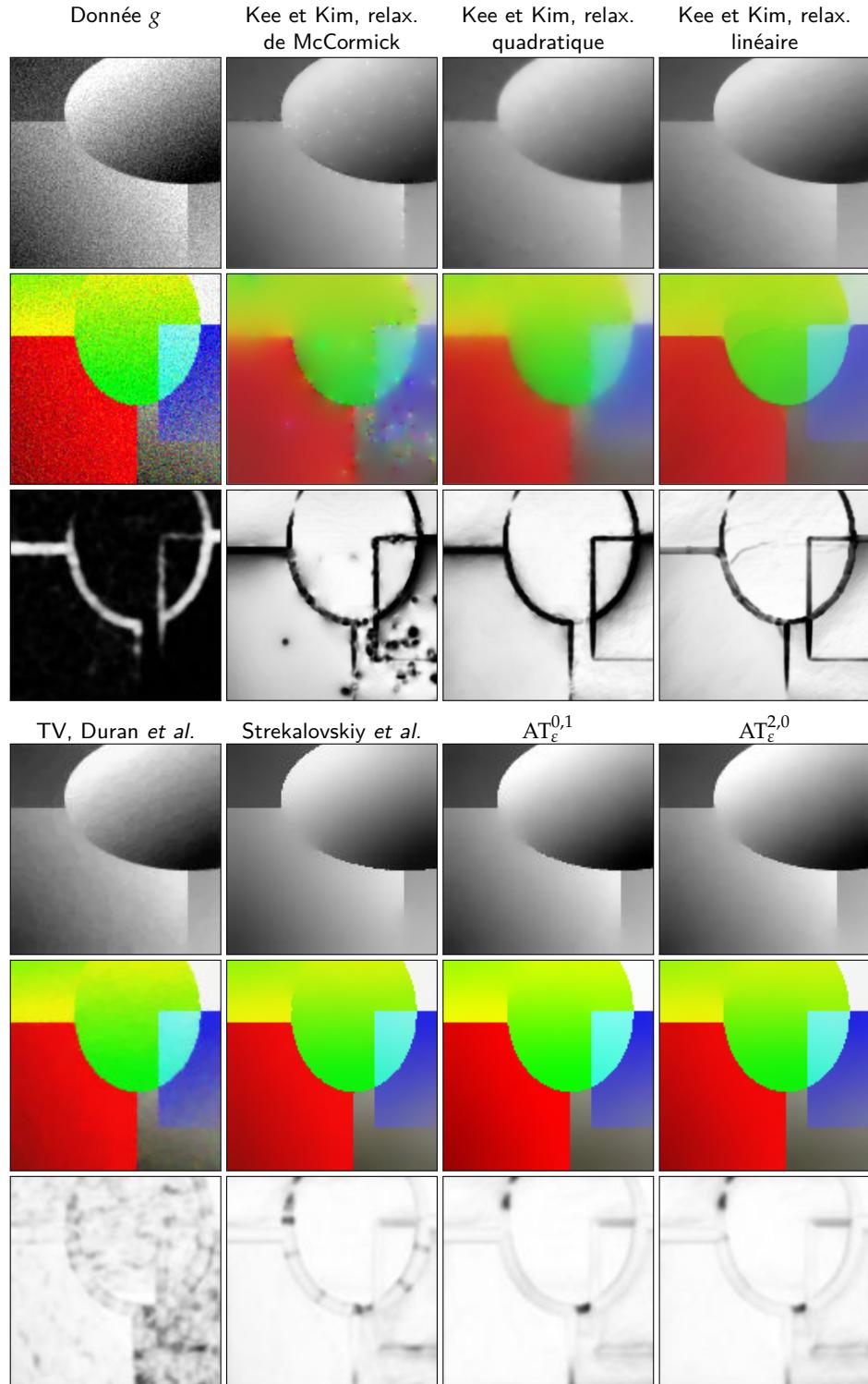


FIGURE 4.12 – Comparaison des résultats de restauration sur des images synthétiques bruitées extraites de [Kee et Kim 2014]. Paramètres :

TV, [Duran *et al.* 2013] : $\sigma = (12, 19)$ resp.

[Strelakovskyi et Cremers 2014] : $\alpha = (28.8, 40.7)$, $\lambda = (0.296, 0.15)$ resp.

$AT_{\epsilon}^{0,1}$, $AT_{\epsilon}^{2,0}$: $\alpha = (0.0625, 0.0156)$, $\lambda = (0.0016, 0.0034)$, $\epsilon = 4 \searrow 0.25$ resp.

La figure 4.12 compare les résultats de restauration des trois relaxations présentées par Kee et Kim [Kee et Kim 2014, fig. 4 et 5] avec la méthode TV, la relaxation convexe de Mumford-Shah de [Strelakovsky et Cremers 2014] et notre approche.

On remarque tout d'abord que parmi les relaxations convexes proposées par Kee et Kim, celle de McCormick laisse quelques artefacts, tandis que la relaxation quadratique donne des résultats aux discontinuités floues. La relaxation linéaire permet quant à elle une reconstruction lisse par morceaux, avec des discontinuités bien marquées ; on note toutefois des difficultés de reconstruction des angles.

Sur la première colonne de la partie basse de la figure 4.12, on observe l'effet de stircasing caractéristique de la relaxation TV sur les deux expérimentations. Toutefois, cette relaxation, elle aussi convexe, permet une meilleure reconstruction des discontinuités et des angles.

Quant à la relaxation convexe de la fonctionnelle de Mumford-Shah introduite par [Strelakovsky et Cremers 2014], elle donne des résultats similaires à notre approche discrète, pour les deux fonctionnelles que nous proposons. Les angles sont correctement reconstruits, les transitions de couleurs sont nets, et l'image restaurée ne présente pas les effets de stircasing que l'on peut observer avec la méthode TV.

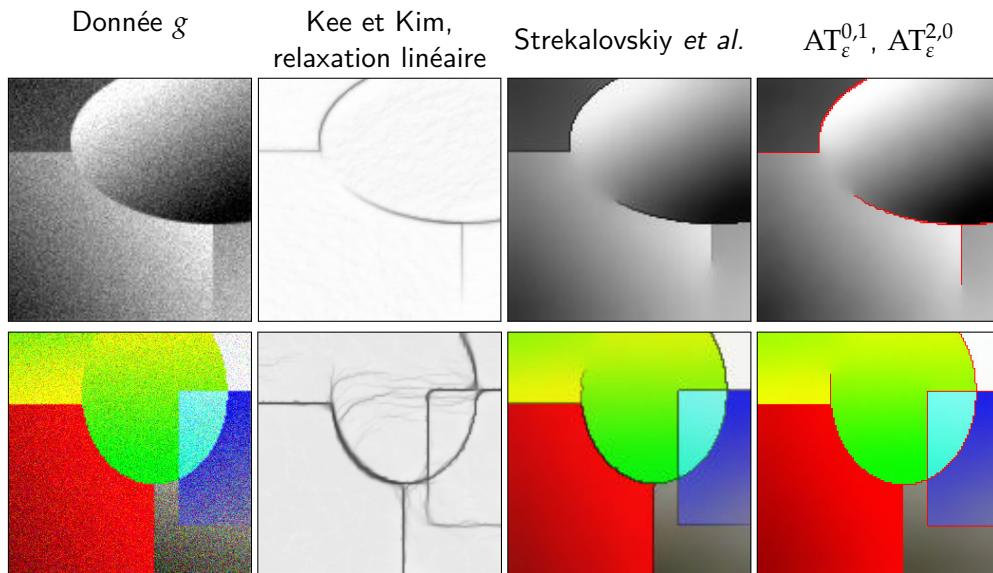


FIGURE 4.13 – Comparaison des résultats d'extraction de contours sur des images synthétiques bruitées extraites de [Kee et Kim 2014]. Les paramètres sont les mêmes que ceux de la figure 4.12.

Concernant la reconstruction des contours, on observe sur la figure 4.13 que la relaxation linéaire de Kee et Kim donne des contours plus ou moins diffus, voire même faux (notamment sur l'image en couleurs). Cela contraste avec les contours de dimension 1 que Strelakovsky et al. et nous arrivons à reconstruire. On remarque de plus sur l'image couleur que la séparation

TABLE 4.2 – Résultats de PSNR pour différentes méthodes de la littérature et nos approches discrètes. Le meilleur score est indiqué en gras pour chaque image.

| | Ellipse dégradée (niveaux de gris) | Ellipse dégradée (couleur) | Mandrill | Lena |
|--------------------------|---------------------------------------|-------------------------------|----------------|----------------|
| TV, Getreuer | 35.8716 | 29.0235 | 24.9480 | 29.3547 |
| TV, Duran <i>et al.</i> | 36.7078 | 28.7871 | 24.9641 | 29.3598 |
| Strelakovskiy et Cremers | 31.9163 | 29.1237 | 24.1400 | 28.4629 |
| $AT_{\varepsilon}^{0,1}$ | 34.8456 | 32.5574 | 25.0492 | 29.0330 |
| $AT_{\varepsilon}^{2,0}$ | 35.0324 | 29.5660 | 25.9968 | 28.9191 |

TABLE 4.3 – Résultats de SSIM moyenne pour différentes méthodes de la littérature et nos approches discrètes. Le meilleur score est indiqué en gras pour chaque image.

| | Ellipse dégradée (niveaux de gris) | Ellipse dégradée (couleur) | Mandrill | Lena |
|--------------------------|---------------------------------------|-------------------------------|---------------|---------------|
| TV, Getreuer | 0.9569 | 0.9741 | 0.7706 | 0.8468 |
| TV, Duran <i>et al.</i> | 0.9430 | 0.9717 | 0.7719 | 0.8458 |
| Strelakovskiy et Cremers | 0.9680 | 0.9884 | 0.7540 | 0.8281 |
| $AT_{\varepsilon}^{0,1}$ | 0.9815 | 0.9897 | 0.7738 | 0.8287 |
| $AT_{\varepsilon}^{2,0}$ | 0.9805 | 0.9887 | 0.7685 | 0.8297 |

entre le bleu et le noir est clairement marquée avec l'approche discrète quand elle est plutôt légère avec la relaxation linéaire et la relaxation convexe de Mumford-Shah.

La figure 4.14 présente des résultats sur des images réelles obtenus avec la relaxation TV, la relaxation convexe de Mumford-Shah et notre approche. En complément, la table 4.2 indique le PSNR et le score SSIM de l'ensemble des résultats des figures 4.12 et 4.14.

On peut à nouveau observer sur les premières colonnes de la figure 4.14 l'effet de staircasing caractéristique de la méthode TV, notamment au niveau des joues, du nez, du front et du chapeau de Lena. Dans le cas du mandrill, on remarque que la méthode TV lisse peu et conserve beaucoup de bruit au niveau des poils. Cette méthode s'avère ainsi moins adaptée pour des images bruitées présentant des structures fines. Concernant la méthode de Strelakovskyi *et al.* (deuxième colonne), on note qu'une certaine quantité de bruit demeure, et on voit même apparaître, notamment sur l'arête du nez de Lena, un à-plat de couleur très net.

Notre méthode se montre quant à elle robuste au bruit tout en conservant les structures fines de l'image. Dans le cas du mandrill, la fonctionnelle discrète $AT_{\varepsilon}^{0,1}$ conserve un peu plus de bruit que la fonctionnelle $AT_{\varepsilon}^{2,0}$. Mais pour le mandrill comme pour Lena, l'image est lisse par morceaux, sans effet de staircasing.

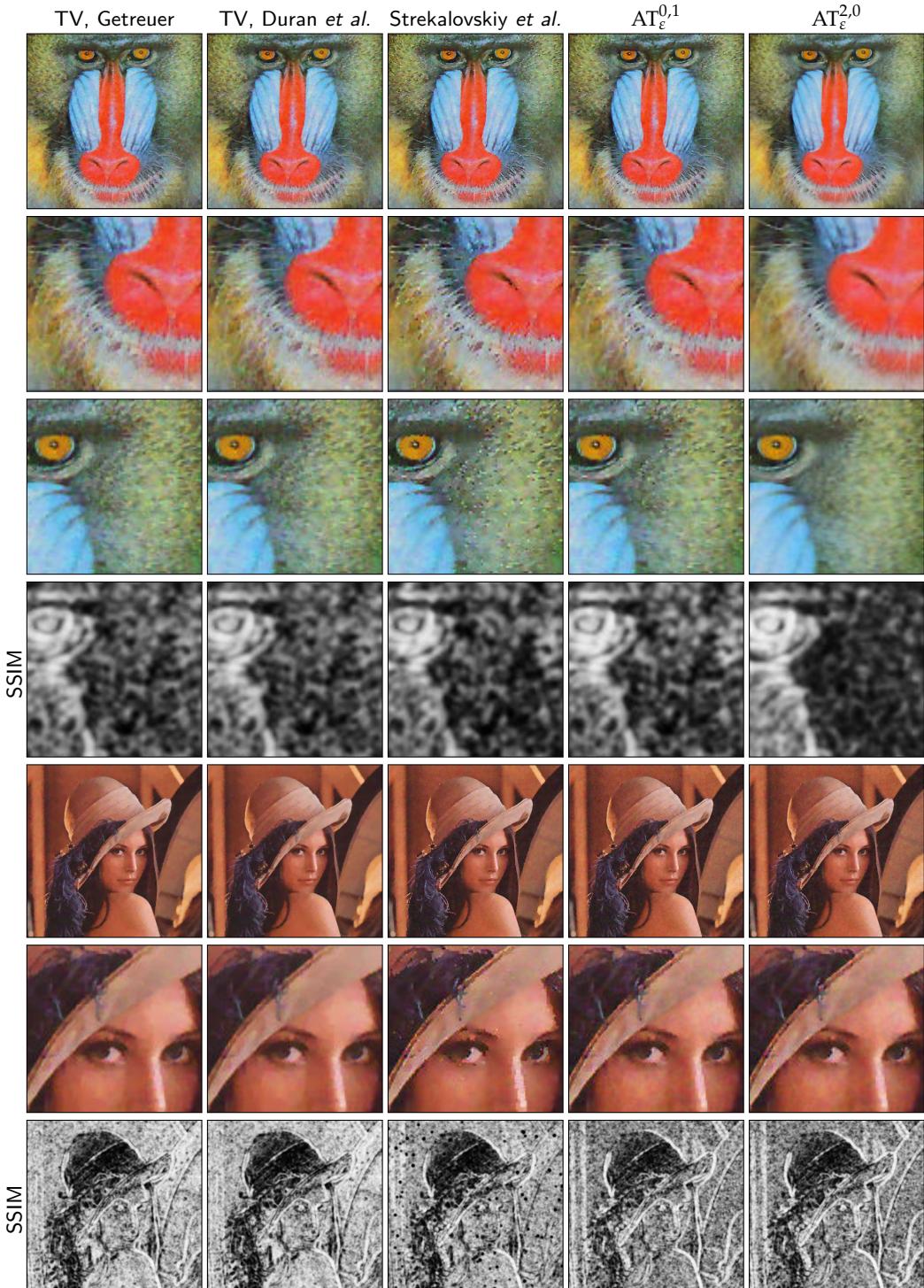


FIGURE 4.14 – Comparaison de notre approche avec d'autres méthodes de la littérature pour des images dégradées par un bruit gaussien de variance $k = 0.1$. Paramètres : TV : [Getreuer 2012a] : $\sigma = (21, 23)$ resp. ; [Duran et al. 2013] : $\sigma = (20, 23)$ resp. [Strelakovsky et Cremers 2014] : $\alpha = (1.35, 3.31)$, $\lambda = (0.0667, 0.0705)$ resp.
 $AT_{\varepsilon}^{0,1}$: $\alpha = (0.833, 0.48)$, $\lambda = (0.0376, 0.0217)$, $\varepsilon = 4 \searrow 0.25$ resp.
 $AT_{\varepsilon}^{2,0}$: $\alpha = (0.833, 0.47)$, $\lambda = (0.0649, 0.0376)$, $\varepsilon = 4 \searrow 0.25$ resp.

4.5 Autres applications en analyse d'image

Il est possible d'adapter notre approche à d'autres applications en analyse d'image, et nous présentons dans cette section quelques exemples en segmentation et en inpainting.

4.5.1 Segmentation non contrainte

La segmentation non contrainte consiste à reconstruire une image constante par morceaux (ou éventuellement, seulement les contours des régions), sans prescrire à l'avance le nombre de régions. Dans notre cas, cela revient à pénaliser très fortement le terme de lissage, ou de manière équivalente, à choisir α très petit devant le terme d'attache aux données. Cependant, le choix du "bon" α n'est pas trivial, ni unique. La figure 4.15 montre l'espace-échelle des résultats sur α et λ . On observe que les résultats de la diagonale sont de bons candidats de segmentation, et le choix final dépend du sens que l'on donne à la segmentation d'image. Cette approche permet en effet de détecter non seulement l'homogénéité des régions mais aussi les hétérogénéités, avec l'apparition de contours ouverts. La persistence d'une région pour différentes valeurs des paramètres donne par ailleurs des informations quant à la pertinence de cette région.

La figure 4.16 montre d'autres résultats de segmentation obtenus avec notre approche, dont le manchot de la figure 4.15.

L'avantage de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli est qu'elle permet d'extraire les contours. Ainsi, les résultats de segmentation peuvent être utilisés plus particulièrement pour le cartooning. La figure 4.16 en propose un exemple à partir de la segmentation de la pyramide de la figure 4.16.

4.5.2 Inpainting

Notre méthode s'adapte très facilement pour l'inpainting. On note Ω_U le domaine de l'image que nous souhaitons reconstruire, sur lequel on ne prend pas en compte l'attache aux données. Ainsi, on s'intéresse à l'énergie suivante :

$$\begin{aligned} \text{AT}_{\varepsilon,inp}(u, v) = & \alpha \sum_{i=1}^N \int_{\Omega \setminus \Omega_U} |u_i - g_i|^2 dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} v^2 |\nabla u_i|^2 dx \\ & + \lambda \int_{\Omega} \varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{(1-v)^2}{4} dx \quad (4.15) \end{aligned}$$

En notant \mathbf{P} la matrice qui vaut 0 sur Ω_U , et 1 sinon, on peut réécrire les deux formulations discrètes pour l'inpainting,



FIGURE 4.15 – Espace-échelle sur les paramètres α et λ pour la segmentation avec la fonctionnelle $\text{AT}_\varepsilon^{2,0}$.



FIGURE 4.16 – Exemples de segmentation non supervisée avec la méthode $\text{AT}_\varepsilon^{2,0}$.

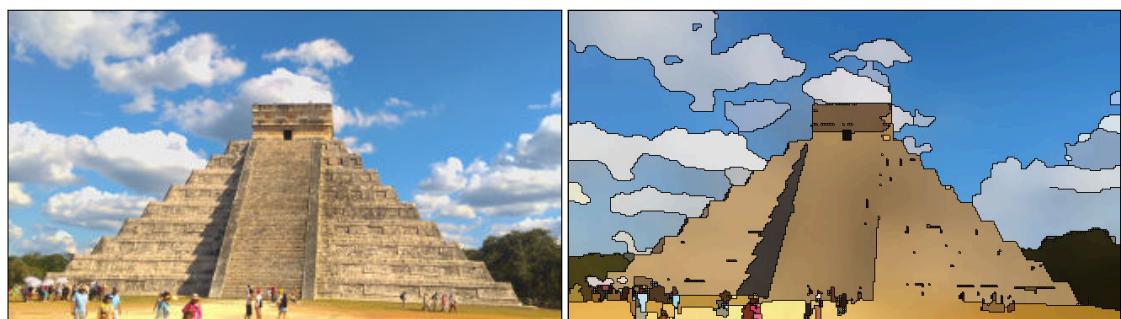


FIGURE 4.17 – Exemple de cartooning obtenu avec la fonctionnelle $\text{AT}_\varepsilon^{2,0}$.

$$\begin{aligned} \text{AT}_{\varepsilon,inp}^{0,1}(u,v) = & \alpha \sum_{i=1}^N (u_i - g_i)^\top \mathbf{P}(u_i - g_i) + \sum_{i=1}^N u_i^\top \mathbf{A}^\top v v^\top \mathbf{A} u_i + \lambda \varepsilon v^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{B} + \mathbf{A} \mathbf{A}^\top) v \\ & + \frac{\lambda}{4\varepsilon} (1-v)^\top (1-v) \quad (4.16) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{AT}_{\varepsilon,inp}^{2,0}(u,v) = & \alpha \sum_{i=1}^N (u_i - g_i)^\top \mathbf{P}(u_i - g_i) + \sum_{i=1}^N u_i^\top \mathbf{B}^\top \text{diag}(\mathbf{M}_{01} v) \mathbf{B} u_i + \lambda \varepsilon v^\top \mathbf{A} \mathbf{A}^\top v \\ & + \frac{\lambda}{4\varepsilon} (1-v)^\top (1-v) \quad (4.17) \end{aligned}$$

Numériquement, on initialise u avec des valeurs aléatoires sur Ω_U .

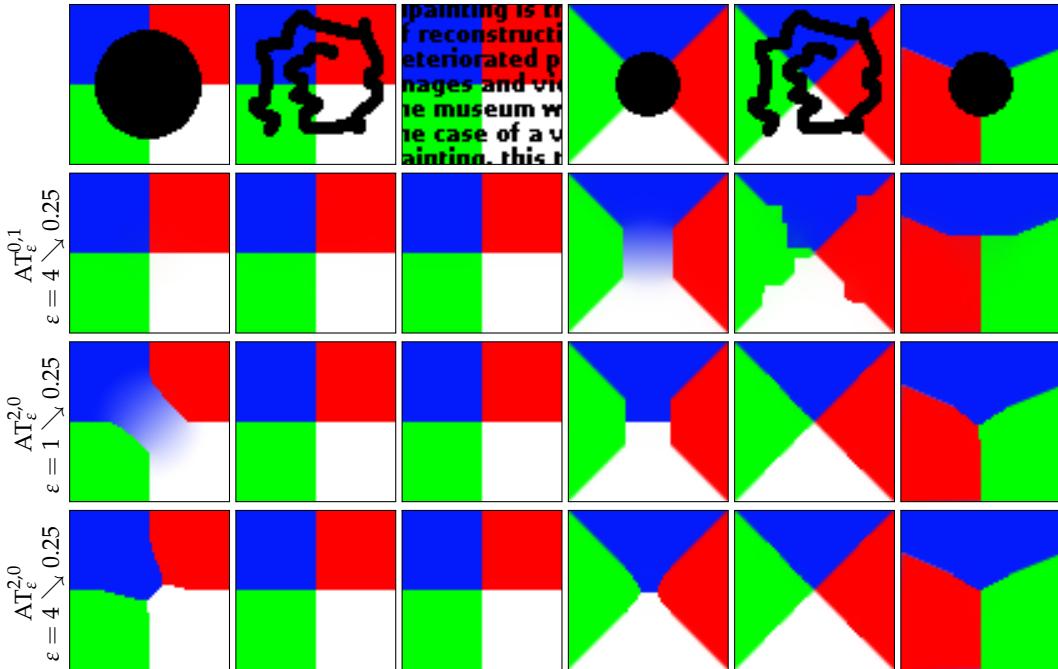


FIGURE 4.18 – Inpainting d'images synthétiques avec les fonctionnelles $\text{AT}_{\varepsilon,inp}^{0,1}$ et $\text{AT}_{\varepsilon,inp}^{2,0}$.

Comme l'illustre la figure 4.18, la fonctionnelle $\text{AT}_{\varepsilon,inp}^{0,1}$ introduit de nombreux artefacts, dûs au fait que cette fonctionnelle minimise en fait la longueur L^1 des discontinuités, et tous les chemins discrets joignant deux points du bord de Ω_U (dans un certain rectangle limite) sont solutions. Le modèle $\text{AT}_{\varepsilon,inp}^{0,1}$ choisit indifféremment l'un de ces chemins, en fonction de l'ordre des cellules dans le complexe linéaire.

La fonctionnelle $\text{AT}_{\varepsilon,inp}^{2,0}$ permet quant à elle de reconstruire des angles à 120° à l'interface entre trois régions, et de détecter les deux points triples caractéristiques en présence de quatre régions. Contrairement au modèle $\text{AT}_{\varepsilon,inp}^{0,1}$, la fonctionnelle $\text{AT}_{\varepsilon,inp}^{2,0}$ calcule une moyenne de la



FIGURE 4.19 – Inpainting sur image réelle. À gauche : image avec zone masquée Ω_U en noir ; à droite : image restaurée avec la fonctionnelle $AT_{\varepsilon,inp}^{2,0}$, pour $\alpha = 1$, $\lambda = 0.05$, $\varepsilon = 4 \searrow 0.25$.

longueur L_1 des discontinuités sur un voisinage dépendant de ε . Ainsi, pour de larges valeurs de ε , la longueur L_1 optimisée se rapproche de la longueur L_2 , beaucoup plus naturelle pour l'inpainting, et permet de localiser correctement les discontinuités. La figure 4.18 montre ainsi des résultats similaires à ceux du modèle $AT_{\varepsilon,inp}^{0,1}$ si on choisit une valeur initiale de ε trop faible, et une bonne reconstruction des points triples pour une valeur ε_1 suffisamment grande, et proportionnelle à la taille du domaine inconnu Ω_U . Le choix de ε est donc capital pour l'inpainting, plus encore que celui des deux autres paramètres α et λ .

La figure 4.19 illustre finalement un exemple d'inpainting sur une image réelle, avec la fonctionnelle $AT_{\varepsilon,inp}^{2,0}$ qui semble mieux correspondre à l'inpainting. On observe quelques ombres sur la droite de l'image restaurée, qui s'expliquent par le fait que les méthodes variationnelles diffusent l'information sans tenir compte de la texture (voir section 1.5). Ainsi, pour des images bien plus texturées que l'image choisie dans la figure 4.19, il est indispensable de coupler le modèle avec des techniques de reconstruction de texture.

4.6 Discussions

4.6.1 Apports du calcul discret

L'un des apports majeurs de l'utilisation du calcul discret pour la minimisation de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli est la possibilité de reconstruire des contours de dimension un, et exactement entre les pixels de l'image.

Par ailleurs, la résolution alternée des deux équations (linéaires) d'Euler-Lagrange permet à la méthode de converger rapidement. Cet algorithme de descente par bloc nous garantit de plus, d'après le théorème de [Bertsekas 1999], la convergence des solutions vers un point selle.

4.6.2 Limitations

Notre approche, comme la plupart des méthodes utilisées pour l'analyse d'images, est dépendante de plusieurs paramètres, ε , α et λ . Le premier est inhérent à la Γ -convergence, et on remarquera que pour l'ensemble des expérimentations présentées, le paramètre ε était compris entre 4 et 0.25, avec un taux de décroissance de $\frac{1}{2}$. Quant aux paramètres α et λ , leur rôle a été discuté à la section 4.3. Le choix de ces deux paramètres est primordial, et dépend du type d'application et donc du type de résultat souhaité. Cependant, on note que chacune des applications est très robuste au paramétrage.

Le choix d'un jeu de paramètres fixe implique par ailleurs que l'approche proposée ne serait pas efficace en présence d'un bruit d'intensité variable, comme l'illustre la figure 4.20. En effet, les paramètres choisis conviennent pour éliminer un certain niveau de bruit de variance σ^* . Ainsi, sur les parties de l'image où le bruit est moins important, la restauration est floue et peu de contours sont reconstruits, tandis que sur les zones où l'intensité de bruit est plus grande que σ^* , le lissage n'est pas assez important, et une grande quantité de bruit est conservée. Cette autre limitation pourrait cependant être corrigée en considérant $\alpha = \alpha(x)$ (et éventuellement $\lambda = \lambda(x)$) afin de choisir un lissage adapté au bruit localement.



FIGURE 4.20 – Restauration d'image avec le modèle $AT_{\varepsilon}^{0,1}$ pour un bruit de variance variable $\sigma \in [0.05, 0.25]$.

Concernant plus particulièrement l'inpainting, le modèle n'est pour l'instant évidemment pas compétitif avec les méthodes actuelles de l'état de l'art, notamment les méthodes par association de patchs (voir section 1.5). Il faudrait envisager d'intégrer un modèle de filtrage de texture à la fonctionnelle $AT_{\varepsilon}^{2,0}$, qui semble plus adaptée à cette application.

4.7 Conclusion

Le défaut des schémas de discrétisations classique pour la minimisation de fonctionnelles Γ -convergentes est l'introduction d'un pas de discrétisation h , qui doit tendre vers 0 pour la convergence de la solution approchée vers la solution continue. En utilisant le calcul discret pour reformuler la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli, on s'est affranchit de la contrainte du pas de grille, et seul le paramètre de Γ -convergence ε nécessite de tendre vers 0. De plus, la

possibilité de placer v entre les cellules où sont définies u et g nous permet de réellement faire tendre ε vers 0 pour respecter le processus de Γ -convergence, et ainsi affiner les contours jusqu'à obtenir des discontinuités 1-dimensionnelles, sans que v ne disparaisse. De fait, les résultats de restauration d'image sont beaucoup plus robustes au bruit, et compétitifs avec les méthodes convexes. L'approche proposée s'avère par ailleurs prometteuse pour d'autres applications telles l'inpainting ou la segmentation.

5

APPLICATION AU LISSAGE DU CHAMP DE NORMALES ET À LA DÉTECTION DE SAILLANCES D'UNE SURFACE DE \mathbb{R}^3

L'évolution constante des techniques d'imagerie 3D nécessite le développement d'outils toujours plus performants pour l'étude des propriétés géométriques d'objets discrets en dimension trois, et notamment de leur bord.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons en particulier aux surfaces digitales, et nous proposons d'utiliser la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli pour en régulariser le champ de normales tout en préservant les saillances de l'objet.

Nous exposerons dans un premier temps le problème d'extraction de saillances et dans quelle mesure la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli peut être adaptée pour résoudre ce problème, puis nous ferons un bref rappel des méthodes d'extraction de saillances proposées dans la littérature. Finalement, nous présenterons des résultats numériques, parmi lesquels des comparaisons avec les méthodes de la littérature.

Contributions.

À la section 5.1 nous proposons d'adapter la formulation discrète (4.4) vue au chapitre 4 au problème de régularisation du champ de normales d'une surface digitale de l'espace et à l'extraction de saillances.

Puis nous montrons à la section 5.4 les résultats numériques de cette approche, que nous comparons avec des méthodes récentes de la littérature.

Ce chapitre à fait l'objet d'une publication [Coeurjolly *et al.* 2016].

5.1 Fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli pour la détection de saillances

Les surfaces digitales sont des surfaces particulières, à coordonnées entières, qui résultent par exemple de la binarisation ou de la segmentation d'images tomographiques ou par résonance magnétique. Ainsi, on s'intéresse en général à des objets originellement lisses, mais dont les bords discrets sont généralement bruités et contiennent des artefacts dûs à la structure particulière des surfaces digitales.

La figure 5.1 montre un exemple d'application à l'étude du métamorphisme de la neige. À l'échelle microscopique, les propriétés thermo-mécaniques de la neige se déduisent de la géométrie de l'interface entre l'air et la glace. Ainsi, on binarise dans un premier temps une image tomographique (voir figure 5.1 (a)) pour extraire cette interface. Il est dès lors important d'utiliser une méthode de régularisation de la surface qui préserve les saillances afin de ne pas détruire les micro-structures présentes.

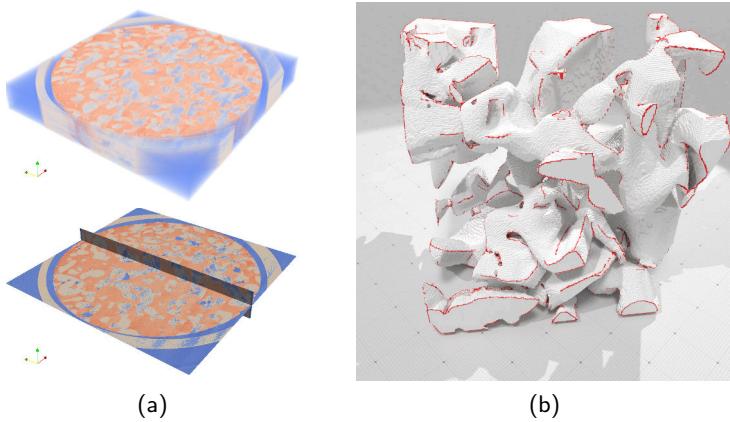


FIGURE 5.1 – Analyse d'une micro-structure 3D de neige dans Material Science. À gauche : image tomographique volumétrique d'un échantillon de neige à partir de laquelle on analyse la géométrie de l'interface entre air/glace pour en déduire les propriétés du matériau (LIRIS - 3SR - MétéoFrance - CEN/CNRM GAME). À droite : on utilise la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli pour extraire les saillances de l'échantillon et retrouver les facettes de la neige.

Ainsi, nous proposons d'utiliser la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli pour ce type d'application. Dans notre cas, on ne régularise pas directement la surface mais le champ de vecteurs normaux à celle-ci, dont les discontinuités sont exactement les saillances de l'objet.

Pour cela, on choisit Ω une surface discrète de \mathbb{R}^3 , $g \in \mathbb{R}^3$ le champ de normales unitaire en entrée, et $u \in \mathbb{R}^3$ le champ de normales reconstruit. Dans ce contexte, v représente alors les discontinuités du champ de normales, autrement dit les saillances de notre objet discret.

Étant donné que les estimateurs discrets du champ de normales d'une surface digitale, que nous présenterons plus en détails à la section 5.2 associent les normales aux faces, nous choisirons naturellement la formulation discrète sur les faces et les sommets (4.4), que nous rappelons :

$$\begin{aligned} DAT_{\varepsilon}^{2,0}(u, v) = & \alpha \sum_{i=1}^N \langle u_i - g_i, u_i - g_i \rangle_2 + \sum_{i=1}^N \left\langle v \wedge \bar{x}_1 \bar{\mathbf{d}}_0 \star_2 u_i, v \wedge \bar{x}_1 \bar{\mathbf{d}}_0 \star_2 u_i \right\rangle_1 \\ & + \lambda \varepsilon \langle \mathbf{d}_0 v, \mathbf{d}_0 v \rangle_1 + \frac{\lambda}{4\varepsilon} \langle 1 - v, 1 - v \rangle_0 \quad (5.1) \end{aligned}$$

5.2 Estimateurs discrets du champ de normales

Approche par mesure de covariance de Voronoï (VCM) [Merigot et al. 2011]. Cette approche est originellement proposée pour des nuages de points. On associe à chaque point P une mesure de covariance de Voronoï, qui dépend de deux paramètres R et r . Le premier permet de dilater la donnée initiale pour calculer la mesure de covariance. Le second est quant à lui un paramètre de convolution, qui permet de régulariser la mesure, notamment en présence de bruit. Les directions principales en chaque point P du nuage sont finalement celles des vecteurs propres de la convolée de la mesure de covariance de Voronoï.

Transformée de Hough avec aléa (RHT) [Boulch et Marlet 2012]. L'idée est de considérer, pour chaque point P , un très grand nombre de triplets de points aléatoirement choisis dans un voisinage \mathcal{V}_P de P , et de classer la normale à chacun de ces plans dans un histogramme sphérique. La normale estimée est alors celle dont la probabilité est la plus élevée. En effet, si P est un point situé dans une région lisse (et suffisamment loin d'une arête), chacun des triplets considérés forme un plan proche du plan tangent à P , dont la normale est proche du vrai vecteur normal au point P . En revanche, si P est proche d'une arête (mais pas dessus), son voisinage est scindé en deux parties, dont l'une contient P et est notée \mathcal{V}_P^1 . L'autre, notée \mathcal{V}_P^2 , est alors située de l'autre côté de la saillance. Les triplets considérés peuvent être alors de trois types :

- soit composés de points de \mathcal{V}_P^1 , auquel cas les normales calculées sont proches de la normale attendue ;
- soit composés de points de \mathcal{V}_P^2 , auquel cas les normales calculées sont proches de la normale à la surface de l'autre côté de l'arête ;
- soit composés de points de \mathcal{V}_P^1 et \mathcal{V}_P^2 , auquel cas le plan ainsi formé donne une normale mal orientée.

Toutefois, comme $P \in \mathcal{V}_P^1$ et que P n'est pas sur l'arête, \mathcal{V}_P^1 est plus grand que \mathcal{V}_P^2 , et la probabilité de tirer un triplet de points de \mathcal{V}_P^1 est effectivement plus grande que les deux autres.

Leur approche offre des garanties statistiques, et ils obtiennent un champ de normales qui n'est pas lissé autour des arêtes.

Estimateurs basés sur les Invariants Intégraux discrets (II) [Pottmann et al. 2007; Coeurjolly et al. 2014]. Les estimateurs des normales basées sur les invariants intégraux consistent à calculer la matrice de covariance de l'intersection de l'objet avec des boules de différents rayons $(R_i)_i$. La direction de la normale correspond au vecteur propre dont la valeur propre est la plus petite.

5.3 Méthodes d'extraction de saillances

Dans cette section, nous présentons plusieurs méthodes de la littérature pour la détection de saillance, avec lesquelles nous nous comparerons dans la section 5.4.

Approche par mesure de covariance de Voronoï (VCM) [Merigot et al. 2011]. L'approche VCM présentée à la section 5.2 permet aussi de détecter les saillances à partir des valeurs propres λ_i . Ainsi, les auteurs considèrent le quotient $r(P) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$ calculé en chaque point P ; si pour un certain seuil T , $r(P) \geq T$, alors le point P est considéré comme étant une saillance, dont la direction est donnée par le vecteur propre associé à la valeur propre minimale. La valeur de $r(P)$ permet par ailleurs de classer le point P sur une échelle, dont les faibles valeurs désignent les régions plates tandis que les fortes valeurs désignent les saillances.

Extraction de saillances sur un nuage de points [Pauly et al. 2003]. Dans leur approche, Pauly et al. calculent en chaque point P la matrice de covariance pour différentes tailles $(R_i)_i = 0, \dots, n$ de voisinages, dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1^i < \lambda_2^i < \lambda_3^i$. Ils s'intéressent alors au quotient $\sigma_i(P) = \frac{\lambda_1^i}{\lambda_1^i + \lambda_2^i + \lambda_3^i}$, et observent que les valeurs propres diminuent quand la courbure augmente, ce qui implique que la valeur de σ_i est plus grande sur les arêtes que sur les parties plates de la surface. La classification de P dépend de la valeur de $\omega_P = \#\{\sigma_i \geq \sigma_{max} : i = 0, \dots, n\}$ sur l'échelle $0, \dots, n$: ω_P grand signifie que P est sur une saillance.

Growing least square [Mellado et al. 2012]. En chaque point P de la surface, les auteurs s'intéressent à la sphère qui interpole le mieux les points situés dans un voisinage de taille t autour de P . Ils calculent alors la distance τ entre P et le niveau zéro de la surface, la direction normale η en P et la courbure κ . Ils définissent ensuite une fonction $\nu(P, t) = \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 + \left(t \frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(t^2 \frac{d\kappa}{dt} \right)^2$, qui mesure la variation géométrique au point P . En répétant l'analyse à différentes échelles $t \in [r_{min}, r_{max}]$, la fonction $f(P) = \int \tanh(\nu(P, t)) dt$ leur permet de classer les régions sur une échelle continue selon qu'elles présentent peu ou de très fortes variations.

Extraction de saillance sur une surface digitale [Levallois et al. 2015]. Leur approche est basée sur l'analyse de l'espace-échelle des courbures obtenues avec un estimateur basé sur les invariants intégraux. Ainsi, pour un intervalle donné de rayons $[r_{min}, r_{max}]$, les valeurs de courbure estimées sur chaque surfel permettent de les classifier en trois groupes : arête, région lisse, ou région plate.

5.4 Résultats numériques

5.4.1 Détails d'implémentation

Adaptation des méthodes conçues pour les nuages de points. Exceptée la méthode de [Levallois *et al.* 2015], qui est spécifique aux surfaces digitales, les méthodes de [Pauly *et al.* 2003; Merigot *et al.* 2011; Mellado *et al.* 2012] ont été initialement proposées pour l'analyse de nuages de points. À des fins de comparaisons, ces méthodes ont donc été adaptées aux surfaces digitales, en considérant qu'une surface digitale est en fait un nuage de points particulier, dont les coordonnées sont entières, et auquel on associe une structure combinatoire.

Modèle de bruit. Étant donné qu'on travaille avec des surfaces digitales, il est nécessaire d'adapter le modèle de bruit à ce type d'objet. Cela consiste à changer la valeur d'un point P quelconque, situé à distance d_P du bord de la surface, avec une probabilité k^{1+d_P} , où $k \in [0, 1]$ est un paramètre choisi par l'utilisateur. Les outliers sont de plus éliminés, pour ne conserver que la surface principale.

Algorithme. Tout comme pour l'implémentation de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli pour les images (chapitre 4), nous avons utilisé la bibliothèque [DGtal] pour implémenter la fonctionnelle discrète (5.1) en dimension trois. Cette bibliothèque propose de plus des versions optimisées et réécrites pour les surfaces digitales des différents estimateurs présentés à la section 5.2.

L'algorithme est sensiblement le même que celui pour les images couleurs, à ceci près que l'on rajoute une étape de normalisation du champ de vecteurs normaux estimé à chaque itération. Cette étape n'est pas cruciale, dans la mesure où le champ de vecteurs en entrée g est unitaire, et force donc l'approximation u à se rapprocher d'un champ unitaire.

5.4.2 Robustesse au bruit

La figure 5.2 illustre les résultats obtenus avec la minimisation de la fonctionnelle discrète $AT_{\varepsilon}^{2,0}$ pour la détection de saillances et la régularisation du champ de normales, et ce pour différents niveaux de bruits et valeurs de α .

Les résultats sont comparables à ceux obtenus sur les images : les saillances détectées sont 1-dimensionnelles, et correspondent bien aux arêtes de la forme. En observant les résultats des trois dernières lignes, on constate que le champ de normales, affiché dans le repère RGB, est effectivement lissé et se rapproche de celui du cas non bruité de la première ligne. La

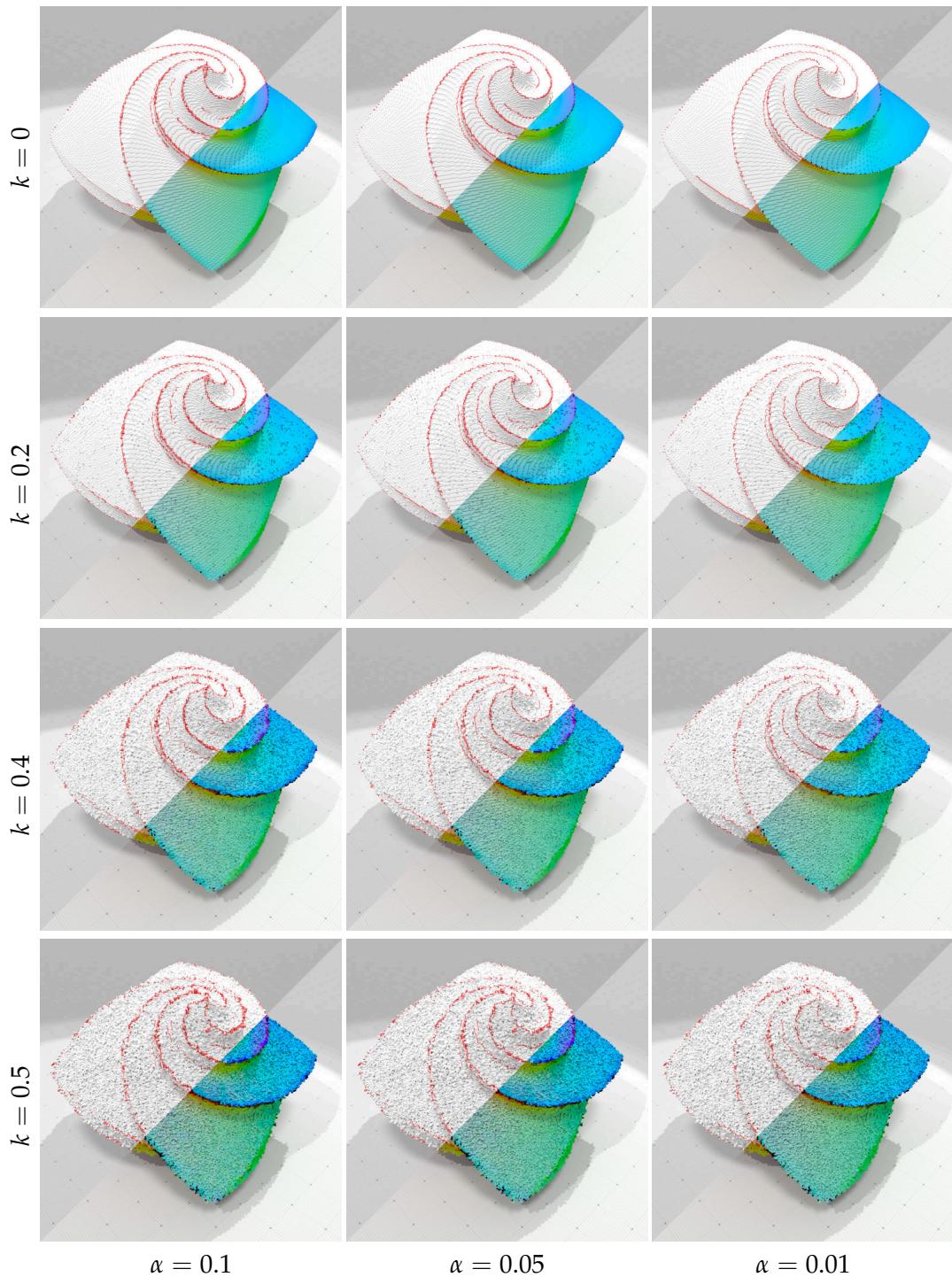


FIGURE 5.2 – Extraction de saillances (coin supérieur gauche) et régularisation du champ de normales (coin inférieur droit) pour différents niveaux de bruit k , différentes valeurs de α , $\lambda = 0.01$ et $\varepsilon = 2 \searrow 0.25$.

Algorithme 3 : OPTIMIZE-AT($(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) : 2\text{-forms}, (\alpha, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_r) : \text{reals}$)

```

1 Var  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) : 2\text{-forms}, (\mathbf{v}, \mathbf{v}') : 0\text{-forms}, \varepsilon : \text{real} ;$ 
2 begin
3   foreach  $i \in \{1, 2, 3\}$  do  $\mathbf{u}_i \leftarrow \mathbf{g}_i;$ 
4    $\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{1};$ 
5    $\varepsilon \leftarrow \varepsilon_1;$ 
6   while  $\varepsilon \geq \varepsilon_2$  do
7     repeat
8        $\mathbf{v}' \leftarrow \mathbf{v};$ 
9       Solve eq.  $\left[ \alpha \mathbf{Id} - \mathbf{B}'^\top \text{diag}(\mathbf{M}_{01}\mathbf{v})^2 \mathbf{B}' \right] \mathbf{u}_i = \alpha \mathbf{g}$  for all  $\mathbf{u}_i;$ 
10      Solve eq.  $\left[ \frac{\lambda}{4\varepsilon} \mathbf{Id} + \lambda \mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \mathbf{M}_{01}^\top \text{diag}(\mathbf{B}'\mathbf{u})^2 \mathbf{M}_{01} \right] \mathbf{v} = \frac{\lambda}{4\varepsilon} \mathbf{1}$  for  $\mathbf{v};$ 
11      until  $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|$  is small;
12       $\varepsilon \leftarrow \varepsilon / \varepsilon_r;$ 
13    Normalize  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3);$ 
14  return  $((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3), \mathbf{v}) ;$ 

```

méthode se révèle à nouveau très robuste au bruit, tant pour la détection des saillances que pour la régularisation du champ de normales.

Les arêtes détectées dans la première colonne semblent par ailleurs plus épaisses que celles de la dernière colonne. Cela vient du fait que pour ces tests, nous avons utilisé le même paramètre λ . Or comme nous l'avions évoqué à la section 2.4, le paramètre λ contrôle la longueur des discontinuités, et son influence est étroitement liée à celle de α .

5.4.3 Comparaisons avec la littérature

Dans les figures 5.3 et 5.4 nous comparons les résultats de détection de saillances de notre approche (dernière ligne) avec les méthodes présentées à la section 5.3.

D'une manière générale, notre méthode permet l'extraction de saillances plus fines et plus précises, notamment sur des données bruitées. Plus particulièrement, les saillances sont réellement 1-dimensionnelles, puisqu'elles sont définies sur les sommets et les arêtes du complexe, tandis que les autres approches obtiennent des résultats sous forme d'échelle de valeurs, qui nécessitent un post-processing si on souhaite des arêtes de dimension un.

On constate par ailleurs que les méthodes proposées par [Pauly *et al.* 2003] et [Levallois *et al.* 2015] permettent de retrouver des arêtes même peu marquées, par exemple celle présente sur le dessus du fandisk (troisième colonne). Pour les résultats présentés dans les deux figures 5.3 et 5.4 nous avons fait le choix d'utiliser le même jeu de paramètres $(\alpha, \lambda, \varepsilon)$, qui ne permet pas de détecter cette arête. Malgré tout, il serait tout à fait possible de la détecter avec notre approche en affinant le choix de paramètres, et de λ notamment.

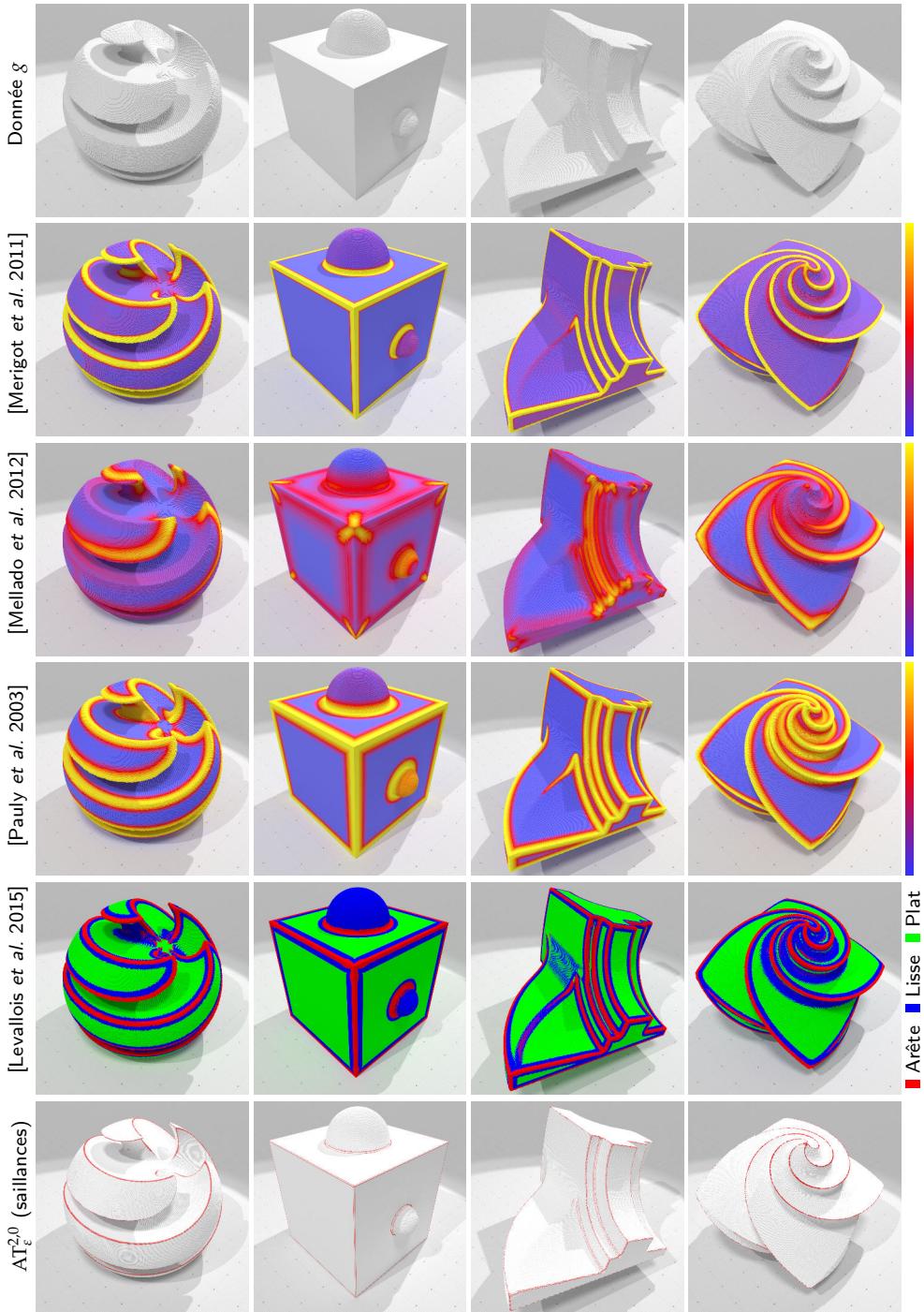


FIGURE 5.3 – Comparaison de la détection de saillances sur des surfaces non bruitées.

[Merigot et al. 2011] : $R_1 = 10$, $r_1 = 10$, $T = 0$;

[Mellado et al. 2012] : $r_{min} = 5$, $r_{max} = 25$;

[Pauly et al. 2003] : $r_{min} = 5$, $r_{max} = 25$, $\tau_{max} = 0.01$;

[Levallois et al. 2015] : $r_{min} = 5$, $r_{max} = 20$;

$AT_ε^{2,0}$: $\alpha = 0.1$, $λ = 0.01$, $ε = 2 \searrow 0.25$ avec l'estimateur II pour $r = 8$.

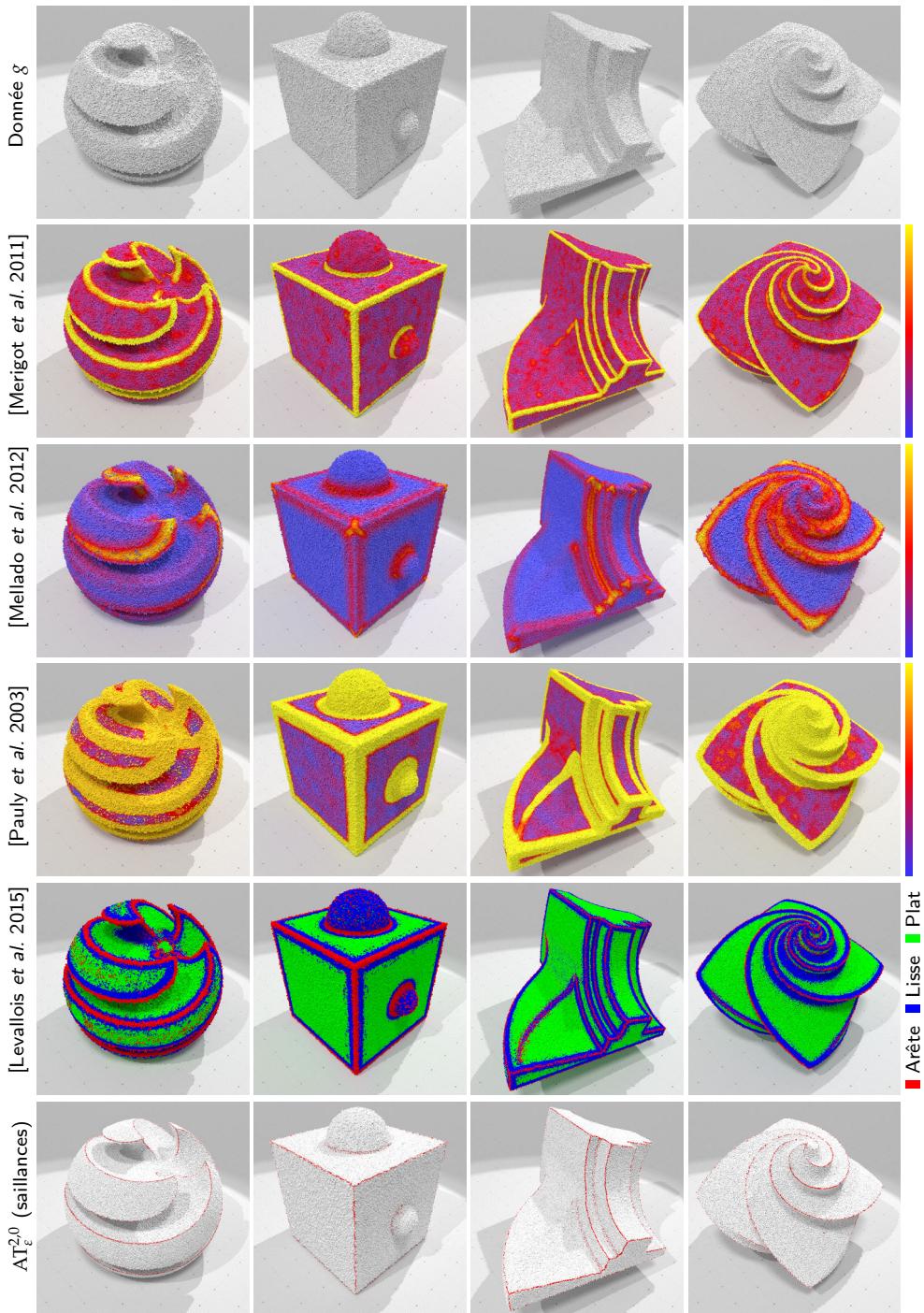


FIGURE 5.4 – Comparaison de la détection de saillances sur des surfaces bruitées pour $k = 0.5$.

[Merigot et al. 2011] : $R_1 = 10$, $r_1 = 10$, $T = 0$;

[Mellado et al. 2012] : $r_{min} = 5$, $r_{max} = 25$;

[Pauly et al. 2003] : $r_{min} = 5$, $r_{max} = 25$, $\tau_{max} = 0.01$;

[Levallois et al. 2015] : $r_{min} = 5$, $r_{max} = 20$;

$AT_\epsilon^{2,0}$: $\alpha = 0.1$, $\lambda = 0.01$, $\epsilon = [2, 0.25]$ avec l'estimateur II pour $r = 8$.

Nous proposons à la figure 5.5 une comparaison pour différents niveaux de bruit des résultats de regularisation obtenus notre approche et les méthodes VCM, RHT et II présentées à la section 5.2. Pour faciliter la visualisation, nous n'affichons pas le champ de vecteurs normaux mais la surface sous-jacente.

Si les méthodes VCM et RHT se révèlent être robustes au bruit, tout en conservant un lissage modéré notamment sur les arêtes, les résultats obtenus avec II dépendent fortement du rayon d'intégration. En effet, un faible rayon ($r = 4$) préserve les arêtes mais ne permet pas un lissage satisfaisant, tandis qu'un rayon trop grand ($r = 8$) élimine correctement le bruit, au prix de la dégradation des arêtes.

Pour notre approche, nous avons utilisé en entrée le champ de normales estimé par la méthode II pour un rayon $r = 4$. On constate alors que la reconstruction que nous obtenons est lisse, sans détérioration des arêtes. Nous discutons à la prochaine section de la robustesse des résultats de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli en fonction de la méthode que nous choisissons pour estimer le champ de normales en entrée.

5.5 Discussions

5.5.1 Stabilité vis-à-vis du champ de normales en entrée

Etant donné que nous utilisons comme champ de normales en entrée le résultat obtenu par l'un des estimateurs proposés à la section 5.2, il est possible de quantifier l'erreur de chacune des méthodes ainsi que l'apport de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli par rapport à l'utilisation des estimateurs seuls.

La figure 5.6 illustre l'erreur entre les champs de vecteurs estimés (avec les méthodes II, RHT et VCM) et régularisés par rapport à la vérité terrain en fonction du rayon r des estimateurs. De part le fonctionnement de ces estimateurs, plus r est grand, plus l'effet de lissage sera important sur le champ estimé. Aussi, il est nécessaire de compenser cet effet de regularisation croissante de la donnée g lorsqu'on utilise la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli, ce que l'on fait en choisissant des valeurs de α qui dépendent de r .

On s'intéresse à l'erreur moyenne et à la proportion de vecteurs dont l'erreur est de plus de 5° . On observe que pour de petits rayons ($r < 6$), les estimateurs éliminent peu le bruit, et la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli régularise très fortement le champ de normales. Pour de plus grands rayons en revanche, l'effet de régularisation de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli tend à disparaître ; cela vient du fait que les champs de vecteurs estimés sont déjà très fortement lissés.

On s'intéresse aux mêmes erreurs dans la figure 5.7, cette fois-ci en fonction de λ . Les graphiques montrent que l'on peut choisir λ dans un intervalle de valeurs très large ($0.001 <$

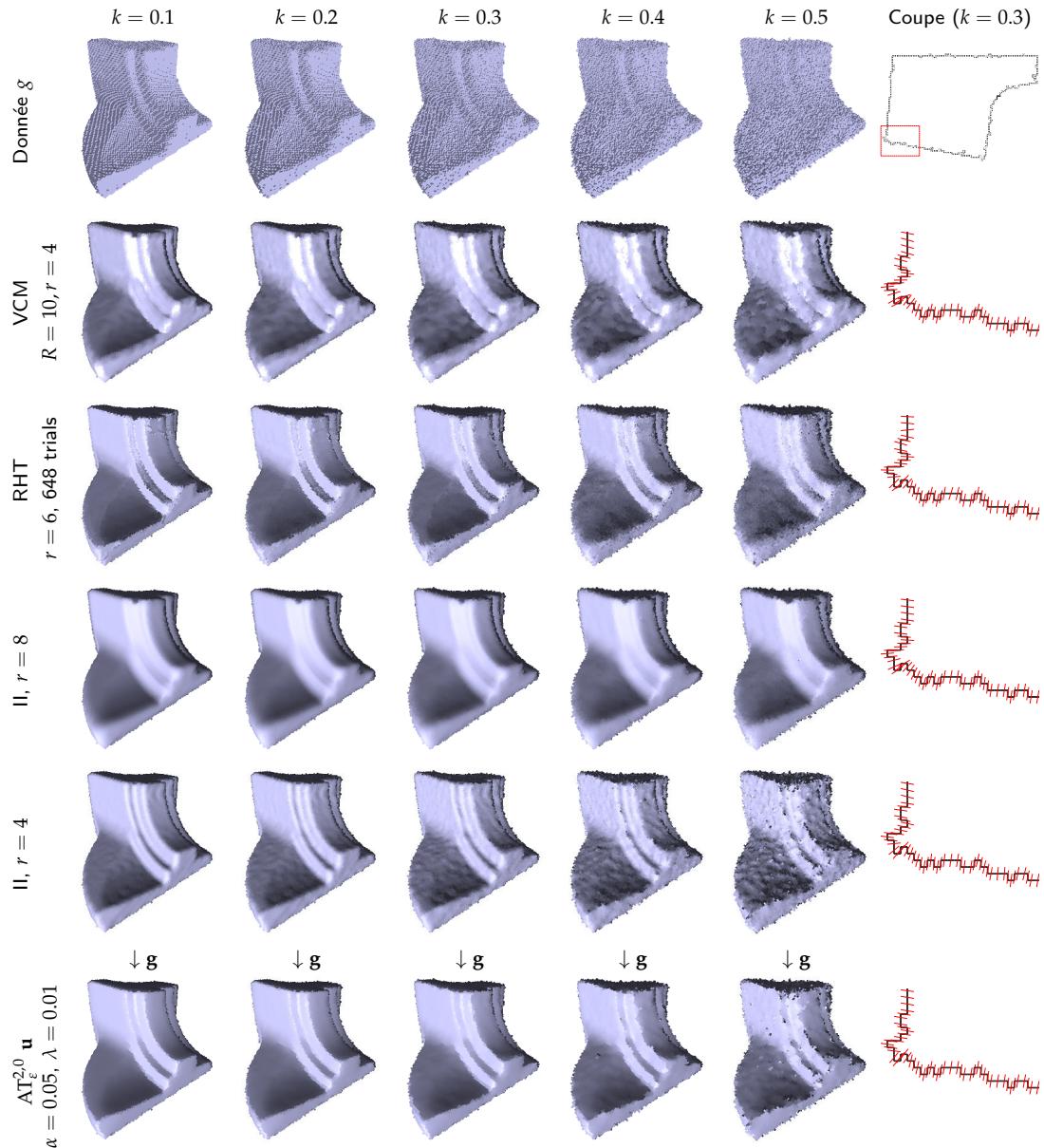


FIGURE 5.5 – Comparaison du champ de normales pour VCM [Merigot *et al.* 2011], RHT [Boulch et Marlet 2012], II avec deux rayons [Coeurjolly *et al.* 2014], et $\hat{\Delta}\Gamma_\varepsilon^{2,0}$ dont l'entrée est donnée par II pour $r = 4$. La dernière colonne représente une coupe au sommet de l'objet avec le champ de normales associé pour chaque méthode.

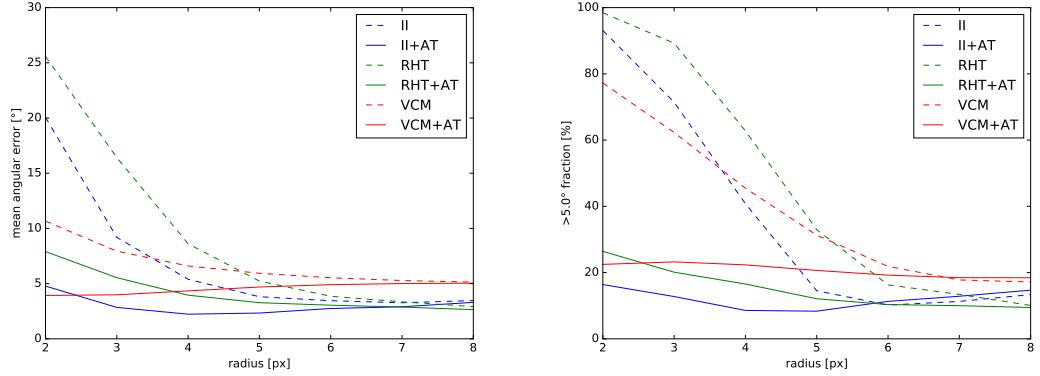


FIGURE 5.6 – Erreurs angulaires des champs de normales estimés et regularisés pour le cube tourné des figures 5.8 et 5.9 en fonction du rayon r des estimateurs, pour $\varepsilon = 2 \searrow 0.25$, $k = 0.4$, $\lambda = 2.5 \cdot 10^{-2}$ et $\alpha = 2.5 \cdot 10^{-3} r^2$.

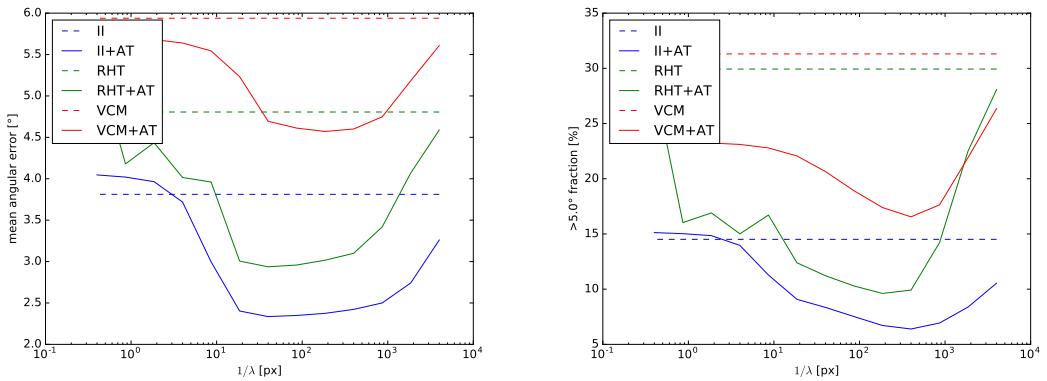


FIGURE 5.7 – Erreurs angulaires des champs de normales estimés et regularisés pour le cube tourné de la figure 5.8 en fonction de λ , pour $\varepsilon = 2 \searrow 0.25$, $k = 0.4$, $r = 5$ et $\alpha = 6.25 \cdot 10^{-2}$.

$\lambda < 0.01$), pour lesquelles l'effet de régularisation est presque le même, et ce quel que soit l'estimateur choisi en entrée.

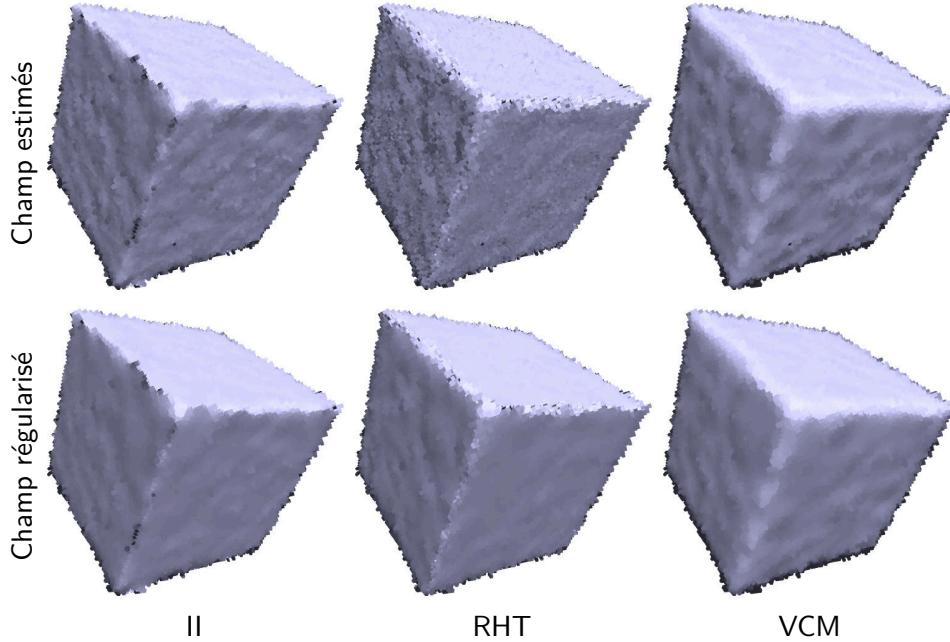


FIGURE 5.8 – Champs de normales estimés et regularisés, pour $k = 0.4$, $\alpha = 0.16$,
 $\lambda = 2.5 \cdot 10^{-2}$, $\varepsilon = 2 \searrow 0.25$ et $r = 5$.

Les figures 5.8 et 5.9 montrent le rendu des champs de normales estimés et régularisés, pour $r = 5$ et $r = 8$ respectivement, pour les mêmes paramètres k , α , λ et ε que ceux utilisés pour les graphiques de la figure 5.6. Pour $r = 5$, l'apport de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli est significatif, en accord avec la partie centrale des graphiques de la figure 5.6. Pour $r = 8$, les courbes d'erreurs de la figure 5.6 montrent que l'effet régularisant de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli est presque nul. Visuellement, on observe toutefois que le champ régularisé est légèrement plus lisse sur les faces. Le rayon important utilisé pour la figure 5.9 empêche cependant la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli de retrouver correctement les arêtes car le champ en entrée est déjà trop fortement lissé.

5.5.2 Limites de la méthodes

Nous avons déjà évoqué à la section 4.6.2 plusieurs limitations inhérentes à la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli, notamment la dépendance en trois paramètres ε , α et λ , ou encore la nécessité d'adapter la méthode si l'on souhaite prendre en compte un modèle de bruit variable sur la surface.

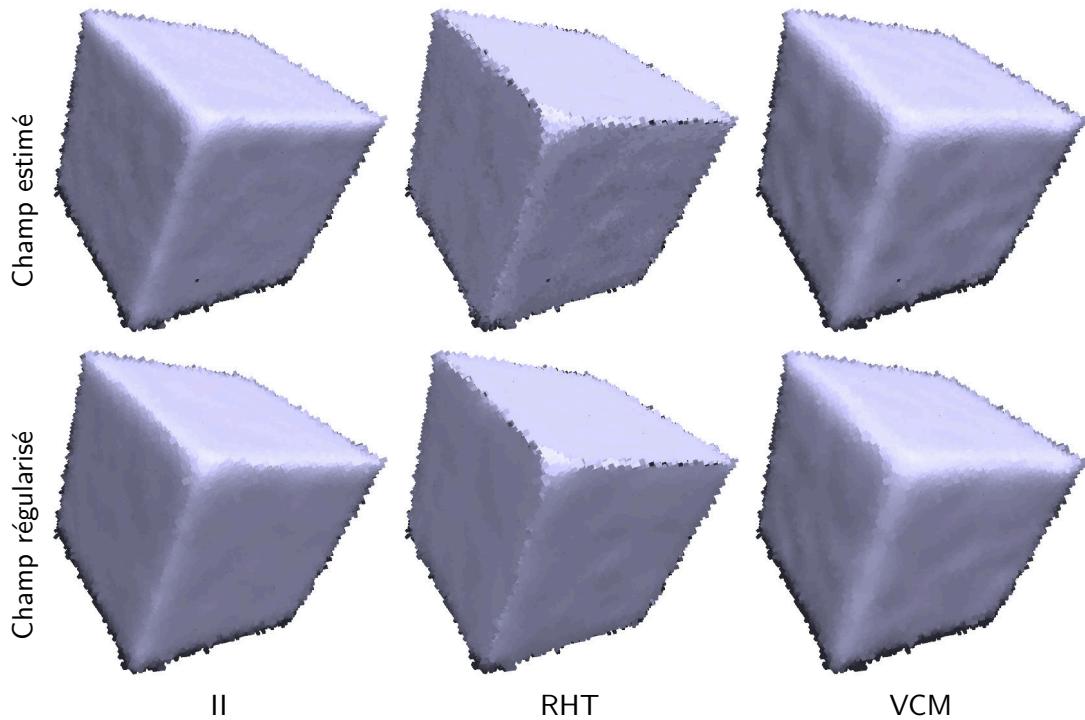


FIGURE 5.9 – Champs de normales estimés et regularisés, pour $k = 0.4$, $\alpha = 0.16$,
 $\lambda = 2.5 \cdot 10^{-2}$, $\varepsilon = 2 \searrow 0.25$ et $r = 8$.

En dimension trois, en remarque de plus que notre méthode est dépendante de la topologie et nécessite donc de travailler avec une surface discrète. Ainsi, elle ne serait pas applicable directement à un nuage de points.

5.6 Conclusion

Si la théorie nous permettait d'imaginer une telle application de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli, en pratique il aurait toutefois été très difficile et très coûteux de l'implémenter avec des éléments finis, éventuellement avec raffinement de maillage, puisque les objets considérés ont en général des milliers de faces, voire des millions pour certains exemples. L'utilisation du calcul discret permet ainsi non seulement d'améliorer les temps de calcul, puisque l'algorithme se réduit à la résolution d'un système linéaire qui converge en quelques itérations, mais aussi d'extraire des saillances réellement 1-dimensionnelles et de reconstruire un champ de normales non lissé à travers les arêtes.

Comme nous l'avons déjà évoqué, la méthode n'est pas restreinte aux surfaces digitales et peut être étendue aux surfaces triangulées, en utilisant les outils proposés par le calcul extérieur discret [Desbrun *et al.* 2005] conçus plus spécifiquement pour ce type de surface. Cette extension nous permettrait ainsi de nous intéresser à des problèmes plus spécifiques

tels que la reconstruction de la surface en optimisant les positions des sommets, dans l'idée des travaux récents [He et Schaefer 2013; Wang *et al.* 2014; Wu *et al.* 2015; Zhang *et al.* 2015].

Cependant, bien qu'il existe des versions approchées de l'opérateur de Laplace sur les nuages de points, les outils disponibles actuellement ne nous permettent pas de reformuler la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli sur de tels objets.

6

PROBLÈME D'OPTIMISATION DE FORMES AVEC CONDITION AU BORD DE ROBIN

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution numérique d'un problème variationnel d'isolation optimale. Ce problème d'optimisation de formes, impliquant la résolution de l'équation de Laplace avec condition au bord de Robin, sera approché numériquement par Γ -convergence. Si l'étude du problème nécessite dans un premier temps de se placer dans un cadre théorique assez général, pour démontrer l'existence et la régularité partielle des solutions notamment, nous essaierons de comprendre le fonctionnement des approximations proposées et les enjeux de l'implémentation numérique dans un cas simplifié.

Dans la première section, nous introduirons donc le problème originel, ainsi que sa relaxation dans l'espace des fonctions spéciales à variation bornée. Puis nous démontrerons l'existence et la régularité partielle des solutions, et nous proposerons à la section 6.4 deux résultats de Γ -convergence, l'un local et l'autre non local. Enfin, nous discuterons des résultats numériques en dimension 1 autour d'un exemple.

Contributions.

À la section 6.4, nous proposons et démontrons deux approximations par Γ -convergence de la fonctionnelle d'isolation, l'une locale (théorème 6.8), en relation avec un résultat de [Acerbi *et al.* 1998], la seconde non locale (théorème 6.12). Ce dernier résultat est, à notre connaissance, nouveau. Il s'inspire de l'approche proposée par [Braides et Dal Maso 1997] pour la fonctionnelle de Mumford-Shah, avec la difficulté supplémentaire que sur l'ensemble des sauts, on considère une énergie n'impliquant plus seulement la longueur, mais aussi les traces de la fonction SBV.

Ensuite, nous proposons à la section 6.5 une implémentation numérique pour les deux approximations présentées, et nous discutons des limites de la méthode.

6.1 Problème d'isolation optimale

6.1.1 Modélisation du problème d'isolation

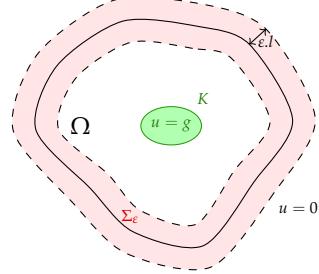
Soit K un compact connexe de \mathbb{R}^N , qui est la fermeture d'un ouvert régulier. On suppose que $g \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ est donnée, et que K est une source de chaleur $g|_K$ (supposée positive).

Soit de plus Ω un ouvert contenant K , que l'on suppose régulier et entouré d'une fine couche Σ_ε de matériau hautement isolant de conductivité ε , et d'épaisseur uniforme εl . À l'extérieur de $\Omega \cup \Sigma_\varepsilon$, on suppose que la température est nulle.

Pour trouver la distribution de la chaleur dans $\Omega \cup \Sigma_\varepsilon$, on minimise la fonctionnelle suivante

$$\min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega \cup \Sigma_\varepsilon) \\ u=g \text{ sur } K}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx$$

On identifie tout d'abord le problème limite quand ε tend vers 0.



Afin de pouvoir passer à la limite en ε , il reste à analyser ce qu'il se passe dans Σ_ε sous l'effet du matériau hautement isolant : la température u passe d'une valeur $u^+ > 0$ (voir théorème 6.7) à une valeur nulle $u^- = 0$ dans $(\Omega \cup \Sigma_\varepsilon)^c$. Aussi, $|\nabla u| \sim \frac{u^+}{\varepsilon l}$. En renommant $u^+ = u$, le problème limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ est donné par

$$\min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega \cup \Sigma_\varepsilon) \\ u=g \text{ sur } K}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \frac{u^2}{l} d\mathcal{H}^{N-1}$$

que l'on peut réécrire encore pour $\beta = \frac{1}{l}$

$$\min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u=g \text{ sur } K}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \beta \int_{\partial\Omega} u^2 d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (6.1)$$

Le problème d'optimisation de forme que nous étudions consiste à trouver le domaine Ω , de mesure prescrite, minimisant l'énergie thermique (6.1). Ce problème est formulé de la façon suivante :

$$\min_{\substack{\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \\ \Omega \supseteq K \\ |\Omega|=c}} \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u=g \text{ sur } K}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \beta \int_{\partial\Omega} u^2 d\mathcal{H}^{N-1}$$

ou encore, en transformant la contrainte de mesure en un terme de pénalisation

$$\min_{\substack{\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \\ \Omega \supseteq K}} \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u=g \text{ sur } K}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \beta \int_{\partial\Omega} u^2 d\mathcal{H}^{N-1} + \gamma |\Omega| \quad (6.2)$$

où $\gamma > 0$ est une constante fixée. On observe de plus que le domaine Ω correspond au support de u , et donc $|\Omega| = |\{u > 0\}|$.

On peut généraliser la fonctionnelle du problème (6.2) au cas du p -Laplacien, pour $p > 1$, $\beta, \gamma > 0$. On considère alors la fonctionnelle

$$\mathcal{R}_p(\Omega, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\partial\Omega} |u|^p d\mathcal{H}^{N-1} + \gamma |\{u > 0\}|. \quad (6.3)$$

Dans la suite de ce chapitre, on s'intéressera au problème d'optimisation de forme suivant

$$\min_{\Omega \supseteq K} \min_{\substack{u \in W^{1,p}(\Omega) \\ u=g \text{ sur } K}} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\partial\Omega} |u|^p d\mathcal{H}^{N-1} + \gamma |\{u > 0\}| \quad (6.4)$$

pour $p \in]1, 2]$. Ce choix de p est purement technique et il est lié au contrôle précis de la valeur propre du p -Laplacien Robin pour $\beta \rightarrow 0$, qui joue un rôle important dans la démonstration de l'existence de solution.

Si un tel Ω est identifié, on remarque que la minimisation de la fonctionnelle (6.3) revient à résoudre l'équation aux dérivées partielles avec condition au bord de Robin

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 0 & \text{dans } \Omega \setminus K \\ u = g & \text{sur } K \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} + \beta |u|^{p-2} u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.5)$$

6.1.2 Fonctionnelle relaxée dans SBV

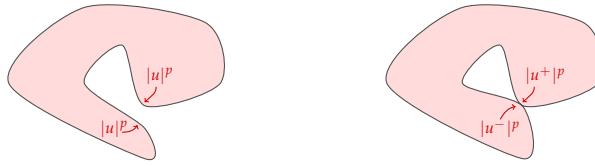
Soit $D \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Tout comme pour le problème de Mumford-Shah, la fonctionnelle (6.3) sera relaxée dans SBV pour s'affranchir de la dépendance en Ω . Ainsi, on considère $D \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert et la fonctionnelle définie pour tout $u \in L^1(D)$ telle que $u \geq 0$ et $|u|^p \in SBV(D)$

$$\mathcal{R}_p(u) = \int_D |\nabla u|^p + \beta \int_{\mathcal{J}_u} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} + \gamma |\{u > 0\}| \quad (6.6)$$

et le problème de minimisation associé

$$\min_{\substack{u \geq 0, |u|^p \in SBV(D) \\ u=g \text{ sur } K}} \int_D |\nabla u|^p + \beta \int_{\mathcal{J}_u} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} + \gamma |\{u > 0\}|. \quad (6.7)$$

Remarque 6.1. La présence d'une somme et non d'une différence dans le terme $\int_{\mathcal{J}_u} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1}$ permet bien de tenir compte des valeurs de u de chaque côté du saut; c'est précisément cette énergie de bord qui apparaît naturellement en cas de recollement de la surface dans le processus de minimisation.



Remarque 6.2. Dans cette fonctionnelle relaxée, la notation ∇u désigne en fait exclusivement la partie absolument continue $D^a u$ du gradient de u .

6.1.3 Analyse de la première valeur propre du p -Laplacien Robin

Dans cette section, nous discutons de quelques propriétés qualitatives de la première valeur propre du p -Laplacien de Robin, nécessaires pour l'étude de l'existence de solutions du problème d'isolation optimale (6.2) associé au p -Laplacien.

La détermination de la première valeur propre du p -Laplacien dans un ouvert Ω connexe et régulier est un problème proche de (6.5), puisqu'il s'agit de trouver un couple $(\lambda_1(\Omega, \beta), u)$, avec u de signe constant, vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_1(\Omega, \beta)|u|^{p-1}u & \text{dans } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} + \beta|u|^{p-2}u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.8)$$

La première valeur propre $\lambda_1(\Omega, \beta)$ du p -Laplacien de Robin est en fait solution du problème de minimisation

$$\lambda_1(\Omega, \beta) = \min_{u \in W^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\partial\Omega} |u|^p d\mathcal{H}^{N-1}}{\int_{\Omega} |u|^p dx}. \quad (6.9)$$

Et elle vérifie de plus les propriétés suivantes :

Proposition 6.3 (Inégalité de Faber-Krahn).

Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert Lipschitz, et soit $\mathcal{B}_{|E|}$ une boule de mesure $|E|$. Alors

$$\lambda_1(E, \beta) \geq \lambda_1(\mathcal{B}_{|E|}, \beta)$$

Proposition 6.4. Soit $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$ une boule fixée. Alors la première valeur propre du p -Laplacien avec condition au bord de Robin satisfait les propriétés suivantes :

- i) $\forall t > 0$, $\lambda_1(t\mathcal{B}, \beta) = \frac{1}{t^p} \lambda_1(\mathcal{B}, t^{p-1}\beta)$,
- ii) $\frac{\lambda_1(\mathcal{B}, \beta)}{\beta} \xrightarrow[\beta \rightarrow 0]{} \frac{|\partial\mathcal{B}|}{|\mathcal{B}|}$
- iii) $\lambda_1(\mathcal{B}, \beta) \sim \beta \frac{C_N}{|\mathcal{B}|^{1/N}}$

Démonstration.

- i) Soit $t > 0$, et soit u un minimiseur pour $\lambda_1(t\mathcal{B}, \beta)$. Pour tout $x \in \mathcal{B}$, on définit $v(x) = u(tx)$. Alors

$$\int_{\mathcal{B}} |\nabla v(x)|^p dx = t^p \int_{\mathcal{B}} |\nabla u(tx)|^p dx = \frac{t^p}{t^N} \int_{t\mathcal{B}} |\nabla u(y)|^p dy$$

et de même

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{B}} |v|^p d\mathcal{H}^{N-1} &= \frac{1}{t^{N-1}} \int_{t\partial\mathcal{B}} |u|^p d\mathcal{H}^{N-1}, \\ \int_{\mathcal{B}} |v|^p dx &= \frac{1}{t^N} \int_{t\mathcal{B}} |u|^p dy \end{aligned}$$

Du coup,

$$\begin{aligned} \lambda_1(t\mathcal{B}, \beta) &= \frac{\int_{t\mathcal{B}} |\nabla u|^p dx + \beta \int_{t\partial\mathcal{B}} |u|^p d\mathcal{H}^{N-1}}{\int_{t\mathcal{B}} |u|^p dx} \\ &= \frac{\frac{t^N}{t^p} \int_{\mathcal{B}} |\nabla v|^p dx + \beta t^{N-1} \int_{\partial\mathcal{B}} |v|^p d\mathcal{H}^{N-1}}{t^N \int_{\mathcal{B}} |v|^p dx} \\ &= \frac{1}{t^p} \frac{\int_{\mathcal{B}} |\nabla v|^p dx + \beta t^{p-1} \int_{\partial\mathcal{B}} |v|^p d\mathcal{H}^{N-1}}{\int_{\mathcal{B}} |v|^p dx} \\ &= \frac{1}{t^p} \lambda_1(\mathcal{B}, t^{p-1}\beta) \end{aligned}$$

- ii) On montre le résultat en démontrant séparément les deux inégalités suivantes :

(A) On montre directement que

$$\lambda_1(\mathcal{B}, \beta) \leq \beta \frac{|\partial\mathcal{B}|}{|\mathcal{B}|} \quad (6.10)$$

en prenant $u \equiv 1$ comme test dans le quotient

$$\frac{\int_{\mathcal{B}} |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\partial\mathcal{B}} |u|^p dx}{\int_{\mathcal{B}} |u|^p d\mathcal{H}^{N-1}}$$

qui apparaît dans la définition (6.9) de la première valeur propre de Robin.

(B) La seconde inégalité est la suivante :

$$\lambda_1(\mathcal{B}, \beta) \geq \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1^D(\mathcal{B})} + \frac{|\mathcal{B}|}{\beta |\partial\mathcal{B}|}} \quad (6.11)$$

où $\lambda_1^D(\mathcal{B})$ désigne la première valeur propre du p -Laplacien Dirichlet sur la boule \mathcal{B} .

Pour démontrer cette inégalité, on utilise une idée de [Sperb 1972], et le fait que sur la boule, la fonction propre est radiale et symétrique, et en particulier constante sur le bord de la boule. On suppose donc que la fonction propre $u \equiv c$ est constante sur $\partial\mathcal{B}$. On a

$$\frac{1}{\lambda_1(\mathcal{B}, \beta)} = \frac{\int_{\mathcal{B}} u^p}{\int_{\mathcal{B}} |\nabla u|^p + \beta \int_{\partial\mathcal{B}} u^p} = \frac{\int_{\mathcal{B}} (u - c + c)^p}{\int_{\mathcal{B}} |\nabla u - \nabla c|^p + \beta \int_{\partial\mathcal{B}} c^p}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Minkowski, qui nous permet d'écrire

$$\int_{\mathcal{B}} (f + g)^p \leq \left[\left(\int_{\mathcal{B}} f^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathcal{B}} g^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p.$$

Du coup,

$$\frac{1}{\lambda_1(\mathcal{B}, \beta)} = \frac{\int_{\mathcal{B}} (u - c + c)^p}{\int_{\mathcal{B}} |\nabla u - \nabla c|^p + \beta \int_{\partial\mathcal{B}} c^p} \leq \frac{\left[\left(\int_{\mathcal{B}} (u - c)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathcal{B}} c^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p}{\int_{\mathcal{B}} |\nabla(u - c)|^p + \beta \int_{\partial\mathcal{B}} c^p}$$

Or pour $p \in]1, 2]$,

$$\frac{(a+b)^p}{c+d} \leq \frac{a^p}{c} + \frac{b^p}{d}$$

En effet, d'après Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\frac{a^p}{c} + \frac{b^p}{d} \right) (c+d) \geq \left(a^{\frac{p}{2}} + b^{\frac{p}{2}} \right)^2$$

Et comme $\frac{p}{2} < 1$,

$$a^{\frac{p}{2}} + b^{\frac{p}{2}} \geq (a+b)^{\frac{p}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a+b} \right)^{\frac{p}{2}} + \left(\frac{b}{a+b} \right)^{\frac{p}{2}} \geq 1,$$

ce qui est immédiat car

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^{\frac{p}{2}} \geq \frac{a}{a+b} \quad \text{et} \quad \left(\frac{b}{a+b}\right)^{\frac{p}{2}} \geq \frac{b}{a+b}.$$

On en déduit donc que

$$\frac{1}{\lambda_1(\mathcal{B}, \beta)} \leq \frac{\int_{\mathcal{B}} (u - c)^p}{\int_{\mathcal{B}} |\nabla(u - c)|^p} + \frac{\int_{\mathcal{B}} c^p}{\beta \int_{\partial\mathcal{B}} c^p} \leq \frac{1}{\lambda_1^D(\mathcal{B})} + \frac{|\mathcal{B}|}{\beta |\partial\mathcal{B}|}.$$

En inversant l'inégalité, on obtient le résultat souhaité

$$\lambda_1(\mathcal{B}, \beta) \geq \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1^D(\mathcal{B})} + \frac{|\mathcal{B}|}{\beta |\partial\mathcal{B}|}}$$

En passant à la limite en $\beta \rightarrow 0$ dans les deux inégalités (6.10) et (6.11), on en déduit finalement que

$$\frac{\lambda_1(\mathcal{B}, \beta)}{\beta} \xrightarrow[\beta \rightarrow 0]{} \frac{|\partial\mathcal{B}|}{|\mathcal{B}|}.$$

iii) L'estimation de la première valeur propre de Robin par rapport à la mesure de la boule est obtenue grâce à la propriété i) de la proposition 6.4. Soit $\mathcal{B}(r)$ une boule de rayon $r > 0$. On a

$$\lambda_1(\mathcal{B}(r), \beta) = \lambda_1(r\mathcal{B}(1), \beta) = \frac{1}{r^p} \lambda_1(\mathcal{B}(1), r^{p-1}\beta)$$

D'après l'item ii), on obtient finalement, pour β petit

$$\lambda_1(\mathcal{B}(r), \beta) \approx \frac{1}{r^p} r^{p-1} \beta \frac{|\partial\mathcal{B}(1)|}{|\mathcal{B}(1)|} = \frac{\beta}{r} \frac{|\partial\mathcal{B}(1)|}{|\mathcal{B}(1)|} = \beta \frac{C_N}{|\mathcal{B}(r)|^{\frac{1}{N}}} \quad \text{quand } \beta \rightarrow 0$$

car $|\mathcal{B}(r)| = C_N r^N$.

□

Remarque 6.5. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert borné fixé. Le problème d'optimisation de forme sur la minimisation de la première valeur propre du p -Laplacien avec condition au bord de Robin (6.9) est finalement très similaire au problème (6.4), et consiste à résoudre

$$\min_{\Omega \subseteq D} \min_{u \in W^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p + \beta \int_{\partial\Omega} |u|^p d\mathcal{H}^{N-1}}{\int_{\Omega} |u|^p dx} + |\Omega| \tag{6.12}$$

6.2 Existence de solutions

Dans le cas linéaire et D borné, l'existence de solutions au problème d'optimisation de forme avec condition au bord de Robin a été démontrée par [Bucur et Luckhaus 2014], et par [Caffarelli et Kriventsov 2016] dans le cas où $D = \mathbb{R}^N$. Dans cette partie, on prouve l'existence de solution pour le cas non linéaire et non borné.

Théorème 6.6. *Pour $D = \mathbb{R}^N$, il existe $u \geq 0$ telle que $|u|^p \in \text{SBV}(\mathbb{R}^N)$ solution du problème relaxé (6.7).*

La démonstration de l'existence de solutions dans \mathbb{R}^N suit l'idée proposée par [Caffarelli et Kriventsov 2016] dans le cas $p = 2$, qui consiste dans un premier temps à prouver que le domaine optimal recherché est d'un diamètre nécessairement borné. C'est précisément à cette étape que l'analyse du comportement asymptotique de la première valeur propre du p -Laplacien s'avère nécessaire. On s'appuiera alors sur le résultat d'existence de solution dans un domaine borné de \mathbb{R}^N [Bucur et Giacomini 2015, Prop. 3.3]. La différence majeure par rapport à la preuve de [Caffarelli et Kriventsov 2016] réside dans le fait que l'on n'a ici pas de contrôle a priori sur la borne inférieure de u .

Démonstration. Soit u un minimiseur de (6.6) dans un ouvert borné D , dont l'existence est assurée par le résultat de [Bucur et Giacomini 2015, Prop. 3.3]. On suppose que le domaine $\Omega = \{u > 0\}$ comporte une branche fine et longue (voir figure 6.1). Et on se place dans un domaine D suffisamment grand pour contenir l'optimum Ω .

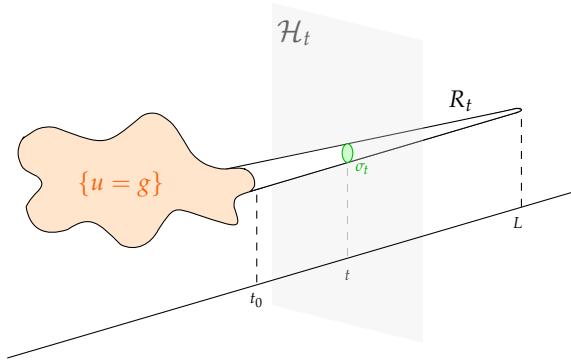


FIGURE 6.1

Pour démontrer que le diamètre est contrôlé, on coupe cette branche avec un hyperplan \mathcal{H}_t à distance t de l'origine, pour $t \in [t_0, L]$. On note alors \mathcal{P}_t le demi-espace contenant $\{u = g\}$ et $\sigma_t = \Omega \cap \mathcal{H}_t$. On note de plus $\Omega_t = \Omega \cap \mathcal{P}_t$ la partie contenant $\{u = g\}$ et $R_t = \Omega \setminus \Omega_t$ la branche résiduelle.

Sans perdre de généralité et pour simplifier la lecture, on suppose dans cette démonstration que $\gamma = 1$. Par définition de l'optimum u , on peut écrire

$$\begin{aligned}
& R_p(u) \leq R_p(u \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{P}_t}) \\
\Leftrightarrow & \int_D |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\mathcal{J}_u} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} + |\{u > 0\}| \\
& \leq \int_{\mathcal{P}_t} |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\mathcal{J}_u \cap \mathcal{P}_t} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} + |\{u > 0\} \cap \mathcal{P}_t| \\
\Leftrightarrow & \int_{R_t} |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\mathcal{J}_u \cap R_t} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} + |R_t| \leq \beta \int_{\sigma_t} |u|^p dx \quad (6.13)
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Faber-Krahn (proposition 6.3), on a

$$\lambda_1(\mathcal{B}_{|R_t|}, \beta) \int_{R_t} |u|^p dx \leq \int_{R_t} |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\partial R_t} |u|^p dx$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R_t} |u|^p dx &= \beta \int_{\mathcal{J}_u \cap \partial R_t} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} + \beta \int_{\sigma_t} |u|^p dx \\
&\leq \beta \int_{\mathcal{J}_u \cap R_t} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} + \beta \int_{\sigma_t} |u|^p dx
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\lambda_1(\mathcal{B}_{|R_t|}, \beta) \int_{R_t} |u|^p dx \leq \int_{R_t} |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\mathcal{J}_u \cap R_t} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} + \beta \int_{\sigma_t} |u|^p dx$$

d'où

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\mathcal{B}_{|R_t|}, \beta) \int_{R_t} |u|^p dx + |R_t| &\leq \int_{R_t} |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\mathcal{J}_u \cap R_t} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} \\
&\quad + \beta \int_{\sigma_t} |u|^p dx + |R_t| \\
&\leq 2\beta \int_{\sigma_t} |u|^p dx \quad (6.14)
\end{aligned}$$

d'après (6.13).

Posons maintenant

$$f(t) = \int_{R_t} |u|^p dx = \int_t^L \int_{K_s} |u|^p ds.$$

Alors

$$f'(t) = - \int_{K_t} |u|^p dt$$

ce qui nous permet de réécrire (6.14)

$$\lambda_1(\mathcal{B}_{|R_t|}, \beta)f(t) + |R_t| \leq -2\beta f'(t).$$

D'après la proposition 6.4, on a finalement

$$\frac{C_N}{|R_t|^{1/N}}f(t) + |R_t| \leq -2\beta f'(t). \quad (6.15)$$

On s'affranchit de la dépendance en $|R_t|$ en utilisant l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{a^q}{q} + \frac{b^{q'}}{q'} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

avec $a = (|R_t|^{-1/N})^{1/q}$ et $b = |R_t|^{1/q'}$. On choisit q et q' de sorte que $ab = 1$, autrement dit $q = \frac{N+1}{N}$ et $q' = N+1$. Ainsi, en appliquant Young à (6.15), on obtient

$$\begin{aligned} -2\beta f'(t) &\geq \frac{1}{|R_t|^{1/N}}f(t) + |R_t| \\ &= q \frac{\left[(|R_t|^{-1/N}f(t))^{1/q} \right]^q}{q} + q' \frac{\left[|R_t|^{1/q'} \right]^{q'}}{q'} \\ &= (N+1) \left[\frac{\left(N^{-1/q} |R_t|^{-1/qN} f(t)^{1/q} \right)^q}{q} + \frac{\left(|R_t|^{1/q'} \right)^{q'}}{q'} \right] \\ &\geq (N+1) \left[N^{-1/q} |R_t|^{-1/qN} f(t)^{1/q} |R_t|^{1/q'} \right] \\ &\geq \frac{(N+1)}{N^{1/q}} f(t)^{1/q} \\ &= \frac{(N+1)}{N^{N/(N+1)}} f(t)^{N/(N+1)} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{f'(t)}{f(t)^{N/(N+1)}} \leq -\frac{N+1}{\beta N^{N/(N+1)}}$$

En intégrant entre t_0 et L , on en déduit

$$\begin{aligned} \left[(N+1)f(t)^{1/(N+1)} \right]_{t_0}^L &\leq \frac{N+1}{\beta N^{N/(N+1)}}(t_0 - L) \\ \Leftrightarrow (N+1)f(L)^{1/(N+1)} - (N+1)f(t_0)^{1/(N+1)} &\leq \frac{N+1}{\beta N^{N/(N+1)}}(t_0 - L) \\ \Leftrightarrow -(N+1)f(t_0)^{1/(N+1)} &\leq \frac{N+1}{\beta N^{N/(N+1)}}(t_0 - L) \\ \Leftrightarrow L &\leq \beta N^{N/(N+1)} f(t_0)^{1/(N+1)} + t_0 < \infty \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve du fait que l'on peut contrôler le diamètre du domaine optimal Ω , et que l'existence dans un domaine borné D suffisamment grand implique l'existence sur \mathbb{R}^N tout entier.

□

6.3 Régularité partielle des solutions

Dans cette partie, nous allons montrer que l'existence de solutions pour le problème relaxé (6.7) implique l'existence de solutions au problème initial (6.4). La preuve utilise les mêmes outils que celle pour la régularité des solutions du problème de Mumford-Shah (2.4) (voir chapitre 2, section 2.2.2).

Le schéma de la preuve est le suivant :

6.3.1 Existences de bornes strictement positives sur u

6.3.2 Fermeture de \mathcal{J}_u

Sous-étape 1 : un minimiseur u de (6.6) est dans $\text{SBV}(D)$;

Sous-étape 2 : une solution u de (6.7) est un presque-quasi minimiseur pour (6.3) ;

6.3.3 Régularité de u

6.3.1 Existences de bornes strictement positives sur les solutions

Pour montrer qu'un minimiseur u du problème relaxé (6.7) est un presque-quasi minimiseur de la fonctionnelle (6.3), nous avons besoin du résultat suivant :

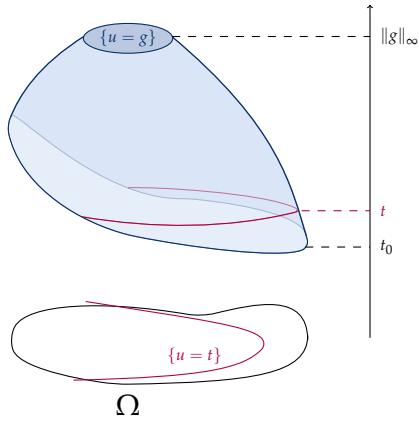
Théorème 6.7. *Soit u un minimiseur de (6.6). Alors*

$$\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0 \text{ s.t. } \alpha_1 \leq u \leq \alpha_2 \text{ p.p. } x \in \{u(x) > 0\}.$$

Ce type de résultat, en particulier la borne inférieure, a été démontré pour la première fois par [Bucur et Luckhaus 2014]. Une seconde démonstration a été proposée par [Caffarelli et Kriventsov 2016], et présente l'avantage de pouvoir contrôler la constante α_1 . Mais cette preuve ne couvre que le cas linéaire, aussi nous démontrons ce résultat dans le cas non linéaire en reprenant les principales étapes de la preuve de [Caffarelli et Kriventsov 2016].

Démonstration. On observe immédiatement que si $\{u(x) > \|g\|_\infty\} \neq \emptyset$ alors en tronquant u au niveau de $\alpha_2 = \|g\|_\infty$, l'énergie (6.6) diminue. Aussi, u est nécessairement majorée par $\|g\|_\infty$.

Concernant l'inégalité de gauche, on considère u un minimiseur de (6.6) tel que $\inf_{\Omega} u = t_0 \geq 0$. Aussi, pour tout $t \in [t_0, \|g\|_\infty]$, on a



$$\begin{aligned}
 & R_p(u) \leq R_p(u \cdot \mathbf{1}_{\{u > t\}}) \\
 \Leftrightarrow & \int_D |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\mathcal{J}_u} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} + |\{u > 0\}| \\
 & \leq \int_{\{u > t\}} |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\mathcal{J}_u \cap \{u > t\}} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} + |\{u > t\}| \\
 \Leftrightarrow & \int_D |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\mathcal{J}_u} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} + |\{u > 0\}| \\
 & \leq \int_{\{u > t\}} |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\mathcal{J}_u \setminus \{u < t\}} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} \\
 & \quad + 2 \int_{\{u=t\}} \beta |t|^p dx + |\{u > t\}| \\
 \Leftrightarrow & \int_{\{u < t\}} |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\mathcal{J}_u \cap \{u < t\}} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} + |\{u < t\}| \\
 & \leq \beta \int_{\{u=t\}} |t|^p dx
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

On pose

$$f(t) = \int_{\{u < t\}} u^{p-1} |\nabla u| dx = \int_{\{u < t\}} \frac{|\nabla u^p|}{p} dx$$

D'après la formule de la co-aire (proposition 2.5),

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{p} \int_{\{u < t\}} \text{Per}_\Omega(\{u^p > s\}) ds \\
 &= \int_0^t \text{Per}_\Omega(\{u^p > h^p\}) h^{p-1} dh \\
 &= \int_0^t \text{Per}_\Omega(\{u > h\}) h^{p-1} dh
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(t) = \text{Per}_\Omega(\{u > t\}) t^{p-1} = \text{Per}_\Omega(\{u = t\}) t^{p-1} = \mathcal{H}^{N-1}(\{u = t\}) t^{p-1}$$

Alors (6.16) devient

$$\int_0^t |\nabla u|^p dx + \beta \int_{\mathcal{J}_u \cap \{u < t\}} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} + |\{u < t\}| \leq \beta t f'(t) \quad (6.17)$$

On souhaite maintenant minorer le membre de gauche de (6.17) par un terme dépendant de f . Pour cela, on utilise l'inégalité de Hölder pour majorer f ,

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{\{u < t\}} \frac{|\nabla u^p|}{p} dx \\ &\leq \left(\int_{\{u < t\}} 1^{p_1} dx \right)^{1/p_1} \left(\int_{\{u < t\}} (u^{p-1})^{p_2} dx \right)^{1/p_2} \left(\int_{\{u < t\}} |\nabla u|^{p_3} dx \right)^{1/p_3} \end{aligned}$$

de sorte que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$. Par identification avec le membre de gauche de (6.17), on veut que $p_3 = p$. Et afin de pouvoir utiliser l'inégalité de Sobolev 2.6 avec $v = u^p$

$$C_N \left(\int_{\{u < t\}} |u|^{\frac{pN}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \int_{\{u < t\}} |Du^p| dx \quad (6.18)$$

on choisit p_2 tel que $p_2(p-1) = \frac{pN}{N-1}$.

On obtient finalement

$$f(t) \leq \left(\int_{\{u < t\}} 1 dx \right)^{\frac{p-1}{pN}} \left(\int_{\{u < t\}} u^{\frac{pN}{N-1}} dx \right)^{\frac{(p-1)(N-1)}{pN}} \left(\int_{\{u < t\}} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6.19)$$

Or d'après (6.17),

$$\left(\int_{\{u < t\}} 1 dx \right)^{\frac{p-1}{pN}} = (|\{u < t\}|)^{\frac{p-1}{pN}} \leq (\beta t f'(t))^{\frac{p-1}{pN}} \quad (6.20)$$

et

$$\left(\int_{\{u < t\}} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq (\beta t f'(t))^{\frac{1}{p}} \quad (6.21)$$

Et d'après l'inégalité de Sobolev pour u^p (6.18), on a

$$\left[\left(\int_{\{u < t\}} |u|^{\frac{pN}{N-1}} dx \right)^{\frac{(N-1)}{N}} \right]^{\frac{p-1}{p}} \leq \left[C_N \int_{\{u < t\}} |Du^p| dx \right]^{\frac{p-1}{p}}$$

Comme $u^p \in \text{SBV}(D)$, on peut décomposer le gradient de u^p d'après le théorème 2.8

$$Du^p = D^a u^p + D^j u^p.$$

Et on sait que

$$\begin{aligned} \int_{\{u < t\}} |D^a u^p| dx &= \int_{\{u < t\}} |\nabla u^p| dx \\ &= p \int_{\{u < t\}} u^{p-1} |\nabla u| dx \\ &\leq p \int_{\{u < t\}} \|u\|_\infty^{p-1} |\nabla u| dx \\ &\leq p \|g\|_\infty^{p-1} \int_{\{u < t\}} \frac{|\nabla u|^p}{p} + \frac{1}{q} dx \\ &\leq \|g\|_\infty^{p-1} \int_{\{u < t\}} |\nabla u|^p dx + \frac{p \|g\|_\infty^{p-1}}{q} |\{u < t\}| \\ &\leq \max\left(1, \frac{p}{q}\right) \|g\|_\infty^{p-1} \beta t f'(t) \end{aligned} \quad (6.22)$$

d'après (6.17). Et on a

$$\begin{aligned} \int_{\{u < t\}} |D^j u^p| dx &= \int_{\partial\{u < t\}} |u|^p d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_{\mathcal{J}_u \cap \{u < t\}} |u|^p d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\{u=t\}} |u|^p d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\leq \int_{\mathcal{J}_u \cap \{u < t\}} |u^+|^p d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\{u=t\}} |u^+|^p d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\leq \int_{\mathcal{J}_u \cap \{u < t\}} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\{u=t\}} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_{\mathcal{J}_u \cap \{u < t\}} |u^+|^p + |u^-|^p d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\{u=t\}} t^p d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\leq (\beta + 1) t f'(t) \end{aligned} \quad (6.23)$$

d'après (6.17). Finalement, en sommant (6.22) et (6.23), on obtient

$$\left(\int_{\{u < t\}} u^{\frac{pN}{N-1}} dx \right)^{\frac{(p-1)(N-1)}{pN}} \leq \left[C_N \left(\max\left(1, \frac{p}{q}\right) \|g\|_\infty^{p-1} \beta + \beta + 1 \right) t f'(t) \right]^{\frac{p-1}{p}}. \quad (6.24)$$

On réinjecte (6.20), (6.21) et (6.24) dans (6.19) :

$$f(t) \leq (\beta t f'(t))^{\frac{p-1}{pN}} + (\beta t f'(t))^{\frac{1}{p}} + \left[C_N \left(\max\left(1, \frac{p}{q}\right) \|g\|_\infty^{p-1} \beta + \beta + 1 \right) t f'(t) \right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq [Ctf'(t)]^{\frac{p(N+1)-1}{pN}}$$

où $C = \max \left(\beta, C_N \left(\max \left(1, \frac{p}{q} \right) \|g\|_{\infty}^{p-1} \beta + \beta + 1 \right) \right)$.

On en déduit alors que

$$[f(t)]^{\frac{pN}{p(N+1)-1}} \leq Ctf'(t)$$

autrement dit,

$$\frac{f'(t)}{[f(t)]^{\frac{pN}{p(N+1)-1}}} \geq \frac{1}{Ct}$$

En intégrant entre t_0 et 1, on obtient

$$\begin{aligned} & \left[\frac{p(N+1)-1}{p-1} f(t)^{\frac{p-1}{p(N+1)-1}} \right]_{t_0}^1 \geq \frac{1}{C} [\ln(t)]_{t_0}^1 \\ \Leftrightarrow & \frac{p(N+1)-1}{p-1} \left(f(1)^{\frac{p-1}{p(N+1)-1}} - f(t_0)^{\frac{p-1}{p(N+1)-1}} \right) \geq -\frac{1}{C} \ln(t_0) \\ \Leftrightarrow & \frac{p(N+1)-1}{p-1} f(1)^{\frac{p-1}{p(N+1)-1}} \geq -\frac{1}{C} \ln(t_0) \\ \Leftrightarrow & t_0 \geq \exp \left(-C f(1)^{\frac{p-1}{p(N+1)-1}} \right) > 0. \end{aligned}$$

On a ainsi montré que u est bornée par deux constantes strictement positives, contrôlées par une borne de l'énergie.

□

6.3.2 Fermeture de l'ensemble des sauts

Afin d'utiliser le théorème 2.18 sur la fermeture essentielle de l'ensemble des sauts de [Bucur et Giacomini 2015], il nous faut dans un premier temps montrer qu'un minimiseur u de la fonctionnelle (6.6) est un presque-quasi minimiseur au sens de la définition 2.17.

Sous-étape 1 : Soit u un minimiseur de la fonctionnelle de Robin relaxée (6.6), telle que $u^p \in SBV(D)$. Immédiatement, on obtient que $u, \nabla u \in L^1(D)$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a de plus

$$\left(\int_{\mathcal{J}_u} u \, d\mathcal{H}^{N-1} \right)^p \leq \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{J}_u) \int_{\mathcal{J}_u} u^p \, d\mathcal{H}^{N-1} \quad (6.25)$$

Or d'après le théorème 6.7, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que $u \geq \alpha_1$; en particulier, $u^+ \geq \alpha_1$. Ainsi,

$$\int_{\mathcal{J}_u} |u^+|^p + |u^-|^p \, d\mathcal{H}^{N-1} \geq \int_{\mathcal{J}_u} \alpha_1^p \, d\mathcal{H}^{N-1}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_1^p \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{J}_u) \\ &\geq \alpha_1^p \mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega) \end{aligned}$$

L'énergie R_p étant finie, on en déduit que $\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega) < +\infty$, et donc dans (6.25)

$$\left(\int_{\mathcal{J}_u} |u^-|^p + |u^+|^p \, d\mathcal{H}^{N-1} \right)^p < +\infty$$

Cela nous permet de conclure que $u^-, u^+ \in L^1(\mathcal{J}_u)$, et donc que u , et non plus seulement u^p , est dans $SBV(D)$.

Sous-étape 2 : Soit maintenant $v \in SBV(D)$ telle que $\{v \neq u\} \subseteq \mathcal{B}(x, \rho)$ pour un certain $\rho \in]0, d_{\partial\Omega}(x)[$. On suppose à nouveau sans perdre de généralité que $\gamma = 1$. L'optimalité de u nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx + \beta \int_{\mathcal{J}_u} |u^+|^p + |u^-|^p \, d\mathcal{H}^{N-1} + |\{u > 0\}| \\ \leq \int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx + \beta \int_{\mathcal{J}_u} |v^+|^p + |v^-|^p \, d\mathcal{H}^{N-1} + |\{v > 0\}| \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(x, \rho)} |\nabla u|^p \, dx + \int_{\mathcal{B}(x, \rho) \cap \mathcal{J}_u} |u^+|^p + |u^-|^p \, d\mathcal{H}^{N-1} + |\{u > 0\} \cap \mathcal{B}(x, \rho)| \\ \leq \int_{\mathcal{B}(x, \rho)} |\nabla v|^p \, dx + \int_{\mathcal{B}(x, \rho) \cap \mathcal{J}_u} |v^+|^p + |v^-|^p \, d\mathcal{H}^{N-1} + |\{v > 0\} \cap \mathcal{B}(x, \rho)| \quad (6.26) \end{aligned}$$

Or d'après le théorème 6.7, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que $u^+ \geq C_1$ et $v^+, v^- \leq C_2$, de sorte que

$$C_1^p \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{B}(x, \rho) \cap \mathcal{J}_u) \leq \int_{\mathcal{B}(x, \rho) \cap \mathcal{J}_u} |u^+|^p + |u^-|^p \, d\mathcal{H}^{N-1}$$

et

$$\int_{\mathcal{B}(x, \rho) \cap \mathcal{J}_u} |v^+|^p + |v^-|^p \, d\mathcal{H}^{N-1} \leq 2C_2^p \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{B}(x, \rho) \cap \mathcal{J}_v)$$

En injectant ces deux inégalités dans (6.26), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(x, \rho)} |\nabla u|^p \, dx + C_1^p \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{B}(x, \rho) \cap \mathcal{J}_u) + |\{u > 0\} \cap \mathcal{B}(x, \rho)| \\ \leq \int_{\mathcal{B}(x, \rho)} |\nabla v|^p \, dx + 2C_2^p \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{B}(x, \rho) \cap \mathcal{J}_v) + |\{v > 0\} \cap \mathcal{B}(x, \rho)| \quad (6.27) \end{aligned}$$

Concernant le terme de mesure, on remarque que $|\{u > 0\} \cap \mathcal{B}(x, \rho)| \leq |\mathcal{B}(x, \rho)|$, et de même pour $|\{v > 0\} \cap \mathcal{B}(x, \rho)|$. Ainsi,

$$|\{v > 0\} \cap \mathcal{B}(x, \rho)| - |\{u > 0\} \cap \mathcal{B}(x, \rho)| \leq C_3 |\mathcal{B}(x, \rho)| = C_3 D_{N-1} \rho^N \quad (6.28)$$

En combinant les inégalités (6.27) et (6.28), on obtient finalement

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(x, \rho)} |\nabla u|^p dx + C_1^p \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{B}(x, \rho) \cap \mathcal{J}_u) \\ \leq \int_{\mathcal{B}(x, \rho)} |\nabla v|^p dx + C_2^p \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{B}(x, \rho) \cap \mathcal{J}_v) + C_3 D_{N-1} \rho^N \end{aligned}$$

A changement d'échelle près pour avoir $C_1^p = 1$, on a montré que $u \in \text{SBV}(\Omega)$ est un presque-quasi minimiseur pour la fonctionnelle de (6.6).

Le théorème 2.18 nous permet finalement de conclure que l'ensemble \mathcal{J}_u des sauts de u est fermé.

6.3.3 Régularité intérieure des solutions

Si u est une solution du problème de minimisation relaxé (6.7), $u^p \in \text{SBV}(D)$ donc $u \in L^p(D)$. De plus, on a montré qu'une solution vérifie $u \in \text{SBV}(D \setminus \mathcal{J}_u)$ et donc d'après le théorème 2.8

$$Du = D^a u + D^j u.$$

Puisque que sur l'ouvert $D \setminus \mathcal{J}_u$, on a $D^j u = 0$, la différentielle de u est donc exclusivement égale à sa partie absolument continue. Or l'énergie (6.6) étant finie, on a en particulier $\nabla u \in L^p(D)$. Finalement, $u \in W^{1,p}(D \setminus \mathcal{J}_u)$.

Il reste à montrer que l'ensemble $\{u > 0\}$ correspond bien au domaine Ω du problème originel (6.4). Comme $\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{J}_u$ est ouvert, on peut le recouvrir par des ensembles connexes. Alors nécessairement l'un d'entre eux (et un seul) contient $\{u > 0\}$. En effet, si $\{u > 0\} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ n'était pas connexe, supposons que $\Omega_1 \supseteq K$. La fonction

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{sur } \Omega_1 \\ 0 & \text{sur } \Omega_2 \end{cases}$$

vérifierait alors

$$R_p(\tilde{u}) \leq R_p(u)$$

ce qui contredirait la minimalité de u . L'ensemble $\{u > 0\}$ est donc connexe. Cela conclut la preuve de la régularité intérieure des solutions du problème d'isolation optimale.

6.4 Résultats de Γ -convergence

Dans cette section, on se place dans le cas $p = 2$. Tout comme pour la fonctionnelle de Mumford-Shah, on utilise la Γ -convergence pour approcher une solution du problème (6.4) par une suite de minimiseurs d'une fonctionnelle approximante. On en présente deux, la première qui repose sur un résultat de Acerbi et Braides, qui proposent une variante de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli adaptée à des problèmes de minimisation impliquant des énergies de saut plus complexes, et la seconde, non locale, inspirée des travaux de Dal Maso et Braides, qui a l'avantage de ne pas introduire de variable supplémentaire.

6.4.1 Approximation par la méthode d'Acerbi et Braides

La fonctionnelle initialement proposée par [Acerbi *et al.* 1998, Th. 3.1] est la suivante :

$$AB_\varepsilon(u, v) = \int_D \psi(v) |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_D |\nabla v|^2 dx + \frac{\beta}{\varepsilon} \int_D W(u - v) dx \quad (6.29)$$

où ψ et W sont des fonctions positives, décroissantes sur \mathbb{R}^- et croissantes sur \mathbb{R}^+ , et s'annulant seulement en 0. On suppose de plus que W est continue et ψ semi-continue inférieurement. Et ils montrent que AB_ε Γ -converge dans $L^1(D, \mathbb{R}) \times L^1(D, \mathbb{R})$ vers la fonctionnelle relaxée

$$u \mapsto \int_D \psi(u) |\nabla u|^2 dx + \beta \int_{\mathcal{J}_u} \Phi(u^+) + \Phi(u^-) d\mathcal{H}^{N-1} \quad (6.30)$$

telle que $\Phi(t) = 2 \left| \int_0^t \sqrt{W(s)} ds \right|$.

Le résultat de Γ -convergence à caractère local que nous proposons est construit à partir de ce résultat. Pour $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ et $\alpha > 0$, on définit la suite de fonctionnelles suivante :

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(u, v) = (1 + \alpha)^2 \int_D v^{2\alpha} |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_D |\nabla v|^2 dx + (1 + \alpha)^2 \frac{\beta}{\varepsilon} \int_D (u - v)^{2+4\alpha} dx + \\ \gamma \int_D \psi_\varepsilon(u) dx \end{aligned} \quad (6.31)$$

avec $\psi_\varepsilon(x) = \max \left(0, \min \left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon \right) \right)$.

Théorème 6.8.

Soit D un ouvert borné de \mathbb{R}^N , et soit ψ_ε une fonction continue et croissante. On définit sur $L^1(D) \times L^1(D) \rightarrow [0, +\infty[$ la suite de fonctionnelles

$$F_\varepsilon(u, v) = \begin{cases} L_\varepsilon(u, v) & \text{si } u, v \in W^{1,2}(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$F(u, v) = \begin{cases} \int_D |\nabla u^{1+\alpha}|^2 + \beta \int_{\mathcal{J}_u} |(u^{1+\alpha})^+|^2 + |(u^{1+\alpha})^-|^2 d\mathcal{H}^{N-1} \\ \quad + \gamma |\{u > 0\}| & \text{si } u \in \text{SBV}(\Omega) \\ +\infty & \text{et } u = v \text{ p.p.} \\ & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors F_ε Γ -converge vers F dans $L^1(D) \times L^1(D)$.

Remarque 6.9. On observe qu'en remplaçant $u^{1+\alpha}$ par \tilde{u} , on retrouve la fonctionnelle (6.6), qui est précisément celle que l'on souhaite minimiser.

Démonstration. Dans notre cas, on souhaiterait dans l'idéal que $\psi(t) \equiv 1$ et $\Phi(t) = t^2$ dans la fonctionnelle d'Acerbi-Braides (6.29), pour obtenir directement le premier terme de (6.30). Mais cela n'est pas possible du fait de l'hypothèse sur ψ , aussi on choisit $\psi(t) = t^{2\alpha}$, $\alpha > 0$. Dans ce cas, le terme de gradient de la fonctionnelle Γ -limite (6.30) devient

$$\int_D u^{2\alpha} |\nabla u|^2 dx = \int_D \frac{|\nabla u^{1+\alpha}|^2}{(1+\alpha)^2} dx$$

En posant $\tilde{u} = u^{1+\alpha}$, la Γ -limite souhaitée (6.6) s'écrit

$$(1+\alpha)^2 \int_D |\nabla \tilde{u}|^2 dx + \beta \int_{\mathcal{J}_u} (\tilde{u}^+)^2 + (\tilde{u}^-)^2 d\mathcal{H}^{N-1}$$

Par identification avec (6.30), on en déduit que $\Phi(t) = t^{2+2\alpha}$. Or $\Phi(t) = 2 \left| \int_0^t \sqrt{W(s)} ds \right|$, on a finalement

$$t^{2+2\alpha} = 2 \left| \int_0^t \sqrt{W(s)} ds \right| \text{ i.e. } \sqrt{W(t)} = (1+\alpha)t^{1+2\alpha}$$

et donc $W(t) = (1+\alpha)^2 t^{2+4\alpha}$. Ainsi, la fonctionnelle L_ε , sans le terme de mesure, Γ -converge vers (6.30).

Pour démontrer l'inégalité de la \liminf du théorème, on se sert donc du résultat de [Acerbi et al. 1998, Th. 3.1] et du fait que si $u_\varepsilon \xrightarrow{L^1} u$ alors $\liminf \int_D \psi_\varepsilon(u_\varepsilon) dx \geq |\{u > 0\}|$.

Concernant l'inégalité de la \limsup , on reprend les suites approximantes u_ε et v_ε proposées par Acerbi et Braides pour la démonstration de [Acerbi et al. 1998, Prop. 3.7], sous l'hypothèse que $\mathcal{J}_u = 0$. Nous faisons le calcul en dimension un, le passage à la dimension quelconque se faisant de manière standard (voir [Acerbi et al. 1998]).

Les suites u_ε et v_ε sont définies de la manière suivante :

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} x \frac{T}{\varepsilon} u^+(0) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\varepsilon}{T} \\ u^+(0) & \text{si } \frac{\varepsilon}{T} \leq x < \varepsilon \left(T + \frac{1}{T} \right) \\ u \left(x - \varepsilon \left(T + \frac{1}{T} \right) \right) & \text{si } x \geq \varepsilon \left(T + \frac{1}{T} \right) \end{cases} \quad (6.32)$$

et

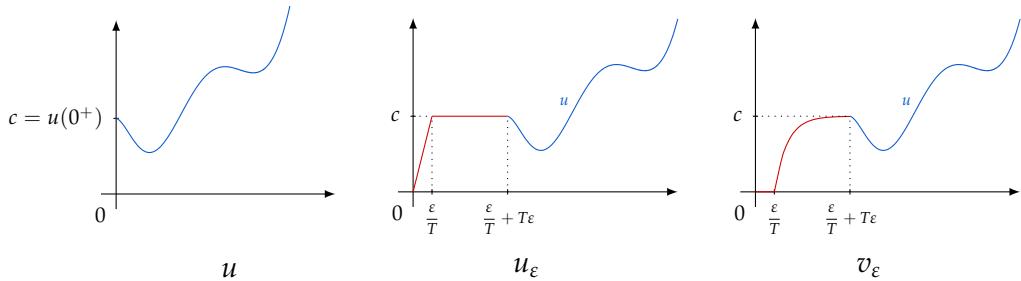
$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{\varepsilon}{T} \\ v_T \left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{T} \right) & \text{si } \frac{\varepsilon}{T} \leq x \leq \varepsilon \left(T + \frac{1}{T} \right) \\ u \left(x - \varepsilon \left(T + \frac{1}{T} \right) \right) & \text{si } x > \varepsilon \left(T + \frac{1}{T} \right) \end{cases} \quad (6.33)$$

où $v_T \in H^1(0, T)$ et $T > 0$ vérifient les hypothèses suivantes :

$$v_T(0) = 0, \quad v_T(T) = u^+(0), \quad (6.34a)$$

$$\int_0^T W(u^+(0) - v_T) + |v'_T|^2 dx \leq \Phi(u^+(0)) + \eta, \quad (6.34b)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^1 W(\tau u^+(0)) d\tau \leq \eta. \quad (6.34c)$$



On remarque alors que $|\{u_\varepsilon > 0\}| = |\{u > 0\}| + \varepsilon \left(T + \frac{1}{T} \right)$, ce qui implique que $\int_D \psi_\varepsilon(u_\varepsilon) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} |\{u > 0\}|$.

□

6.4.2 Approximation non locale

Un second résultat, dans l'esprit des travaux de Braides et Dal Maso [Braides et Dal Maso 1997] pour Mumford-Shah, consiste à quantifier les sauts directement à partir du gradient de la fonction u , grâce à une fonction annexe f qui pénalise les trop fortes variations.

Ainsi, [Braides et Dal Maso 1997] ont démontré la Γ -convergence de la fonctionnelle

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_D f \left(\varepsilon \fint_{\mathcal{B}(\varepsilon, x) \cap \Omega} |\nabla u(y)|^2 dy \right) dx + \alpha \int_D |u - g|^2 dx,$$

définie pour $u \in H^1(D)$, vers la fonctionnelle de Mumford-Shah (2.3), où f est une fonction qui sera précisée dans la suite et $\fint_{\mathcal{B}(\varepsilon, x) \cap \Omega}$ désigne la valeur moyenne de l'intégrande sur $\mathcal{B}(\varepsilon, x) \cap \Omega$.

Nous proposons dans cette section un résultat d'approximation en dimension une par une suite de fonctionnelles adaptées à une discrétisation par différences finies. Sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, on définit donc

$$\text{NL}_\varepsilon(u) = \frac{\beta}{2\varepsilon} \int_I [u^2(x + \varepsilon) + u^2(x - \varepsilon)] f \left(\frac{(u(x + \varepsilon) - u(x - \varepsilon))^2}{2\beta\varepsilon(u^2(x + \varepsilon) + u^2(x - \varepsilon)) + \varepsilon^2} \right) dx + \gamma \int_I \psi_\varepsilon(u) dx \quad (6.35)$$

avec $f(x) = \max(0, \min(x, 1))$ et $\psi_\varepsilon(x) = \max\left(0, \min\left(\frac{x}{\varepsilon}, 1\right)\right)$. Le numérateur du quotient de la fonction f correspond à une approximation par différences finies du terme de gradient proposé par Braides et Dal Maso. En revanche, la fonctionnelle de Robin (6.6) tient compte des traces de la fonction u de chaque côté du saut, et nécessite ainsi un terme supplémentaire $\int_{\mathcal{B}(\varepsilon, x) \cap \Omega} u^2(x) dx$, approché en dimension une par $\frac{u^2(x + \varepsilon) + u^2(x - \varepsilon)}{2\varepsilon}$, qui complexifie l'optimisation numérique de la fonctionnelle.

Remarque 6.10. L'ajout de ε^2 au dénominateur permet seulement au quotient d'être défini même si $u(x - \varepsilon) = u(x + \varepsilon) = 0$.

L'idée derrière cette approximation non locale est de comparer, pour chaque point x du domaine, les valeurs moyennes de $|\nabla u|^2$ et de u^2 sur la boule centrée en x de rayon ε . Autrement dit, en dimension 1, on confronte les valeurs de $\left(\frac{u(x + \varepsilon) - u(x - \varepsilon)}{2\varepsilon}\right)^2$ et de $\frac{u^2(x + \varepsilon) + u^2(x - \varepsilon)}{2\varepsilon}$. C'est exactement le rôle du quotient passé en argument à f dans la fonctionnelle (6.35). On note Q ce quotient,

$$Q(x) = \frac{(u(x + \varepsilon) - u(x - \varepsilon))^2}{2\beta\varepsilon(u^2(x + \varepsilon) + u^2(x - \varepsilon)) + \varepsilon^2}$$

Étudions la manière dont l'approximation non locale (6.35) détecte et pénalise les sauts.

Cas 1 : $Q(x) < 1$

Cela signifie que la variation de u sur l'intervalle $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ est plus petite que la valeur moyenne de u^2 sur ce même intervalle, autrement dit que u ne fait pas de saut. Dans ce cas,

$$f(Q(x)) = Q(x)$$

et

$$\begin{aligned} \text{NL}_\varepsilon(u) &\approx \int \left(\frac{u(x + \varepsilon) - u(x - \varepsilon)}{2\varepsilon} \right)^2 dx + \gamma \int \psi_\varepsilon(u(x)) dx \\ &\approx \int |\nabla u(x)|^2 dx + \gamma \int \psi_\varepsilon(u(x)) dx \end{aligned}$$

La valeur de l'approximation correspond donc bien à celle de l'énergie (6.3) pour un point situé en-dehors de l'ensemble des sauts.

Cas 2 : $Q(x) \geq 1$

Cette fois-ci, le carré du gradient de u est très fort, ce qui veut dire que $x \in \mathcal{J}_u$. Du coup,

$$f(Q(x)) = 1$$

et

$$\begin{aligned} \text{NL}_\varepsilon(u) &= \frac{\beta}{2\varepsilon} \int (u^2(x + \varepsilon) + u^2(x - \varepsilon)) dx + \gamma \int \psi_\varepsilon(u(x)) dx \\ &\approx \int |u^+(x)|^2 + |u^-(x)|^2 dx + \gamma \int \psi_\varepsilon(u(x)) dx \end{aligned}$$

On a donc construit une approximation qui permet de détecter les sauts de u sans introduire de fonction supplémentaire dont ce serait le rôle, comme c'est le cas de l'approximation de type Acerbi-Braides (6.31). Le caractère "non local" de cette approximation vient du fait que l'on tient compte de l'information sur tout un voisinage de taille 2ε autour de x . Nous verrons avec les résultats numériques de la section 6.5.3 que cette particularité peut présenter certains inconvénients par rapport à une approche locale telle que celle proposée par Acerbi et Braides (6.31).

On considère les espaces de fonctions

$$W = \left\{ u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) : u(x) = 1 \text{ p.p. } x \in]-\infty, 0[\text{ et } u(x) = 0 \text{ p.p. } x \in]1, +\infty[\right\}$$

et

$$\text{SBV}^{\frac{1}{2}}(I) = \{u \geq 0 : u^2 \in \text{SBV}(I)\}$$

Et soient $G_\varepsilon : W \rightarrow \mathbb{R}$, $G : W \cap \text{SBV}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctionnelles définies par

$$G_\varepsilon(u) = \frac{\beta}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} [u^2(x+\varepsilon) + u^2(x-\varepsilon)] f\left(\frac{(u(x+\varepsilon) - u(x-\varepsilon))^2}{2\beta\varepsilon(u^2(x+\varepsilon) + u^2(x-\varepsilon)) + \varepsilon^2}\right) \quad (6.36)$$

et

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}} |\nabla u|^2 dx + \beta \sum_{x \in \mathcal{J}_u} |u^+|^2 + |u^-|^2 \quad (6.37)$$

On montre tout d'abord le résultat suivant, qui servira pour la preuve du théorème 6.12 de Γ -convergence de l'approximation non locale (6.35).

Théorème 6.11.

On définit sur $L^1_{loc}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la suite de fonctionnelles

$$H_\varepsilon(u) = \begin{cases} G_\varepsilon(u) & \text{si } u \in W \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$H(u) = \begin{cases} G(u) & \text{si } u \in W \cap \text{SBV}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors H_ε Γ -converge vers H dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

La démonstration suit les étapes de celle proposée par [Braides 1998, Th. 3.33 et Prop. 3.38], avec la difficulté supplémentaire que l'énergie doit tenir compte des traces de la fonction sur les sauts :

- $\Gamma - \liminf$: on considère $u_\varepsilon \xrightarrow{L^1_{loc}} u$ et on remplace u_ε par une fonction v_ε qui vérifie :
 - i) $G_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq G_\varepsilon(v_\varepsilon)$,
 - ii) $v_\varepsilon \xrightarrow{L^1_{loc}} u$,
 - iii) $v_\varepsilon \in W \cap \text{SBV}(\mathbb{R})$,
 - iv) on peut lui appliquer la semi-continuité inférieure.
- $\Gamma - \limsup$: on utilise la densité des fonctions régulières (ou même avec un nombre fini de sauts) et des suites constantes.

Démonstration.

- $\Gamma - \liminf$: Soient (ε_j) une suite telle que $\varepsilon \rightarrow 0$ et $(u_j) \subset W$ vérifiant $u_j \xrightarrow{p.p. - L^1_{loc}} u$. En s'inspirant de Braides, on construit la suite de fonctions

$$g_j(t) = \beta \left[u_j^2(t+\varepsilon_j) + u_j^2(t-\varepsilon_j) \right] f\left(\frac{(u_j(t+\varepsilon_j) - u_j(t-\varepsilon_j))^2}{2\beta\varepsilon_j(u_j^2(t+\varepsilon_j) + u_j^2(t-\varepsilon_j)) + \varepsilon_j^2}\right)$$

adaptée à l'énergie de Robin. Et soit $\Phi_j : [0, 2\epsilon_j] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_j(t + 2k\epsilon_j)$$

que l'on étend par périodicité sur tout \mathbb{R} . Par définition de la suite des u_i , on remarque que seul un nombre fini de termes est non nul. De plus,

$$\begin{aligned} G_{\epsilon_j}(u_j) &= \frac{1}{2\epsilon_j} \int_{\mathbb{R}} g_j(t) dt \\ &= \frac{1}{2\epsilon_j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2k\epsilon_j}^{2(k+1)\epsilon_j} g_j(t) dt \\ &= \frac{1}{2\epsilon_j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\epsilon_j} \Phi_j(t) dt \\ &= \int_0^1 \Phi_j(t) dt. \end{aligned}$$

Ainsi, quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} G_{\epsilon_j}(u_j) = M < +\infty$$

Soit maintenant $\eta > 0$. On considère les ensembles

$$A_j = \left\{ y \in]0, 1[: \Phi_j(y) \leq G_{\epsilon_j}(u_j) + \eta \right\}$$

et

$$B_j =]0, 1[\setminus A_j$$

Alors

$$\begin{aligned} |B_j| &\leq \frac{1}{G_{\epsilon_j}(u_j) + \eta} \int_{B_j} \Phi_j(y) dy \\ &\leq \frac{1}{G_{\epsilon_j}(u_j) + \eta} \int_0^1 \Phi_j(y) dy \\ &= \frac{G_{\epsilon_j}}{G_{\epsilon_j}(u_j) + \eta} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{M}{M + \eta} < 1. \end{aligned}$$

On peut donc supposer que pour j suffisamment grand, il existe une constante C indépendante de j telle que

$$|B_j| \leq C < 1.$$

Du coup,

$$|A_j| \geq 1 - C > 0.$$

On introduit maintenant la fonction constante par morceaux

$$T_y^\varepsilon v(x) = v\left(y + \left[\frac{x-y}{\varepsilon}\right]\right),$$

constante sur chaque intervalle $]y + k\varepsilon, y + (k+1)\varepsilon[$, $k \in \mathbb{Z}$. D'après [Braides 1998, Lem. 3.36], pour presque-tout y on a

$$T_y^{\varepsilon_j} u_j \xrightarrow{\text{L}_{\text{loc}}^1} u.$$

Notons maintenant $P_j(y) = \|T_y^{\varepsilon_j} u_j - u\|_{L^1}$. On a donc

$$P_j \xrightarrow[p.p.]{-\mathbb{R}} 0.$$

D'après le théorème d'Egorov,

$$\exists E \text{ t.q. } |E| \leq \frac{1-C}{2} \text{ et } P_j \xrightarrow[\text{unif.}]{\mathbb{R} \setminus E} 0.$$

Il existe donc $y_j \in A_j \setminus E$ tel que

$$T_{y_j}^{\varepsilon_j} u_j \xrightarrow{\text{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})} u$$

ce qui implique que

$$G_{\varepsilon_j}(u_j) + \eta \geq \Phi_j(y_j). \quad (6.38)$$

Pour simplifier, supposons que $y_j = 0$ (quitte à effectuer une translation). Toujours selon l'idée de Braides, on introduit

$$J_j^1 = \left\{ k : \frac{(u_j(2(k+1)\varepsilon_j) - u_j(2k\varepsilon_j))^2}{2\beta\varepsilon_j(u_j^2(2k\varepsilon_j) + u_j^2(2(k+1)\varepsilon_j)) + \varepsilon_j^2} \leq 1 \right\}$$

et

$$J_j^2 = J_j^1 C.$$

On définit alors une nouvelle fonction $v_j \in \text{SBV}(\mathbb{R})$ de même limite u dans L^1 et d'énergie plus petite que u_j , telle que

$$v_j(t) = \begin{cases} \text{une interpolation affine de } u_j \text{ sur }]2k\varepsilon_j, 2(k+1)\varepsilon_j[& \text{si } k \in J_j^1 \\ \text{constante par morceaux} & \text{si } k \in J_j^2 \end{cases}$$

D'après [Braides 1998, Rem. 3.37], on a

$$v_j \xrightarrow{\text{L}_{\text{loc}}^1, L^1(0,1)} u.$$

Mais en écrivant (6.38) pour $y = y_j$ on a

$$\begin{aligned} G_{\varepsilon_j} + \eta &\geq \sum_{k \in J_j^1} \frac{1}{4\varepsilon_j^2} (u_j(2(k+1)\varepsilon_j) - u_j(2k\varepsilon_j))^2 + \sum_{k \in J_j^2} \beta [u_j(2(k+1)\varepsilon_j) + u_j(2k\varepsilon_j)] \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\nabla v_j|^2 dx + \beta \sum_{t \in \mathcal{J}_{v_j}} |v_j^+(t)|^2 + |v_j^-(t)|^2 \end{aligned}$$

En passant à la limite sur j , on en déduit d'après le théorème de semi-continuité inférieure de $\text{SBV}^{\frac{1}{2}}$ que $u \in \text{SBV}^{\frac{1}{2}}$ et que

$$\liminf_j G_{\varepsilon_j} \geq \int_{\mathbb{R}} |\nabla u|^2 dx + \beta \sum_{t \in \mathcal{J}_u} |u^+|^2 + |u^-|^2 = G(u) - \eta$$

Le choix de η étant arbitraire, on en déduit l'inégalité sur la \liminf .

- $\Gamma - \limsup$: Par densité, il est suffisant de considérer $u \in \text{SBV}(\mathbb{R}) \cap W$, tel que u ait un nombre fini de sauts (par exemple, un seul en $t_0 \in]0, 1[$), $u \in C^1(\mathbb{R} \setminus \mathcal{J}_u)$, et $u(x) \leq M$, $u(x) \geq \alpha > 0$ p.p. dans $\{x : u(x) > 0\}$.

On a

$$\begin{aligned} G_{\varepsilon}(u) &\approx \frac{\beta}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{t_0-\varepsilon} [u^2(x+\varepsilon) + u^2(x-\varepsilon)] \frac{(u(x+\varepsilon) - u(x-\varepsilon))^2}{2\beta\varepsilon(u^2(x+\varepsilon) + u^2(x-\varepsilon)) + \varepsilon^2} dx \\ &\quad + \frac{\beta}{2\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} [u^2(x+\varepsilon) + u^2(x-\varepsilon)] dx \\ &\quad + \frac{\beta}{2\varepsilon} \int_{t_0+\varepsilon}^{1+\varepsilon} [u^2(x+\varepsilon) + u^2(x-\varepsilon)] \frac{(u(x+\varepsilon) - u(x-\varepsilon))^2}{2\beta\varepsilon(u^2(x+\varepsilon) + u^2(x-\varepsilon)) + \varepsilon^2} dx \\ &\xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \int_0^1 |\nabla u|^2 dx + \beta [|u^+(t_0)|^2 + |u^-(t_0)|^2]. \end{aligned}$$

□

Théorème 6.12 (Approximation non locale en dimension 1).

Soit ψ_{ε} une fonction continue et croissante. On définit sur $L^1_{loc}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la suite de fonctionnelles

$$\tilde{H}_{\varepsilon}(u) = \begin{cases} \text{NL}_{\varepsilon}(u) & \text{si } u \in W \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\tilde{H}(u) = \begin{cases} \int_D |\nabla u|^2 + \beta \int_{\mathcal{J}_u} |u^+|^2 + |u^-|^2 d\mathcal{H}^{N-1} + \gamma |\{u > 0\}| & \text{si } u \in W \cap \text{SBV}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors \tilde{H}_{ε} Γ -converge vers \tilde{H} dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Démonstration. La preuve est immédiate car en général, si $u_\varepsilon \xrightarrow{L^1} u$ alors $\liminf \int_I \psi_\varepsilon(u_\varepsilon) dx \geq |\{u > 0\}|$. Concernant l'inégalité de la \limsup , de même que dans la preuve du théorème 6.11, la suite approximante est constante pour $u \in SBV^\frac{1}{2}$, et $\int_I \psi_\varepsilon(u_\varepsilon) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} |\{u > 0\}|$. \square

6.5 Résultats numériques en 1D

Dans cette section, on s'intéresse au cas plus simple du Laplacien en dimension 1, autrement dit au cas $N = 1$ et $p = 2$ dans la fonctionnelle (6.3). Ce choix correspond par ailleurs à prendre $\alpha = 1$ dans l'approximation locale (6.31). On calcule dans un premier temps une solution analytique pour un jeu de paramètres fixés, puis on discutera de l'implémentation numérique et des difficultés rencontrées à partir de cet exemple.

6.5.1 Calcul analytique en dimension 1

Dans un souci de simplification, on se place en dimension 1, dans le cas où $p = 2$, et on suppose de plus que $D = [0,1]$, $K = \{0\}$ et $g \equiv 1$ sur K . Dans ce contexte, l'optimum $\Omega = \{u > 0\}$ recherché est un intervalle de la forme $[0,L]$, $0 < L < 1$, et le problème (6.4) se réécrit

$$\min_L \min_{u(0)=1} \int_0^L |u'|^2 dx + \beta u^2(L) + \gamma |\{u > 0\}|. \quad (6.39)$$

Or une solution u du problème (6.39) est harmonique, autrement dit on cherche une fonction affine de la forme $u(x) = ax + b$ sur $[0,L]$. La contrainte en 0 nous donne immédiatement que $b = 1$, et la condition de Robin au bord induit :

$$\begin{aligned} u'(L) + \beta u(L) &= 0 \\ \Leftrightarrow a(1 + \beta L) &= -\beta \end{aligned}$$

i.e.

$$a = -\frac{\beta}{1 + \beta L}$$

et

$$L = -\frac{a + \beta}{a\beta}$$

De plus, l'énergie se réécrit

$$\begin{aligned} E(L) &= a^2 L + \beta(aL + 1)^2 + \gamma L \\ &= a^2 L + \beta \frac{a^2}{\beta^2} + \gamma L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta^2}{(1 + \beta L)^2} \left(L + \frac{1}{\beta} \right) + \gamma L \\
&= \frac{\beta}{(1 + \beta L)} + \gamma L
\end{aligned}$$

L'équation d'Euler-Lagrange associée à E est alors donnée par

$$\frac{\beta^2}{(1 + \beta L)^2} + \gamma = 0$$

autrement dit

$$L = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\gamma}} - 1 \right).$$

En choisissant par exemple $\beta = 2$ et $\gamma = 1$, une solution du problème en dimension 1 (6.39) est

$$u(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{pour } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.40)$$

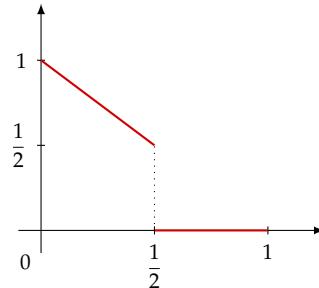


FIGURE 6.2 – Solution optimale en dimension 1 du problème d'optimisation de formes (6.3) avec condition au bord de Robin.

Dans ce cas, la valeur de l'énergie (6.3) à l'optimum est

$$\int_0^{1/2} |u'|^2 dx + \beta u \left(\frac{1}{2} \right) + |\{u > 0\}| = \frac{3}{2}. \quad (6.41)$$

Dans la suite de cette section, nous chercherons à retrouver numériquement ce résultat.

6.5.2 Processus d'optimisation

Choix de $\psi(t)$ pour la fonctionnelle de type Acerbi-Braides. Numériquement, le choix de α , et plus généralement de $\psi(t)$, est déterminant. En effet, si on choisit $\alpha = 1$ par exemple,

le terme couplé s'écrit alors $\frac{4\beta}{\varepsilon} \int_D (u - v)^6 dx$, et pénalise peu la différence entre u et v . Aussi, on s'intéresse au cas limite où $\alpha \approx 0$, qui correspond plutôt à choisir

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admissible pour le résultat de [Acerbi *et al.* 1998]. N'étant pas dérivable en 0, on approche numériquement ψ par une fonction $\psi_\delta = \max(0, \min(\frac{x}{\delta}, 1))$, où $\delta > 0$ est une constante fixée.

Dérivées directionnelles. Du fait du caractère non convexe des deux approximations (6.31) et (6.35) présentées, on utilise un algorithme de descente de gradient, alternée pour l'approximation locale. Les dérivées directionnelles pour l'approximation de type Acerbi-Braides sont données par

$$\begin{cases} \frac{dL_\varepsilon}{du} = -2\psi'(v)\nabla v\nabla u - 2\psi_\delta(v)\Delta u + (2+4\alpha)(1+\alpha)^2\frac{\beta}{\varepsilon}(u-v)^{1+4\alpha} + \gamma\psi'_\varepsilon(u) \\ \frac{dL_\varepsilon}{dv} = \psi'_\delta(v)|\nabla u|^2 - \varepsilon\Delta v - (2+4\alpha)(1+\alpha)^2\frac{\beta}{\varepsilon}(u-v)^{1+4\alpha} \end{cases} \quad (6.42)$$

Pour l'approximation non locale, on pose

$$\begin{aligned} q_1(x) &= u(x+\varepsilon) - u(x-\varepsilon) \\ q_2(x) &= 2\beta\varepsilon(u^2(x+\varepsilon) + u^2(x-\varepsilon)) + \varepsilon^2 \\ q_3(x) &= u^2(x+\varepsilon) + u^2(x-\varepsilon) \end{aligned}$$

Alors la dérivée par rapport à u s'écrit

$$\frac{dNL_\varepsilon}{du} = h_+(x-\varepsilon) + h_-(x+\varepsilon) + \psi_\varepsilon(u(x)) \quad (6.43)$$

où

$$\begin{aligned} h_\pm(x) &= \frac{\beta}{\varepsilon}u(x \pm \varepsilon)f\left(\frac{q_1^2(x)}{q_2(x)}\right) \\ &\pm \frac{\beta}{\varepsilon}\frac{q_1(x)q_3(x)}{q_2(x)}f'\left(\frac{q_1^2(x)}{q_2(x)}\right) \\ &- 2\beta^2\frac{q_1^2(x)q_3(x)}{q_2^2(x)}f'\left(\frac{q_1^2(x)}{q_2(x)}\right)u(x \pm \varepsilon) \end{aligned}$$

Discrétisation. On discrétise l'intervalle $[0, 1]$ en $N + 1$ points $x_i = i.h \forall i \in \{0, \dots, N\}$ avec $h = \frac{1}{N}$. Et on note $u(x_i) = u_i \forall i \in \{0, \dots, N\}$.

On discrétise de plus la dérivée et la dérivée seconde selon un schéma aux différences finies centrées

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

$$u''_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Algorithme. L'algorithme implémenté est similaire pour les deux approximations (6.31) et (6.35), à la différence près que l'on ne traite que u pour l'approximation non locale. Aussi, nous présentons seulement l'algorithme écrit pour la fonctionnelle locale (6.31) :

Algorithme 4 : OPTIMIZE-R($(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_r)$: reals)

```

1 Var  $u$  : vector,  $(v, v')$  : vectors,  $\varepsilon$  : real ;
2 begin
3    $u \leftarrow \max \left( 0, \min \left( 1, \frac{1 - 2\varepsilon - x}{1 - 4\varepsilon} \right) \right)$ ,  $v \leftarrow u$ ;
4    $\varepsilon \leftarrow \varepsilon_1$ ;
5   while  $\varepsilon \geq \varepsilon_2$  do
6     repeat
7        $v' \leftarrow v$ ;
8        $u^{n+1} \leftarrow u^n - \delta_u \frac{dL_\varepsilon}{du}$ ;
9        $v^{n+1} \leftarrow v^n - \delta_v \frac{dL_\varepsilon}{dv}$ ;
10      constraint( $u$ );
11      until  $\|v - v'\|$  is small;
12       $\varepsilon \leftarrow \varepsilon / \varepsilon_r$  ;
13  return  $(u, v)$  ;

```

6.5.3 Résultats numériques et discussions

On présente dans les figures 6.3 et 6.4 les résultats de la minimisation des fonctionnelles locale (6.31) et non-locale (6.35) avec le processus décrit à la section 6.5.2, et les contraintes discutées ci-après. La table 6.1 regroupe quant à elle les valeurs finales des énergies pour l'ensemble de ces résultats.

Choix de ε . Tout comme pour la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli, on mime le processus de Γ -convergence en choisissant au début de la simulation une valeur ε_1 suffisamment grande pour détecter les sauts, que l'on raffine au fur et à mesure jusqu'à une valeur minimale ε_2 , qu'il est nécessaire de choisir de l'ordre de 5 à 10h.

Le choix de ε est d'autant plus déterminant dans les fonctionnelles (6.31) et (6.35) qu'il est le seul élément aidant à la détection des sauts. En effet, dans la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli, la donnée g permet de localiser (au moins approximativement) les discontinuités, et le raffinement de ε de les identifier très précisément. Or dans les approximations (6.31) et (6.35), on remarque non seulement que rien ne permet d'identifier la position du saut, mais en plus que ces fonctionnelles ne permettent pas à l'interface de se déplacer le long de l'axe des abscisses. Autrement dit, si le saut est mal localisé, le seul moyen de le déplacer vers sa position attendue est d'"aplatir" vers 0 ou de "relever" une partie de la surface u ; si ces actions se traduisent par une augmentation momentanée de l'énergie, l'algorithme préférera rester dans un minimum local, bien que le saut ne soit pas détecté au bon endroit, ce que l'on observe dans les figures 6.3 et 6.4.

Données initiales. Étant donné le risque élevé de tomber dans un minimum local discuté dans le paragraphe précédent, accru par le caractère non local de la seconde approximation (6.35), nous choisissons d'initialiser u (et v) par une fonction qui décroît de 1 à 0, linéairement ou de façon oscillante.

Gestion de la contrainte. Numériquement, il n'est pas possible d'imposer seulement $u(0) = 1$, pour des raisons qui dépendent de la construction même de chacune des approximations.

Dans le cas de l'approximation non locale (6.35), le problème vient du terme $u(x + \varepsilon) - u(x - \varepsilon)$ approchant le gradient. En effet, on souhaite que u soit constante égale à 1 sur $K = \{0\}$, et donc que $u'_{|K} \equiv 0$. Or notre approximation utilise le fait que $u'(0) = \frac{u(\varepsilon) - u(-\varepsilon)}{2\varepsilon}$. Cela implique non seulement que $u(x) = 1$ pour $x < 0$, mais aussi que $u(\varepsilon) = 1$, et donc $u(x) = 1$ pour $x \leq \varepsilon$. Mais ce n'est en fait pas suffisant : on voit apparaître dans la dérivée de la fonctionnelle non locale (6.43) des termes en $x - 2\varepsilon$ et $x + 2\varepsilon$, et notamment le terme q_1 modélisant le gradient. Finalement, on a besoin d'étendre la contrainte $u(x) = 1$ pour tout $x \leq 2\varepsilon$.

Et afin de coller au problème physique d'isolation, on impose de plus que $u \equiv 0$ au bord du domaine ; dans notre cas, cela revient à imposer $u(1) = 0$. On constraint donc $u(x) = 0$ pour $x \geq 1 - 2\varepsilon$ pour les mêmes raisons que précédemment.

Concernant l'approximation locale (6.31), le gradient est explicitement calculé avec des différences finies centrées. Aussi, nous n'avons besoin d'étendre la contrainte $u(x) = 1$ qu'à un petit voisinage de points autour de 0.

Approche locale de type Acerbi-Braides. L'approximation locale (6.31) dépend de deux fonctions u et v . Dans cette fonctionnelle, le rôle de v est d'approcher la fonction u , sauf sur les sauts de cette dernière, où v est alors proche de 0. Numériquement, on observe sur la figure 6.3 que la fonction v fait effectivement un saut avant u , permettant à cette dernière

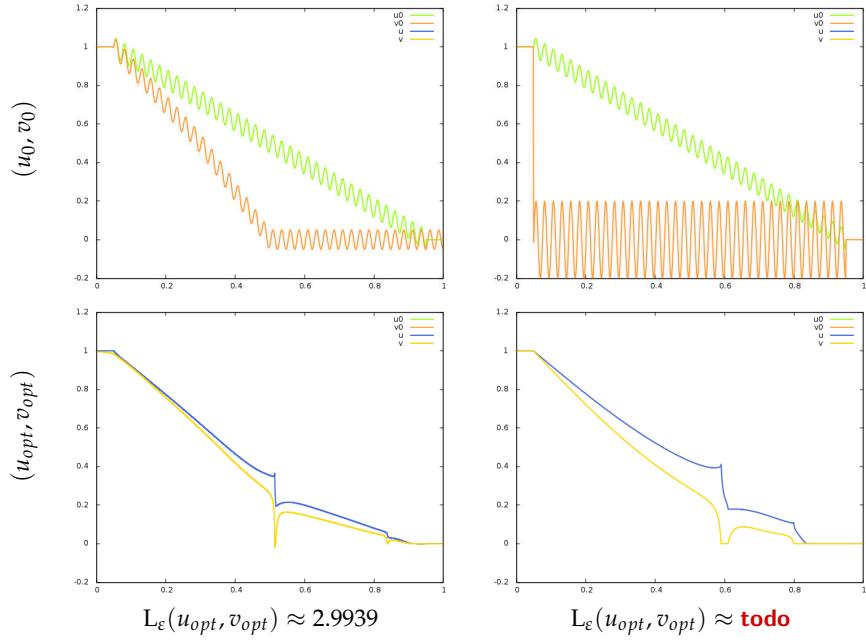


FIGURE 6.3 – Minimisation de l'approximation locale de type Acerbi-Braides (6.31) avec différentes initialisations pour 10000 points et $\varepsilon = 1.0 \searrow 0.006$.

de faire un saut autour de $\frac{1}{2}$ comme attendu. Toutefois, en dehors de celui-ci, v peine à s'approcher de u , alors que le terme $\frac{\beta}{\varepsilon} \int_D (u - v)^{2+4\alpha} dx$ devrait le contraindre fortement quand ε tend vers 0. Cela vient du fait que numériquement, tout comme c'était le cas avec la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli au chapitre 2, le choix d'une discréétisation par différences finies nous empêche de faire tendre réellement ε vers 0.

En effet, si on regarde les suites approximantes construites pour la démonstration de la \limsup du théorème 6.8, on remarque qu'on doit récupérer l'interface sur un intervalle de longueur $\frac{\varepsilon}{T}$. Pour que cet interface se concentre par exemple sur cinq points, autrement dit sur un intervalle discret de longueur $5h$, un calcul explicite dans le cas où $\alpha \approx 0$ nous permet de déterminer une borne inférieure sur ε en fonction de T et du pas de discréétisation h .

Il est nécessaire dans un premier temps d'expliquer la fonction v_T qui apparaît dans la construction de la suite approximante v_ε (6.33), et qui satisfait les hypothèses (6.34). Dans notre cas, on rappelle que $W(x) = \beta^2 x^2$, et on note $c = u^+(0)$. On cherche $v_T(x) = c(1 - \tilde{v}(x))$ telle que \tilde{v} minimise

$$\int_0^T W(u^+(0) - v_T) + |v'_T|^2 dx$$

autrement dit, \tilde{v} est solution de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} -\tilde{v}'' + \beta^2 \tilde{v} &= 0 \\ \tilde{v}(0) = 1, \quad \tilde{v}(T) &= 0 \end{aligned}$$

On obtient donc $v_T(x) = c \left(1 - \frac{e^{-\beta x} - e^{-\beta T}}{1 - e^{-\beta T}} \right)$. La seconde hypothèse (6.34b) implique que

$$\int_0^T W(c - v_T) + |v'_T|^2 dx \leq \Phi(c) + \eta = \beta c^2 + \eta$$

Or

$$\int_0^T |v'_T|^2 dx = \frac{c^2}{(1 - e^{-\beta T})^2} \int_0^T \beta^2 e^{-2\beta x} dx = \frac{c^2 \beta}{2} \frac{(1 + e^{-\beta T})}{(1 - e^{-\beta T})}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^T W(c - v_Y) dx &= \beta^2 c^2 \int_0^T \tilde{v}^2 dx \\ &= \frac{\beta^2 c^2}{(1 - e^{-\beta T})^2} \int_0^T (e^{-\beta x} - e^{-\beta T})^2 dx \\ &= \frac{\beta c^2}{2} \frac{(1 + e^{-\beta T})}{(1 - e^{-\beta T})} - \underbrace{\frac{2\beta c^2 e^{-\beta T}}{1 - e^{-\beta T}} + \frac{\beta^2 c^2 T}{(1 - e^{-\beta T})^2} e^{-\beta T}}_{\text{de l'ordre de } \beta^2 c^2 T e^{-\beta T}} \end{aligned}$$

Ainsi, on souhaite avoir l'inégalité

$$\beta c^2 \frac{(1 + e^{-\beta T})}{(1 - e^{-\beta T})} + \beta^2 c^2 T e^{-\beta T} \leq \beta c^2 + \eta$$

autrement dit,

$$\eta \approx \beta^2 c^2 T e^{-\beta T}.$$

La troisième contrainte (6.34c) impose quant à elle

$$\frac{1}{T} \beta^2 c^2 \int_0^1 \tau^2 d\tau = \frac{\beta^2 c^2}{3T} \leq \eta. \quad (6.44)$$

Finalement, il faut que

$$\min \left\{ \frac{1}{3T}, T e^{-\beta T} \right\} \leq \frac{\eta}{\beta^2 c^2}. \quad (6.45)$$

Concernant l'énergie totale (6.29), on a sur $\left[0, \frac{\varepsilon}{T}\right]$

$$\frac{\beta^2}{\varepsilon} \int_0^{\frac{\varepsilon}{T}} u_\varepsilon^2 dx = \frac{\beta^2}{\varepsilon} \int_0^{\frac{\varepsilon}{T}} x^2 \frac{T^2}{\varepsilon^2} c^2 dx = \frac{\beta^2 c^2}{3T} \leq \eta$$

d'après (6.44). Et sur $\left[\frac{\varepsilon}{T}, \frac{\varepsilon}{T} + \varepsilon T\right]$, on a de plus

$$\varepsilon \int_{\frac{\varepsilon}{T}}^{\frac{\varepsilon}{T} + \varepsilon T} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx = \varepsilon \int_{\frac{\varepsilon}{T}}^{\frac{\varepsilon}{T} + \varepsilon T} \left| v'_T \left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{T} \right) \right|^2 dx = \varepsilon^2 \int_0^T |v'_T(y)| dy, \quad (6.46)$$

$$\frac{\beta^2}{\varepsilon} \int_{\frac{\varepsilon}{T}}^{\frac{\varepsilon}{T} + \varepsilon T} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)^2 dx = \frac{\beta^2}{\varepsilon} \int_{\frac{\varepsilon}{T}}^{\frac{\varepsilon}{T} + \varepsilon T} \left(c - v_T \left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{T} \right) \right)^2 dx = \beta^2 \int_0^T (c - v_T(y))^2 dy. \quad (6.47)$$

La somme de (6.46) et (6.47) est exactement égale à la seconde contrainte (6.34b), elle est donc indépendante de ε et plus petite que $\beta^2 c^2 + \eta$.

Finalement, en choisissant par exemple $\beta = 2$, $u^+(0) = c = \frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{100}$ et $T = 40$ pour que la contrainte (6.45) soit satisfaite, l'approximation de type Acerbi-Braides peut être majorée par 4η , et on montre que pour que l'interface se situe sur un intervalle de longueur $5h$ il faut que $5h \leq \frac{\varepsilon}{T}$. Autrement dit, pour une discrétisation de l'intervalle $[0, 1]$ en 2000 points, $\varepsilon \geq 0.1$.

TABLE 6.1 – Valeurs finales des énergies pour les expériences de la figure 6.4. Valeur théorique attendue égale à $\frac{3}{2}$ d'après (6.41).

| | $\varepsilon = 0.1 \searrow 0.005$ | $\varepsilon = 0.2 \searrow 0.005$ | $\varepsilon = 0.24 \searrow 0.005$ |
|--------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| $NL_\varepsilon + u_0^1$ | 1.489 | 1.520 | 1.473 |
| $NL_\varepsilon + u_0^2$ | 1.489 | 1.5054 | 1.473 |
| $NL_\varepsilon + u_0^3$ | 1.471 | 1.503 | 1.473 |

Approche non locale. L'approche non locale permet elle aussi d'approcher la solution (6.40) calculée théoriquement, et est plus sensible à l'initialisation. Toutefois, on observe numériquement un effet de staircasing dû au caractère non local de cette approximation, puisque pour chaque point x du domaine, on prend en compte l'information située à distance ε de x .

On remarque de plus que la hauteur des "marches" est d'autant plus importante que la valeur de u est proche de 1. En effet, si on compare les valeurs du quotient Q passé en argument à f dans deux situations où le saut est de hauteur s , on a :

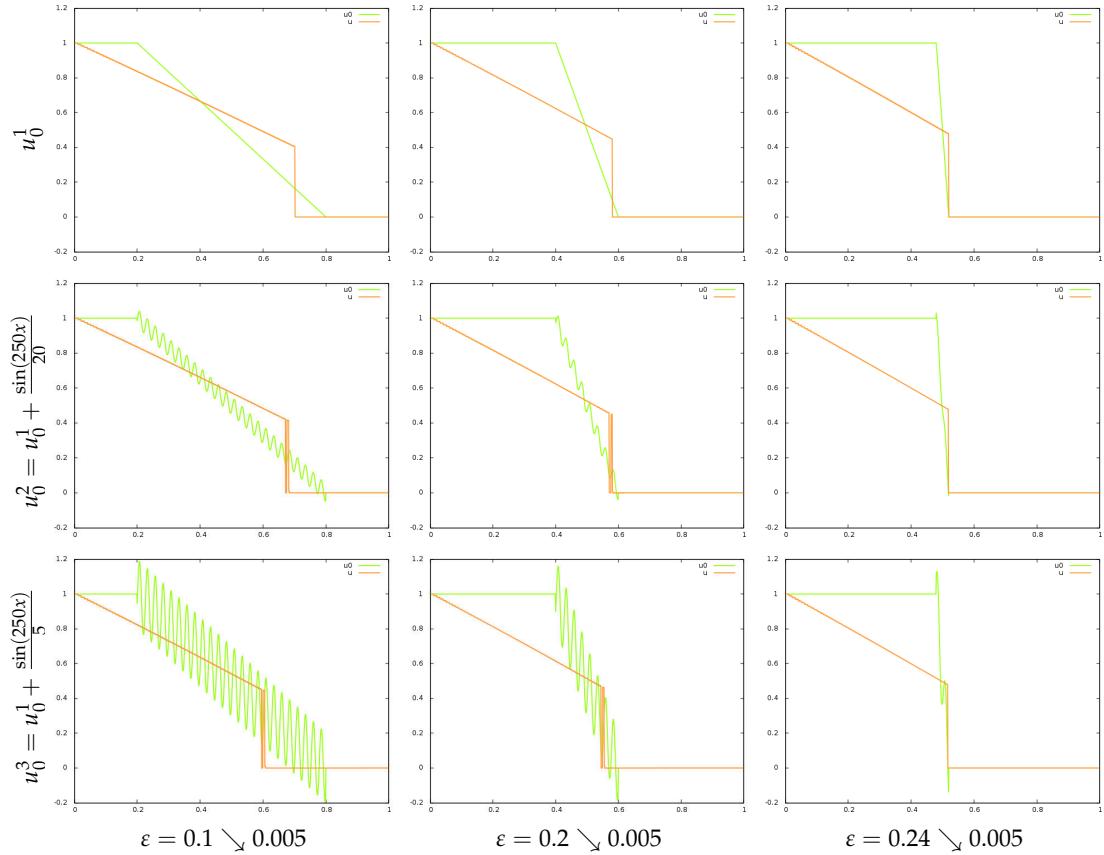


FIGURE 6.4 – Minimisation de l'approximation non locale (6.35) avec différentes initialisations et différentes valeurs initiales de ε , pour 1000 points.

| | $u(x) \approx 1$ | $u(x) \approx 0$ |
|--|-------------------------------|---|
| $u(x - \varepsilon)$ | 1 | s |
| $u(x + \varepsilon)$ | $1 - s$ | 0 |
| $Q(x)$ | s^2 | $\frac{s^2}{2\beta\varepsilon(s^2 + 2s + 2) + \varepsilon^2}$ |
| $\beta = 2, s = 0.1, \varepsilon = 0.01$ | $Q(x) < 1$ | $Q(x) \gg 1$ |
| | → pas considéré comme un saut | → considéré comme un saut |

Cet exemple met en évidence le fait que des variations de hauteur s ne sont pas prises en compte de la même façon dans la fonctionnelle non locale (6.35) selon la valeur de u , ce qui explique aussi pourquoi le saut a tendance à apparaître dans la deuxième moitié de l'intervalle $[0, 1]$.

Par ailleurs, comme l'illustre la figure 6.4, la méthode n'est pas capable de détecter automatiquement la position du saut, et tombe facilement dans un minimum local, comme le montrent les énergies de la table 6.1. Il faut donc procéder à plusieurs expérimentations avec des conditions initiales positionnant a priori le saut à différents endroits, et analyser les énergies pour extraire la solution optimale. On remarque par ailleurs qu'une condition initiale oscillante conduit à de meilleures solutions, d'autant plus proches de la solution attendue que l'amplitude des oscillations est forte, comme on peut le voir sur les deuxième et troisième lignes de la figure 6.4.

Formulation à l'aide du calcul discret. Dans le chapitre 4, le calcul discret nous a permis de résoudre les problèmes rencontrés lors de l'optimisation de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli avec les schémas de discrétilisations standards. La différence entre ces schémas et les formulations proposées (4.2) et (4.4) était la possibilité de faire vivre les variables sur différents types de cellules. Ainsi, nous avons choisi de placer la fonction v modélisant les contours sur des cellules de mesure de Hausdorff \mathcal{H}^2 nulle (les arêtes ou les sommets), ce qui correspond à ce que l'on attend d'une discontinuité.

Concernant l'énergie (6.3) qui nous intéresse dans ce chapitre, l'apport du calcul discret serait cependant minime. En effet, dans l'approximation locale (6.31), la fonction v qui a été introduite pour la Γ -convergence approche u , sauf au niveau des sauts ; les deux fonctions modélisent donc le même objet, et nécessitent ainsi d'être placées sur le même type de cellule. La formulation discrète serait donc équivalente à celle en différences finies. Quant à l'approximation non locale (6.35), elle ne dépend que de u , et quel que soit le type de cellule sur lequel on choisirait de faire vivre u , on retrouverait à nouveau une formulation équivalente à la discrétilisation avec des différences finies.

6.6 Résultats numériques en 2D

Étant donnée la complexité de l'optimisation des approximations par Γ -convergence en 1D, l'extension à la dimension deux semble très difficile. Aussi, après avoir calculé une solution explicite du problème pour un exemple simple en 2D, nous présentons une méthode non plus basée sur les approximations par Γ -convergence, mais une approche d'optimisation de forme basée sur la dérivée de forme et utilisant les solutions fondamentales pour le calcul de la solution [Alves et Antunes 2009; Bogosel 2015; 2016].

6.6.1 Calcul analytique en dimension 2

On se place à nouveau dans le cas où $p = 2$, et on suppose cette fois-ci que $K = \mathcal{B}(1)$ et $g \equiv 1$ sur $\mathcal{B}(1)$. Dans ce contexte, on montre que la solution est symétrique par rapport à toutes les droites passant par l'origine, et donc radiale. On cherche alors $\Omega = \mathcal{B}(t)$ pour $t \geq 1$. De plus, u est harmonique dans $\mathcal{B}(t) \setminus \bar{\mathcal{B}}(1)$ et $u(1) = 1$. Donc on cherche u de la forme $u(r) = a \ln(r) + 1$.

Ainsi, la fonctionnelle de Robin (6.3) pour $p = 2$ pour une telle fonction u vérifie

$$\begin{aligned} E &= 2\pi \int_1^t \frac{a^2}{r^2} r dr + 2\pi r \beta (a \ln t + 1)^2 + \gamma \pi t^2 \\ &= 2\pi a^2 \ln t + 2\pi \beta t (a \ln t + 1)^2 + \gamma \pi t^2 \end{aligned}$$

Or les conditions au bord de Robin nous imposent que

$$\frac{a}{t} + \beta(a \ln t + 1) = 0$$

Ainsi, en remplaçant $(a \ln t + 1) = -\frac{a}{t\beta}$ et $a = \frac{-\beta}{(\frac{1}{t} + \beta \ln t)}$, on obtient

$$\begin{aligned} E &= 2\pi a^2 \ln t + 2\pi \beta t \frac{a^2}{t^2 \beta^2} + \gamma \pi t^2 \\ &= \frac{\beta^2}{(\frac{1}{t} + \beta \ln t)^2} 2\pi \left(\ln t + \frac{1}{t\beta} \right) + \gamma \pi t^2 \\ &= \frac{2\pi}{\frac{1}{t\beta} + \ln t} + \gamma \pi t^2 \end{aligned}$$

Pour $\beta = 2$ et $\gamma = 0.1$, le minimum de l'énergie de Robin est atteint en $t \approx 2.52$ et alors l'énergie vaut $\mathcal{R}(u) \approx 7.59$.

6.6.2 Méthode des solutions fondamentales

Comme nous l'avons vu à la section 6.6.1, dans le cas où $K = \mathcal{B}(1)$, la solution u est harmonique. La méthode proposée par [Alves et Antunes 2009; Bogosel 2015; 2016] repose sur le fait qu'une fonction harmonique peut être écrite comme une combinaison linéaire de fonctions harmoniques, et on cherche alors u sous la forme $u(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(x)$.

Pour cela, on choisit tout d'abord n_1 points $\{x_i^{out}\}_{i=1,\dots,n_1}$ sur le bord extérieur de Ω , et on place les points $\{y_i^{out}\}_{i=1,\dots,n_1}$ tel que chaque point y_i^{out} est situé sur la normale issue de x_i^{out} . On procède de même sur le bord intérieur, qui coïncide avec ∂K , et on note les n_2 points correspondant $\{x_i^{in}\}_{i=1,\dots,n_2}$ et $\{y_i^{in}\}_{i=1,\dots,n_2}$.

Pour tout $x \in \Omega$, on définit les fonctions harmoniques

$$\Phi_i^{in}(x) = \log |x - y_i^{in}| \quad \text{et} \quad \Phi_i^{out}(x) = \log |x - y_i^{out}|$$

centrées en y_i^{in} et y_i^{out} respectivement. Les conditions aux bords s'écrivent alors

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \frac{\partial \Phi_i^{out}}{\partial n}(x_j^{out}) + \beta \Phi_i^{out}(x_j^{out}) = 0 & \forall j = 1, \dots, n_1 \\ \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_i \Phi_i^{in}(x_j^{in}) = 1 & \forall j = 1, \dots, n_2 \end{cases} \quad (6.48)$$

On résoud finalement le système (6.48) pour trouver les $n_1 + n_2$ coefficients α_i et calculer ainsi la solution u . On fait ensuite évoluer le bord du domaine inconnu Ω en perturbant Ω avec un champ de vecteurs $V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, et en calculant la dérivée de l'énergie dans la direction V . Cette dérivée, appelée gradient de forme, est donnée pour $p = 2$ par

$$dR(\Omega, V) = \int_{\partial\Omega} |\nabla_\Gamma u|^2 V \cdot \vec{n} \, d\mathcal{H}^{N-1} - \beta^2 \int_{\partial\Omega} u^2 V \cdot \vec{n} \, d\mathcal{H}^{N-1} + \beta \int_{\partial\Omega} H u^2 V \cdot \vec{n} \, d\mathcal{H}^{N-1} \quad (6.49)$$

sous des hypothèses de régularité suffisante sur Ω , et où H désigne la courbure, et on itère.

6.6.3 Résultats numériques

La figure 6.5 illustre les résultats de la méthode des solutions fondamentales de [Bogosel 2015; 2016], pour $\beta = 2$ et $\gamma = 0.1$. L'exemple choisi à la section 6.6.1 correspond à la figure 6.5 (a), et on observe que le rayon et l'énergie finale correspondent à ceux précédemment calculés. La seconde figure 6.5 (b) est une autre exemple, pour un ensemble K non convexe mais néanmoins étoilé.

La méthode basée sur le gradient de forme, combinée au calcul avec les solutions fondamentales, réussit ainsi à retrouver les domaines attendus. Toutefois, cette approche ne

Algorithme 5 : OPTIMIZE-R-2D($\{x_i^{out}\}_{i=1,\dots,n_1}$, $\{x_i^{in}\}_{i=1,\dots,n_2}$: points, (β, γ) : reals)

```

1 Var  $\alpha = (\alpha_i)_{i=1,\dots,n_1+n_2}$  : vector,  $u$  : matrix;
2 begin
3   repeat
4      $\Phi_i^\bullet(x) \leftarrow \log|x - y^\bullet|$  for  $\bullet = \{in, out\}$ ;
5     Solve system (6.48) to find coef.  $\alpha$ ;
6      $u \leftarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(x)$ ;
7      $\{x_i^\bullet\} \leftarrow \{x_i^\bullet\} - \delta dR(D, V)$  for  $\bullet = \{in, out\}$ ;
8   until convergence;
9   return  $u$  ;

```

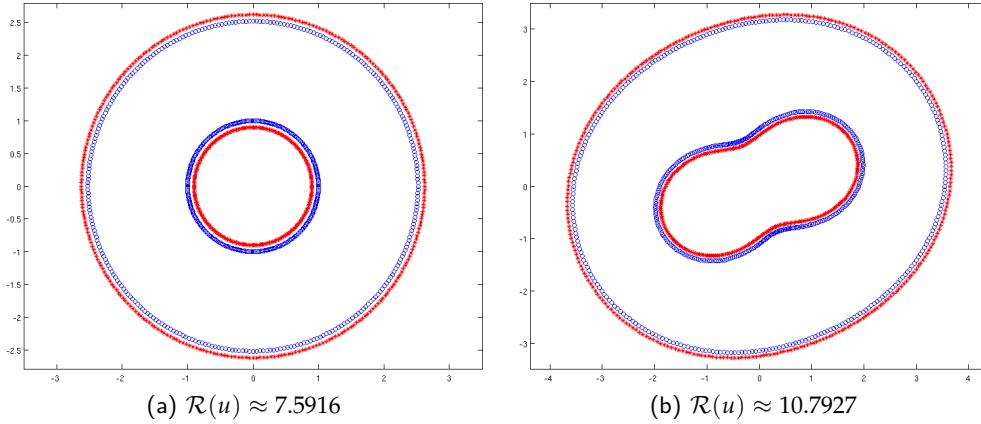


FIGURE 6.5 – Résolution du problème d’isolation en 2D avec la méthode des solutions fondamentales de [Bogosel 2015; 2016]. Les cercles bleus correspondent aux points $\{x_i^{in}, x_i^{out}\}$, les étoiles rouges aux points $\{y_i^{in}, y_i^{out}\}$.

permettrait pas de détecter des sauts susceptibles de se former à l’intérieur du domaine, contrairement aux approximations par Γ -convergence.

6.7 Conclusion

Le problème d’isolation présenté dans ce chapitre illustre à nouveau le fossé qui existe entre la théorie et la résolution numérique lorsqu’on utilise la Γ -convergence. Les problèmes causés par les schémas standards ne peuvent toutefois pas être résolus en utilisant le calcul discret, peu adapté pour les approximations proposées. Elles semblent par ailleurs difficile à exploiter en dimension deux, étant données les difficultés rencontrées en dimension une.

Il faut alors se tourner vers une méthode d’optimisation de formes pure, faisant intervenir la dérivée de forme, au risque cependant de ne pas capter les discontinuités qui pourraient se former à l’intérieur du domaine recherché.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Parmi la multitude de travaux concernant la fonctionnelle de Mumford-Shah, la plupart traitent d'approximations convexes de cette dernière, qui offrent des garanties d'optimalité globale et une convergence rapide des algorithmes de minimisation. Les travaux sur les approches non convexes, et plus particulièrement la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli, sont rares, et montrent généralement des résultats peu satisfaisants au regard des techniques, parfois très coûteuses numériquement, mises en œuvres pour la résolution du problème. Les difficultés rencontrées avec les schémas de discrétisation classiques proviennent du fait que, numériquement, le paramètre de Γ -convergence est contraint de rester supérieur à environ $5h$, où h désigne le pas de discrétisation, ce qui viole le processus de Γ -convergence. Cela induit des résultats avec des contours épais, sur lesquels l'image n'est pas restaurée, et une méthode peu robuste au bruit.

Le calcul discret nous permet de nous affranchir de la contrainte de la grille, puisque les opérateurs de différentiation utilisés sont construits dans le domaine discret. En réécrivant la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli avec ces outils, la minimisation de la fonctionnelle est réduite à la résolution d'un système linéaire, ce qui permet une convergence de l'algorithme plus rapide qu'avec l'utilisation de schémas de discrétisation aux différences ou aux éléments finis. Le fait de pouvoir choisir la fonction v (qui modélise les contours) sur des cellules situées entre celles où est définie u , autrement dit là où l'on s'attend à trouver des contours, permet de reconstruire des contours réellement unidimensionnels, situés entre les pixels, ou exactement sur les saillances en 3D. L'approche proposée se révèle alors compétitive avec les méthodes de la littérature, et notamment avec les approches convexes pour les images, pour les applications proposées en 2D comme en 3D.

Le dernier problème d'isolation optimale fournit un nouvel exemple des difficultés numériques rencontrées avec la Γ -convergence, alors que les approximations présentées correspondent exactement à ce que l'on souhaite. Malheureusement dans ce cas le calcul discret n'apporterait rien du fait de la construction même du problème.

Perspectives.

Concernant les travaux futurs, il faudrait réfléchir dans un premier temps à l'ajout de la métrique sur les surfaces discrètes. Dans la littérature, il existe différents moyens de choisir la métrique en calcul discret, non nécessairement équivalents. Il s'agirait alors de comprendre comment estimer les métriques sur les surfaces discrètes afin de trouver des valeurs d'énergies et des solutions compatibles avec les solutions continues attendues. Une possibilité serait

d'exploiter les informations d'orientation et d'intensité du gradient fournies par le tenseur de structure afin de mieux estimer la longueur des contours. Cela serait d'autant plus important pour l'inpainting afin de corriger les effets de métrications qui apparaissent avec le modèle $AT_\varepsilon^{0,1}$ et dans l'approche $AT_\varepsilon^{2,0}$ pour des valeurs initiales de ε trop petites. En outre, la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli et la généralisation de Focardi laissent la possibilité de choisir d'autres fonctions sur v , et notamment dans le terme de couplage. Il serait ainsi intéressant de choisir des fonctions intégrant des informations fournies par le tenseur de structure, ou géométriques.

Ensuite, en plus d'intégrer au modèle proposé une méthode de reconstruction de texture pour l'inpainting, il serait intéressant de mesurer le potentiel de la méthode proposée dans ce manuscript pour d'autres applications, en tomographie ou en défloutage par exemple, mais aussi pour des applications en physique, pour l'étude des fractures dans différents matériaux. En 3D, on pense tout d'abord essayer d'étendre l'approche proposée pour des surfaces triangulées, à l'aide des outils du calcul extérieur discret, et d'essayer d'en faire de même pour des nuages de points, pour lesquels le calcul discret n'est pas défini. Par la suite, il serait possible de considérer des applications de reconstruction de surfaces par exemple, à partir de données 3D quelconques.

Les espaces-échelles sur les paramètres de flou α et de contrôle de la longueur des discontinuités λ n'ont pas été exploités dans ce travail. Or ils peuvent fournir une information importante sur la structure des régions de l'image (homogénéité et hétérogénéité, persistence, etc.), pour la segmentation notamment. Ainsi, il serait intéressant d'étudier plus en détails les espaces-échelles sur chacun des deux paramètres, et notamment l'apparition (peut-être hiérarchique) des contours, et le lien qui existe entre α et λ . Dans ce contexte, il faudrait par ailleurs étudier les courbes de l'énergie et des différents termes de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli en fonction des paramètres α et λ , et vérifier s'il est possible d'extraire le résultat optimal à partir des extrema de ces courbes.

De manière plus générale, ce travail conduira à l'étude de la discrétisations d'autres problèmes variationnels, et notamment les approximations par Γ -convergence. Il serait par ailleurs intéressant de chercher des points communs dans les étapes de discrétisation de divers problèmes afin d'essayer d'automatiser le processus de discrétisation. Ce travail pourrait par ailleurs amener à se poser la question d'une notion de Γ -convergence dans le domaine discret, et d'imaginer des fonctionnelles purement discrètes, dont l'équivalent continu n'aurait peut-être pas de sens.

BIBLIOGRAPHIE

- ACERBI, E., BRAIDES, A. et al. (1998). Approximation of free-discontinuity problems by elliptic functionals via Gamma-convergence.
- ALBERTI, G., BOUCHITTÉ, G. et DAL MASO, G. (2003). The calibration method for the "Mumford-Shah functional and free-discontinuity problems. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 16(3):299–333.
- ALT, H. et CAFFARELLI, L. (1981). Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. *J. Reine Angew. Math.*, 325:105–144.
- ALVES, C. J. et ANTUNES, P. R. (2009). The method of fundamental solutions applied to the calculation of eigensolutions for 2D plates. *International journal for numerical methods in engineering*, 77(2):177–194.
- AMBROSIO, L., FUSCO, N. et PALLARA, D. (2000). *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford university press.
- AMBROSIO, L. et TORTORELLI, V. M. (1990). Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via t-convergence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 43(8):999–1036.
- AMBROSIO, L. et TORTORELLI, V. M. (1992). On the approximation of free discontinuity problems. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 6(B):105–123.
- BECK, A. et TEBOLLE, M. (2009). Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems. *IEEE Transactions on Image Processing*, 18(11):2419–2434.
- BELHACHMI, Z., KALLEL, M., MOAKHER, M. et THELJANI, A. (2015). Weighted harmonic and Ginzburg-Landau equations in image inpainting. <hal-01110858>.
- BERTALMIO, M., SAPIRO, G., CASELLES, V. et BALLESTER, C. (2000). Image inpainting. In *Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 417–424. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- BERTALMIO, M., VESE, L., SAPIRO, G. et OSHER, S. (2003). Simultaneous structure and texture image inpainting. *IEEE transactions on image processing*, 12(8):882–889.
- BERTSEKAS, D. P. (1999). *Nonlinear programming*. Athena scientific, 2nd édition.

- BLOMGREN, P. et CHAN, T. F. (1998). Color TV : total variation methods for restoration of vector-valued images. *IEEE transactions on image processing*, 7(3):304–309.
- BOBENKO, A. I. et SURIS, Y. B. (2009). *Discrete differential geometry : integrable structure*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 98, American Mathematical Society.
- BOGOSEL, B. (2015). *Optimisation de formes et problèmes spectraux*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier (Grenoble I).
- BOGOSEL, B. (2016). The method of fundamental solution applied to boundary eigenvalue problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 306:265–285.
- BOUCHITTÉ, G. (1998). Recent convexity arguments in the calculus of variations. *Lecture notes from the 3rd int. summer school on the calculus of variations*.
- BOULCH, A. et MARLET, R. (2012). Fast and robust normal estimation for point clouds with sharp features. In *Computer graphics forum*, volume 31, pages 1765–1774. Wiley Online Library.
- BOURDIN, B. et CHAMBOLLE, A. (2000). Implementation of an adaptive finite-element approximation of the Mumford-Shah functional. *Numerische Mathematik*, 85(4):609–646.
- BOYKOV, Y. et FUNKA-LEA, G. (2006). Graph cuts and efficient ND image segmentation. *International journal of computer vision*, 70(2):109–131.
- BOYKOV, Y., VEKSLER, O. et ZABIH, R. (2001). Fast approximate energy minimization via graph cuts. *PAMI*, 23(11):1222–1239.
- BOYKOV, Y. Y. et JOLLY, M.-P. (2001). Interactive graph cuts for optimal boundary & region segmentation of objects in ND images. In *Computer Vision, 2001. ICCV 2001. Proceedings. Eighth IEEE International Conference on*, volume 1, pages 105–112. IEEE.
- BRAIDES, A. (1998). *Approximation of Free-Discontinuity Problems*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1694, Springer-Verlag, pp. 89–91.
- BRAIDES, A. (2002). *Gamma-convergence for Beginners*, volume 22. Clarendon Press.
- BRAIDES, A. et DAL MASO, G. (1997). Non-local approximation of the Mumford-Shah functional. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 5(4):293–322.
- BREDIES, K. (2014). Recovering piecewise smooth multichannel images by minimization of convex functionals with total generalized variation penalty. In *Efficient Algorithms for Global Optimization Methods in Computer Vision*, pages 44–77. Springer.
- BREDIES, K., KUNISCH, K. et POCK, T. (2010). Total generalized variation. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 3(3):492–526.

- BROX, T. et WEICKERT, J. (2004). Level set based image segmentation with multiple regions. In *Joint Pattern Recognition Symposium*, pages 415–423. Springer.
- BUADES, A., COLL, B. et MOREL, J.-M. (2005). A non-local algorithm for image denoising. In *2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05)*, volume 2, pages 60–65. IEEE.
- BUCUR, D., BUTTAZZO, G. et NITSCH, C. (2016). Symmetry breaking for a problem in optimal insulation. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.
- BUCUR, D. et GIACOMINI, A. (2015). Shape optimization problems with Robin conditions on the free boundary. In *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*. Elsevier.
- BUCUR, D. et LUCKHAUS, S. (2014). Monotonicity formula and regularity for general free discontinuity problems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 211(2):489–511.
- CAFFARELLI, L. A. et KRIVENTSOV, D. (2016). A free boundary problem related to thermal insulation. *Communications in Partial Differential Equations*, 41(7):1149–1182.
- CAMPISI, P. et EGIAZARIAN, K. (2016). *Blind image deconvolution : theory and applications*. CRC press.
- CHAMBOLLE, A. (2004). An algorithm for total variation minimization and applications. *Journal of Mathematical imaging and vision*, 20(1-2):89–97.
- CHAMBOLLE, A., CASELLES, V., CREMERS, D., NOVAGA, M. et POCK, T. (2010). An introduction to Total Variation for image analysis. In *Theoretical Foundations and Numerical Methods for Sparse Recovery*. De Gruyter.
- CHAMBOLLE, A., CREMERS, D. et POCK, T. (2012). A convex approach to minimal partitions. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 5(4):1113–1158.
- CHAMBOLLE, A. et LIONS, P.-L. (1997). Image recovery via total variation minimization and related problems. *Numerische Mathematik*, 76(2):167–188.
- CHAMBOLLE, A. et POCK, T. (2011). A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 40(1):120–145.
- CHAN, T. F., GOLUB, G. H. et MULET, P. (1999). A nonlinear primal-dual method for total variation-based image restoration. *SIAM journal on scientific computing*, 20(6):1964–1977.
- CHAN, T. F., SANDBERG, B. Y. et VESE, L. A. (2000). Active contours without edges for vector-valued images. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 11(2):130–141.

- CHAN, T. F. et VESE, L. A. (2001a). Active contours without edges. *Image processing, IEEE transactions on*, 10(2):266–277.
- CHAN, T. F. et VESE, L. A. (2001b). A level set algorithm for minimizing the Mumford-Shah functional in image processing. In *Variational and Level Set Methods in Computer Vision, 2001. Proceedings. IEEE Workshop on*, pages 161–168. IEEE.
- CHAN, T. F. et WONG, C.-K. (1998). Total variation blind deconvolution. *IEEE transactions on Image Processing*, 7(3):370–375.
- COEURJOLLY, D., FOARE, M., GUETH, P. et LACHAUD, J.-O. (2016). Piecewise smooth reconstruction of normal vector field on digital data. In *Computer Graphics Forum*, volume 35, pages 157–167. Wiley Online Library.
- COEURJOLLY, D., LACHAUD, J.-O. et LEVALLOIS, J. (2014). Multigrid convergent principal curvature estimators in digital geometry. *Computer Vision and Image Understanding*, 129:27–41.
- CONDAT, L. (2016). Discrete Total Variation : new definition and minimization.
- COURANT, R. et al. (1943). Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49(1):1–23.
- COURANT, R., FRIEDRICHS, K. et LEWY, H. (1928). Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische annalen*, 100(1):32–74.
- CRANE, K., de GOES, F., DESBRUN, M. et SCHRÖDER, P. (2013). Digital geometry processing with discrete exterior calculus. In *ACM SIGGRAPH 2013 Courses*, page 7. ACM.
- CREMERS, D., ROUSSON, M. et DERICHE, R. (2007). A review of statistical approaches to level set segmentation : integrating color, texture, motion and shape. *International journal of computer vision*, 72(2):195–215.
- CRIMINISI, A., PÉREZ, P. et TOYAMA, K. (2004). Region filling and object removal by exemplar-based image inpainting. *IEEE Transactions on image processing*, 13(9):1200–1212.
- DAL MASO, G., MOREL, J.-M. et SOLIMINI, S. (1992). A variational method in image segmentation : existence and approximation results. *Acta Mathematica*, 168(1):89–151.
- DE GIORGI, E. (1975). Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'aera. *Collection of articles dedicated to Mauro Picone on the occasion of his ninetieth birthday, Rend. Mat. Appl.*(6), 8:277–294.
- DE GIORGI, E. et AMBROSIO, L. (1989). New functionals in calculus of variations. In *Nonsmooth Optimization and Related Topics*, pages 49–59. Springer.

- DE GIORGI, E., CARRIERO, M. et LEACI, A. (1989). Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 108(4): 195–218.
- DE GIORGI, E. et FRANZONI, T. (1975). Su un tipo di convergenza variazionale. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*(8), 58(6):842–850.
- DESBRUN, M., HIRANI, A. N., LEOK, M. et MARSDEN, J. E. (2005). Discrete exterior calculus. *arXiv preprint math/0508341*.
- DESBRUN, M., KANSO, E. et TONG, Y. (2008). Discrete differential forms for computational modeling. In *Discrete differential geometry*, pages 287–324. Springer.
- DGTAL (Digital Geometry tools and algorithms library). <http://dgtal.org>.
- DURAN, J., COLL, B. et SBERT, C. (2013). Chambolle's projection algorithm for total variation denoising. *Image Processing On Line*, pages 311–331.
- DURAN, J., MOELLER, M., SBERT, C. et CREMERS, D. (2015). A novel framework for nonlocal vectorial Total Variation based on $l^{p,q,r}$ -norms. In *International Workshop on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 141–154. Springer.
- DURAN, J., MOELLER, M., SBERT, C. et CREMERS, D. (2016). Collaborative total variation : a general framework for vectorial TV models. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 9(1):116–151.
- EFROS, A. A. et LEUNG, T. K. (1999). Texture synthesis by non-parametric sampling. In *Computer Vision, 1999. The Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1033–1038. IEEE.
- ELAD, M., STARCK, J.-L., QUERRE, P. et DONOHO, D. L. (2005). Simultaneous cartoon and texture image inpainting using morphological component analysis (MCA). *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 19(3):340–358.
- ESEDOGLU, S. et SHEN, J. (2002). Digital inpainting based on the Mumford–Shah–Euler image model. *European Journal of Applied Mathematics*, 13(04):353–370.
- ESSER, E., ZHANG, X. et CHAN, T. F. (2010). A general framework for a class of first order primal-dual algorithms for convex optimization in imaging science. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 3(4):1015–1046.
- FOARE, M. (2013). *Fonctionnelle de Mumford-Shah anisotrope*. Mémoire de Master 2, Université Joseph Fourier (Grenoble I).

- FOARE, M., LACHAUD, J.-O. et TALBOT, H. (2016a). Image restoration and segmentation using the Ambrosio-Tortorelli functional and discrete calculus. In *Proc. 23th International Conference on Pattern Recognition (ICPR2016)*, Cancun, Mexico.
- FOARE, M., LACHAUD, J.-O. et TALBOT, H. (2016b). Numerical implementation of the Ambrosio-Tortorelli functional using discrete calculus and application to image restoration and inpainting. In *Proc. 1st Workshop on Reproducible Research in Pattern Recognition (RRPR2016)*, Cancun, Mexico.
- FOCARDI, M. (2001). On the variational approximation of free-discontinuity problems in the vectorial case. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 11(04):663–684.
- GEMAN, S. et GEMAN, D. (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, (6):721–741.
- GETREUER, P. (2012a). Rudin-Osher-Fatemi total variation denoising using split Bregman. *Image Processing On Line*, 2:74–95.
- GETREUER, P. (2012b). Total variation deconvolution using split bregman. *Image Processing On Line*, 2:158–174.
- GRADY, L. et ALVINO, C. V. (2009). The piecewise smooth Mumford–Shah functional on an arbitrary graph. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 18(11):2547–2561.
- GRADY, L. J. et POLIMENI, J. (2010). *Discrete calculus : Applied analysis on graphs for computational science*. Springer.
- GRINSPUN, E., DESBRUN, M., POLTHIER, K., SCHRÖDER, P. et STERN, A. (2006). Discrete differential geometry : an applied introduction. *ACM SIGGRAPH Course*, 7.
- HE, L. et SCHAEFER, S. (2013). Mesh denoising via l_0 minimization. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 32(4):64.
- HIRANI, A. N. (2003). *Discrete exterior calculus*. Thèse de doctorat, Citeseer.
- IPOL JOURNAL (Image Processing On Line). <http://www.ipol.im/>.
- KASS, M. et WITKIN, A. (1987). Analyzing oriented patterns. *Computer vision, graphics, and image processing*, 37(3):362–385.
- KEE, Y. et KIM, J. (2014). A convex relaxation of the Ambrosio-Tortorelli elliptic functionals for the Mumford-Shah functional. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 4074–4081.

- KNOLL, F., BREDIES, K., POCK, T. et STOLLBERGER, R. (2011). Second order total generalized variation (TGV) for MRI. *Magnetic resonance in medicine*, 65(2):480–491.
- KRISHNAN, D. et FERGUS, R. (2009). Fast image deconvolution using hyper-laplacian priors. *In Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 1033–1041.
- KUNDUR, D. et HATZINAKOS, D. (1996). Blind image deconvolution. *IEEE signal processing magazine*, 13(3):43–64.
- LELLMANN, J. et SCHNÖRR, C. (2011). Continuous multiclass labeling approaches and algorithms. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 4(4):1049–1096.
- LEVALLOIS, J., COEURJOLLY, D. et LACHAUD, J.-O. (2015). Scale-space feature extraction on digital surfaces. *Computers & Graphics*, 51:177–189.
- LEVIN, A., WEISS, Y., DURAND, F. et FREEMAN, W. T. (2009). Understanding and evaluating blind deconvolution algorithms. *In Computer Vision and Pattern Recognition, 2009. CVPR 2009. IEEE Conference on*, pages 1964–1971. IEEE.
- LI, C., XU, C., GUI, C. et FOX, M. D. (2005). Level set evolution without re-initialization : a new variational formulation. *In 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05)*, volume 1, pages 430–436. IEEE.
- LI, C., XU, C., GUI, C. et FOX, M. D. (2010). Distance regularized level set evolution and its application to image segmentation. *IEEE transactions on image processing*, 19(12):3243–3254.
- MASNOU, S. et MOREL, J.-M. (1998). Level lines based disocclusion. *In Image Processing, 1998. ICIP 98. Proceedings. 1998 International Conference on*, pages 259–263. IEEE.
- MCCORMICK, G. P. (1976). Computability of global solutions to factorable nonconvex programs : Part I—Convex underestimating problems. *Mathematical programming*, 10(1):147–175.
- MELLADO, N., GUENNEBAUD, G., BARLA, P., REUTER, P. et SCHLICK, C. (2012). Growing least qquares for the analysis of manifolds in scale-space. *In Computer Graphics Forum*, volume 31, pages 1691–1701. Wiley Online Library.
- MERIGOT, Q., OVSJANIKOV, M. et GUIBAS, L. J. (2011). Voronoi-based curvature and feature estimation from point clouds. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 17(6):743–756.
- MODICA, L. et MORTOLA, S. (1977). Un esempio di Γ -convergenza. *Boll. Un. Mat. Ital. B* (5), 14(1):285–299.

- MORGAN, F. (1990). Calibrations and new singularities in area-minimizing surfaces : a survey. *In Variational methods*, pages 329–342. Springer.
- MUMFORD, D. et SHAH, J. (1989). Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on pure and applied mathematics*, 42(5):577–685.
- NITZBERG, M. et MUMFORD, D. (1990). The 2.1-D sketch. *In Computer Vision, 1990. Proceedings, Third International Conference on*, pages 138–144. IEEE.
- OLIVEIRA, J. P., BIOUCAS-DIAS, J. M. et FIGUEIREDO, M. A. (2009). Adaptive total variation image deblurring : a majorization–minimization approach. *Signal Processing*, 89(9):1683–1693.
- OSHER, S., BURGER, M., GOLDFARB, D., XU, J. et YIN, W. (2005). An iterative regularization method for total variation-based image restoration. *Multiscale Modeling & Simulation*, 4(2):460–489.
- OSHER, S. et SETHIAN, J. A. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of computational physics*, 79(1):12–49.
- PAULY, M., KEISER, R. et GROSS, M. (2003). Multi-scale feature extraction on point-sampled surfaces. *In Computer graphics forum*, volume 22, pages 281–289. Wiley Online Library.
- POCK, T., CREMERS, D., BISCHOF, H. et CHAMBOLLE, A. (2009). An algorithm for minimizing the Mumford-Shah functional. *In 2009 IEEE 12th International Conference on Computer Vision*, pages 1133–1140. IEEE.
- POLTHIER, K. et PREUSS, E. (2003). Identifying vector field singularities using a discrete Hodge decomposition. *In Visualization and Mathematics III*, pages 113–134. Springer.
- POTTMANN, H., WALLNER, J., YANG, Y.-L., LAI, Y.-K. et HU, S.-M. (2007). Principal curvatures from the integral invariant viewpoint. *Computer Aided Geometric Design*, 24(8):428–442.
- ROMON, P. (2013). *Introduction à la géométrie différentielle discrète*. Ellipses.
- RUDIN, L. I. et OSHER, S. (1994). Total variation based image restoration with free local constraints. *In Image Processing, 1994. Proceedings. ICIP-94., IEEE International Conference*, volume 1, pages 31–35. IEEE.
- RUDIN, L. I., OSHER, S. et FATEMI, E. (1992). Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 60(1):259–268.

- SHEN, J. et CHAN, T. F. (2002). Mathematical models for local nontexture inpaintings. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 62(3):1019–1043.
- SPERB, R. P. (1972). Untere und obere Schranken für den tiefsten Eigenwert der elastisch gestützten Membran. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 23(2):231–244.
- STREKALOVSKIY, E., CHAMBOLLE, A. et CREMERS, D. (2012). A convex representation for the vectorial Mumford-Shah functional. In *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2012 IEEE Conference on*, pages 1712–1719. IEEE.
- STREKALOVSKIY, E. et CREMERS, D. (2014). Real-time minimization of the piecewise smooth Mumford-Shah functional. In *Computer Vision–ECCV 2014*, pages 127–141. Springer.
- STRONG, D. et CHAN, T. (2003). Edge-preserving and scale-dependent properties of total variation regularization. *Inverse problems*, 19(6):S165–S187.
- VICENTE, D. (2015). *Mumford-Shah model for detection of thin structures in an image*. Thèse de doctorat, Université d'Orléans.
- WANG, R., YANG, Z., LIU, L., DENG, J. et CHEN, F. (2014). Decoupling noise and features via weighted l_1 -analysis compressed sensing. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 33(2):18.
- WANG, Y., YANG, J., YIN, W. et ZHANG, Y. (2008). A new alternating minimization algorithm for total variation image reconstruction. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 1(3):248–272.
- WANG, Z., BOVIK, A. C., SHEIKH, H. R. et SIMONCELLI, E. P. (2004). Image quality assessment : from error visibility to structural similarity. *IEEE transactions on image processing*, 13(4):600–612.
- WU, X., ZHENG, J., CAI, Y. et FU, C.-W. (2015). Mesh denoising using extended ROF model with l_1 fidelity. In *Computer Graphics Forum*, volume 34, pages 35–45. Wiley Online Library.
- ZHANG, H., WU, C., ZHANG, J. et DENG, J. (2015). Variational mesh denoising using total variation and piecewise constant function space. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, 21(7):873–886.
- ZHU, M. et CHAN, T. (2008). An efficient primal-dual hybrid gradient algorithm for total variation image restoration. *UCLA CAM Report*, pages 08–34.