

# Imagerie 3D, mathématiques et informatique

Jacques-Olivier Lachaud

Laboratoire de Mathématiques

CNRS / Université Savoie Mont Blanc

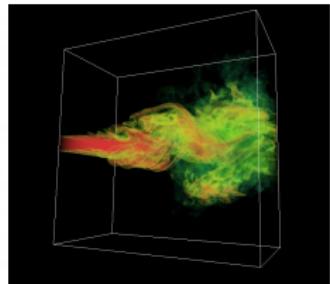
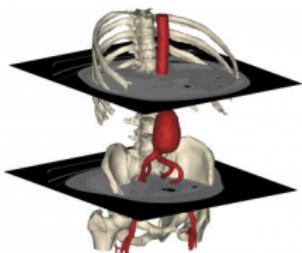
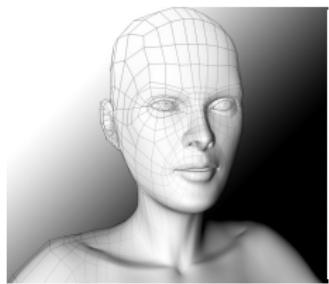
Image et perception  
oooooooooooo

Synthèse d'image 3D  
oooooooooooooooooooo

Imagerie volumique  
oooooooooooo

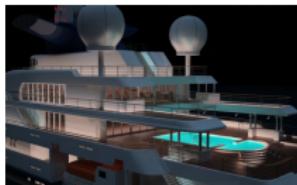
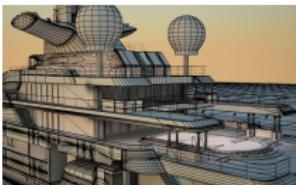
Vision en relief  
oooooooooooooooo

# Images 3D ? pas si simple ...

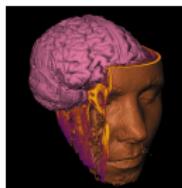
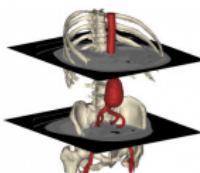


## Qu'appelle-t-on image 3D ?

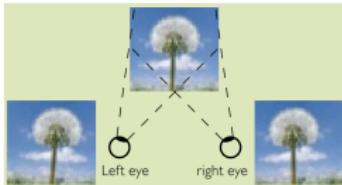
- **Synthèse d'image** : Jeux vidéo, films, CAO, Google Earth, ...



- **Imagerie volumique** : scanner, IRM, PET, ..., médecine, géologie, biologie, matériaux, ...

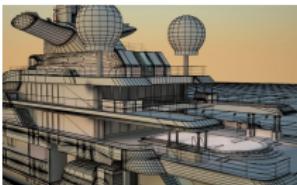


- **Stéréovision** : Films 3D, Télévision en relief, nintendo 3DS



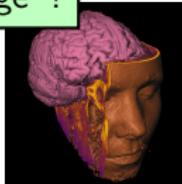
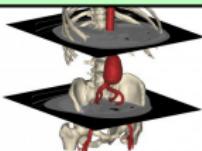
## Qu'appelle-t-on image 3D ?

- **Synthèse d'image** : Jeux vidéo, films, CAO, Google Earth, ...

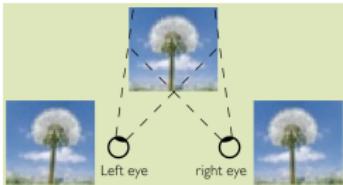


- **Imagerie volumique** : scanner, IRM, PET, ..., médecine, géologie, biologie, matériaux

Mais d'abord, qu'est-ce qu'une image ?



- **Stéréovision** : Films 3D, Télévision en relief, nintendo 3DS



# Images 3D et mathématiques

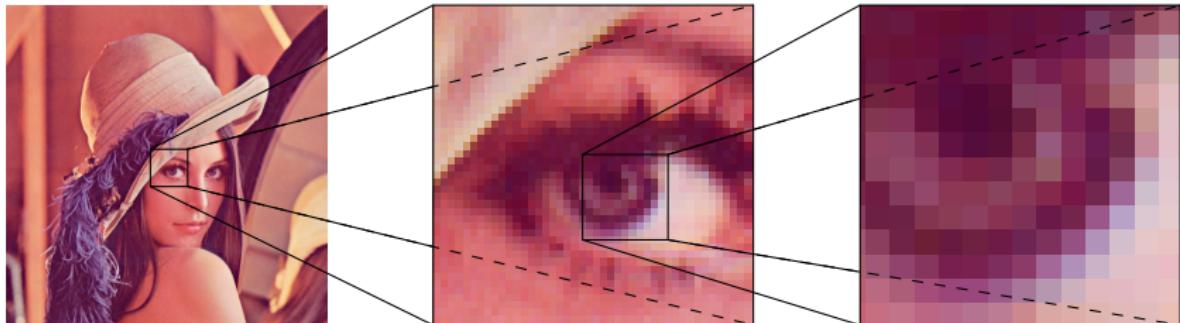
Image et perception

Synthèse d'image 3D

Imagerie volumique

Vision en relief

## Qu'est-ce qu'une image ?



- **résolution** = nombre de pixels  
 $= 512 \times 512$
- **pixel** = 2 nombres (coordonnées)
- **image 2D** = chaque pixel a une couleur

...  $(1, 1)$  →    $(2, 1)$  → ...

(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(4, 0)	(5, 0)	(6, 0)	(7, 0)
(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)	(7, 1)
(0, 2)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)	(7, 2)
(0, 3)	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)	(7, 3)
(0, 4)	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)	(7, 4)
(0, 5)	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)	(7, 5)
(0, 6)	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)	(7, 6)
(0, 7)	(1, 7)	(2, 7)	(3, 7)	(4, 7)	(5, 7)	(6, 7)	(7, 7)

# Qu'est-ce qu'une couleur ?

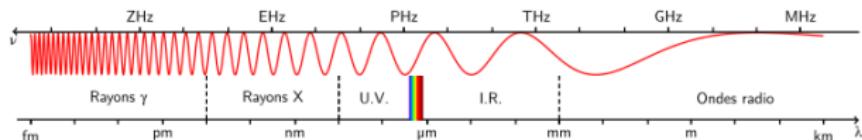


Physique Rayonnement électromagnétique visible : photons

Physiologie Capté par la rétine des yeux, converti en signaux électriques

Cognition Reconstruits dans les aires visuelles du cerveau

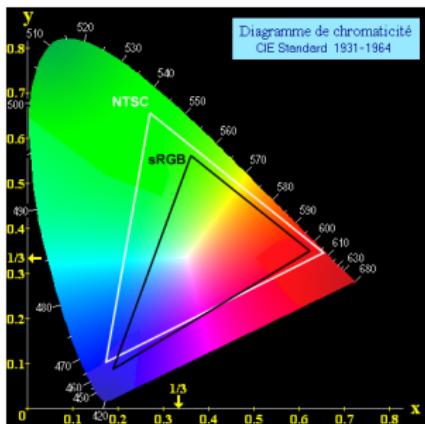
## Couleur physique



Le soleil nous envoie des rayons en permanence

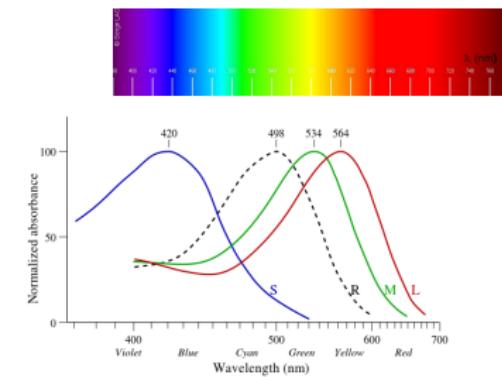
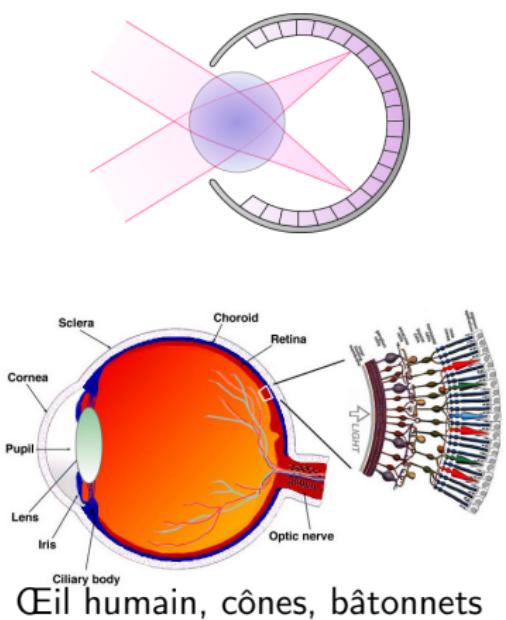


lumière blanche  
violet=380nm, rouge=780nm



couleurs perçues, créées

# Perception de la couleur



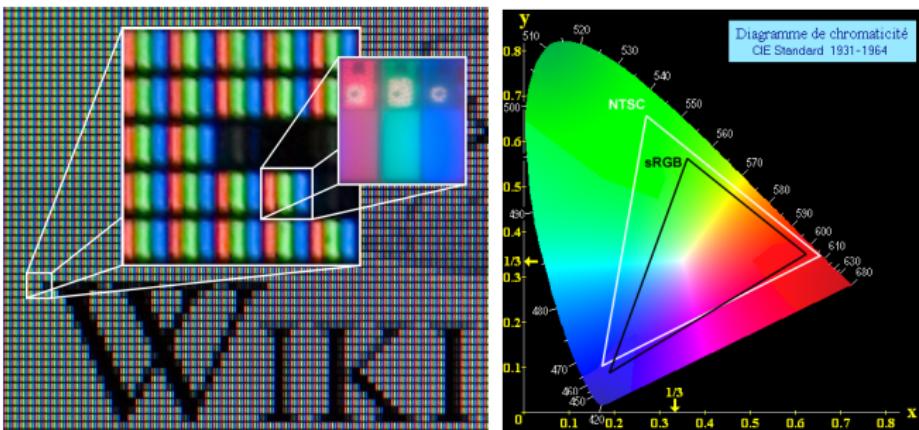
1 couleur

=

3 réponses des cônes L, M, S

6M de cônes = 2M pixels

# Fabrication de la couleur (sur écran)



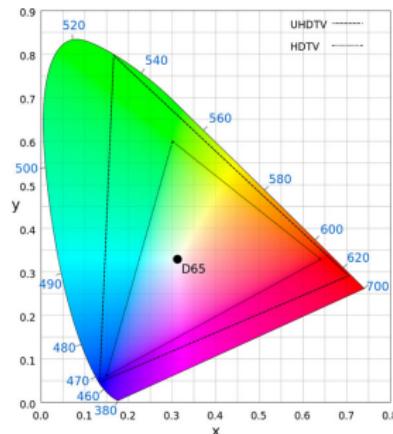
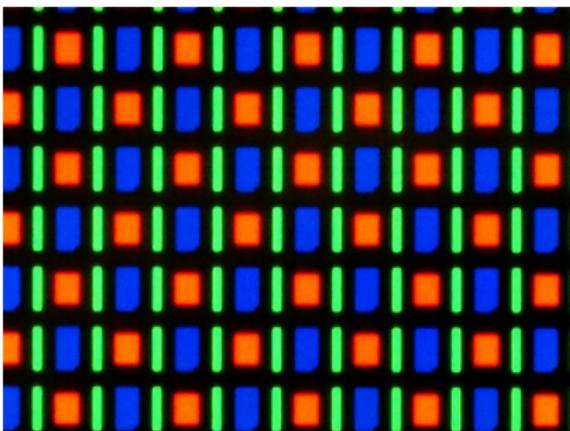
éclairage Néon/LED, écran LCD

- Projection de trois couleurs primaires (R, G, B)
- Par pixel, une **Couleur** = trois nombres

$$\dots \begin{array}{|c|} \hline 1:1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 150 \\ \hline 120 \\ \hline 150 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2:1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 220 \\ \hline 100 \\ \hline 220 \\ \hline \end{array} \dots$$

- On ne peut pas reproduire toutes les couleurs perçues

## Fabrication de la couleur (sur écran)



écran OLED

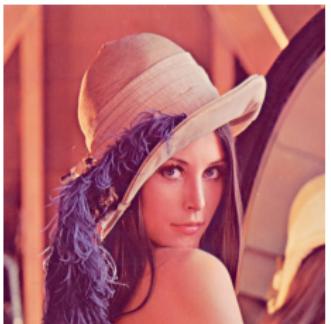
- Projection de trois couleurs primaires (R, G, B)
- Par pixel, une **Couleur** = trois nombres

$$\dots \begin{array}{|c|} \hline 1:1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 150 \\ \hline 120 \\ \hline 150 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2:1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 220 \\ \hline 100 \\ \hline 220 \\ \hline \end{array} \dots$$

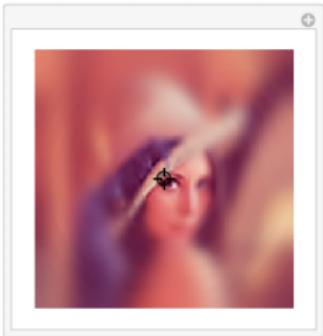
- On ne peut pas reproduire toutes les couleurs perçues

## Image perçue

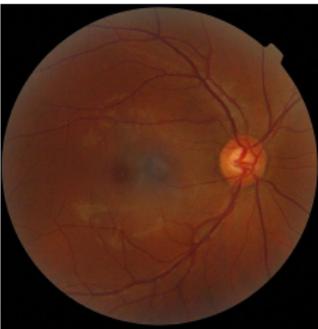
Image



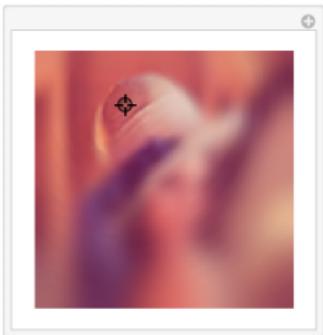
Vue 1



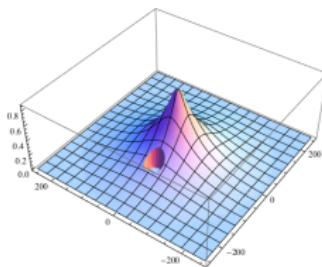
Rétinographie



Vue 2

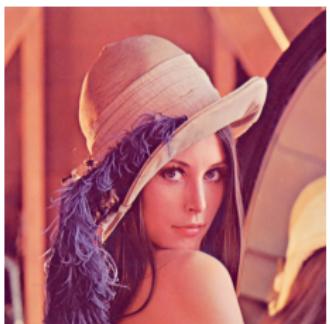


Acuité visuelle

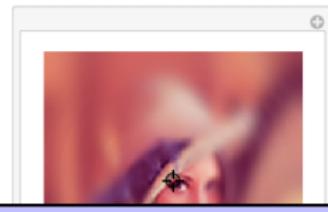


## Image perçue

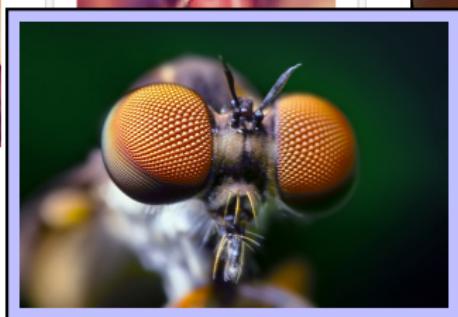
Image



Vue 1

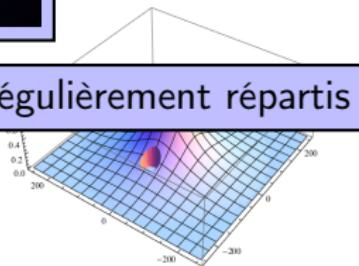
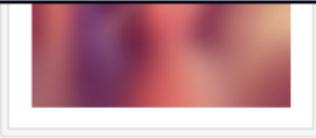


Rétinographie



Acuité visuelle

Seuls les insectes voient avec des pixels régulièrement répartis



## Point aveugle



Image et perception  
oooooooo

Synthèse d'image 3D  
●oooooooooooo

Imagerie volumique  
oooooo

Vision en relief  
oooooooooooo

# Images 3D et mathématiques

Image et perception

Synthèse d'image 3D

Imagerie volumique

Vision en relief

# Synthèse d'image 3D : les ingrédients

géométrie dans l'espace cubes, sphères, mailles,

...

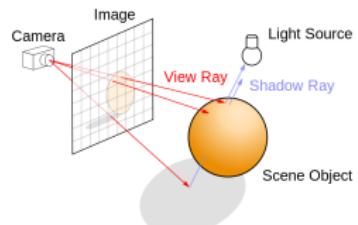
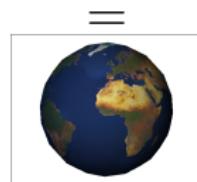
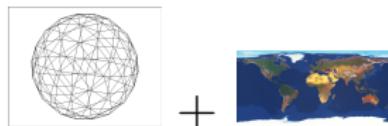
matériaux couleur ou texture pour chaque élément

éclairage où et quelle(s) lumière(s)

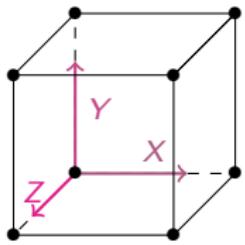
observateur où se situe l'œil (rétine=image 2D) ?

perspective projection de la scène 3D dans l'œil

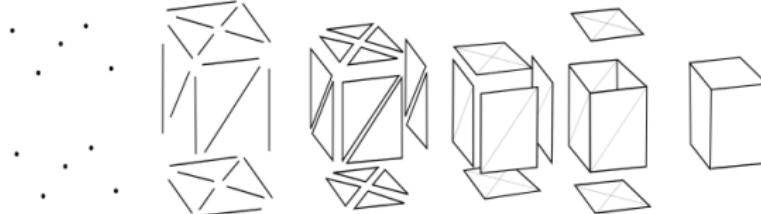
rendu calcul de la projection, des couleurs selon la lumière, ombrages



## Géométrie dans l'espace

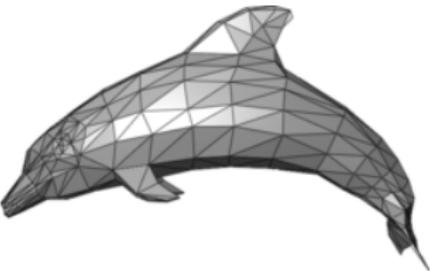


1 sommet = 3 coordonnées ( $X, Y, Z$ )

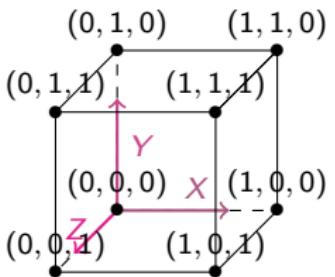


1 triangle = 3 sommets

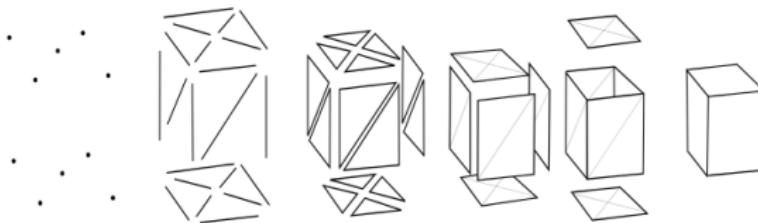
1 objet = triangles + sommets



## Géométrie dans l'espace

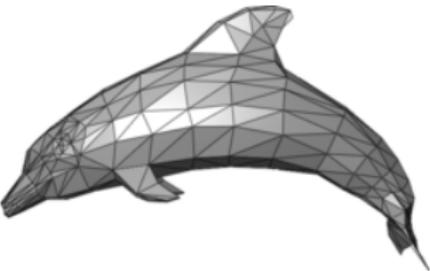


1 sommet = 3 coordonnées ( $X, Y, Z$ )

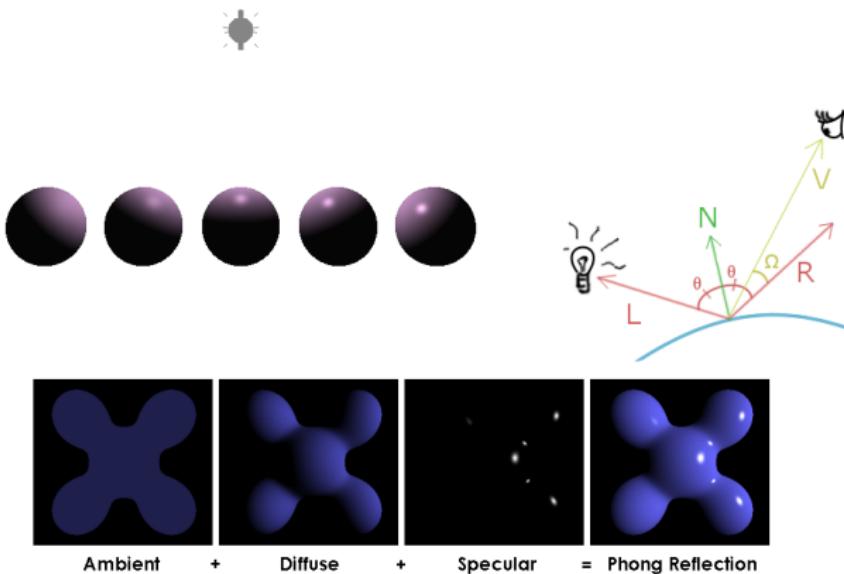


1 triangle = 3 sommets

1 objet = triangles + sommets



# Couleurs, matériaux, éclairage

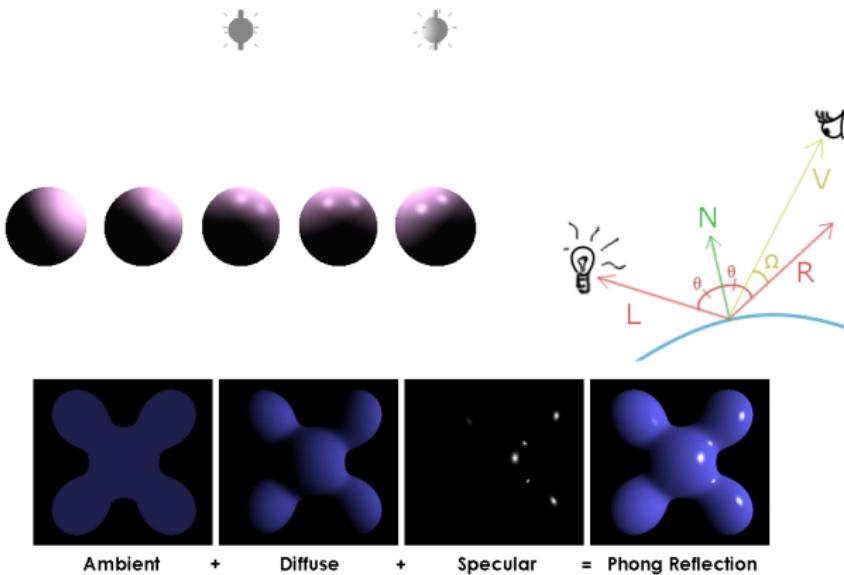


ambient 1 couleur sans lumière

diffuse 1 couleur qui dépend des lumières (donc de  $\theta$ )

spéculaire 1 couleur qui dépend des lumières et de l'œil (de  $\theta$  et  $\Omega$ )

# Couleurs, matériaux, éclairage



ambient 1 couleur sans lumière

diffuse 1 couleur qui dépend des lumières (donc de  $\theta$ )

spéculaire 1 couleur qui dépend des lumières et de l'œil (de  $\theta$  et  $\Omega$ )

## Ombrage “flat” contre ombrage “Phong”

diffuse

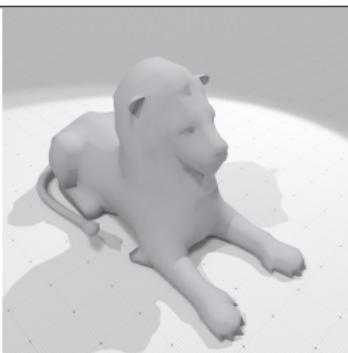


“flat”

diffuse + spéculaire



“Phong”



“Phong” : vecteurs normaux interpolés sur chaque facette

Image et perception  
oooooooo

Synthèse d'image 3D  
ooooo●oooo

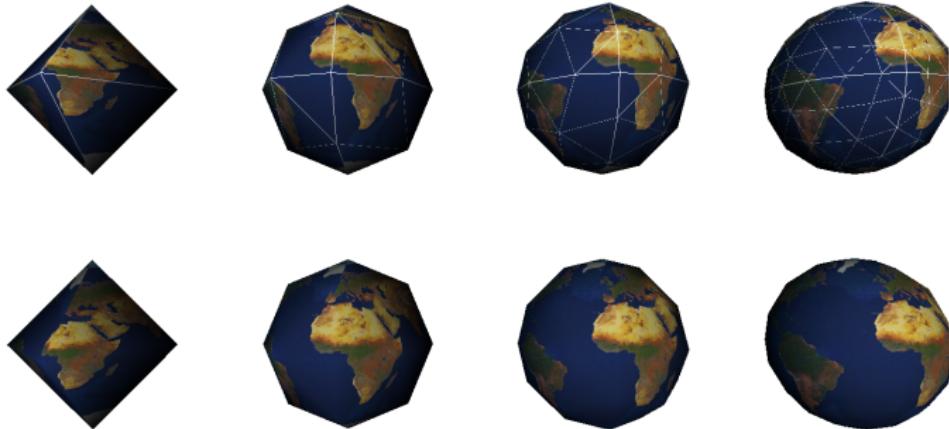
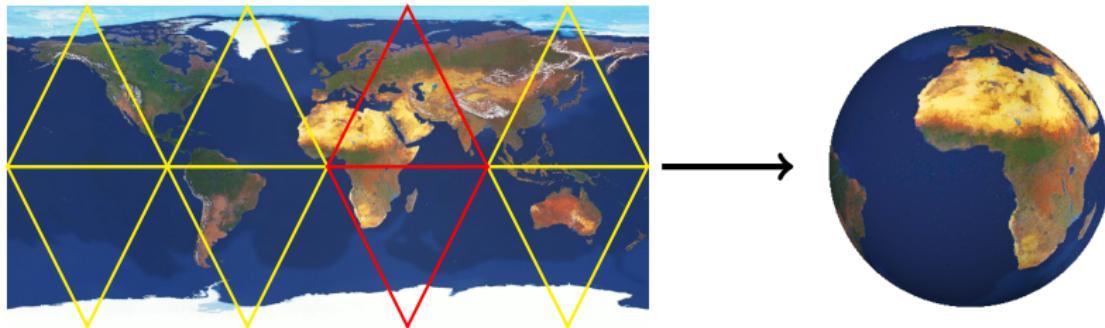
Imagerie volumique  
ooooo

Vision en relief  
oooooooooooo

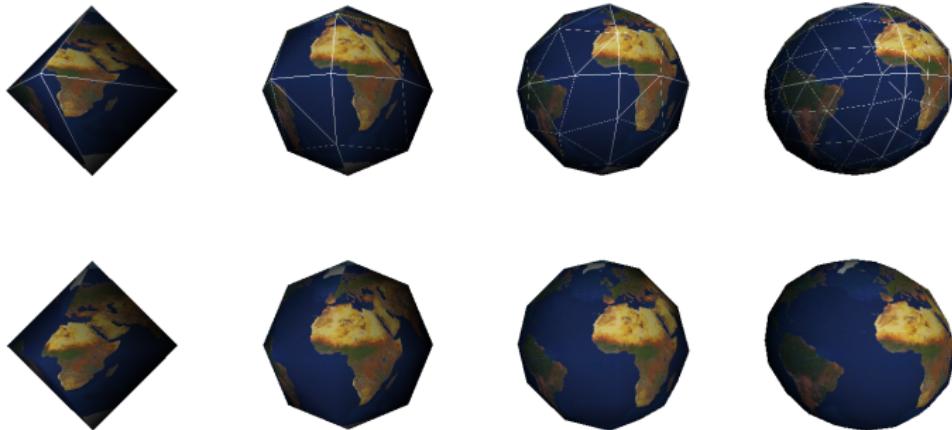
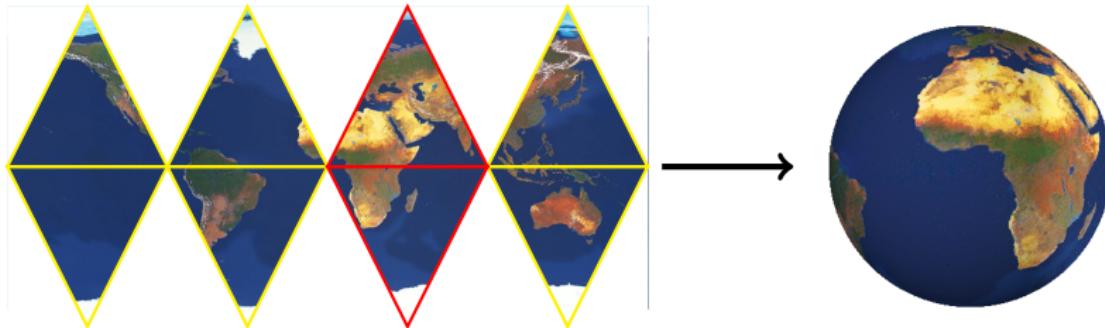
## Textures et subdivision



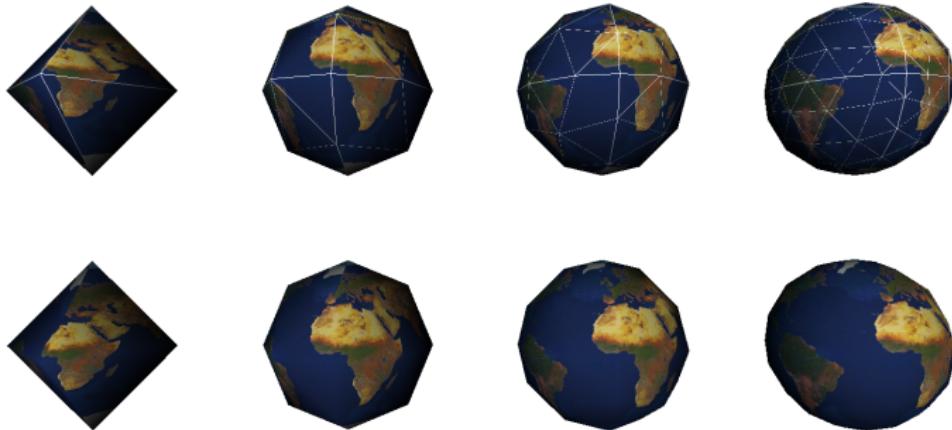
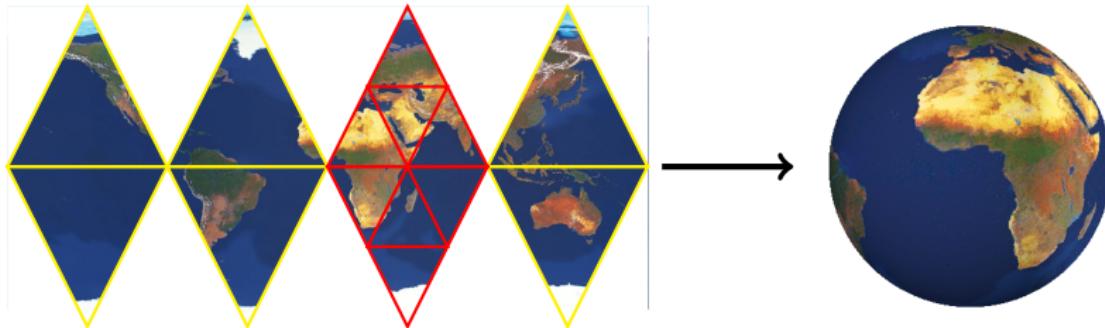
## Textures et subdivision



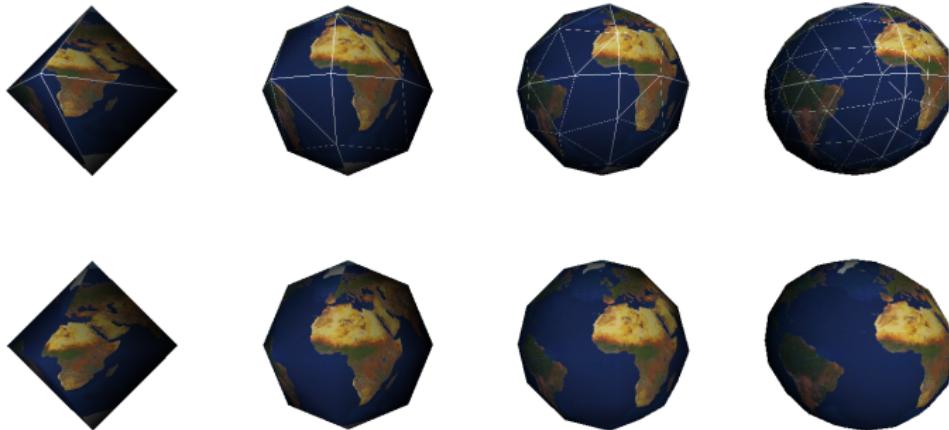
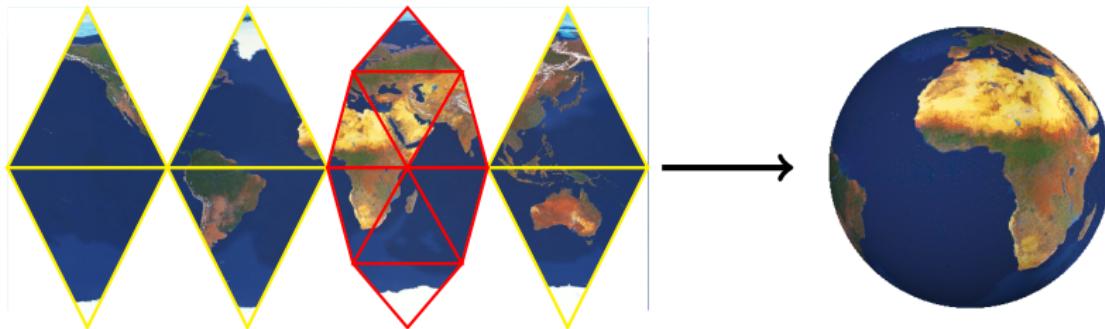
## Textures et subdivision



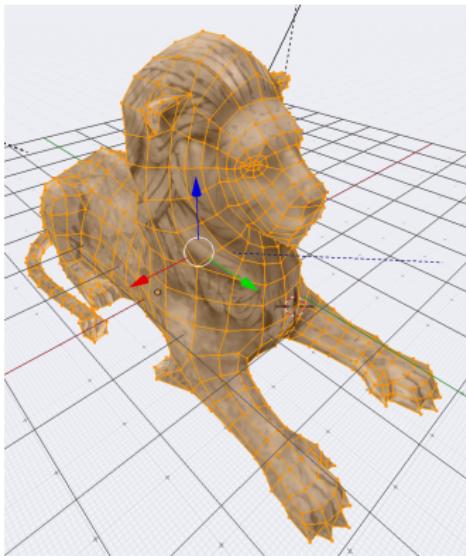
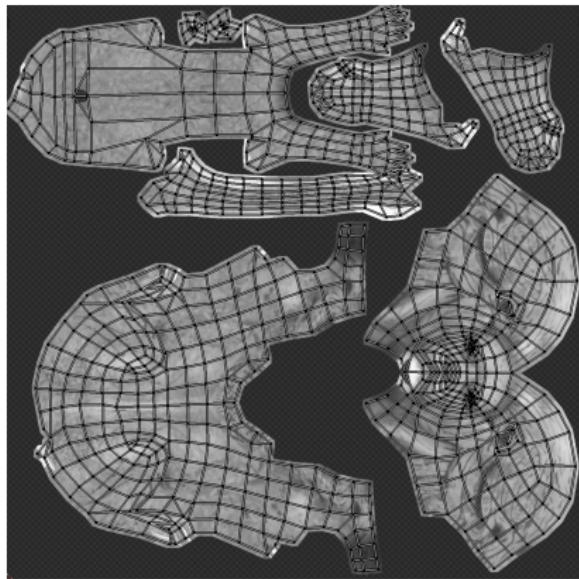
## Textures et subdivision



## Textures et subdivision



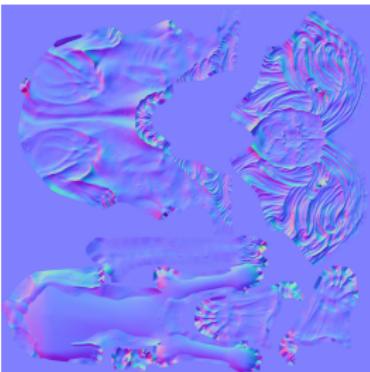
## Cartes de textures



$$f : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$$

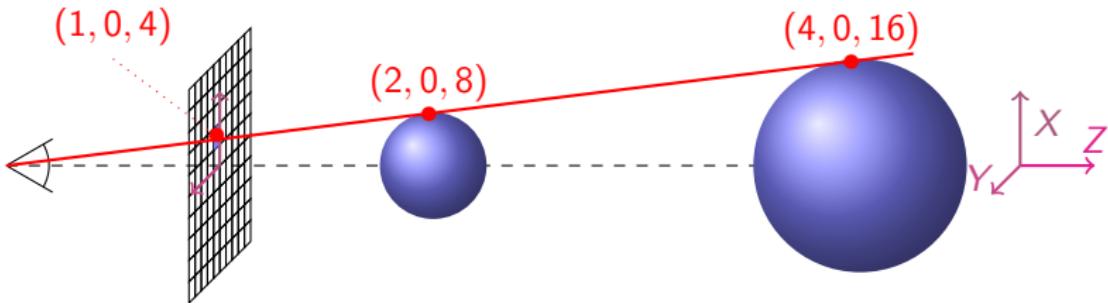
En pratique, chaque sommet  $i$  a des coordonnées de textures  $(u_i, v_i)$

## Cartes de normales



## Projection sur l'œil

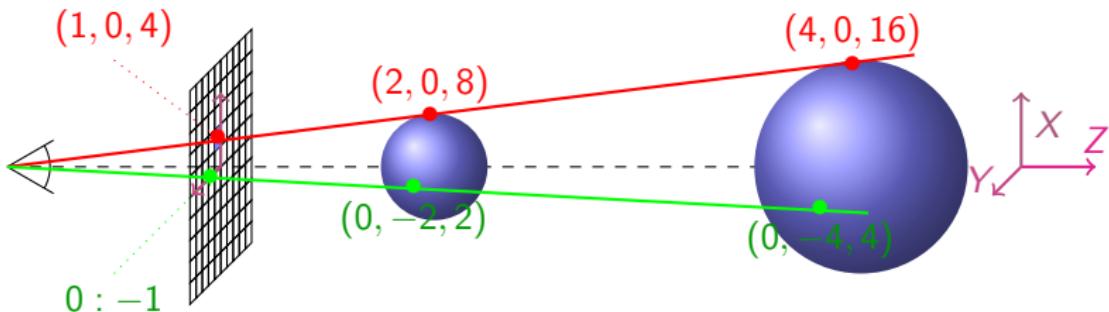
- Comment passer de l'espace à l'œil ?



- Tous les points sur la **droite** se projettent sur le même point !
- Sur la grille :  $(1, 0, 4) = (2, 0, 8) = (4, 0, 16)$
- Pour projeter, division par  $Z : \frac{1}{4} : \frac{0}{4} = \frac{2}{8} : \frac{0}{8} = \frac{4}{16} : \frac{0}{16}$
- Ici X et Y font la **direction** de regard, **Z** règle juste la **profondeur**.

## Projection sur l'œil

- Comment passer de l'espace à l'œil ?



- Tous les points sur la **droite** se projettent sur le même point !
- Sur la grille :  $(1, 0, 4) = (2, 0, 8) = (4, 0, 16)$
- Pour projeter, division par  $Z$  :  $\frac{1}{4} : \frac{0}{4} = \frac{2}{8} : \frac{0}{8} = \frac{4}{16} : \frac{0}{16}$
- Ici  $X$  et  $Y$  font la **direction** de regard,  $Z$  règle juste la **profondeur**.

## Perspective, coordonnées homogènes

- Coordonnées homogènes 3D :  $cX : cY : cZ : c$  =  $X : Y : Z$
- Calcul matriciel : seulement des  $\times$  et des  $+$  !

$$\begin{matrix} 1 & T_x \\ 1 & T_y \\ 1 & T_z \\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a & b \\ b & c \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$$

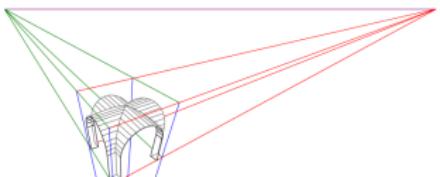
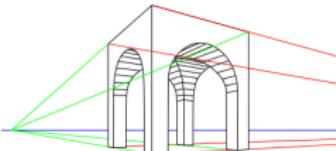
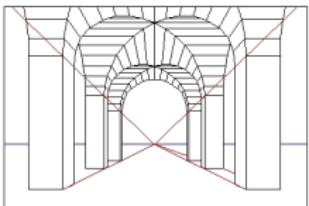
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ f' \end{matrix}$$

Translation

Rotation selon Z

Projection sur (X,Y)

- Les parallèles se rejoignent à l'infini



## Perspective, coordonnées homogènes

- Coordonnées homogènes 3D :  $cX : cY : cZ : c$  =  $X : Y : Z$
- Calcul matriciel : seulement des  $\times$  et des  $+$  !

$$\begin{matrix} 1 & T_x \\ 1 & T_y \\ 1 & T_z \\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a & b \\ b & c \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & \\ & 1 \end{matrix}$$

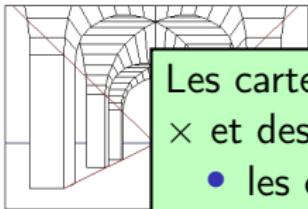
$$\begin{matrix} 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ f' \end{matrix}$$

Translation

Rotation selon Z

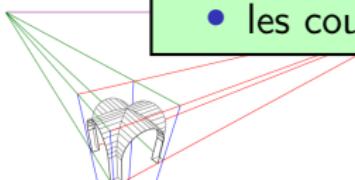
Projection sur (X,Y)

- Les parallèles se rejoignent à l'infini



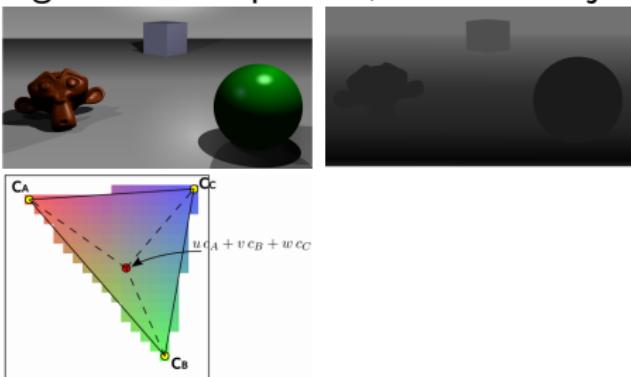
Les cartes graphiques ne font que des  $\times$  et des  $+$  sur :

- les coordonnées  $X, Y, Z$
- les couleurs  $R, G, B$



# Rendu

Rapide algorithme du peintre, Z-buffer ... jeux vidéos



Couleurs triangle par triangle, pas de réflexion de la lumière, ombres approchées

Lent ray-tracing, photon mapping, radiosité ... films

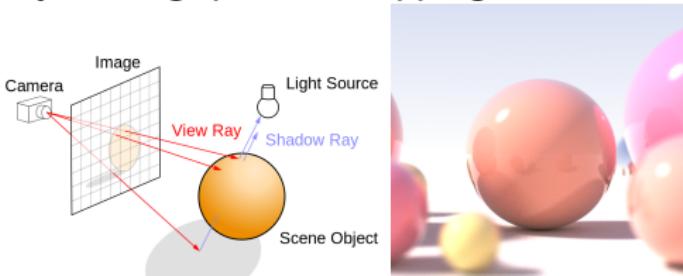


Image et perception  
oooooooo

Synthèse d'image 3D  
oooooooooooo

Imagerie volumique  
●ooooo

Vision en relief  
oooooooooooo

# Images 3D et mathématiques

Image et perception

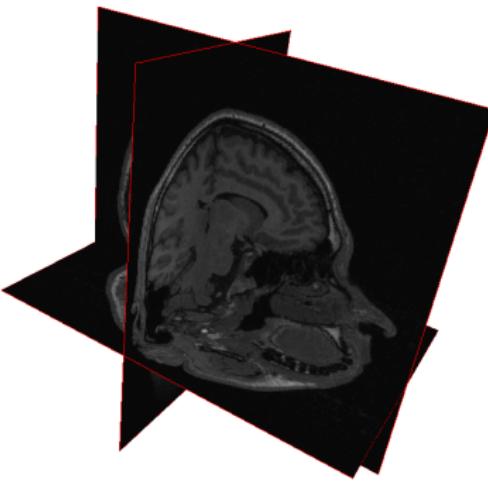
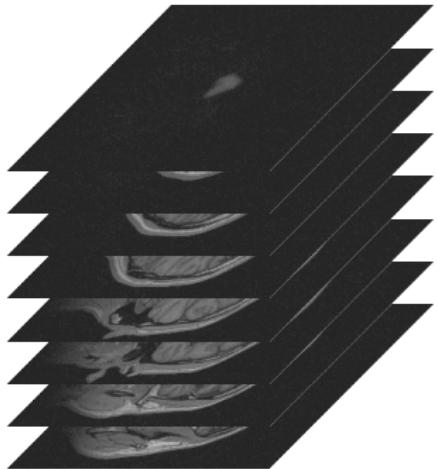
Synthèse d'image 3D

Imagerie volumique

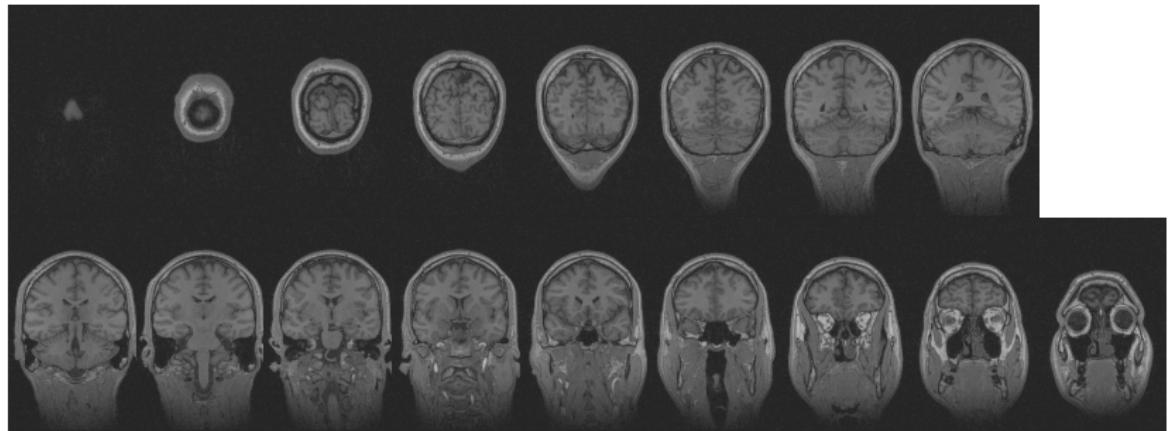
Vision en relief

## Imagerie volumique

- Les seules vraies **images 3D** ...mais difficile à voir !
- fréquentes en médecine, biologie, géologie, matériaux, physique moléculaire
- 1970 : scanner X et IRM, 1980 : microscopie confocale, TEP
- Image 3D = empilement d'images 2D

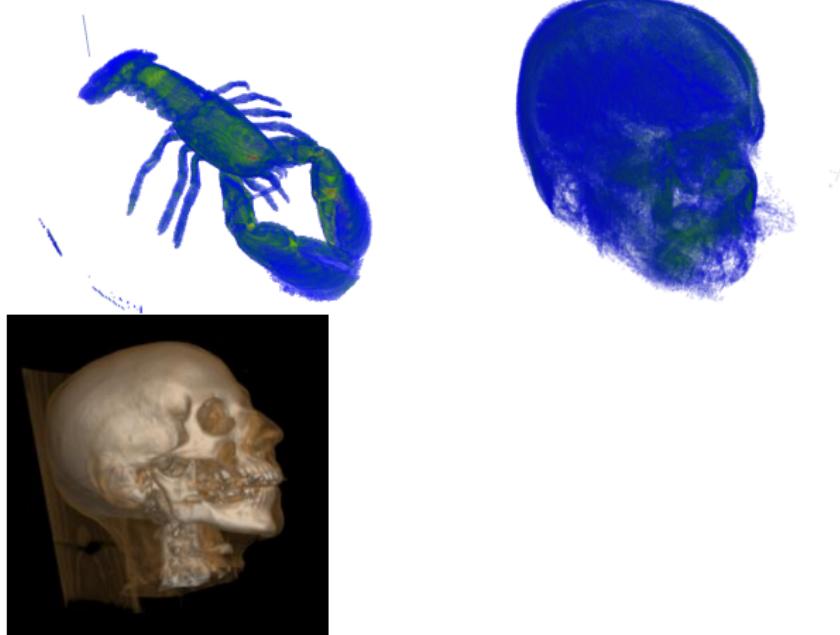


## La vision par coupes



Requiert une grande expertise ...

## Rendu volumique



Matériaux rendus transparents : on voit + ou - à l'intérieur

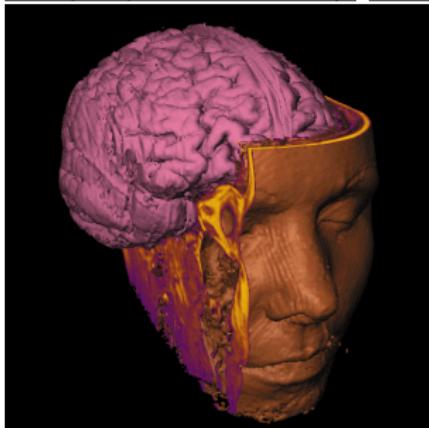
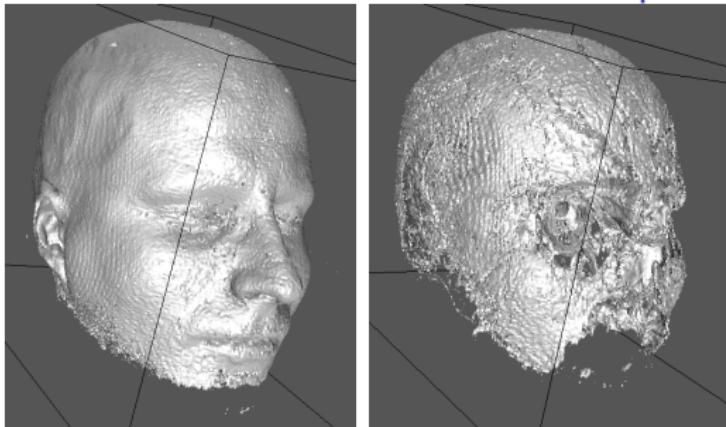
Image et perception  
oooooooo

Synthèse d'image 3D  
oooooooooooo

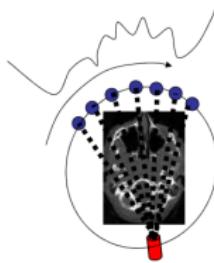
Imagerie volumique  
oooo●o

Vision en relief  
oooooooooooo

## Extraction de surface puis visualisation

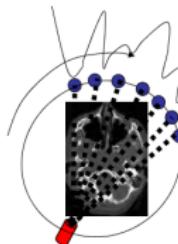


## Comment fait-on une image 3D ? La tomographie



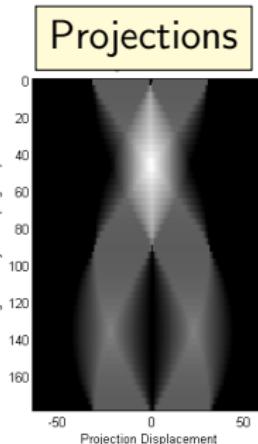
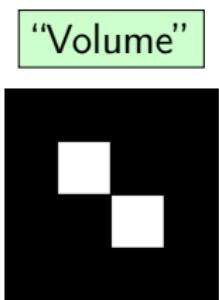
- L'image 3D est reconstruite à partir de projections

## Comment fait-on une image 3D ? La tomographie

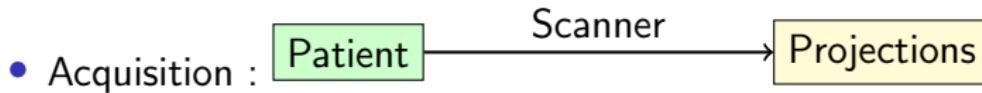


- L'image 3D est reconstruite à partir de projections

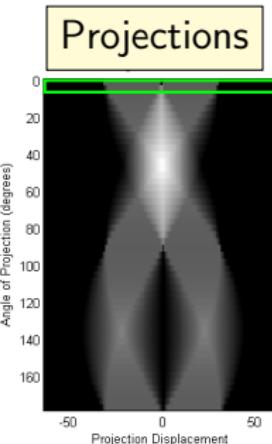
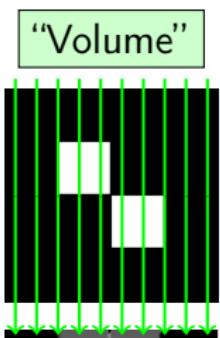
## Comment fait-on une image 3D ? La tomographie



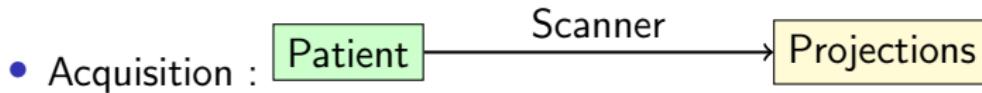
- L'image 3D est reconstruite à partir de projections



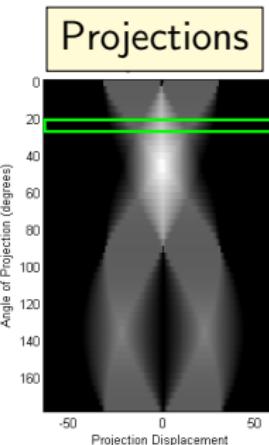
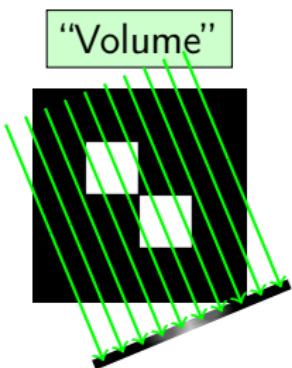
## Comment fait-on une image 3D ? La tomographie



- L'image 3D est reconstruite à partir de projections



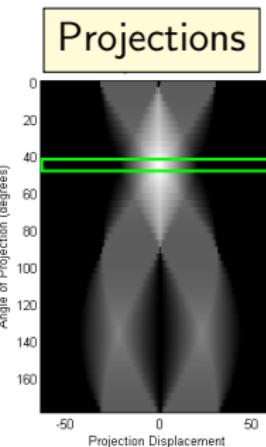
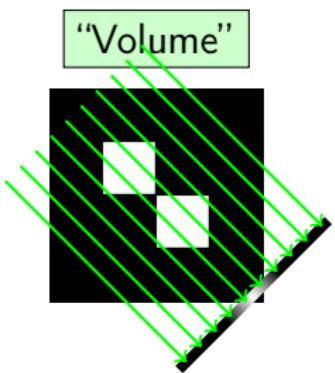
## Comment fait-on une image 3D ? La tomographie



- L'image 3D est reconstruite à partir de projections

- Acquisition :

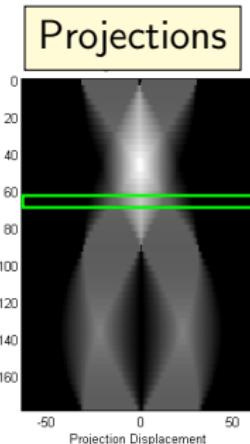
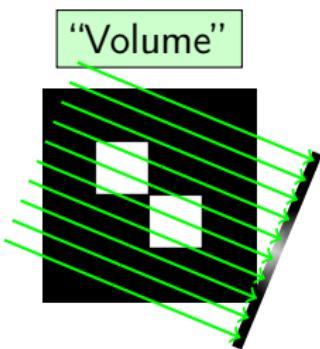
## Comment fait-on une image 3D ? La tomographie



- L'image 3D est reconstruite à partir de projections

- Acquisition :

## Comment fait-on une image 3D ? La tomographie



- L'image 3D est reconstruite à partir de projections

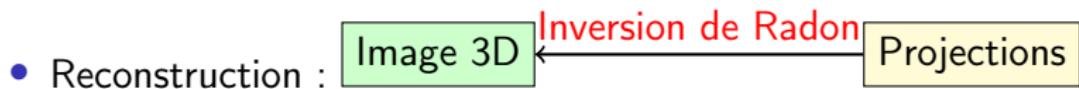
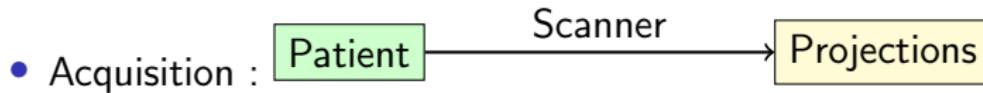


Image et perception  
oooooooo

Synthèse d'image 3D  
oooooooooooo

Imagerie volumique  
oooooo

Vision en relief  
●oooooooooooo

# Images 3D et mathématiques

Image et perception

Synthèse d'image 3D

Imagerie volumique

Vision en relief

## Vision en relief

- Film 3D, télévision en relief, nintendo 3DS, ...
- souvent “Lunettes 3D”



“rouge/bleu”



polarisées



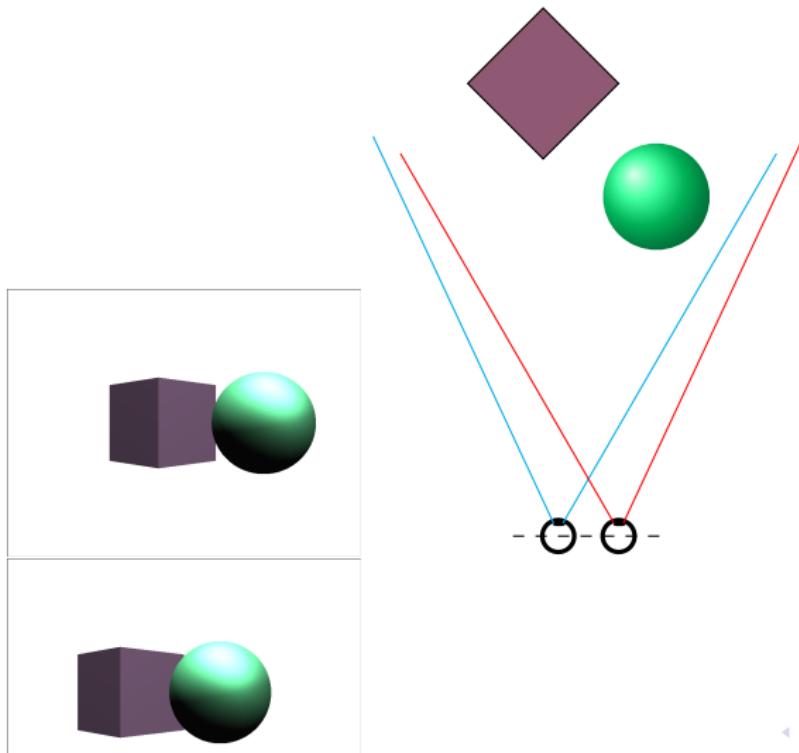
cristaux liquides



- ...mais pas toujours !

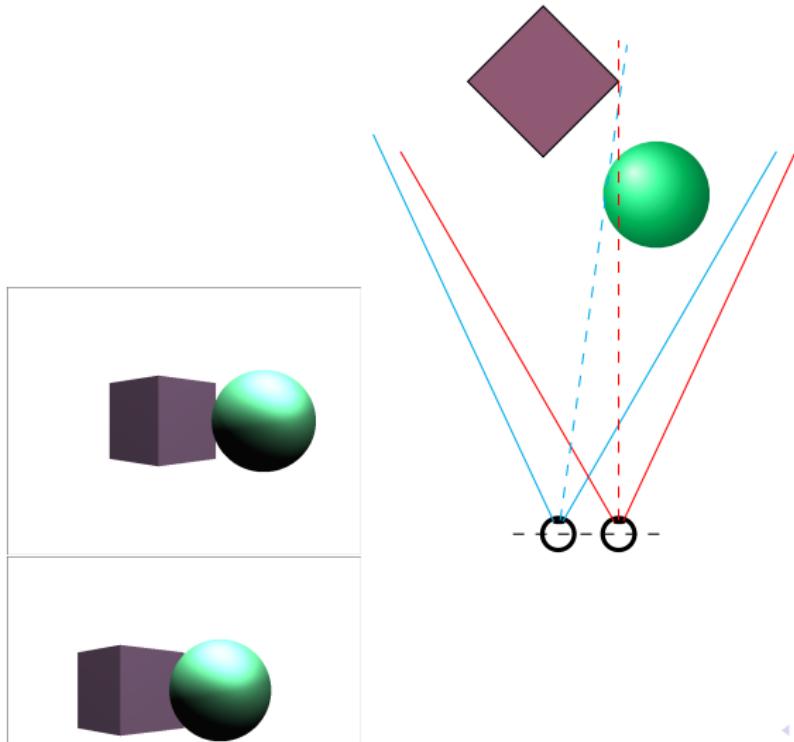
## Stéréovision

- Principe identique dans tous les cas : faire **2** images, une pour l'œil gauche et une pour l'œil droit.



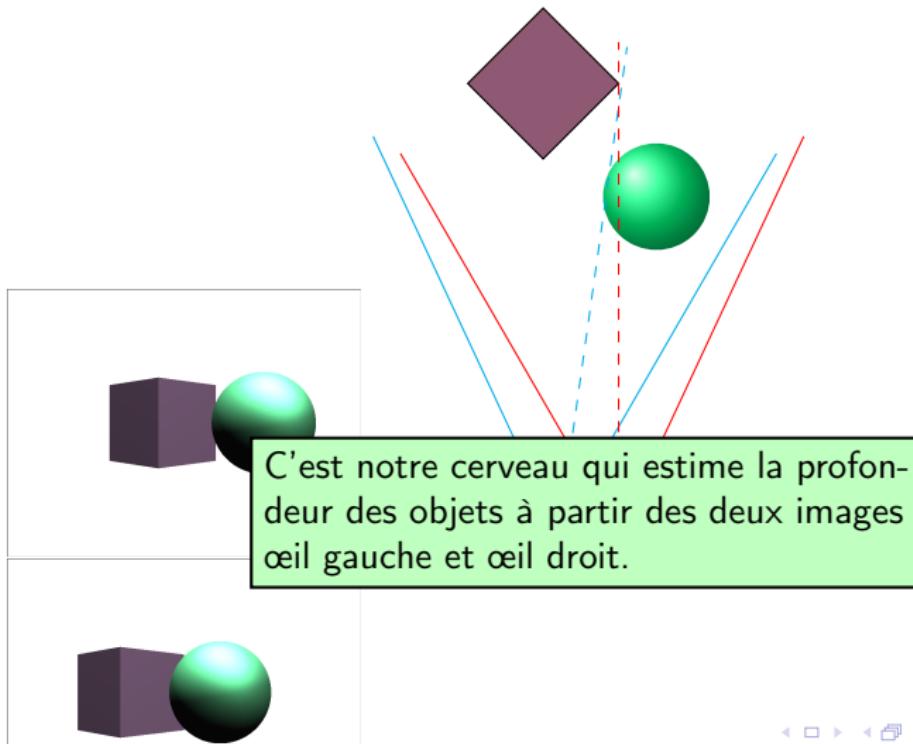
## Stéréovision

- Principe identique dans tous les cas : faire **2** images, une pour l'œil gauche et une pour l'œil droit.

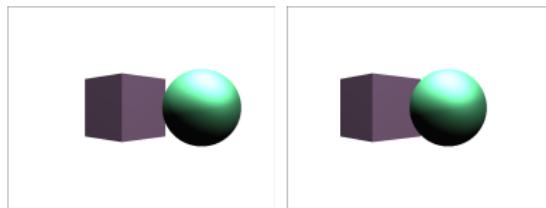


## Stéréovision

- Principe identique dans tous les cas : faire **2** images, une pour l'œil gauche et une pour l'œil droit.



## Fabrication d'images stéréovision



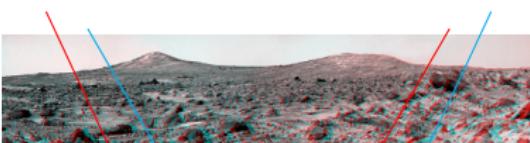
- facile en synthèse d'image : deux images générées avec 2 points de vue



- film ou photo : appareils à deux systèmes de prises de vue.

## Voir les images sur le bon œil

- Anaglyphes et variantes : lunettes rouge-bleu, anachromes



Perçoit le rouge comme une intensité lumineuse, les autres sont noires.



Perçoit les verts et bleus de l'image, le rouge est noir.

Image et perception  
oooooooo

Synthèse d'image 3D  
oooooooooooo

Imagerie volumique  
ooooo

Vision en relief  
ooooo●oooo

# Anaglyphe



## Voir les images sur le bon œil

- Lunettes à obturation LC (cristaux liquides). Le film alterne image œil gauche et image œil droit.



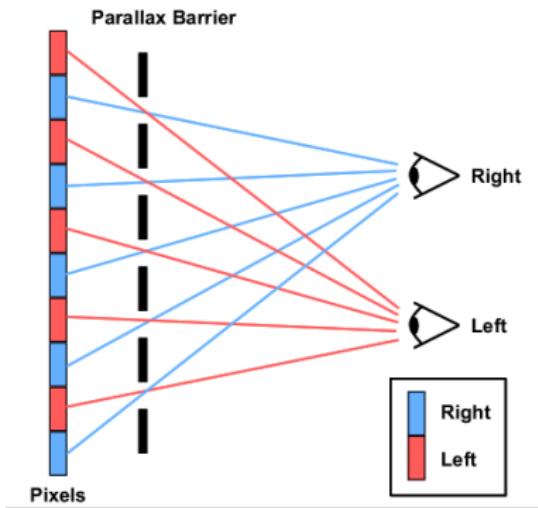
## Voir les images sur le bon œil

- Lunettes à obturation LC (cristaux liquides). Le film alterne image œil gauche et image œil droit.



## Mais alors, sans lunettes ?

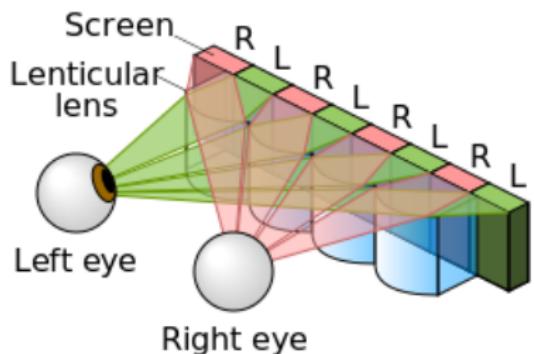
- auto-stéréoscopie à barrière parallaxe : Sharp pour Nintendo 3DS



- 1 colonne de pixels sur deux est pour l'œil gauche, l'autre pour l'œil droit
- l'observateur doit être au bon endroit
- résolution divisée par deux

## Mais alors, sans lunettes ?

- auto-stéréoscopie à barrière parallaxe : Sharp pour Nintendo 3DS
- auto-stéréoscopie à réseau lenticulaire



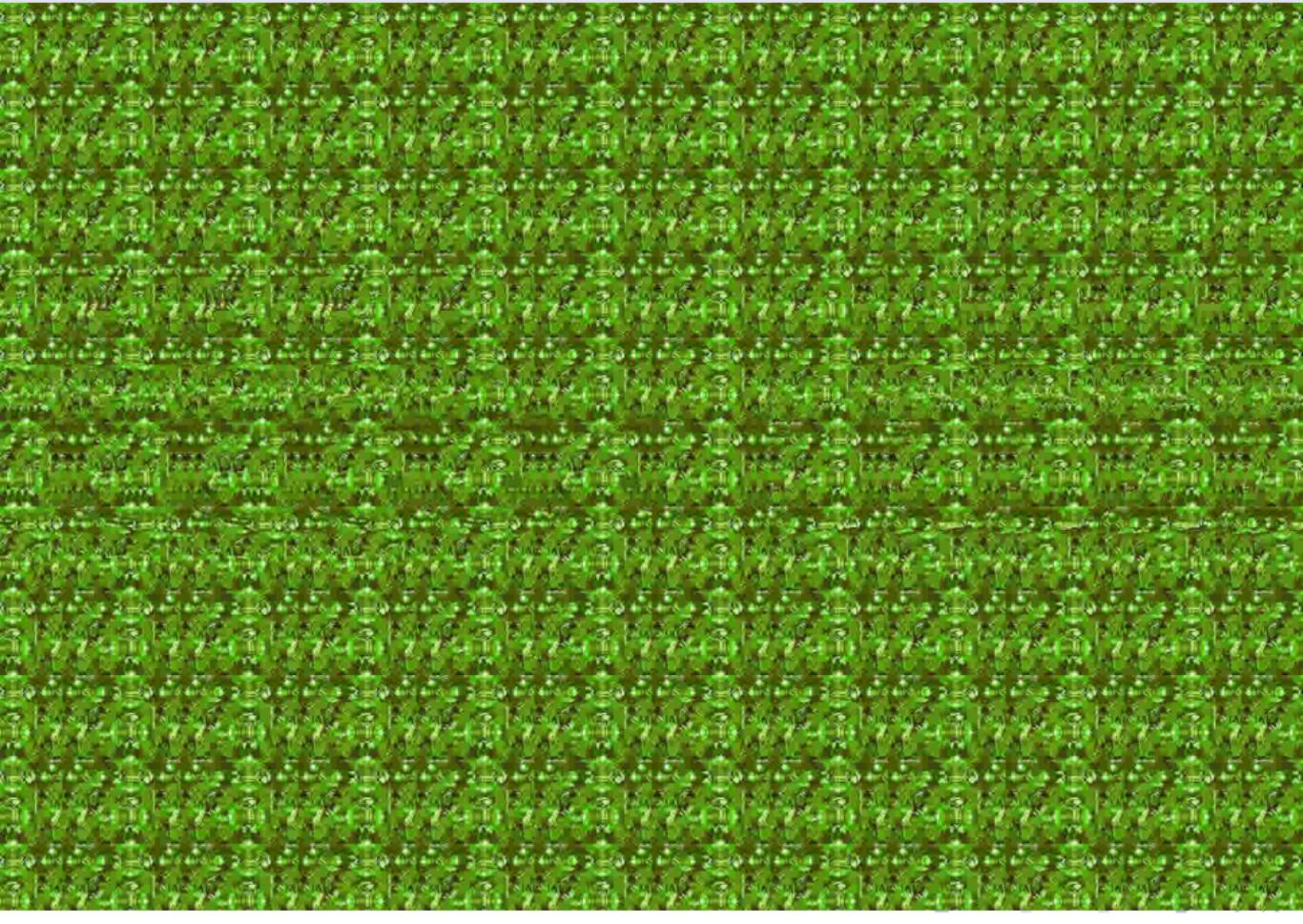
- 1 colonne de pixels sur deux est pour l'œil gauche, l'autre pour l'œil droit
- entre 6 et 10 positions possibles
- résolution divisée par deux

Image et perception  
oooooooooo

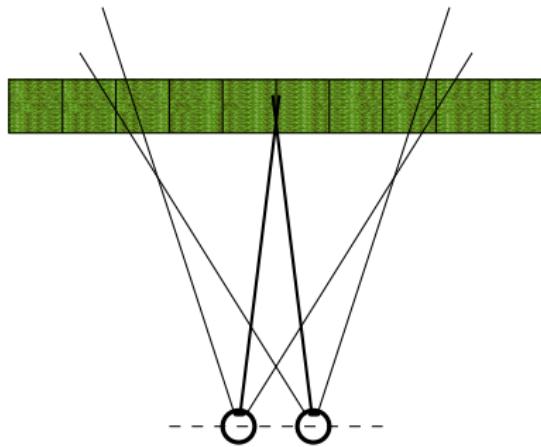
Synthèse d'image 3D  
oooooooooooo

Imagerie volumique  
oooooo

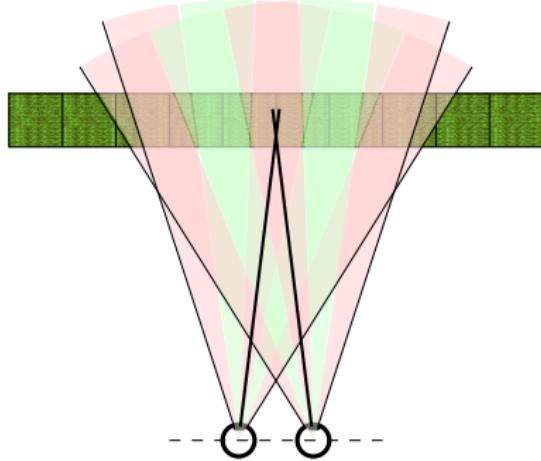
Vision en relief  
oooooooooo●o



# Stéréogrammes



# Stéréogrammes



# Stéréogrammes

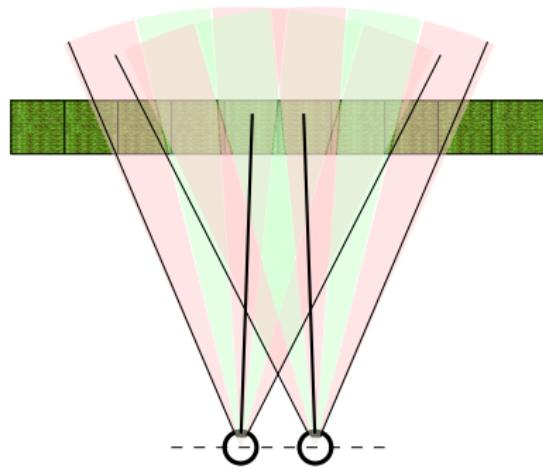
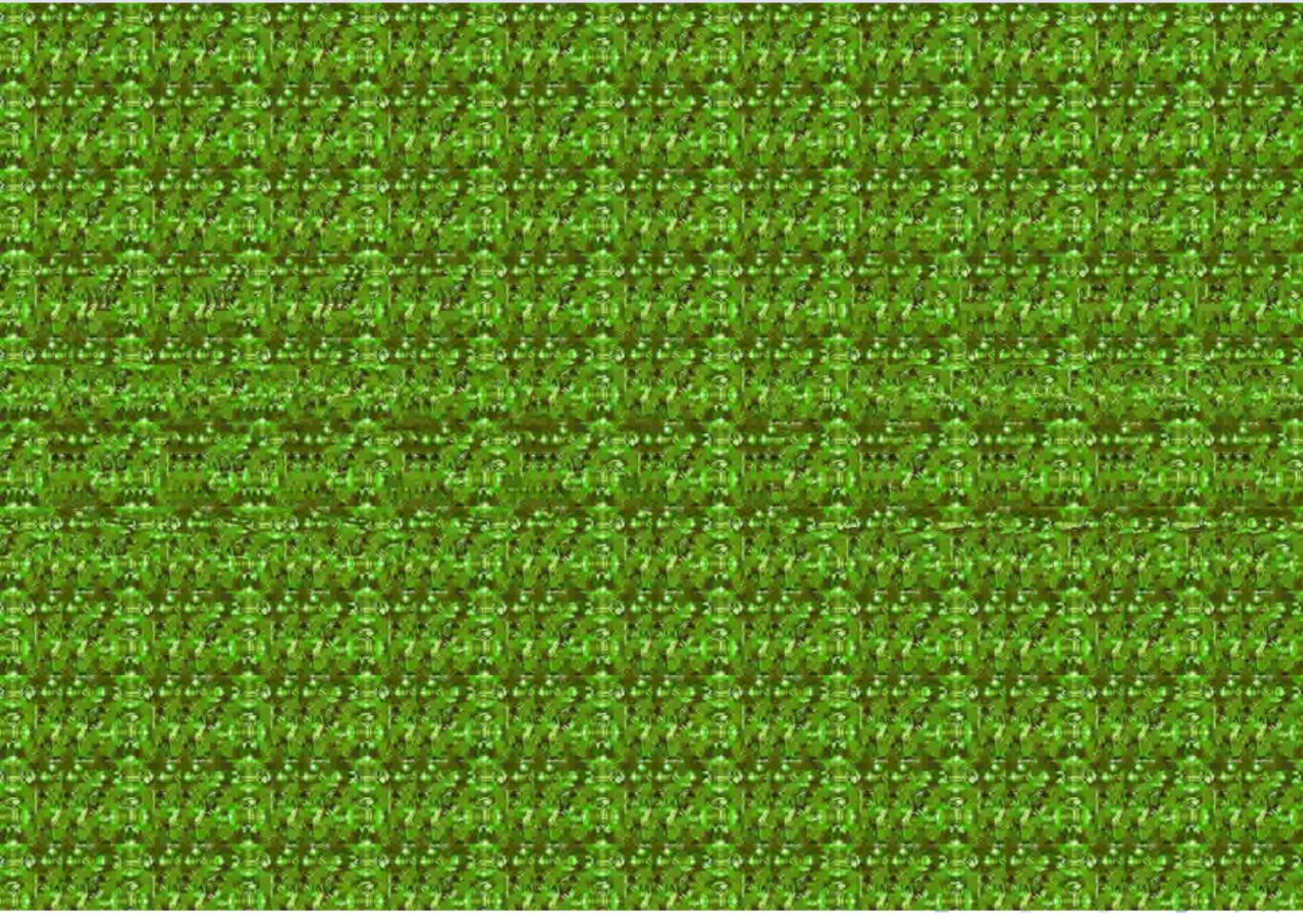


Image et perception  
oooooooooo

Synthèse d'image 3D  
oooooooooooo

Imagerie volumique  
oooooo

Vision en relief  
oooooooooo●





# Images et mathématiques

algèbre de Grassman	lancer de rayon
marching-cubes	interpolation
filtrage fréquentiel	calcul matriciel
	algèbre linéaire
	illumination de Phong
espace projectif	transformée de Radon
	géométrie différentielle
géométrie discrète	carreaux de Bézier
	topologie des surfaces
	radiosité
transformée de Fourier	segmentation
rendu volumique	problème inverse
produit vectoriel	