



N° d'ordre NNT : xxx

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON**  
opérée au sein de  
**l'Université Claude Bernard Lyon 1**

**École Doctorale ED512**  
**InfoMaths**

**Spécialité de doctorat : Informatique**

Soutenue publiquement le 13/12/2018, par :  
**Thomas Caissard**

---

**Calcul Discret sur les Surfaces  
Digitale**

---

Devant le jury composé de :

Mme. Debled-Rennessons Isabelle, Pr. des Universités, Université de Lorraine	Rapporteuse
M. Passat Nicolas, Pr. des Universités, Université de Reims	Rapporteur
Mme. Chaine Raphaëlle, Pr. des Universités, Université Lyon 1	Examinaterice
M. Cohen-Steiner David, Chargé de Recherches INRIA, INRIA Sophia Antipolis	Examinateur
M. Coeurjolly David, Directeur de Recherches CNRS, Université Lyon 1	Directeur de thèse
M. Lachaud Jacques-Olivier, Pr. des Universités, Université Savoie Mont Blanc	Co-directeur de thèse
M. Roussillon Tristan, Maitre de Conférences, INSA Lyon	Co-directeur de thèse

# Composition de la FST

## UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1

### Président de l'Université

Président du Conseil Académique

Vice-président du Conseil d'Administration

Vice-président du Conseil Formation  
et Vie Universitaire

Vice-président de la Commission Recherche

Directrice Générale des Services

**M. le Professeur Frédéric FLEURY**

M. le Professeur Hamda BEN HADID

M. le Professeur Didier REVEL

M. le Professeur Philippe CHEVALIER

M. Frabrice VALLÉE

Mme Dominique MARCHAND

## COMPOSANTE SANTÉ

Faculté de Médecine Lyon Est - Claude Bernard

Faculté de Médecine et de Maïeutique Lyon Sud  
- Charles Mérieux

Faculté d'Odontologie

Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques

Institut des Sciences et Techniques de la Réadaptation

Département de formation et

Centre de Recherche en Biologie Humaine

Directeur : M. le Professeur G.RODE

Directeur : Mme la Professeure C.BURILLON

Directeur : M. le Professeur D.BOURGEOIS

Directeur : Mme la Professeure C. VINCIGUERRA

Directeur : M. X. PERROT

Directeur : Mme la Professeure A-M. SCHOTT

## COMPOSANTES ET DEPARTEMENTS DE SCIENCES ET TECHNOLOGIE

Faculté des Sciences et Technologies

Département Biologie

Département Chimie Biochimie

Département GEP

Département Informatique

Département Mathématiques

Département Mécanique

Département Physique

UFR Sciences et Techniques des Activités Physiques  
et Sportives

Observatoire des Sciences de l'Université de Lyon

Polytech Lyon

Ecole Supérieure de Chimie Physique Electronique

Institut Universitaire de Technologie de Lyon 1

Ecole Supérieure du Professorat et de l'Education

Institut de Science Financière et d'Assurances

Directeur : M. F. DE MARCHI

Directeur : M. le Professeur F. THEVENARD

Directrice : Mme C. FELIX

Directeur : M. Hassan HAMMOURI

Directeur : M. le Professeur S. AKKOUCH

Directeur : M. le Professeur G. TOMANOV

Directeur : M. le Professeur H. BEN HADID

Directeur : M. le Professeur J-C PLENET

Directeur : M. Y.VANPOULLE

Directeur : M. B. GUIDERDONI

Directeur : M. le Professeur E.PERRIN

Directeur : M. G. PIGNAULT

Directeur : M. le Professeur C. VITON

Directeur : M. le Professeur A. MOUGNIOTTE

Directeur : M. N. LEBOISNE



# Table des Matières

---

<b>Liste des Symboles</b>	<b>1</b>	
<b>Remerciements</b>	<b>3</b>	
<b>Introduction</b>	<b>5</b>	
<b>Partie I</b>	<b>Préliminaires</b>	
Chapitre 1	<b>Géométrie différentielle</b>	<b>13</b>
1.1	Calcul différentiel et surfaces	13
1.2	L'opérateur de Laplace–Beltrami	22
1.3	Conclusion	26
Chapitre 2	<b>Modèles de Surfaces Discrètes</b>	<b>29</b>
2.1	Complexes Simpliciaux et Complexes Cellulaires	29
2.2	Surfaces digitales	33
2.3	Conclusion	40
	<b>Interlude : Convergence d'Opérateurs</b>	<b>43</b>
<b>Partie II</b>	<b>Discrétisation de l'opérateur de Laplace–Beltrami</b>	
Chapitre 3	<b>Panorama des discrétisations de l'opérateur de Laplace–Beltrami existantes</b>	<b>51</b>
3.1	Propriétés des lapaciens discrets	53
3.2	Opérateurs combinatoires	56
3.3	Deux opérateurs sur les triangulations	57
3.4	Opérateur sur des surfaces polygonales généralisées	62
3.5	Opérateur de convolution de Belkin <i>et al.</i>	66
3.6	Une autre approximation globale	69
3.7	Conclusion	71
Chapitre 4	<b>Un opérateur de Laplace–Beltrami convergent sur les surfaces digitales</b>	<b>73</b>
4.1	Différences finies sur des courbes digitales	74
4.2	Adaptation de l'opérateur d'Alexa et Wardetzky sur les surfaces digitales	78
4.3	Discrétisation sur les surfaces digitales	80
4.4	Preuve de la $C^2$ -convergence	83
4.5	Conclusion	94
Chapitre 5	<b>Analyse numérique de la <math>C^2</math>-Convergence</b>	<b>97</b>
5.1	Tests sur la sphère	97
5.2	Consistance de la courbure moyenne	99
5.3	Coupure de la gaussienne	102
5.4	Diffusion de la chaleur	105
5.5	Lissage	106
5.6	Conclusion	108
	<b>Ouverture : équation de la chaleur et <math>C^2</math>-convergence</b>	<b>111</b>
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>119</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>123</b>

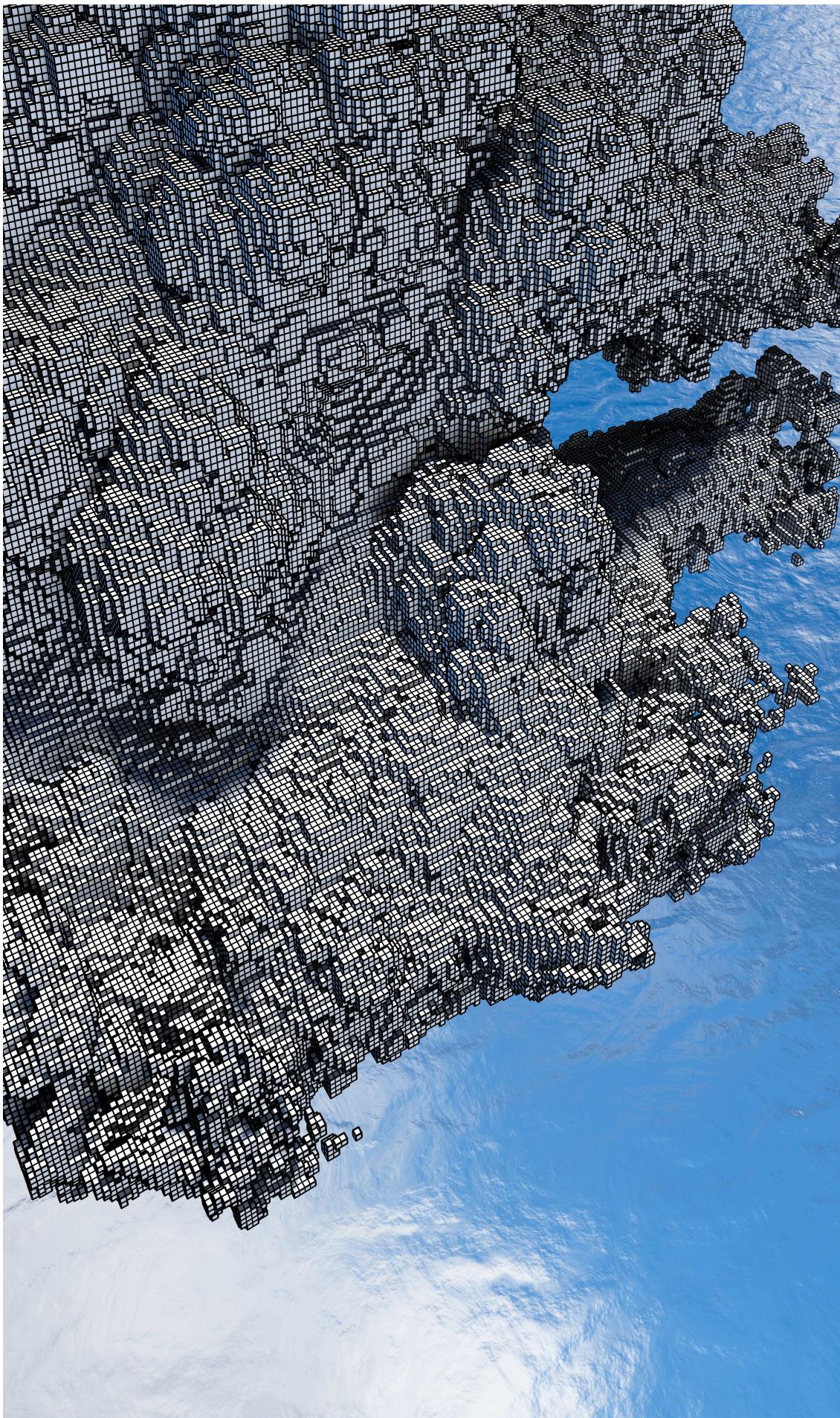
# Liste des Symboles

## Opérateurs de Laplace Discrets

$\mathcal{L}_B$	Opérateur par convolution de Belkin <i>et al.</i> 69, 71, 98–101
$\mathcal{L}_{COMBI}$	Opérateur combinatoire des graphes 56, 71, 98–102, 105, 106, 108, 110, 118
$\mathcal{L}_{COT}$	Opérateur des cotangentes 59–62, 70, 71, 98–102, 115
$\mathcal{L}_h$	Opérateur par convolution sur les surfaces digitales 83, 84, 88, 89, 94, 98–102, 105–110, 116, 118, 119
$\mathcal{L}_h^*$	Opérateur continu qui met en lien $\Delta$ et le noyau de la chaleur 69, 84, 85, 88
$\mathcal{L}_{QUAD}$	Opérateur d'Alexa et Wardetzky 64, 65, 71, 98–101, 115–118
$\mathcal{L}_{RLOCAL}$	Opérateur d'Hildebrandt et Polthier 70, 71, 98–101

## Calcul Différentiel

$\wedge$	Le produit extérieur 13–15, 20–22
$d$	La dérivée exterieure 20, 23



# Remerciements



# Introduction

De nombreux thèmes de la modélisation géométrique et de l'informatique graphique traitent de l'étude de surfaces de dimension deux plongées dans  $\mathbb{R}^3$ . La représentation discrète de ces surfaces se fait en général au travers d'un maillage caractérisé par les coordonnées de ses sommets ainsi que des informations de connectivité. Une des questions classiques qui apparaît lors de l'étude de ces objets est la définition d'une notion de calcul : quel sens peut-on donner à la dérivée d'une fonction appliquée sur ce maillage ? La théorie du calcul sur ces objets regroupe l'ensemble des études qui tentent de répondre à cette question. Plus précisément, le but est de donner de bonnes définitions (le terme de bonne reste ici à définir) d'opérateurs différentiels agissant sur des domaines finis : les espaces discrets. On distingue deux approches lors de l'élaboration des méthodes de calcul. La première a pour but de développer un calcul *purement discret*, qui ne tient pas compte d'un objet continu sous-jacent. On cherche ici à construire une théorie discrète du calcul différentiel, analogue à la théorie continue. On va dans ce cas là élaborer des versions discrètes de propriétés et de théorèmes de la géométrie différentiel : qu'est-ce que la courbure Gaussienne sur un objet discret ? Peut-on obtenir une version discrète du théorème de Stokes ? Une seconde approche est de construire un *calcul discrétilisé*, qui approxime la théorie continue. On va dans ce cas discrétiliser l'objet continu avec une certaine précision, qui dépend en général de la taille des briques discrètes utilisées (par exemple la circonférence des triangles pour les triangulations), en assurant certaines propriétés de l'objet discrétilisé (comme par exemple une bonne approximation des normales) pour ensuite à nouveau approximer les opérateurs différentiels de l'objet continu sur l'objet discret. On s'intéresse dans ce cas là à des notions de convergence des opérateurs discret vers les opérateurs continus : on veut, par exemple, que lorsque l'on raffine l'approximation, les opérateurs différentiels discrets soient de plus en plus proche des opérateurs continus.

**Cadre de la thèse** Le problématique centrale de cette thèse est de développer un calcul discret sur les surfaces digitales. Les surfaces digitales sont des bords de sous-ensembles de voxels dans  $\mathbb{R}^3$ . Pour répondre à cette question, nous nous plaçons dans un cadre théorique où nous considérons que les surfaces digitales sont le résultat d'une approximation, ou processus de discrétilisation, d'une surface continue. La difficulté de l'élaboration du calcul est en fait due à deux problèmes inhérents à cette discrétilisation et de façon plus générale aux surfaces digitales :

- (i) Les sommets de l'objet discrétilisé ne sont pas sur la surface continue. En d'autres termes, notre surface digitale n'est qu'une approximation de la surface continue et non un échantillonage de celle-ci. Afin d'étudier la convergence de l'approximation d'opérateurs ou de quantités différentielles (comme la courbure ou bien l'aire) nous devons tout d'abord étudier la relation entre la surface discrétilisée et la surface continue. Nous faisons cette étude au travers de la théorie de la mesure géométrique,

introduite par Federer, qui met en relation ces deux surfaces via la fonction de projection au plus proche voisin. Nous verrons que dans notre cas, la fonction de projection n'est pas bijective partout (étant donné un point de la surface discrète, celui-ci peut posséder plus d'une projection sur la surface continue). On ne peut donc pas dans notre cas appliquer directement les théories de calcul discret existante qui supposent la bijectivité de l'application de projection.

- (ii) Le second problème vient de la nature même de la surface digitale. Son caractère isotétique, c'est-à-dire le fait que toutes les faces de notre objet sont alignées avec les axes de la grille canonique, nous impose d'utiliser des techniques plus élaborer pour l'estimation de quantités différentielles. Par exemple, nous savons que les normales perpendiculaires aux faces de la surface digitale n'approximent pas les vraies normales de la surface continue sous-jacente. C'est un des points qui nous différencie des théories existantes du calcul discret où il est généralement supposé que les normales élémentaires des briques de base de la surface convergent vers les vraies normales de la surface continue sous un certain raffinement de la discréttisation.

Nous faisons donc face à deux problèmes : d'un côté, notre surface n'est qu'une approximation de la surface continue sous-jacente, et de l'autre côté, l'estimation triviale de quantités géométriques sur la surface digitale ne nous apporte pas en général une bonne estimation de cette quantité. Nous possédons déjà des réponses au second problème : ces dernières années, de nombreux papiers nous donnent des méthodes pour approximer certaines quantités géométriques sur les surfaces digitales, méthodes que nous décrirons dans cette thèse. Ces nouvelles techniques d'approximation des normales nous permettent d'injecter des informations de mesure sur les éléments de notre surface. Nous utilisons donc l'estimation de normales pour répondre au premier problème, qui nous permet en fait d'approximer de façon précise le plan tangent en un point de la surface.

Nous souhaitons donc présenter une théorie du calcul discret sur les surfaces digitales. Pour ce faire, nous allons étudier un opérateur central en géométrie différentielle : l'opérateur de Laplace–Beltrami. Cet opérateur est au cœur de nombreuses équations aux dérivées partielles (comme par exemple l'équation de la chaleur, les équations de diffusions ou bien l'équation de Schrödinger) et joue donc un rôle important dans la modélisation de processus physique. L'opérateur de Laplace–Beltrami est un opérateur différentiel d'ordre deux : c'est un opérateur qui agit sur les fonctions et dans le cas particulier des espaces euclidiens, il correspond à la somme des dérivées seconde de la fonction. Géométriquement, il caractérise la déviation locale d'une surface par rapport à une sphère. Nous verrons d'ailleurs qu'il est intrinsèquement relié à la courbure moyenne de la surface qui est elle-même reliée au gradient de l'aire d'un petit bout de surface. Du point de vue de l'informatique, l'opérateur est au cœur de nombreuses théories. Son étude spectrale sur les graphes permet par exemple de caractériser les plus courts chemins, et son étude au travers de l'équation de la chaleur est relié aux marches aléatoires dans un graphe. Sur les images, la discréttisation de l'opérateur permet de récupérer les contours saillants. Il intervient également dans de nombreuses méthodes d'étude géométrique des surfaces comme le lissage par flot de courbure moyenne, l'approximation de formes par la décomposition spectrale, le calcul de distances via l'équation de la chaleur. Le spectre de l'opérateur nous

fournit une base des fonctions sur la surface discrète, au même titre que la décomposition de Fourier sur des grilles régulières. D'un point de vue théorique, et c'est peut-être là que l'opérateur joue son rôle le plus important, l'étude de sa discréétisation nous permet de développer une théorie du calcul discret. Il nous donne en effet un angle d'attaque pour la discréétisation d'objets fondamentaux en calcul discret comme la dérivée extérieure ou bien encore le produit intérieur (une généralisation du produit scalaire) sur les surfaces discrètes. Nous allons donc, au travers de l'opérateur de Laplace–Beltrami, formaliser une théorie du calcul discret sur les surfaces digitales, ce qui nous permet de répondre à la problématique posée dans cette thèse.

Nous résumons maintenant, à l'aide des prochains paragraphes, les différents chapitres de cette thèse. Celle-ci est divisée en deux parties : la première introduit des éléments de géométrie différentielle sur les surfaces continues ainsi que le cadre théorique discret dans lequel nous allons travailler. Sont présentés les complexes simpliciaux, dont les réalisations dans  $\mathbb{R}^n$  sont les triangulations, les complexes cellulaires, qui sont une généralisations des complexes simpliciaux et enfin un cas particulier des complexes cellulaires, à savoir les surfaces digitales. La seconde partie, qui constitue le coeur de la thèse, est consacrée aux discréétisations de l'opérateur de Laplace–Beltrami. Nous résumerons plusieurs discréétisations existantes de la littérature, puis nous présenterons notre discréétisation sur les surface digitales, dont nous montrons un certain type de convergence. Nous faisons ensuite une comparaison numérique entre les discréétisations présentées précédemment et notre opérateur discret. Nous explorons également quelques applications de l'opérateur discréétisé sur les surfaces digitales pour mettre en avant une propriété d'anisotropie de notre opérateur. Nous concluons cette thèse par une ouverture qui parle du calcul discret sur les surfaces digitales au travers d'une discréétisation de l'opérateur de Laplace–Beltrami.

**Chapitre 1 : Géométrie différentielle** Nous présentons dans ce chapitre la géométrie différentielle des surfaces au travers de la théorie du calcul extérieur. Il est légitime de se poser la question suivante : pourquoi utilisons-nous cette théorie ? Il existe après tout de nombreuses autres approches pour décrire les algorithmes de traitement géométrique des surfaces discrètes. La théorie du calcul extérieur est, dans une large mesure, le langage moderne de la géométrie différentielle des surfaces et de la physique théorique. Nous pouvons donc puiser dans les nombreux outils développés dans ce langage pour enrichir et exprimer de nombreux problèmes d'analyses en géométrie discrète. Le calcul extérieur nous permet également d'écrire et de mettre en oeuvre de nombreuses méthodes, apparemment disjointes, dans un cadre uniifié. Nous définirons donc la notion d'algèbre extérieur, utile pour calculer des volumes en plus grande dimension, puis la théorie des espaces courbes, dont les objets centraux sont les variétés Riemanniennes. Après avoir formalisé les opérateurs différentiels principaux sur ces surfaces, comme le gradient d'un champ scalaire ou bien encore la divergence d'un champ vectoriel, nous présenterons l'objet central de cette thèse : l'opérateur de Laplace–Beltrami. En plus de donner sa formulation dans le langage du calcul extérieur, nous parlerons de quelques problèmes ouverts concernant sa décomposition spectrale, décomposition qui joue un rôle centrale dans de nombreuses applications.

**Chapitre 2 : Modèles de surfaces discrètes** Ce chapitre est consacré aux représentations discrètes des surfaces continues. Nous résumons également des résultats de topologie sur les surfaces digitales, qui nous serviront lors de la preuve de convergence de la discréétisation de l'opérateur de Laplace–Beltrami proposée sur les surfaces digitales. Nous introduisons également une version du calcul extérieur, appelé simplement calcul extérieur discret, sur les complexes simpliciaux. C'est l'occasion pour nous de résumer quelques propriétés de ce calcul, et de montrer la facilité d'implémentation de celui-ci. Nous présentons également un estimateur de normales sur les surfaces digitales, qui sera la brique de base pour la discréétisation de l'opérateur de Laplace–Beltrami. Cet estimateur nous permet en effet de calculer la mesure des faces de la surface digitale, qui nous permet d'approximer de façon précise l'intégration sur ces surfaces.

**Interlude sur la convergence d'opérateurs** Cet interlude clôt la partie numéro un et nous permet de présenter le cadre théorique de convergence dans lequel nous allons faire nos preuves. Nous insistons sur le fait que dans le cas de l'opérateur de Laplace–Beltrami, nous parlons de convergence entre espace de fonctions : nous verrons qu'il existe de nombreuses façons d'aborder la convergence là où il suffit pour des quantités géométriques (comme la courbure ou bien l'aire) de regarder simplement la valeur absolue de la différence entre la quantité continue et son pendant discréétisé.

**Chapitre 3 : Historique des discréétisations existantes** Nous résumons dans ce chapitre plusieurs discréétisations de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur plusieurs types de surfaces discrètes. Nous commençons le chapitre par une description des propriétés que l'on souhaite satisfaire pour un opérateur de Laplace–Beltrami discret. Nous utilisons pour cela le papier de Wardetzky *et al.* ‘Discrete Laplace operators: No free lunch’ [101] qui à partir des propriétés continues de l'opérateur dérive les propriétés discrètes de celui-ci. Pour chaque opérateur présenté, nous ajoutons à la fin du paragraphe un résumé de ses propriétés. Après avoir définis deux opérateurs sur les graphes, nous introduisons le fameux schéma des cotangentes sur les triangulations 2D plongées dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous résumons dans ce paragraphe trois approches qui débouchent à cette discréétisation. La première approche due à Pinkall et Hildebrandt s'intéresse à la discréétisation du flot de courbure moyenne sur les triangulations. La seconde approche de Desbrun *et al.* nous permet de présenter le lien fondamental entre l'opérateur de Laplace–Beltrami, la courbure moyenne et le gradient d'un petit morceau de surface : les auteurs discréétisent l'opérateur de Laplace–Beltrami en calculant le gradient de l'aire d'un triangle par rapport à un de ses sommets. Enfin, nous mentionnons le fait que le schéma des cotangentes peut-être retrouvé au travers du calcul extérieur discret en utilisant la dualité Voronoi / Delaunay. Nous présentons ensuite une généralisation du schéma des cotangentes sur les surfaces polygonales, qui sont en fait des maillages constitués de polygones non-planaires. Cette discréétisation est due à Alexa et Wardetzky. Leur approche est similaire à celle de Desbrun *et al.* sur les triangulations : ils discréétisent le gradient de l'aire sur un polygone non-planaire, et montrent que dans le cas des triangulations ils retombent sur le schéma des cotangentes. Les discréétisations présentées jusqu'à présent appartiennent à la classe des discréétisations locales de l'opérateur. Nous présentons ensuite deux opérateurs qui sont des

discrétisations globales par convolution sur la surface. La première est due à Belkin *et al.* et utilise une discrétisation du noyau de la chaleur. La seconde est due à Hildebrandt et Polthier, qui construisent à partir du schéma des cotangentes un opérateur par convolution.

**Chapitre 4 : Un opérateur de Laplace–Beltrami convergent sur les surfaces digitales** Nous résumons dans ce chapitre les travaux publiés pendant ma thèse dans la conférence ‘Discrete Geometry for Computer Imagery’ et dans la revue ‘Journal of Mathematical Imaging and Vision’ [8, 9]. Nous commençons le chapitre par une motivation pour la définition d’un opérateur convergent sur les surfaces digitales. Nous montrons que l’application du calcul extérieur discret sur des courbes 1D plongées dans le plan ne donne pas un opérateur convergent (au sens défini dans l’interlude). Nous utilisons donc l’approche proposée par Belkin *et al.* sur les triangulations que nous adaptons sur les surfaces digitales. Nous faisons également la preuve de convergence de cet opérateur sur les surfaces digitales en nous servant des outils des outils de la théorie de la mesure géométrique de Federer, ainsi que des propriétés de l’équation de la chaleur montrées par Belkin *et al.*.

**Chapitre 5 : Analyse numérique de l’opérateur** Nous présentons dans ce chapitre une analyse numérique de notre discrétisation de l’opérateur de Laplace–Beltrami sur les surfaces digitales. Nous commençons dans un premier temps par calculer l’erreur d’approximation entre l’opérateur discret et l’opérateur continu pour différentes fonctions définies sur la sphère ainsi que différentes valeurs pour le paramètre de la méthode. Nous comparons ensuite notre opérateur avec d’autres opérateurs de la littérature soient appliqués directement sur la surface digitale, soient appliqués sur le marching cube de la surface digitale. Cela nous permet de mettre en évidence le fait que (dans le cadre de ces expériences) seul notre opérateur possède la propriété de convergence prouvée au chapitre précédent. Nous effectuons ensuite la même analyse mais pour l’estimation de courbure moyenne. En plus de nous comparer avec les autres opérateurs discrets, nous utilisons également deux autres estimateurs de courbure moyenne convergents sur les surfaces digitales. Nous mettons ensuite en évidence au travers de deux applications une propriété d’anisotropie de notre opérateur par rapport à l’opérateur combinatoire sur les graphes.

**Ouverture : équation de la chaleur et  $C^2$ -convergence** Nous ouvrons cette thèse en présentant une méthode alternative pour obtenir la convergence d’opérateur en partant d’un opérateur non-convergent. Nous résumons quelques résultats théoriques de convergence, ainsi qu’un résultat sur le spectre du nouvel opérateur. Nous faisons une analyse numérique de la convergence en nous comparant à la discrétisation présenté dans cette thèse.



# Partie I

---

Préliminaires



## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Calcul différentiel et surfaces</b>	13
→ 1.1.1	Algèbre Extérieure	13
→ 1.1.2	Variétés différentielles	16
→ 1.1.3	Le tenseur métrique	18
→ 1.1.4	La dérivée extérieure	20
→ 1.1.5	L'opérateur de Hodge	21
<b>1.2</b>	<b>L'opérateur de Laplace–Beltrami</b>	22
→ 1.2.1	Opérateur de Laplace–Beltrami et formes différentielles	23
→ 1.2.2	Comprendre les valeurs propres de l'opérateur	24
<b>1.3</b>	<b>Conclusion</b>	26

## 1.1 Calcul différentiel et surfaces

La géométrie différentielle discrète traite de l'étude différentielle sur les structures géométriques (par exemple des triangulations 2D plongées en 3D). L'approche généralement considérée lors de l'élaboration d'une telle théorie est de s'appuyer sur les outils de géométrie différentielle sur les variétés Riemanniennes. Bien que nos surfaces ne soient pas intrinsèquement différentiables (ou plus précisément uniquement différentiables par morceaux), la compréhension du calcul discret ne peut se passer de la compréhension de ces analogues sur les variétés. Nous jugeons donc nécessaire de présenter la théorie de l'algèbre extérieure (ou algèbre de Grassmann), qui offre un cadre de calcul qui ne dépend pas d'une base choisie sur la variété. Un des théorèmes central de cette théorie est le théorème de Stokes qui nous permet de faire le lien entre l'intégrale d'une quantité sur un domaine, et cette même quantité au bord du domaine. Une des conséquences majeure pour la théorie du calcul discret est que nous n'avons besoin que de considérer des quantités ponctuelles (par exemple des fonctions évaluées aux sommets du maillage) pour calculer. Nous considérerons dans tout ce qui suit une surface 2D plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , qui sera l'objet d'étude continu central de cette thèse. Le lecteur pourra se référer au livre de Lee [58] pour une introduction au calcul extérieur.

### 1.1.1 Algèbre Extérieure

Le produit extérieur (ou *wedge product* en anglais) est une construction algébrique utilisée en géométrie pour étudier les aires, les volumes et leurs analogues en dimension plus élevée. Ce produit est anti-commutatif (c'est-à-dire que  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ ), linéaire en chacun

de ses termes. Commençons tout d'abord par donner un exemple pour illustrer  $\wedge$  en deux dimensions. Le plan cartésien  $\mathbb{R}^2$  est un espace vectoriel que l'on peut équiper d'une base standard de vecteurs unitaires

$$\mathbf{e}_0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Un vecteur  $\mathbf{v}$  s'écrit alors dans cette base comme

$$\mathbf{v} = v^0 \mathbf{e}_0 + v^1 \mathbf{e}_1,$$

une combinaison linéaire des vecteurs de base de  $\mathbb{R}^2$ . Soient deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Il existe alors un unique parallélogramme (à translation près) possédant ces deux vecteurs comme côtés. L'aire de celui-ci correspond à la valeur absolue du déterminant de la matrice formée par ces deux vecteurs :

$$\text{Aire} := \left| \begin{bmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{bmatrix} \right| = |u_0 v_1 - u_1 v_0|.$$

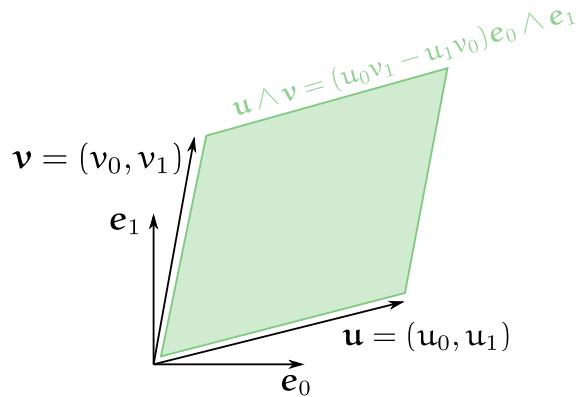
Calculons maintenant le produit extérieur entre ces deux vecteurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= (u_0 \mathbf{e}_0 + u_1 \mathbf{e}_1) \wedge (v_0 \mathbf{e}_0 + v_1 \mathbf{e}_1) \\ &= u_0 v_0 \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_0 + u_0 v_1 \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 + u_1 v_0 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_0 + u_1 v_1 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &= (u_0 v_1 - u_1 v_0) \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc voir que la norme de ce vecteur correspond à l'aire du parallélogramme calculée précédemment (voir la figure. 1.1). Remarquez aussi que le signe de cet opérateur dépend de l'orientation de la base choisie (sens horaire ou anti-horaire). Plus généralement, nous aurions pu choisir arbitrairement des vecteurs de base de  $\mathbb{R}^2$  : le produit extérieur permet ainsi de comparer l'aire d'un parallélogramme par rapport à un paralléogramme canonique (que nous avons la liberté de choisir). En ce sens, le produit extérieur nous fournit une formulation de l'aire indépendante de la base choisie. Plus généralement, étant donné un espace vectoriel  $V$  et une base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  de celui-ci, nous pouvons écrire  $\mathbf{x} := \sum x^i \mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{y} := \sum y^i \mathbf{e}_i$ . En utilisant les règles du produit extérieur, nous avons

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \sum_{i < j} (x^i y^j - x^j y^i) \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j. \quad (1.1.1)$$

Le produit extérieur nous permet d'assembler des vecteurs de  $V$  pour créer des sous-espaces vectoriels de dimension plus élevée. Nous avions par exemple dans l'Equation (1.1.1) créé un sous-espace vectoriel de dimension deux, qui correspond géométriquement au plan engendré par  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  possédant l'aire du parallélogramme calculée précédemment. L'objet  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$  est appelé un 2-vecteur (ou bivecteur). On peut ainsi étendre la construction pour un nombre arbitraire de vecteurs de  $V$ . Pour  $p = 0, 1, \dots, n$ , nous définissons un nouvel espace vectoriel  $\bigwedge^p V$  dont les éléments sont des  **$p$ -vecteurs** de



**Fig. 1.1** Le produit extérieur entre deux vecteurs  $u$  et  $v$  est un 2-vecteur, dont la norme est égale à l'aire du parallélogramme engendré par ces deux vecteurs.

$V$ , et  $p$  est appelé le degré. Nous avons en particulier  $\bigwedge^0 V = \mathbb{R}$ ,  $\bigwedge^1 V = V$  et  $\bigwedge^n V = \mathbb{R}$ . Pour  $2 \leq p < n$ ,  $\bigwedge^p V$  est composé d'éléments représentés comme

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p$$

où chacun des  $x_i$  appartient à  $V$ . Il est donc possible de construire l'espace des  $p$ -vecteurs en combinant des vecteurs à l'aide du produit extérieur.

Le produit extérieur produit une algèbre associative appelée *algèbre extérieure* ou bien encore *algèbre de Grassmann*. Intéressons-nous maintenant à l'espace dual de  $\bigwedge^p V$ . Commençons tout d'abord par définir les *fonctionnelle linéaire*. Une fonctionnelle linéaire  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$  est une transformation linéaire des éléments de  $V$  vers  $\mathbb{R}$ . Ainsi, étant donnés  $v, w \in V$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha(av + bw) = a\alpha(v) + b\alpha(w).$$

L'ensemble ces fonctionnelles sur  $V$  constitue un espace vectoriel appelé espace dual à  $V$ , et souvent noté  $V^*$ . Si  $e_1, \dots, e_n$  forme une base de  $V$ , nous pouvons définir la base duale  $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$  de  $V^*$  par

$$\epsilon^i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

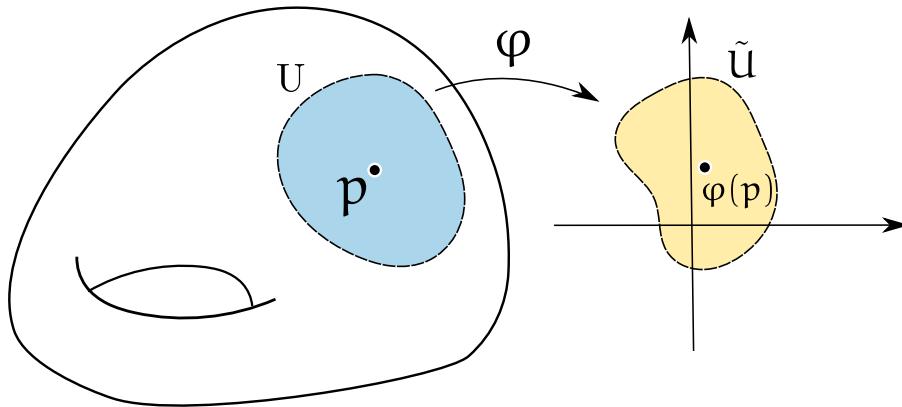
et nous avons donc par linéarité

$$\epsilon^i(v) = \epsilon^i \left( \sum_j e_j v^j \right) = \sum_j \epsilon^i(e_j) v^j = v^i. \quad (1.1.2)$$

En d'autres termes  $\epsilon^i$  extrait la  $i$ -ème coordonnée du vecteur  $v$ . Ces fonctionnelles linéaires sont appelées *formes*. On peut, de la même façon qu'avec les  $p$ -vecteurs, utiliser le produit extérieur pour définir l'espace vectoriel des  $p$ -formes  $\bigwedge^p V^*$ . Ainsi,  $\bigwedge^0 V^*$  est l'espace des fonctionnelles linéaires et  $\bigwedge^n V^*$  l'espace des applications scalaires. Pour les autres valeurs de  $p$ , l'espace vectoriel  $\bigwedge^p V^*$  est composé d'élément

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p.$$

Une  $p$ -forme est donc une application linéaire des  $p$ -tuples de vecteurs dans les scalaires. Nous verrons que dans le cas discret, les  $p$ -formes discrètes sont des applications d'objets



**Fig. 1.2** Un exemple de carte de coordonnées  $(U, \varphi)$  d'une variété  $M$ . L'ensemble  $U$  est appelé l'espace des coordonnées ou bien voisinage des coordonnées de la carte. L'application  $\varphi$  quant-à-elle est appelée l'application des coordonnées (locales) et les composantes de cette fonction sont appelées les coordonnées locales.

géométriques simples (sommets, arêtes et triangles par exemple) vers  $\mathbb{R}$ . L'un des principaux avantages des  $p$ -formes est qu'elles permettent de faire du calcul sans coordonnées (e.g. étant donné une forme  $\alpha$  et un vecteur  $v$  l'évaluation de  $\alpha(v)$  ne dépend pas du système de coordonnées choisi pour les calculs).

Les notions introduites précédemment sur le produit extérieur et sur les  $p$ -vecteurs sont valables pour un espace vectoriel donné  $V$ . Nous allons maintenant introduire le concept de variétés, qui peut-être vu comme une généralisation des espaces vectoriels. Nous utiliserons les outils de l'algèbre extérieur pour calculer sur de telles surfaces.

### 1.1.2 Variétés différentielles

Les variétés les plus générales sont les variétés topologiques : ce sont des espaces munis de certaines propriétés qui donnent un sens à “ressemblent localement à  $\mathbb{R}^d$ ”. Bien que l'aspect topologique soit largement étudié, une des applications des variétés se trouve dans le calcul. Il est naturel de vouloir étendre la notion de volume calculée classiquement via des intégrales, ou bien la notion de courbure, calculée par différentiation sur des objets plus complexes que des droites ou des plans.

Une variété topologique est une collection ou bien atlas d'homéomorphismes vers l'espace euclidien appelés cartes (voir la figure. 1.2 pour un exemple de carte). Nous supposons que ces cartes sont compatibles entre elles : étant données deux cartes  $(A, \varphi)$  et  $(B, \psi)$ , si  $A \cap B \neq \emptyset$  alors la composition  $\psi \circ \varphi^{-1}$  est aussi un homéomorphisme appelé l'application de transition. Cette structure est suffisante pour étudier les propriétés topologiques des variétés, comme la compacité ou bien la connexité, mais ne suffit pas pour le calcul. Pour qu'une variété soit adaptée au calcul elle doit être différentiable, ce qui se traduit par la différentiabilité de ses cartes de transitions. Nous considérons dans cette thèse les variétés différentielles qui sont plongées dans  $\mathbb{R}^3$ . Pour un traitement rigoureux de ces espaces, nous invitons le lecteur à regarder le livre de John M. Lee ‘Introduction to Smooth Manifolds’ [58].

Nous introduisons maintenant la notion de plan tangent à une variété en suivant la construction décrite dans le chapitre 3 du livre de Lee. Posons-nous la question suivante : étant donné une variété  $M$  plongée dans  $\mathbb{R}^n$ , quel sens peut-on donner au terme ‘vecteur tangent’ à un point  $p$  de cette variété ? Avant de pouvoir répondre à cette question, posons-nous d’abord une autre question : qu’est-ce qu’un élément de  $\mathbb{R}^n$  ? D’un côté, un élément  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  est un point de l’espace que l’on exprime via ses coordonnées  $(x^1, \dots, x^N)$ . De l’autre côté, lorsque nous sommes amenés à faire du calcul, nous imaginons ces éléments comme des vecteurs, qui sont des objets possédant une longueur (leur norme) et une direction, mais donc la localisation dans l’espace ne joue aucune importance. Un vecteur  $v = \sum v^i e_i$  (avec  $e_i$  les vecteurs de la base standard) est une flèche dont le point initial se situe n’importe où dans  $\mathbb{R}^N$  : l’important du point de vu du calcul est la direction et la longueur du vecteur. Etant donné un point  $a$  de  $\mathbb{R}^n$ , l’*espace tangent géométrique* de  $\mathbb{R}^n$  en  $a$ , noté  $\mathbb{R}_a^n$  est l’ensemble  $\{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, v) | v \in \mathbb{R}^n\}$ . Un *vecteur tangent géométrique*, noté  $v_a$  ou bien  $v|_a$ , dans  $\mathbb{R}^N$  est un élément de cet espace. C’est donc l’ensemble des vecteurs ancrés en  $a$ . Ces objets nous permettent de définir la dérivée directionnelle dans  $\mathbb{R}^n$  : tout vecteur tangent géométrique  $v_a$  donne une application  $D_{v|_a} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  appelée la dérivée directionnelle :

$$D_v|_a f = D_v f(a) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(a + tv).$$

Si  $v_a = \sum v^i e_i|_a$  dans la base standard, la dérivée directionnelle s’écrit

$$D_v|_a f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a).$$

On définit l’ensemble des dérivations en  $a$ , noté  $T_a \mathbb{R}^n$ , comme l’ensemble des applications de  $C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  linéaires et satisfaisant la règle du produit. Lee montre que cet ensemble est de dimension fini et qu’il est isomorphique à  $\mathbb{R}_a^n$ . Il énonce alors le lemme suivant

LEMME Corollaire 3.3 de [58]

(1.1.1)

Pour tout  $a \in \mathbb{R}^n$ , les  $n$  dérivées

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_a, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_a$$

définies comme

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$$

forment une base de  $T_a \mathbb{R}^n$ , qui est donc de dimension  $N$ .

En d’autres termes, les dérivées directionnelles de  $f$  en  $a$  forment une base de l’espace vectoriel des dérivations en  $a$   $T_a \mathbb{R}^n$  qui correspond donc au plan tangent géométrique. Un vecteur de  $T_a \mathbb{R}^n$  s’écrit donc comme

$$v|_a = \sum v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_a.$$

Sachant représenter un vecteur du plan tangent géométrique, il est possible de définir la notion de plan tangent sur une variété noté  $T_p M$ . Nous ne détaillons pas ici la construction rigoureuse de celui-ci, qui dépasse le cadre de cette thèse. En effet, nous nous intéressons ici à ces variétés plongées dans  $\mathbb{R}^3$ , ce qui nous permet dans notre cas de formuler les vecteurs du plan tangent  $T_p M$  comme les vecteurs du plan tangent géométrique  $T_p \mathbb{R}^n$ . La construction générale implique l'étude de la différentielle de la fonction de passage en coordonnées locales  $\varphi$  : la base de  $T_p M$  est en fait définie au travers de la base dans plan tangent géométrique dans les cartes de la variété.

La différentielle de  $f$  au point  $p$  est la fonctionnelle  $df : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  définie comme

$$df(v)_p := v_p(f) = (D_v f)(p).$$

La différentielle de  $f$  est définie indépendamment de toute base du plan tangent : elle requiert uniquement le vecteur  $v$  défini en  $p$ . On voit donc que la différentielle  $df$  de  $f$  évaluée sur le vecteur  $v$  est équivalente à la dérivée directionnelle  $D_v$  de  $v$  évaluée sur la fonction  $f$ . On peut donc exprimer la différentielle  $df$  en coordonnées locales  $x$  comme

$$df\left(\sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \Big|_p = \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = (D_v f)(p).$$

Si l'on restreint  $f$  aux fonctions de coordonnées  $x^i$ , alors

$$dx^i(v) = dx^i\left(\sum_j v^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_j v^j dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = v^i,$$

ce qui indique que pour chaque  $i$ , l'action de la fonctionnelle  $dx^i$  sur  $v$  extrait la  $i$ -ème coordonnée de  $v$ . La différentielle des coordonnées est donc duale aux vecteurs tangents et sont donc exactement les éléments de l'espace cotangent, *i.e.*,

$$dx^i = \epsilon^i,$$

et toute expression comprenant ces vecteurs de bases est une forme différentielle (d'où leur nom). En résumé, en tout point  $p$  de la variété différentielle  $M$ , il existe un plan tangent  $T_p M$  qui est un espace vectoriel possédant comme base les vecteurs  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ . Le plan tangent possède également un espace dual, appelé  $T_p^* M$ , qui lui aussi possède une base de vecteurs  $dx^i$  qui correspondent exactement au fonctionnelles extrayant la  $i$ -ème composante d'un vecteur  $v$  de  $T_p M$ .

### 1.1.3 Le tenseur métrique

Une propriété importante des formes différentielles et des vecteurs définis de manière générale sur les variétés est qu'ils sont exprimés de manière indépendante de tout système de coordonnées. La différence principale entre les vecteurs et les formes est la façon dont ils réagissent à un changement de coordonnées pour préserver leur invariance. Plus précisément, les éléments du plan tangent  $T_p M$  se comportent comme des tenseurs contra-

variants (*i.e.* ils varient dans la direction opposée par changement de coordonnées), et les éléments de l'espace cotangent  $T_p^*M$  se comportent comme des tenseurs covariants (*i.e.* ils varient dans la même direction que le changement de coordonnées).

Intuitivement, les quantités contra-variantes comprennent les vecteurs de coordonnées qui représentent la position d'un objet ou bien la dérivée d'une position par rapport au temps (comme la vitesse ou bien l'accélération); et les quantités covariantes comprennent les dérivées de fonctions sur l'espace, comme le gradient ou bien encore la divergence d'un champ scalaire. De plus, à cause de l'antisymétrie du produit extérieur sur les vecteurs et sur les formes, les  $p$ -vecteurs et les  $p$ -formes sont des tenseurs antisymétriques des quantités contra-variantes et covariantes, respectivement. A noter qu'on introduit généralement les  $p$ -formes et les  $p$ -vecteurs comme les éléments des tenseurs antisymétriques (des fois appelés tenseurs alternés, voir par exemple le chapitre 12. du livre de Lee [58]).

De l'autre côté, les tenseurs symétriques nous permettent de mettre en relation les  $p$ -vecteurs et les  $p$ -formes à travers le tenseur métrique. Considérons un espace vectoriel  $V$  équipé d'un produit intérieur, c'est-à-dire une application des paires de 1-vecteurs vers les réels. Celle-ci est généralement noté  $\langle v, w \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . C'est une application symétrique, bilinéaire et non-dégénérée et positive définie. Elle s'écrit en coordonnées locales

$$\langle v, w \rangle := \sum_i \sum_j v^i w^j \langle e_i, e_j \rangle.$$

C'est donc une somme pondérée linéaire des produits intérieurs des éléments de bases. On décrit un tel opérateur via sa matrice  $\dim(M) \times \dim(M)$  (par exemple  $2 \times 2$  dans le cas d'une surface 2D) qui possède les entrées

$$(\mathbf{G})_{ij} := g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$$

tel que

$$\langle v, w \rangle = \sum_i \sum_j v^i w^j g_{ij},$$

ce qui donne sous forme matricielle

$$\langle v, w \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{G} \mathbf{w}$$

où  $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n)^T$  et  $\mathbf{w} = (w^1, \dots, w^n)^T$ . On voit donc que sous la métrique Euclidienne (lorsque  $\mathbf{G}$  est égal à la matrice identité  $\mathbf{I}$ ), le produit intérieur correspond au produit scalaire des coordonnées.

Étant donné que le produit intérieur  $\langle v, w \rangle$  est une application linéaire de  $w$  lorsque  $v$  est fixée, la fonction  $\alpha$  définie par

$$\alpha(w) := \langle v, w \rangle$$

est une fonctionnelle linéaire sur  $V$ , elle appartient donc à l'espace dual  $V^*$ . Cette construction nous permet d'exhiber la version covariante de  $v$  à l'aide du produit intérieur. Les composantes de  $\alpha$  dans la base de  $V^*$  s'écrivent alors comme

$$\alpha_j = \sum_i v^i g_{ij}.$$

De la même façon, étant donnée une forme  $\alpha$ , le vecteur contravariant associé à  $\alpha$  s'exprime dans la base de  $V$  comme

$$v^i = \sum_j \alpha_j g^{ij}. \quad (1.1.3)$$

Dans le langage des tenseurs, le passage d'une quantité contra-variante à une quantité covariante est appelée la descente d'indices, et l'inverse la montée d'indices. Dans le cas particulier des 1-formes (resp. des 1-vecteurs), l'opération contra-variant → covariant (resp. covariant → contra-variant) est une application linéaire des 1-formes vers (resp. champs de vecteurs  $\mathcal{X}(M)$  de  $M$ ) vers les champs de vecteurs  $\mathcal{X}(M)$  de  $M$  (resp. les 1-formes) : elle est noté par  $\sharp$  (resp.  $\flat$ ). Ces opérateurs sont appelés les isomorphismes musicaux.

La théorie nous montre que

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b},$$

où  $\mathbf{a} = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$  et  $\mathbf{b} = (\beta^1, \dots, \beta^n)$ . La matrice  $\mathbf{G}^{-1}$  existe toujours (car le produit scalaire est non-dégénéré). La matrice  $\mathbf{G}$  est appelé le **tenseur métrique**. Bien que nous ayons défini le tenseur métrique pour des espaces généraux, un tenseur métrique peut-être également défini pour les espaces tangents  $T_p M$ . Ce tenseur est symétrique et covariant. Il est également toujours de rang deux.

#### 1.1.4 La dérivée extérieure

La dérivée extérieure étend la notion de dérivée aux formes différentielles, de telle façon qu'elle ne dépend pas des coordonnées et ne requiert pas la spécification d'une métrique. La dérivée extérieure  $d$  est un opérateur des  $p$ -formes vers les  $p+1$ -formes,  $d : \bigwedge^p(T^*M) \rightarrow \bigwedge^{p+1}(T^*M)$ . Tout comme le produit extérieur produit des formes de haut degré à l'aide de formes de degré inférieur, la dérivée extérieure augmente le degré d'une forme. La 1-forme  $df \in \bigwedge^1$  de toute fonction  $f \in \bigwedge^0$  est la dérivée usuelle de la fonction  $f$ , à savoir :

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

De manière plus générale, la dérivée extérieure est simplement

$$d\alpha = \sum_i (d\alpha^i) \wedge dx^i.$$

La dérivée extérieure est donc un substitut pour les opérateurs standards en géométrie différentielle : appliquée à une 0-forme, l'opération ressemble au gradient d'un champs scalaire, appliquée à une 1-forme, l'opérateur agit comme le rotationnel d'un champs de vecteurs et enfin appliquée à une 2-forme, elle ressemble à la divergence. En considérant  $df$  comme étant une quantité covariante, et  $\nabla f$  (*i.e.* le gradient de  $f$ ) comme étant une quantité contra-variante (la dérivée d'un champs scalaire), nous pouvons mettre en relation ces deux quantités via le tenseur métrique :

$$df(v) = \langle \nabla f, v \rangle, \quad (1.1.4)$$

*i.e.*  $df(v)$  est la dérivée directionnelle de  $f$  le long de  $v$ . On peut donc extraire les composantes de  $\nabla f$  à l'aide du tenseur métrique et de  $df$ , pour produire un vecteur qui ‘pointe’ vers la direction de plus grande pente. On peut convertir de façon similaire la différentielle de formes de degré supérieur via le tenseur métrique (nous spécifierons ces transformations dans la prochaine section consacrée à l'opérateur de Hodge).

Géométriquement, la dérivée extérieure mesure la variation d'une  $p$ -forme simultanément dans toutes les  $p$  directions du parallélépipède de dimension  $p$ , et est donc une généralisation naturelle de la dérivée unidimensionnelle sur les graphes de fonctions.

### 1.1.5 L'opérateur de Hodge

L'opérateur de Hodge est une application linéaire des  $p$ -formes vers les  $n - p$ -formes, communément noté  $\star : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{n-p}$ . Étant donné que  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$  (*i.e.* la taille des espaces de formes), cette application est un isomorphisme entre les deux espaces. L'action de l'opérateur de Hodge sur la base orthonormale  $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$  de  $\Lambda^p$  produit la base duale :

$$\star(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}) = e^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge e^{i_n},$$

où l'ordre des indices de  $\{i_1, \dots, i_p, i_{p+1}, \dots, i_n\}$  est une permutation paire des entiers  $1, \dots, n$ . Considérons maintenant une 1-forme  $\alpha = \sum_j \alpha_j e^j$ , nous avons

$$\star\alpha = \sqrt{|G|} \sum_i \left( \sum_j \alpha_j g^{ij} \right) (\star e^i)$$

où  $|G|$  représente le déterminant du tenseur métrique sur  $\Lambda^p(T_p M)$  et la quantité  $(\sum_j \alpha_j g^{ij})$  est la version contravariante de  $\alpha$ . La  $(n - p)$ -forme  $\star\alpha$  est appelée le dual de Hodge de  $\alpha$ .

Il existe une unique forme appelée forme de volume et notée  $\text{vol}^n$  tel que

$$\text{vol}^n(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = 1.$$

Cette forme s'écrit comme

$$\text{vol}^n = \sqrt{|G|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sqrt{|G|} e^1 \wedge \dots \wedge e^n.$$

La multiplication par  $\sqrt{|\mathbf{G}|}$  nous assure que  $\star(1) = \text{vol}^n$ . Cette forme représente le volume canonique liée à notre algèbre : elle est déterminée par l'orientation de la variété et possède une norme unitaire. Elle nous permet notamment de mettre en relation l'opérateur de Hodge et le produit intérieur. Soient deux formes  $\alpha$  et  $\beta$ , le produit extérieur appliqué à  $\alpha$  et  $\star\beta$  donne une  $n$ -forme (*i.e.* un scalaire). Nous citons la relation suivante :

$$\alpha \wedge \star \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \text{ vol}^n$$

où le produit scalaire est celui défini précédemment via le tenseur métrique. Cette relation joue un rôle central dans la définition du calcul extérieur. On parle parfois de la trinité Hodge, produit intérieur et produit extérieur : si l'on définit un des deux opérateurs, nous pouvons utiliser l'égalité pour déterminer le troisième.

Dans le cas spécial de  $\mathbb{R}^3$ , nous pouvons mettre en lien le produit extérieur, l'opérateur de Hodge avec des quantités traditionnelles du calcul vectoriel. En assumant une métrique euclidienne et étant donné trois quantités contra-variantes  $u$ ,  $v$  et  $w$  :

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \star(u \wedge \star v) = \star(v \wedge \star u), \\ u \times v &= \star(u \wedge v) \text{ et,} \\ u \cdot (v \times w) &= \star(u \wedge v \wedge w). \end{aligned}$$

L'opérateur de Hodge permet aussi de mettre en relation le langage des formes avec le calcul différentiel classique. Pour une 1-forme dans  $\mathbb{R}^3$ , le rotationnel est donné par

$$\star d\alpha \equiv \nabla \times \alpha$$

et la divergence par

$$\star d\star \alpha \equiv \nabla \cdot \alpha$$

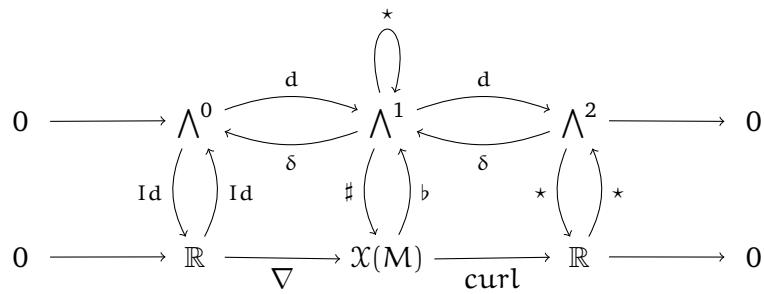
(nous utilisons ici le symbole  $\equiv$  pour montrer qu'il y a équivalence entre les deux définitions, c'est-à-dire que le tenseur métrique nous permet de mettre en relation les quantités covariantes et contravariantes).

Pour résumer, l'opérateur de Hodge  $\star$  est une application linéaire des  $p$ -formes vers les  $(n - p)$ -formes qui requiert un tenseur métrique ainsi qu'une orientation de la surface sous-jacente. Il procure un produit scalaire généralisé sur la variété, et permet de faire le lien entre les opérateurs classiques de géométrie différentielle et le calcul extérieur des formes différentielles.

Le complexe de Rham de la figure 1.3 synthétise tous les opérateurs décrits dans cette section.

## 1.2 L'opérateur de Laplace–Beltrami

L'opérateur de Laplace [30], ou bien Laplacien, est un opérateur différentiel donné par la divergence du gradient de fonctions défini dans l'espace Euclidien. Il est généralement



**Fig. 1.3** Le complexe de Rham illustre les différents opérateurs entre formes et géométrie différentielle. Les opérateurs musicaux  $\sharp$  et  $\flat$  font le lien entre le calcul extérieur et les champs vectoriel à travers la montée et la descente des indices. Ils permettent par exemple d'obtenir les composantes du gradients depuis la forme associée.

noté  $\Delta$ , ou bien encore  $\nabla^2$ . Si  $u$  est une fonction deux fois différentiable de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , l'opérateur s'écrit

$$\Delta u = \nabla^2 f := \nabla \cdot \nabla u$$

où

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

i.e.  $\nabla$  représente les dérivées partielles par rapport à la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . L'opérateur s'écrit en coordonnées cartésiennes

$$\Delta u = \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

c'est-à-dire la somme des dérivées partielles secondes de  $u$ .

Informellement, l'opérateur de Laplace  $\Delta$  d'une fonction  $u$  en un point  $p$  mesure à quelle vitesse la moyenne des valeurs de  $u$  sur des sphères centrées en  $p$  dévie de  $u(p)$  lorsque la taille de ces sphères grandit. L'opérateur de Laplace–Beltrami est d'ailleurs relié à l'énergie de Willmore des surfaces [105]. L'opérateur intervient dans de nombreuses équations différentielles décrivant des phénomènes physiques tel que les potentiels électriques ou gravitationnels, les équations de diffusions pour la chaleur ou bien pour les fluides, la propagation d'ondes et en mécanique quantique. L'opérateur de Laplace est le plus simple des opérateurs elliptiques, et intervient largement dans la théorie de Hodge (qui étudie les groupes de cohomologies des variétés différentielles) [48].

### 1.2.1 Opérateur de Laplace–Beltrami et formes différentielles

L'opérateur de Laplace sur les espaces euclidiens possède une généralisation sur les variétés différentielles. Une très bonne introduction à sa formulation, et nombres de ses propriétés sont résumées dans le livre de Rosenberg ‘The Laplacian on a Riemannian Manifold’ que nous conseillons fortement [89]. L'opérateur prend toujours la forme

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u,$$

cependant, nous considérons maintenant que  $u$  est fonction des points de la variété. L'opérateur s'écrit en coordonnées locales

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{|G|} \sum_j g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right).$$

Pour une dérivation explicite de cette formule, se référer au livre de Rosenberg [89], ou bien encore au livre de Jost [50]. Explicitons la formulation de l'opérateur dans la théorie du calcul extérieur. La dérivée extérieure, comme discuté dans la section 1.1.4, est un opérateur des  $p$ -formes vers les  $(p+1)$ -formes. L'opérateur de Hodge va nous permettre de définir une application qui agit dans le sens inverse. La codifférentielle  $\delta : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{p-1}$  est défini comme

$$\delta := (-1)^{n(p+1)+1} \star d \star.$$

Il est possible de montrer que cet opérateur est l'adjoint de la dérivée extérieure vis-à-vis du produit scalaire, c'est-à-dire qu'étant donné deux formes différentielles  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle.$$

Nous pouvons utiliser la codifférentielle pour (re)-définir l'opérateur de Laplace généralisé sur les variétés différentielles. L'opérateur de Laplace–de Rham est un isomorphisme entre  $p$ -formes et est formellement défini comme

$$\Delta^R := d\delta + \delta d = (d + \delta)^2.$$

L'opérateur de Laplace–Beltrami est le cas particulier de l'opérateur de Laplace–de Rham restreint sur les 0-formes :

$$\Delta := d\delta.$$

Dans  $\mathbb{R}^3$ , l'opérateur de Laplace–Beltrami est identique à l'opérateur de Laplace à un signe près :

$$\Delta u = -\nabla^2 u.$$

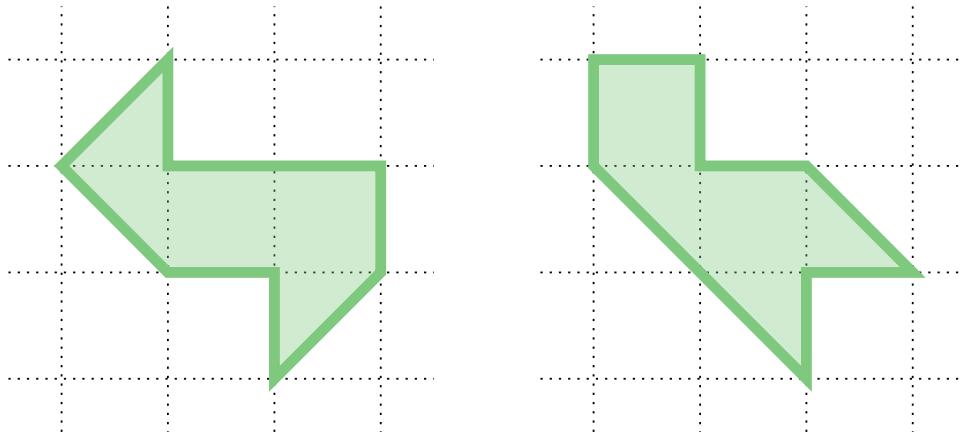
L'opérateur est auto-adjoint vis-à-vis du produit scalaire, *i.e.*  $\langle \Delta\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta\beta \rangle$ .

### 1.2.2 Comprendre les valeurs propres de l'opérateur

Calculer les valeurs analytiques du spectre de l'opérateur de Laplace–Beltrami, c'est-à-dire trouver les formules des valeurs propres  $\lambda_k$  et des vecteurs propres  $\phi_k$  définis comme

$$\Delta\phi_k = \lambda_k\phi_k$$

est encore un problème largement ouvert, qui intéresse de nombreuses théories mathématiques. Bien qu'il soit possible de calculer ces valeurs pour des objets spécifiques comme les rectangles, les disques, les ellipses ou les triangles, il n'existe peu ou pas de formules closes pour des objets plus compliqués (par exemple, nous ne connaissons que seulement les huit premières valeurs propres de l'opérateur sur un hexagone [95]). Dans le cas de



**Fig. 1.4** Deux formes qui possèdent la même décomposition spectrale en vecteurs propres et valeurs propres du Laplacien. Cet exemple a été construit par Gordon, Webb et Wolpert (voir leur article ‘You can’t hear the shape of a drum’ [37]).

la géométrie différentielle discrète, la décomposition spectrale de l’opérateur joue un rôle centrale dans de nombreuses applications. Elle est un des éléments clefs de la théorie des ‘functional maps’, qui permet de faire de la comparaison de formes dans un espace abstrait [72]. Cette décomposition permet également d’effectuer des opérations de lissage ou bien de filtrage dans le domaine spectral [61]. Nous détaillons deux problèmes liés au spectre de l’opérateur dans les paragraphes suivants.

**Le problème de Dirichlet (ou problème direct)** Ce problème peut se formuler ainsi : si je connais plus ou moins la forme de mon domaine, que puis-je en déduire pour les valeurs propres de l’opérateur de Laplace–Beltrami ? La première valeur propre non-nulle  $\lambda_1$  de l’opérateur de Laplace dans un intervalle ou bien un plan est appelé le timbre fondamental. Si l’on s’intéresse à la vibration d’une corde de guitare ou bien d’une peau de batterie, la première valeur propre correspond à la fréquence dominante de l’oscillation et est donc le timbre principal que l’on entend lorsque l’on joue un de ces instruments. Si l’on prend le point de vue de la diffusion de la chaleur, les solutions de l’équation de la chaleur (nous en reparlerons plus précisément dans la partie suivante) sont données par le théorème de décomposition de Sturm-Liouville qui met en lien la décomposition spectrale et le noyau de la chaleur :

## THÉORÈME Théorème de décomposition de Sturm-Liouville (1.2.1)

Pour  $\partial M$  compact, il existe une base orthonormale complète  $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$  de  $L^2(\partial M)$  composée des fonctions propres de l'opérateur de Laplace–Beltrami. L'ensemble des valeurs propres  $\lambda_i$  associées aux vecteurs propres satisfait

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty.$$

Pour tout  $i$  on a  $\phi_i \in C^\infty(\partial M)$  et

$$p(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(y).$$

Nous voyons donc bien que  $(\lambda_1, \phi_1)$  donne l'information dominante, car  $e^{-\lambda_1 t} \phi_1(x) \phi_1(y)$  est le mode qui décroît le plus lentement lorsque  $t$  augmente. Lord Rayleigh, en 1877, conjecture qu'étant donné un domaine  $\Gamma$  et une boule  $B$  de même aire, la première valeur propre de l'opérateur sur  $\Gamma$  devrait-être plus grande que celle calculée sur la boule  $B$  [87]. Il faudra attendre plusieurs décennies avant que cette conjecture soit montrée indépendamment par Faber [31] et Kranh [53]. Weyl, en 1911, a montré la conjecture de Lorentz qui met en relation le nombre de valeurs propres de l'opérateur et la forme de la surface [103].

**Le problème inverse : Can one hear the shape of a drum ?** Considérons maintenant la question inverse : peut-on déterminer la structure d'un objet en écoutant ses vibrations ? Cette question fut proposée par Schuster en 1882. Nous savons que dans le cas de la décomposition de Fourier, un nombre infini de nombre détermine une fonction intégrable. Il ne serait donc pas impensable qu'une séquence infinie de valeurs propres détermine la forme d'un objet. Malheureusement, Gordon, Web et Wolpert nous montrent dans les années 90 que non [37] dans leur papier ‘You can't heat the shape of a drum’ (leur contre-exemple est illustré dans la figure 1.4). Cependant, tout n'est pas perdu, Mark Kac en 1966 montre un lien entre des invariants géométriques et le noyau de la chaleur [51] dans son article ‘Can one hear the shape of a drum ?’ sur un polygone  $\Gamma$  :

$$\sum_k^{\infty} e^{-\lambda_k t} \sim \frac{1}{4\pi t} \left( \text{Aire}(\Gamma) - \sqrt{4\pi t} \text{ Périmètre}(\partial\Gamma) + \frac{2\pi t}{3} (1 - \gamma(\Gamma)) \right),$$

où  $\gamma(\Gamma)$  correspond au genre de la forme et  $\Gamma$  est un polygone. Ce théorème fut généralisé par McKean et Singer une année plus tard [63]. Nous verrons, dans le théorème (3.5.1), que la relation entre le noyau de la chaleur et les invariants géométriques avaient été mis en évidence à la fin des années 40 par Minakshisundaram et Pleijel [67, 68].

## 1.3 Conclusion

Cette section conclut notre présentation des outils de géométrie différentielles nécessaires au calcul discret. Nous avons présenté l'algèbre extérieur, qui nous permet de mesurer des volumes en dimension élevée, les variétés différentielles, qui généralisent les espaces vecto-

riels et permettent d'étendre la notion de calcul différentiel à une classe d'objet plus vaste. L'algèbre extérieur nous a permis de mettre en lien les vecteurs du plan tangent  $T_p M$  et les formes de son espace dual  $T_p^* M$ , reliant les outils classiques de calcul différentiel comme la notion de gradient ou de divergence à la théorie du calcul extérieur. Fort de ces notions, nous avons présenté l'objet central de cette thèse : l'opérateur de Laplace–Beltrami. Nous avons mis en évidence sa formulation à la fois dans l'espace des formes ainsi que sa représentation en coordonnées locales où nous avons observé le rôle du tenseur métrique. Nous avons ensuite énoncé quelques problèmes liés à sa représentation spéctrale à travers le théorème de décomposition de Sturm-Liouville (voir le théorème (1.2.1)) d'une part, et d'autre part son lien avec le noyau de la chaleur via les travaux de Kac ou bien encore Pleijel. Nous allons dans le prochain chapitre nous intéresser à quelques représentations discrètes des variétés comme les complexes simpliciaux ou bien les surfaces digitales. Nous présenterons une version discrète du calcul extérieur sur les complexes simpliciaux, mais aussi comment évaluer la mesure (*i.e.* l'aire, la longueur) d'éléments sur les surfaces digitales.



# Modèles de Surfaces Discrètes

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Complexes Simpliciaux et Complexes Cellulaires</b>	29
↪ 2.1.1	Le calcul extérieur discret sur les complexes simpliciaux	31
<b>2.2</b>	<b>Surfaces digitales</b>	33
↪ 2.2.1	Définitions	34
↪ 2.2.2	Relation entre $\partial X$ et $\partial_h X$	36
↪ 2.2.3	Estimation de normales	38
<b>2.3</b>	<b>Conclusion</b>	40

Ce chapitre a pour but d'introduire plusieurs modèles d'approximation de surfaces "lisses" en informatique graphique. Nous présenterons les complexes simpliciaux, les complexes cellulaires et les surfaces digitales (qui sont un cas particulier des complexes cellulaires). Nous omettons de nombreuses représentations des variétés telles que les nuages de points, ou bien encore les surfaces construites à base de splines et d'autres modèles plus exotiques de surfaces discrètes. Sauf mention contraire, les variétés sont de dimension deux et sont plongées dans un espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.1 Complexes Simpliciaux et Complexes Cellulaires

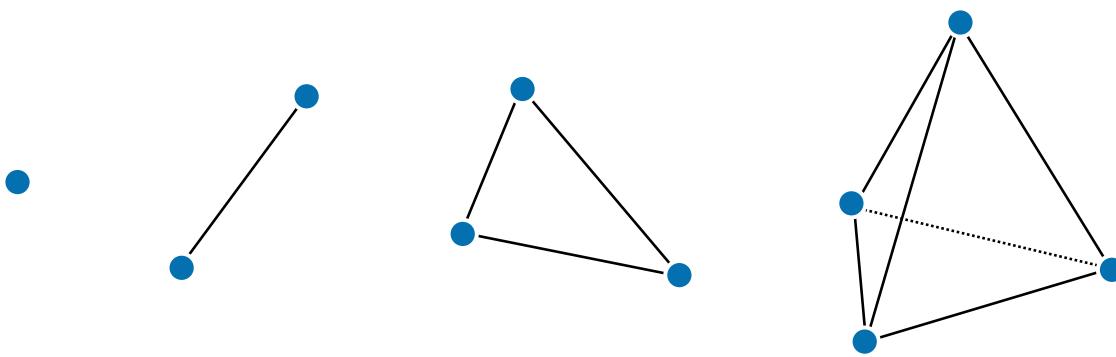
L'objet mathématique couramment utilisé pour représenter les surfaces triangulées est le complexe simplicial de dimension 2. Il possède en effet de bonnes propriétés combinatoires et topologiques. Ces surfaces sont construites à partir de 'briques' de bases appelées simplexes :

DÉFINITION p-simplexe (2.1.1)

Un p-simplexe  $\sigma^p$  est l'enveloppe convexe de  $p + 1$  points  $v_0, \dots, v_p$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Plus précisément :

$$\sigma^p = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x = \sum_{i=0}^p \mu^i v_i \text{ avec } \mu^i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^p \mu^i = 1\}.$$

Les points  $v_0, \dots, v_p$  de  $\mathbb{R}^N$  sont appelés les sommets du simplexe  $\sigma^p$  et le nombre  $p$  correspond à la dimension de celui-ci. Ainsi, un simplexe de dimension 0 est un point, un simplexe de dimension 1 est un segment, et un simplexe de dimension 2 est un triangle. Tout simplexe couvrant un sous-ensemble de  $v_0, \dots, v_p$  est appelé une face de  $\sigma^p$  (le terme de face comprend donc ici les sommets, les arêtes, les faces triangulaires et ainsi de suite en dimension supérieure). Nous dénotons par  $|\sigma^p|$  le p-volume de  $\sigma^p$  dans  $\mathbb{R}^N$  (qui



**Fig. 2.1** Les quatre premiers types de simplexes sont représentés de gauche à droite.

vaut 1 pour  $p = 0$ ). Par exemple, le  $p$ -volume d'un simplexe de dimension 2 (un triangle) correspond à son aire. La figure. 2.1 illustre les simplexes de dimension 0, 1, 2 et 3.

Ces simplexes sont ensuite collés pour former un complexe simplicial (et donc la représentation des surfaces triangulées) de la façon suivante :

DÉFINITION Complexé simplicial de dimension 2 (2.1.2)

Un complexe simplicial  $\mathcal{K}$  dans  $\mathbb{R}^N$  est une collection de 0-simplexes, 1-simplexes et de 2-simplexes de  $\mathbb{R}^N$  tel que

1. toute face de  $\mathcal{K}$  est dans  $\mathcal{K}$ .
2. L'intersection de deux simplexes de dimension  $p$  dans  $\mathcal{K}$  est soit une face des deux simplexes, soit l'ensemble vide.

Cette définition nous assure que toutes les arêtes de tous les triangles sont dans le complexe simplicial. Afin d'assurer que le complexe simplicial  $\mathcal{K}$  est une variété, nous ajoutons la propriété suivante à  $\mathcal{K}$  :

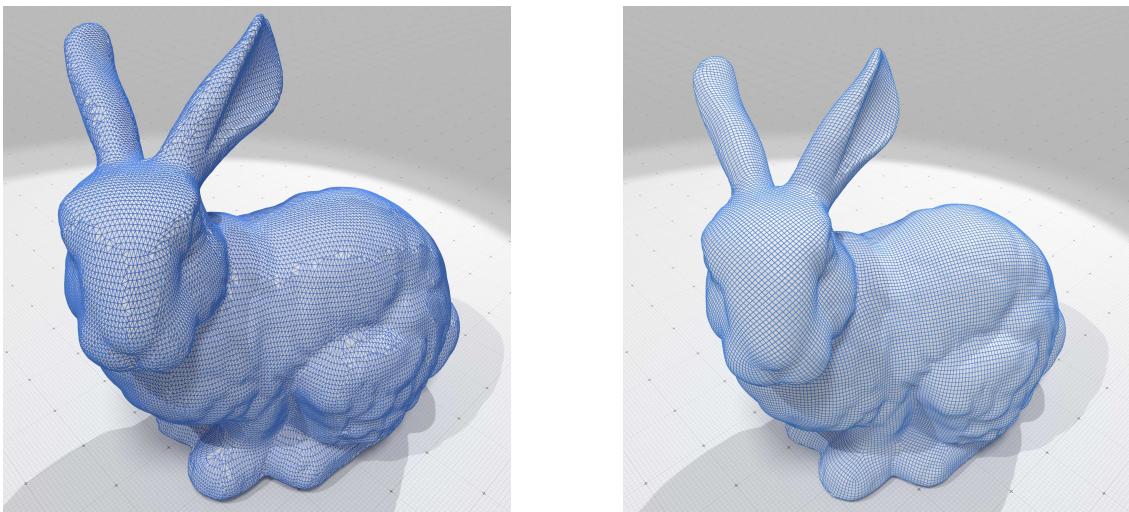
3. tout simplexe de dimension 1 dans  $\mathcal{K}$  est contenu dans exactement deux simplexes de dimension 2 de  $\mathcal{K}$ .

En d'autres termes, toute arête du complexe est contenu dans exactement deux triangles du complexe. Une illustration d'une triangulation se trouve dans la figure. 2.2. Étant donné une collection de simplexes  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{K}$ , on peut définir trois opérations sur celui-ci

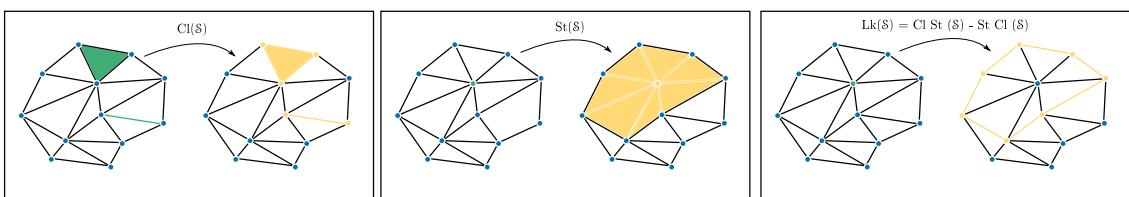
1. La clôture de  $\mathcal{S}$  (dénoté  $\text{Cl}(\mathcal{S})$ ) est l'union des faces de tous les simplexes de  $\mathcal{S}$ .
2. L'étoilé (dénoté  $\text{St}(\mathcal{S})$ ) est l'union des étoilés de chacun des simplexes de  $\mathcal{S}$ . Pour un simplexe  $s$ , l'étoilé de  $s$  est l'ensemble des simplexes possédant  $s$  comme face (à noter que l'étoilé n'est pas forcément un complexe simplicial).
3. Le link (dénoté  $\text{Lk}(\mathcal{S})$ ) qui est égal à  $\text{Cl St}(\mathcal{S}) - \text{St Cl}(\mathcal{S})$ . C'est la clôture de l'étoilé de  $\mathcal{S}$  moins l'étoilé de toutes les faces de  $\mathcal{S}$ .

Une illustration de ces différentes opérations topologiques se trouve dans la figure. 2.3.

Nous pouvons généraliser les complexes simpliciaux en remplaçant les simplexes par des cellules. Informellement, on obtient un complexe cellulaire (ou bien CW-Complexe en topologie) en agglomérant des  $p$ -boules ouvertes. C'est-à-dire que les briques de bases ne sont plus des enveloppes convexes de points mais plutôt des objets homéomorphiques à



**Fig. 2.2** A gauche une triangulation du lapin de Stanford, à droite une quadrangulation de la même surface.



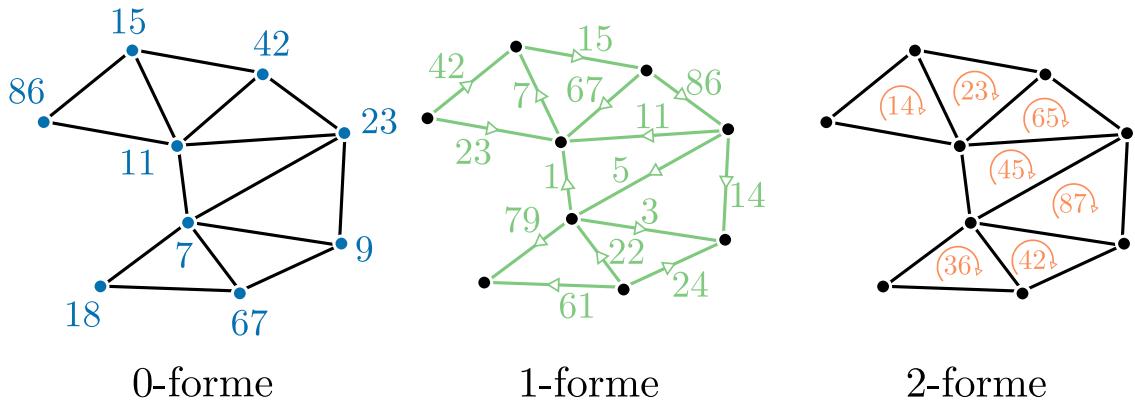
**Fig. 2.3** Est illustré à gauche la clôture (en jaune) de deux simplexes (en vert), au milieu l'étoilé (en jaune) d'un simplexe de dimension 0 et enfin à droite le link (en jaune) du même simplexe. Image reproduite depuis Wikipedia ([https://en.wikipedia.org/wiki/Simplicial\\_complex](https://en.wikipedia.org/wiki/Simplicial_complex)).

une p-boule. Dans le cas discret, ceux-ci sont représentés par des points, des arêtes et des polygones généraux définis par une boucle fermée d'arêtes. Un exemple de quadrangulation se trouve dans la figure 2.2. Cette notion nous sera utile lorsque nous parlerons de l'opérateur de Laplace–Beltrami d'Alexa et Wardetzky [1].

### 2.1.1 Le calcul extérieur discret sur les complexes simpliciaux

Nous présentons maintenant la théorie du calcul extérieur discret sur les complexes simpliciaux. Nous invitons le lecteur à se référer à la thèse d'Hirani [47] et au cours de Desbrun, Hirani, Leok et Marsden [20] pour plus de détails. La philosophie adopté pour développer cette théorie est de construire un pendant discret du calcul extérieur (présenté dans la section 1.1) qui n'est pas une approximation de la théorie continue.

Prenons donc un complexe simplicial orienté  $\mathcal{K}$  de dimension deux plongé dans  $\mathbb{R}^3$  (notons que le calcul discret développé ici est valable pour tout complexe à dimension arbitraire). La première étape est d'introduire l'espace des p-formes discrètes. Pour cela, le calcul extérieur discret emprunte à la topologie algébrique le concept de chaînes et de cochaînes (voir le livre de Munkers [71]). L'espace des chaînes  $C_p(\mathcal{K}, \mathbb{Z})$  est le groupe abélien (ou groupe commutatif) généré par une base des p-simplexes orientés. Cet espace est une somme formelle des éléments de  $\mathcal{K}$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . L'idée est donc ici d'assigner un nombre entier à chacun des éléments du complexe simplicial  $\mathcal{K}$ . On définit alors une p-forme discrète  $\alpha$  comme un homéomorphisme du groupe des chaînes vers  $\mathbb{R}$ . Cet



**Fig. 2.4** Un exemple de p-formes. Est associé à chaque p-chaîne orienté une valeur qui représente la valeur de la forme sur la chaîne considérée. L'image est inspirée de la Figure 3.1 présente dans la thèse d'Hirani [47].

ensemble est appelé l'espace des cochaînes en topologie algébrique. L'ensemble des p-formes discrètes et dénoté  $\Lambda_d^p(\mathcal{K})$  où d représente la dimension. On peut construire de la même façon l'espace dual des p-formes (pensez par exemple à la dualité Voronoi / Delaunay pour une triangulation).

La dérivée extérieure discrète correspond alors à l'opérateur de cobord de la topologie algébrique. En d'autres termes, si l'on voit notre complexe simplicial comme un graphe, l'application est représentée par la matrice d'adjacence signée :  $(d_0)_{ij} = \pm 1$  si  $x_i$  appartient au simplexe numéroté  $i$ . Le signe est déterminé quant à lui par l'orientation du simplexe  $j$ . Le calcul extérieur discret est muni d'un produit intérieur construit à partir de l'opérateur de Hodge. Etant donné deux p-formes discrètes  $\sigma_1^p$  et  $\sigma_2^p$  le produit intérieur s'écrit (sous forme matricielle)

$$\langle \sigma_1^p, \sigma_2^p \rangle = (\sigma_1^p)^T \star_p \sigma_2^p$$

où  $\star_p$  est l'opérateur de Hodge entre les p-formes discrètes. L'étoile de Hodge discrète est une matrice diagonale dont les termes sont déterminés par des rapports de mesures des simplexes primaux et duals.

La codifferentielle est définie de manière similaire comme étant l'adjoint de la dérivée extérieure par rapport au produit scalaire. Par exemple, la codifférentielle sur les 1-formes d'une surface de dimension 2 est donnée par

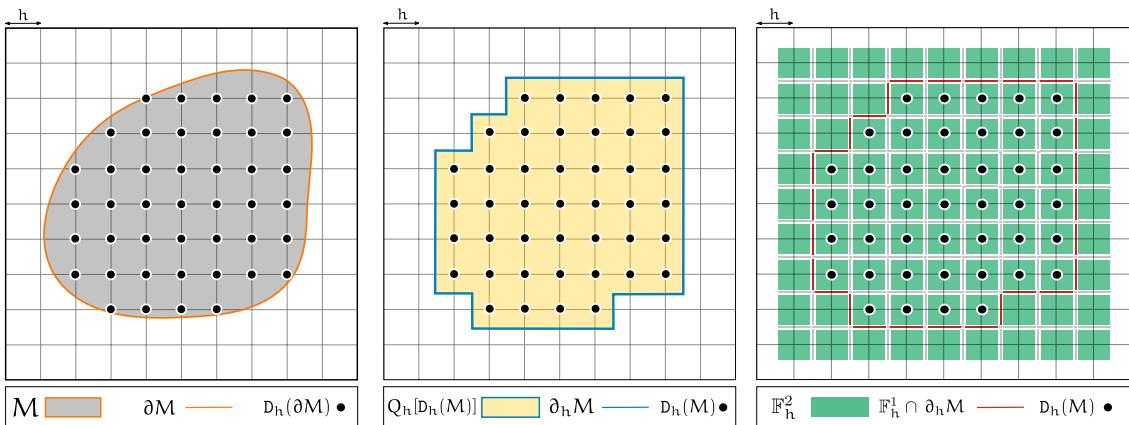
$$\delta_1 = -\star_0^{-1} d_1^T \star_1$$

et  $\delta_1 : \Lambda_1^p(\mathcal{K}) \rightarrow \Lambda_0^0(\mathcal{K})$ . On peut alors définir l'opérateur de Laplace–Beltrami discret sur les 0-formes :

$$\mathcal{L}\sigma^0 = \delta_1 d_0 \sigma^0 = -\star_0^{-1} d_1^T \star_1 d_0 \sigma^0.$$

Un calcul direct (voir la section 6.4 de la thèse d'Hirani [47]) nous donne

$$\langle \mathcal{L}u, \sigma^0 \rangle = \frac{1}{|\star\sigma^0|} \sum_{\sigma^1=[\sigma^0, \sigma_k^0]} \frac{|\star\sigma^1|}{|\sigma^1|} (u(\sigma^0) - u(\sigma_k^0))$$



**Fig. 2.5** Illustration des notations utilisées pour les surfaces digitales. Sont représentés un ensemble compact  $X$  en gris et son bord  $\partial X$  en orange, le discréétisé de Gauss  $D_h(\text{gaussDigi})(X)$ , son plongement  $h$ -cubique  $Q_h[D_h(\text{gaussDigi})(X)]$  en jaune et le  $h$ -bord  $\partial_h X$  en bleu. La grille cubique  $F_h^2$  est affichée en vert sur la droite, ainsi que le "bord cubique"  $F_h^1 \cap \partial_h M$  en rouge. Le bord topologique du plongement  $h$ -cubique est utilisé pour transférer des intégrales depuis  $\partial X$  vers leur contrepartie discrète. La grille cubique sert ensuite à découper l'intégrale sur des éléments de dimension  $d$ , approximant ainsi la somme continue par une somme discrète.

avec  $\sigma^1$  l'ensemble des 1-formes possédant  $\sigma^0$  comme extrémité (noté  $[\sigma^0, \sigma_k^0]$  ici) et  $|\cdot|$  la mesure associée à une forme discrète (par exemple la longueur de l'arête pour  $\sigma^1$  sur les triangulations). L'intérêt du calcul extérieur discret est dans la formulation générique de ces opérateurs, et son implémentation plutôt facile (toutes les opérations dans le calcul sont en fait des multiplications de matrices).

## 2.2 Surfaces digitales

L'objectif de cette section est de présenter et définir un cadre théorique pour étudier les *surfaces digitales*. Le lecteur peut se référer à [54, 52, 42] pour une étude approfondie des structures. Une surface digitale est, informellement, le bord topologique d'un ensemble de voxels centrés sur la grille cubique  $\mathbb{Z}^3$ . Ces surfaces proviennent en général du bord de la partition d'une image volumétrique. Ces objets apparaissent souvent dans la modélisation des matériaux, ou bien encore dans l'imagerie médicale étant donné que les outils d'acquisition volumétrique de tomographie produisent ce type d'objet (voir par exemple [43, 34]). Nous présentons ici un cadre d'étude théorique de ces surfaces : nous décrivons une méthode de construction de celle-ci, appelée processus de discréétisation de Gauss, à partir de surfaces continues caractérisées par exemple par une fonction implicite, ou bien encore par la description analytique de leur forme. Le but est ici de donner un cadre unique où nous pouvons comparer différentes discréétisations de quantités géométriques comme l'estimation des normales ou bien encore de la courbure. Nous présentons quelques propriétés topologiques des surfaces digitales, ainsi qu'un estimateur de normales convergent.

## 2.2.1 Définitions

On considère un espace compact  $X$  de dimension  $N$  avec un bord rectifiable plongé dans  $\mathbb{R}^N$ . Le lien entre  $X$  et son approximation digitale est fait à travers le processus de discréétisation de Gauss:

DÉFINITION Discréétisation de Gauss (2.2.1)

Soit  $h > 0$  le pas de discréétisation. La discréétisation de Gauss d'une forme Euclidienne  $X \subset \mathbb{R}^N$  est définie comme  $D_h(X) := X \cap (h\mathbb{Z})^N$  où  $d$  est la dimension.

Ce processus de discréétisation considère les points discrets de la grille infinie de taille  $h$  et conserve ceux qui intersectent la forme  $X$  (voir figure. 2.5). On note un ensemble digital par  $D_h(\text{gaussDigi})(X)$ . C'est, de par sa définition, un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^N$  d'échelle  $h$ . Si l'ensemble des points discrets ne provient pas du processus de discréétisation de Gauss, nous noterons celui-ci par  $Z$  (de ce point de vue, la discréétisation de Gauss correspond à un sous-ensemble des ensembles digitaux  $Z$ ). Il est clair que de nombreuses propriétés continues ne sont pas conservées par la discréétisation. Nous pouvons néanmoins espérer que lorsque le pas de la grille se raffine, nous pouvons récupérer la plupart de ces propriétés. Les propriétés topologiques sont par exemple préservés pour un pas suffisamment fin de la grille (voir [52]) pour certaines classes de surfaces, au moins en dimension deux. La préservation des propriétés géométriques se traduit par la précision de leur estimation. Étant donné un estimateur géométrique discret, il devrait tendre vers sa contrepartie continue lorsque le pas de la grille se raffine. Nous appelons la propriété d'un tel estimateur, dans le langage de la géométrie discrète, la **convergence multigrille**. Est associé à cette propriété une vitesse de convergence qui traduit l'erreur d'estimation dépendant du pas de discréétisation  $h$ .

Nous définissons maintenant le bord d'un ensemble digital  $Z$  : pour tout point  $z \in (h\mathbb{Z})^N$  (appelés points digitaux), le cube fermé de dimension  $N$  aligné sur les axes centré en  $z$  est dénommé par  $Q_z^h$  et appelé un  $h$ -cube (la longueur de ses arêtes est  $h$ ). On définit alors le plongement  $h$ -cubique d'un ensemble digital  $Z$  comme  $Q_h[Z] := \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} Q_z^h$ .

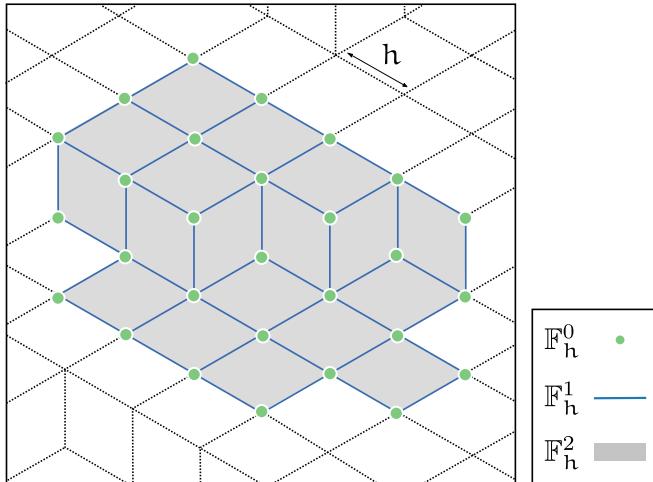
DÉFINITION  $h$ -bord (2.2.2)

Le  $h$ -bord de  $X$ , dénommé  $\partial_h X$ , est le bord topologique du plongement  $h$ -cubique de la discréétisation de Gauss de  $X$  :

$$\partial_h X := \partial \left( \bigcup_{z \in D_h(X)} Q_z^h \right).$$

Cet ensemble est représenté en bleu dans figure. 2.5.

Enfin, nous définissons la grille cubique associée à un ensemble digital  $Z$ . Nous construisons cet ensemble par produit cartésien de segments de dimension un [54]. Plus



**Fig. 2.6** Un exemple de surface digitale 2D plongée dans  $\mathbb{R}^3$ . Une partie de  $\mathbb{F}_h^2$  est affichée en gris,  $\mathbb{F}_h^1$  en bleu et  $\mathbb{F}_h^0$  en vert. Le pas de la grille est ici marqué  $h$  : les arêtes ont donc une longueur de  $h$  et les carrés une aire en  $h^2$ .

précisément, on assigne des coordonnées dans  $(\frac{h}{2}\mathbb{Z})^N$  à chacune des cellules de l'espace. Pour chaque  $t \in \frac{h}{2}\mathbb{Z}$ , on associe l'ensemble  $I_h(t)$  tel que

$$I_h(t) := \begin{cases} [t - \frac{h}{2}; t + \frac{h}{2}] & \text{si } t \in h\mathbb{Z} \\ \{t\} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Maintenant, si  $z \in (\frac{h}{2}\mathbb{Z})^N$  alors  $I_h(z) := I_h(z_1) \times \dots \times I_h(z_N)$  où  $z_i$  est la  $i$ ème coordonnées de  $z$ .

---

#### DÉFINITION Grille Cubique Primale (2.2.3)

L'ensemble  $\mathbb{F} := \{I_h(z)\}_{z \in (\frac{h}{2}\mathbb{Z})^N}$  pave l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^N$  avec les hypercubes et leur faces. On l'appelle la **grille cubique primale** de taille  $h$ . Les éléments de  $\mathbb{F}$  sont appelés **cellules**. L'ensemble des éléments de dimension  $d$  est dénommé  $\mathbb{F}_h^d$  (avec  $0 \leq d \leq N$ ).

---

Comme mentionné dans la définition, la grille cubique pave l'espace entier : par exemple  $\mathbb{F}_h^2$  est l'ensemble des carrés centrés sur les points digitaux de la grille (en vert dans figure. 2.5). Ainsi, lorsque l'on veut sélectionner tous les éléments de la frontière (par exemple une courbe digitale en rouge sur la droite de figure. 2.5), nous prenons l'intersection entre  $\mathbb{F}_h^1$  et le  $h$ -bord  $\partial_h X$  (ou bien  $\partial Q_h[Z]$  lorsque l'on a un ensemble arbitraire de points digitaux). Un exemple de surface digitale 2D plongée dans  $\mathbb{R}^3$  est illustré dans figure. 2.6.

Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés topologiques des surfaces digitales. Nous verrons qu'il est possible de mettre en lien une surface digitale obtenue via le processus de discréttisation de Gauss avec la variété sous-jacente. Les récents travaux que nous présentons dans la prochaine section fournissent un socle solide pour le calcul sur les surfaces digitales : outre le théorème d'intégration fourni, les auteurs mettent en évidence de nombreuses propriétés topologiques des surfaces digitales, via la fonction de projection, dont la plus importante semble être la convergence Hausdorff de celles-ci vers la variété. L'étude de la fonction de projection nous donne également un outil pour ramener des quantités définies sur la surface discrète vers la variété, ce qui, dans notre cas, sera utile pour la discréttisation de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur les surfaces digitales.

## 2.2.2 Relation entre $\partial X$ et $\partial_h X$

La conservation des propriétés topologiques a été largement étudiée, surtout dans le cas des images 2D, à l'aide d'outils morphologiques. On peut par exemple citer les travaux de Pavlidis [73] et Serra [93] qui établissent le premier théorème d'homéomorphisme pour des courbes suffisamment différentiables digitalisées sur une grille carré ou bien hexagonale en utilisant le processus de discréttisation de Gauss. Un des éléments clefs qu'ils découvrirent indépendamment dans leurs travaux, est la notion de **R-regularité**, plus tard appelée **parR-regularité**. Nous résumons ici les résultats et propriétés de [54]. Les preuves associées peuvent être trouvées dans [54, 55]. Les inférences topologiques et géométriques du bord discret  $\partial_h X$  peuvent être étudiées en utilisant une approche fonctionnelle de la fonction distance à un ensemble compact  $A$  et l'application de projection associée. Si  $A \subset \mathbb{R}^N$ , la **fonction de distance**  $\delta_A$  est la fonction de  $\mathbb{R}^N$  définie comme

$$\delta_A(x) := \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme Euclidienne classique.

Le **R-offset** de  $A$ , dénoté  $A^R$  est l'ensemble des points dont la distance à  $A$  sont inférieurs à  $R$ . L'**axe médian**  $\text{Med}(A) \subset \mathbb{R}^N$  de  $A$  est l'ensemble des points qui ont au moins deux points proches sur  $A$ . Le **reach** de  $A$ , noté  $\text{reach}(A)$ , est

$$\inf\{\delta_A(x) : x \in \text{Med}(A)\}.$$

---

DÉFINITION Application de projection (2.2.4)

L'application de projection sur un ensemble compact  $A$  est l'application

$$\xi : \mathbb{R}^N \setminus \text{Med}(A) \rightarrow A$$

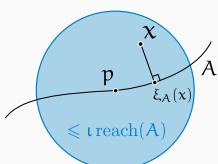
qui associe à tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^N \setminus \text{Med}(A)$  son unique point le plus proche sur  $A$ .

---

Cette application est continue sur  $\mathbb{R}^d \setminus \text{Med}(A)$ , et plus précisément

---

THÉORÈME Proposition 1 de [54] et théorème 4.8 de [33] (2.2.1)



Soit  $A$  un compact avec  $\text{reach}$  positif. Alors pour tout  $p \in A$  et pour tout  $t \in [0, 1[$ , la projection  $\xi_A$  est  $\frac{1}{1-t}$ -Lipschitz dans une boule centrée en  $p$  de rayon  $t \text{reach}(A)$ .

---

Dans le cas particulier où  $A = \partial X$  est un domaine compact de  $\mathbb{R}^N$ , on a l'équivalence suivante :

### THÉORÈME [33]

(2.2.2)

Soit  $A$  un domaine compact de  $\mathbb{R}^N$ . Le reach de  $\partial A$  est strictement positif si et seulement si  $\partial X$  est une hyper surface de classe  $C^{1,1}$ , c'est-à-dire qu'elle est de classe  $C^1$  et que la fonction qui assigne la normal à  $\partial X$  à tout point  $x$  de  $\partial X$  est Lipschitz.

Notons que si  $X$  est une variété à reach positif, alors elle est de classe  $C^2$  presque partout. C'est une conséquence du théorème de Rademacher (3.1.6 dans [32]). On dénote par  $\xi := \xi_{\partial X}$  l'application de projection sur  $\partial X$ .

Le théorème (2.2.3) assure la stabilité entre  $\partial X$  et  $\partial_h X$  : la distance entre les deux ensembles est bornée par le pas de discréétisation  $h$ . En d'autres termes, étant donné un point  $y \in \partial_h X$ , il existe toujours un point  $x$  sur  $\partial X$  dans une boule de rayon  $\frac{\sqrt{N}}{2}h$  centrée en  $y$ .

### THÉORÈME Théorème 1 de [54]

(2.2.3)

Soit  $X$  un domaine compact de  $\mathbb{R}^N$  tel que le reach de  $\partial X$  est supérieur à  $R$ . Alors, pour tout pas de discréétisation  $0 < h < 2R/\sqrt{N}$ , la distance de Hausdorff entre  $\partial X$  et  $\partial_h X$  est inférieure à  $\sqrt{N}h/2$ . Plus précisément :

$$\forall x \in \partial X, \exists y \in \partial_h X \left\{ \begin{array}{l} \|x - y\| \leq \frac{\sqrt{N}}{2}h \\ \text{and } y \in n(x, \frac{\sqrt{N}}{2}h) \end{array} \right. , \forall y \in \partial_h X, \|y - \xi(y)\| \leq \frac{\sqrt{N}}{2}h.$$

où  $n(x, a)$  est le segment de longueur  $2a$  centré sur  $x$  et aligné avec le vecteur normal à  $\partial X$  en  $x$ .

L'étude de  $\xi$  montre que l'application n'est pas toujours bijective : plus précisément, elle est surjective partout, mais non-injective sur un sous ensemble de  $\partial_h X$  :

$$\text{Mult}(\partial X) := \{x \in \partial X : \exists y_1, y_2 \in \partial_h X, y_1 \neq y_2, \xi(y_1) = \xi(y_2) = x\}.$$

Cet ensemble est appelé la **multiplicité** de  $\partial X$ . Nous savons cependant caractériser la taille de cet ensemble :

### THÉORÈME Théorème 3 de [54]

(2.2.4)

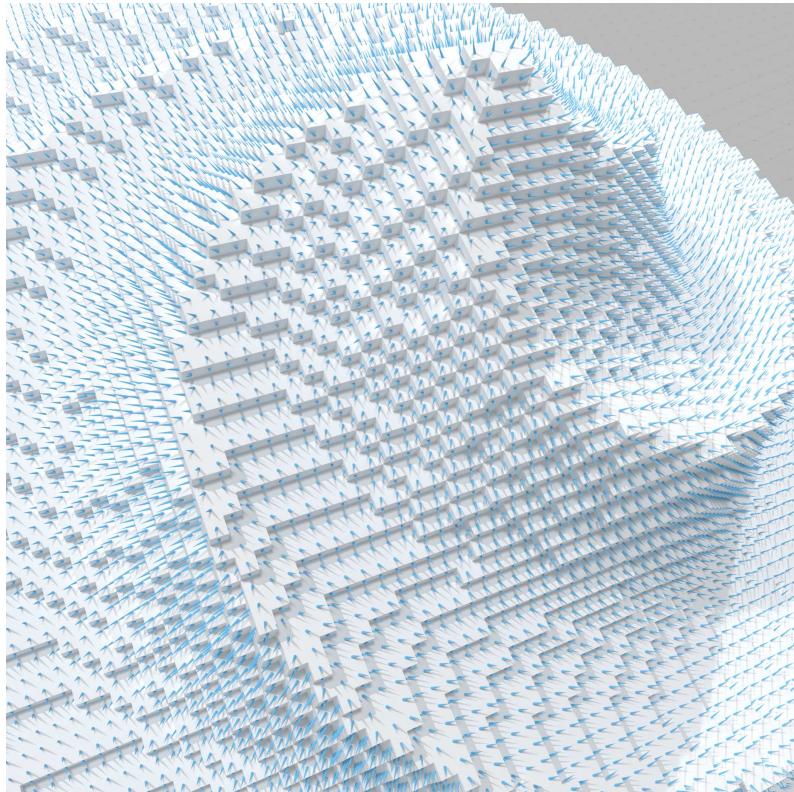
Si  $h \leq R/\sqrt{N}$  alors

$$\text{Aire}(\text{Mult}(\partial X)) \leq K_1(h) \text{Aire}(\partial X) h,$$

$$\text{avec } K_1(h) = \frac{4\sqrt{3}N^2}{R} + O(h) \leq \frac{2\sqrt{3}d^2 4^{N-1}}{R}.$$

Ainsi, la mesure de  $\text{Mult}$  tend vers zéro lorsque le pas de discréétisation de la grille tend vers zéro. Le théorème (2.2.4) joue un rôle centrale dans la preuve de convergence des intégrales discrètes : il permet de montrer que la discréétisation de la somme continue est négligeable sur les parties non-bijectives de la variété.

Nous avons donc maintenant accès à un outil mathématique qui nous permet de comparer la surface digitale  $\partial_h X$  et son pendant continu  $\partial X$ . La fonction de projection  $\xi$  jouera un rôle crucial dans la preuve de convergence de la discréétisation de l'opérateur de



**Fig. 2.7** Estimation des normales sur l’octaflower de dimension  $256 \times 256 \times 256$  avec  $R = 4$  et  $h = 1$  ici.

Laplace–Beltrami présenté dans le chapitre 4. Nous l’utiliserons pour étendre les fonctions définies sur la surface digitale à l’espace ambient  $\mathbb{R}^d$ , ce se révèlera utile pour étudier la convergence via le processus d’intégration digitale décrit dans ce même chapitre. Un des éléments clef de cette discréttisation est l’estimation de normales digitales convergente, ce qui nous allons présenter dans la prochaine section.

### 2.2.3 Estimation de normales

L'estimation de normales convergentes est un point crucial pour le calcul discret. Là où il est généralement supposé que, sous certaines contraintes d'échantillonage, les normales des faces convergent sur une triangulation, ce n'est jamais vrai dans le cas des surfaces digitales. En effet, il existe un nombre fini de normales élémentaires aux faces sur les surfaces digitales (au nombre de six : une pour chaque direction le tout multiplié par deux pour le signe) et ce quel que soit le pas de discréttisation  $h$ . De récents progrès nous fournissent néanmoins des méthodes pour estimer les normales sur ces surfaces. Nous ne détaillerons pas ici les algorithmes sur les courbes discréttisées, mais nous invitons le lecteur à aller voir le chapitre de Coeurjolly, Lachaud et Roussillon qui énumère les nombreuses approches envisageables [16].

Nous présentons dans cette section un estimateur s'appuyant sur des intégraux invariants développé sur les surfaces digitales par Coeurjolly *et al.* [15, 17]. Les invariants intégraux sont utilisés en géométrie différentielle discrète pour estimer des quantités différentielles (voir les articles de Pottmann *et al.* [81, 82] ou bien encore le livre de Morvan [70] pour une introduction complète). L'idée est de calculer l'intégrale en tout point  $x$  de

l'intersection entre la forme avec un noyau. De nombreux noyaux peuvent-être considérés, mais nous choisissons ici l'intégrale volumique définie comme

$$\mathcal{V}_R(x) := \int_{B_R(x)} \chi(p) dp,$$

où  $R \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\chi$  est la fonction caractéristique de  $X$  et  $B_R(x)$  est la boule de taille  $R$  centrée en  $x$ . Il est alors possible de montrer que cette quantité est reliée à la courbure moyenne de la surface (nous définissons la courbure moyenne dans la section 3.3.2). Nous avons le lemme suivant

---

LEMME [81, 82] (2.2.1)

Étant donné un compact  $X$  plongée dans  $\mathbb{R}^3$  et  $x \in \partial X$ , nous avons

$$\mathcal{V}_R(x) = \frac{2\pi}{3} R^3 - \frac{\pi H(x)}{4} R^4 + O(R^5)$$

où  $H$  correspond à la courbure moyenne en  $x$ .

---

Si l'on sait calculer  $\mathcal{V}_R$ , nous pouvons donc estimer la courbure moyenne via

$$\tilde{H}(x) := \frac{8}{3R} - \frac{4\mathcal{V}_R(x)}{\pi R^4}.$$

De façon similaire, les directions principales de courbure sont reliées à la quantité  $\mathcal{V}_R$ . Considérons la matrice de covariance d'un sous-ensemble  $Y \in \mathbb{R}^d$  comme

$$J(Y) := \int_Y (p - \dot{Y})(p - \dot{Y})^T dp = \int_Y pp^T dp - \text{Vol}(Y)\dot{Y}\dot{Y}^T,$$

où  $\dot{Y}$  est le *centroïde* de  $Y$  et  $\text{Vol}(Y)$  son volume. Pour des entiers positifs  $r, s, t$ , nous rappelons la définition des  $(r, s, t)$ -moments  $m_{r,s,t}(Y)$  de  $Y$  :

$$m_{r,s,t} := \iiint_Y x^r y^s z^t dx dy dz.$$

Le volume de  $Y$  correspond au  $(0, 0, 0)$ -moment  $m_{0,0,0}(Y)$  dans cette formulation. Par soucis de simplicité, notons par  $A$  l'ensemble  $B_R(x) \cap M$ . La matrice de covariance de  $A$  est alors

$$J(A) = \begin{bmatrix} m_{2,0,0}(A) & m_{1,1,0}(A) & m_{1,0,1}(A) \\ m_{1,1,0}(A) & m_{0,2,0}(A) & m_{0,1,1}(A) \\ m_{1,0,1}(A) & m_{0,1,1}(A) & m_{0,0,2}(A) \end{bmatrix} - \frac{1}{m_{0,0,0}(A)} \begin{bmatrix} m_{1,0,0}(A) \\ m_{0,1,0}(A) \\ m_{0,0,1}(A) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} m_{1,0,0}(A) \\ m_{0,1,0}(A) \\ m_{0,0,1}(A) \end{bmatrix}^T.$$

Il a été montré dans [81] que les valeurs propres et les vecteurs propres de  $J(A)$  nous donnent les courbures principales et les directions principales de courbure :

Étant donné une variété  $M$ , les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  de  $J(A)$  possèdent le développement de Taylor suivant

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{15}R^5 - \frac{\pi}{48}(3\kappa^1(x) + \kappa^2(x))R^6 + O(R^7),$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{15}R^5 - \frac{\pi}{48}(\kappa^1(x) + 3\kappa^2(x))R^6 + O(R^7),$$

$$\lambda_3 = \frac{19\pi}{480}R^5 - \frac{9\pi}{512}(\kappa^1(x) + \kappa^2(x))R^6 + O(R^7),$$

où  $\kappa^1(x)$  et  $\kappa^2(x)$  sont les courbures principales de  $\partial M$  en  $x$ .

On peut donc récupérer les courbures principales, ainsi que leur direction. De la même façon, il est possible d'estimer la normale.

Dans le cas des surfaces digitales, le calcul de  $\mathcal{V}_R$  est trivial : il suffit juste de compter les points discrets qui sont à l'intérieur de la surface dans une boule euclidienne de rayon  $R$ . En terme d'implémentation, l'approche triviale nous donne une complexité en  $O(\frac{n}{(hR)^3})$  (une boule de rayon  $R$  possède en moyenne  $1/R$  cubes de taille  $h$ ) si l'on suppose que l'on est capable de dire en temps constant si un point est dans  $M$ . Il est également possible de paralléliser l'algorithme sur GPU (voir [74]). Le seul paramètre de la méthode est la taille de la boule  $R$  pour le calcul de  $\mathcal{V}_R$ . Il a été observé en pratique qu'une taille de  $R = kh^{\frac{1}{3}}$  où  $k$  est un réel positif donne les meilleurs résultats pour l'estimateur sur les surfaces digitales. Le choix de  $k$  caractérise la taille de la boule lorsque  $h = 1$ , c'est-à-dire la taille de la boule dans l'espace euclidien. Un exemple d'estimation de normales est illustré dans la figure. 2.7. Nous énonçons le théorème de convergence de l'estimateur de courbure moyenne via les intégraux invariants.

THÉORÈME Convergence uniforme des directions principales de courbure [17] (2.2.5)

Soit  $X$  un compact de  $\mathbb{R}^3$ . Il existe des constantes positives  $h_X$ ,  $k$  et  $K$  tel que pour tout  $h \leq h_X$ , avec  $R = kh^{\frac{1}{3}}$  (la taille du noyau) nous avons

$$\forall x \in \partial X, \forall \tilde{x} \in \partial_h X, \|\tilde{x} - x\|_\infty \leq h \implies |\tilde{\kappa}^i(\tilde{x}) - \kappa^i(x)| \leq Kh^{\frac{1}{3}}.$$

Nous avons vu que pour tout point de  $\partial X$ , il existe toujours au moins un point sur  $\partial_h X$  (que l'on obtient via la fonction de projection  $\xi$ ) dans le cas de la discréttisation de Gauss ce qui implique que nous avons toujours convergence de l'estimateur si nous utilisons ce procédé de discréttisation. Les auteurs exposent de façon similaire les théorèmes de convergence de la courbure moyenne, de la courbure Gaussienne et des normales estimées.

## 2.3 Conclusion

Ce traitement de la convergence joue un rôle centrale dans la discréttisation d'estimateurs différentiels sur les surfaces digitales. Dans le cas de quantités géométriques scalaires (comme la courbure, l'aire, les normales), il est suffisant de considérer la valeur absolue

entre la quantité estimée et la vraie quantité. Les choses se compliquent dans le cas de l'opérateur de Laplace–Beltrami. En effet, nous avons vu que celui-ci est un opérateur entre espace de fonctions. La première question naturelle à se poser est le choix de l'espace de fonction dans lequel nous voulons étudier la convergence. Ce choix va déterminer la qualité des théorèmes de convergence fournis. Une fois l'espace de fonctions choisi, il reste encore à déterminer quel type de convergence étudier dans ces espaces. Nous pouvons par exemple regarder la convergence des valeurs des fonctions, ou bien encore la convergence des opérateurs entre les espaces de fonctions. Nous allons dans le prochain chapitre, présenter un cadre théorique qui résume et fixe la notion de convergence que nous allons traiter dans cette thèse. Nous allons pour cela tout d'abord décrire de façon abstraite les types de convergence que l'on peut étudier entre espace de fonctions, pour ensuite spécifier sur quel espace nous travaillerons.



# Interlude : Convergence d'Opérateurs

Nous verrons dans le prochain chapitre qu'une discréétisation de l'opérateur de Laplace–Beltrami doit vérifier plusieurs propriétés, inférées depuis les propriétés continues de l'opérateur. Nous nous sommes concentrés dans cette thèse sur la notion de convergence d'opérateurs. Pour un traitement général des notions de convergences, nous invitons le lecteur à consulter l'ouvrage de John Hunter et Bruno Nachtergael [49]. Nous introduisons tout d'abord un outil essentiel dans l'étude de la convergence entre espace de fonctions : les espaces de Banach. Nous présentons donc de façon général la théorie de la convergence d'opérateurs, et nous spécifions ensuite deux espaces de fonctions qui nous seront utiles dans cette thèse à savoir l'espace des fonctions deux fois différentiables, qui nous permettent de traiter la convergence locale des opérateurs, et les espaces de Sobolev qui traitent de la convergence des fonctions en mesure autrement appelé convergence par intégration. Dans le cas de l'opérateur de Laplace–Beltrami, le premier espace correspond à la version forte de l'opérateur, c'est-à-dire l'opérateur évalué sur des points, là où le second espace correspond à la version faible de l'opérateur, défini par intégration.

**Espaces de Banach et convergences d'opérateurs** Nous commençons par définir les espaces de Banach, qui sont au coeur de l'analyse fonctionnelle. Un espace vectoriel muni d'une norme induit un espace dont la métrique  $d$  est dérivée de la norme, *i.e.*  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

DÉFINITION Espaces de Banach (2.3.1)

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé qui est complet vis-à-vis de la métrique dérivée de sa norme.

On peut alors, étant donné deux espaces de Banach  $X$  et  $Y$ , définir l'espace des opérateurs linéaire entre  $X$  et  $Y$  noté  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Une fonction  $\mathfrak{T} : X \rightarrow Y$  est linéaire si

$$\mathfrak{T}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathfrak{T}(x) + \mu \mathfrak{T}(y)$$

pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $x, y \in X$ . Un sous-ensemble des applications linéaires intéressant est l'espace des opérateurs bornés  $\mathcal{B}(X, Y)$ . Un opérateur linéaire est dit borné si il existe  $M \geq 0$  tel que

$$\|\mathfrak{T}x\| \leq M\|x\|$$

pour tout  $x \in X$ . On peut alors définir la **norme d'opérateur** (ou bien norme uniforme) comme

$$\|\mathfrak{T}\|_{\text{op}} = \inf_{M \geq 0} \left\{ \|\mathfrak{T}x\| \leq M\|x\|, \text{ pour tout } x \in X \right\} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\mathfrak{T}x\|}{\|x\|}.$$

En d'autres termes, la norme d'opérateur mesure l'erreur de déviation de l'application de l'opérateur à  $x$  par rapport à  $x$ . Considérons maintenant que nous avons une suite d'opérateurs  $(\mathfrak{T}_\varepsilon) \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Cette suite **converge uniformément** vers un opérateur  $\mathfrak{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$  si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathfrak{T}_\varepsilon - \mathfrak{T}\|_{\text{op}} = 0.$$

On pourrait imaginer, par exemple, que  $\varepsilon$  représente un certain pas de discréétisation, ou une certaine précision du maillage discret utilisé. Une autre forme de convergence, appelé **convergence forte** existe. Un suite d'opérateurs  $(\mathfrak{T}_\varepsilon)$  converge fortement vers  $\mathfrak{T}$  si

$$\forall x \in X, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathfrak{T}_\varepsilon x = \mathfrak{T}x$$

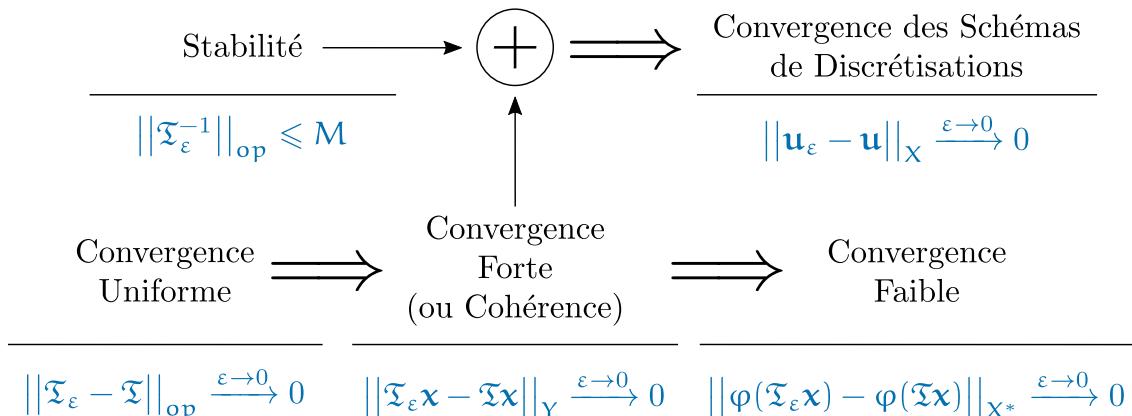
pour tout  $x \in X$ . La convergence forte d'une application linéaire correspond donc à la convergence point-à-point des valeurs par rapport à la norme induite sur  $Y$ . Remarquons que la distinction entre convergence uniforme et convergence forte n'est valable que pour les opérateurs entre espaces de Banach, et est confondu lorsque l'on considère simplement les vecteurs de ces espaces. Il est possible de montrer que la convergence uniforme implique la convergence forte (*i.e.* la convergence uniforme est plus forte que la convergence forte).

Il existe un troisième type de convergence, appelé **convergence faible**. Nous avons besoin, pour expliciter ce type de convergence, de reparler des espaces duals (que nous avons déjà introduits dans la section 1.1.1 dans le cadre des formes différentielles). L'espace dual à un espace vectoriel comprend toutes les fonctionnelles réelles (*i.e.* les fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ ), qui sont en général appelées formes linéaires. Nous avons vu que l'espace dual  $X^*$  d'un espace vectoriel  $X$  est également un espace vectoriel, et que l'on pouvait construire sa base à l'aide de la base canonique de  $X$ , en utilisant des fonctions qui "extraient" les coordonnées (voir l'Equation (1.1.2)). Un suite d'opérateurs  $(\mathfrak{T})_\varepsilon$  converge faiblement vers  $\mathfrak{T}$  si

$$\forall x \in X, \forall \varphi, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\mathfrak{T}_\varepsilon x) = \varphi(\mathfrak{T}x),$$

pour toute fonctionnelle linéaire bornée de  $X^*$ . Si nous reprenons l'image d'une fonctionnelle  $\varphi(x)$  qui extrait les coordonnées de  $x$ , alors la convergence faible peut-être vue comme la convergence en coordonnées.

Supposons maintenant que nous souhaitions résoudre l'équation  $\mathfrak{T}u = f$  approximée par  $\mathfrak{T}_\varepsilon u_\varepsilon = f$ . Cette formulation est appelée en analyse numérique un schéma de discréétisation. Nous dirons que le schéma de discréétisation est **convergent** si  $\|u_\varepsilon - u\|_X \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ , qu'il est **cohérent** si  $\|\mathfrak{T}_\varepsilon u - \mathfrak{T}u\|_Y \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  et qu'il est **stable** si il existe une constante  $M$ , indépendante de  $\varepsilon$  tel que  $\|\mathfrak{T}_\varepsilon^{-1}\| \leq M$ . Ces trois propriétés jouent un rôle central en analyse numérique. La propriété de stabilité limite l'amplification des erreurs de la solution lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La convergence nous assure tout simplement que les solutions approximées convergent vers les vraies solutions de l'équation. La propriété de cohérence nous donne un critère de convergence point-à-point des solutions de l'équation. L'**équivalence de Lax-Richtmyer** [56] (aussi appelé théorème fondamental de l'analyse numérique) nous dit qu'une approximation cohérente est convergente si et seulement si elle est stable.



**Fig. 2.8** Un résumé des différents types de convergences ainsi que les liens entre elles. La convergence uniforme implique la convergence forte qui elle-même implique la convergence faible. Dans le cadre des schémas d'approximations, la convergence forte plus la propriété de stabilité implique la convergence des solutions du schéma. La cohérence du schéma est équivalente à la convergence forte.

Ce théorème nous permet de montrer la convergence des solutions (qui est assez difficile à établir) en prouvant la cohérence (qui est beaucoup plus facile) et la stabilité (qui peut-être montrée en utilisant les propriétés sous-multiplicatives des normes de matrices).

Nous résumons toutes les relations de convergences dans la figure. 2.8.

**La forme de Dirichlet associée à l'opérateur de Laplace–Beltrami** Nous avons jusqu'à maintenant présenté de façon abstraite la convergence d'opérateur entre espace de Banach, sans spécifier les espaces sous-jacents. Interessons-nous à une sous-classe d'espace de Banach : les espaces de Sobolev. Ces espaces sont au coeur des équations aux dérivées partielles. Les solutions de celles-ci se trouvent naturellement dans les espaces de Sobolev plutôt que dans les espaces de fonctions continues.

Considérons le problème de Dirichlet associé à l'opérateur de Laplace–Beltrami

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad x \in \Gamma, \\ u(x) &= 0 \quad x \in \partial\Gamma, \end{aligned}$$

avec  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction donnée et  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ . Pour formuler tout problème d'équations aux dérivées partielles de manière précise, nous devons spécifier dans quelle espace les solutions de l'équation vivent. Il est également nécessaire de préciser comment les dérivées sont définies et dans quel sens les solutions vérifient les conditions aux bords. Nous considérons ici les **solutions faibles** qui satisfont l'équation au sens des distributions. Soit  $C_c^\infty(\Gamma)$  l'ensemble des **fonctions de test** de  $\Gamma$ , i.e. l'ensemble des fonctions dont les dérivées partielles sont continues et à support compact dans  $\Gamma$ . Soit  $\varphi$  une telle fonction. Une multiplication et une intégration par partie de l'équation de Dirichlet donne

$$\int_\Gamma \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, d\text{vol} = \int_\Gamma f \varphi \, d\text{vol}.$$

Nous avons donc transformer le problème de Dirichlet en un problème variationnel. Supposons maintenant que la solution  $u$  et la fonction de test  $\varphi$  appartiennent au même espace. Dans ce cas là,  $\nabla u$  et  $\nabla \varphi$  doivent être deux fois intégrables. L'espace des fonctions deux fois intégrables est l'espace  $\mathcal{H}_0^1(\Gamma)$ . Cet espace correspond à la clôture de  $C_c^\infty(\Gamma)$  dans l'espace de Sobolev  $W^{1,2}(\Gamma)$ , ce qui informellement correspond à l'ensemble des fonctions de  $L^2(\Gamma)$  dont les dérivées partielles faibles sont dans  $L^2(\Gamma)$  (se référer au livre de John Hunter et Bruno Nachtergael [49] pour une définition précise des espaces de Sobolev).

---

DÉFINITION Solutions faibles du problème de Dirichlet (2.3.2)

Étant donné une distribution  $f \in \mathcal{H}^{-1}(\Gamma)$  (l'espace dual de  $\mathcal{H}_0^1(\Gamma)$ ), nous dirons que  $u$  est une solution faible du problème de Dirichlet si  $u \in \mathcal{H}_0^1(\Gamma)$  et

$$\int_{\Gamma} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, d\text{vol} = \langle f | \varphi \rangle$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Gamma)$ , où  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  et l'opérateur de mise en dualité entre  $\mathcal{H}^{-1}(\Gamma)$  et  $\mathcal{H}_0^1(\Gamma)$ .

---

L'unicité de la solution nous est donné par le théorème de représentation de Riesz

---

THÉORÈME Représentation de Riesz (2.3.1)

Soit  $h$  une fonctionnelle bornée d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Il existe alors un unique vecteur  $u \in \mathcal{H}$  tel que

$$h(u) = \langle u, v \rangle$$

pour tout  $v \in \mathcal{H}$ .

---

Remarquons d'ailleurs que nous avions, dans la section 1.1.3, utiliser ce théorème sans le mentionner pour mettre en relation les formes et les vecteurs à travers le produit scalaire défini sur  $T_p M$ .

**Retour sur les variétés différentielles** Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à l'opérateur de Laplace–Beltrami défini sur les variétés différentielles. Plus précisément, nous souhaitons approximer l'opérateur défini sur le bord  $\partial M$  d'une variété différentielle compacte  $M$  de dimension 3 plongée dans  $\mathbb{R}^3$  (à noter que ce que nous allons présenter par la suite tient pour toute variété différentielle, car il est toujours possible de la plonger dans un espace Euclidien d'assez grande dimension, le résultat étant du à Whitney [104]). Considérons donc une variété  $M$  équipé d'un produit scalaire sur le plan tangent (*i.e.* d'un tenseur métrique), l'opérateur faible de Laplace–Beltrami est une application qui à tout  $u \in \mathcal{H}_0^1(M)$  associe la distribution  $\Delta u \subset \mathcal{H}^{-1}(M)$  et est donné par

$$\langle \Delta u | \varphi \rangle = \int_M g(\nabla u, \nabla \varphi) \, d\text{vol}$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{H}_0^1(M)$ . L'opérateur faible est une généralisation de l'opérateur de Laplace–Beltrami dans le sens où pour toute fonction continûment différentiable  $u$  sur  $M$ , la version forte de l'opérateur est l'unique fonction continue qui satisfait

$$\int_M \Delta u \varphi \, d\text{vol} = \int_M g(\nabla u, \nabla \varphi) \, d\text{vol}$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{H}_0^1(M)$ . Nous verrons dans la prochaine partie que la version faible de l'opérateur joue un rôle clef lorsque l'on souhaite le discréteriser : on peut par exemple employer des techniques d'éléments finis sur les triangulations pour obtenir une discréétisation.

Si nous revenons maintenant à la convergence d'opérateurs, nous pouvons considérer deux cadres de convergences. La première, associée à la forme forte de l'opérateur, considère la convergence entre fonctions deux fois différentiables sur le bord d'un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^3$ , espace que nous nommerons  $C^2(\partial M)$ . Nous sommes obligés de considérer des ensembles compacts : un conséquence importante qui provient de l'analyse classique est le théorème des valeurs maximums (voir [92] par exemple). Ce théorème nous dit que si  $K$  est un ensemble compact, et  $u : K \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue (au sens topologique du terme), alors  $u$  est bornée et atteint ses minimums et maximums dans  $K$ . Étant donné que  $\partial M$  est aussi compact et que chaque fonction de  $C^2(\partial M)$  est continue (par définition), ces fonctions sont bornées (ce qui est aussi vrai pour le gradient de ces fonctions).  $C^2(\partial M)$  combinée avec la norme de Lebesgue  $L^\infty(\partial M)$  est alors un espace de Banach. Nous considérerons donc la convergence forte de l'opérateur  $\Delta$  dans  $C^2(\partial M)$  que nous appellerons la  **$C^2$ -convergence**. Étant donné une approximation  $\mathfrak{L}$  de  $\Delta$ ,  $\mathfrak{L}$  est  $C^2$ -convergent si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathfrak{L}u - \Delta u\|_{C^2(\partial M)} = 0$$

pour toute fonction  $u \in C^2(\partial M)$ . Le paramètre  $\varepsilon$  représente un certain pas de discréétisation, ou bien d'approximation de la variété  $\partial M$ . De manière similaire, nous pouvons considérer la convergence de l'opérateur faible que nous appellerons  **$\mathcal{H}_0^1$ -convergence** (ou bien convergence point-à-point).  $\mathfrak{L}$  est  $\mathcal{H}_0^1$ -convergent si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathfrak{L}u - \Delta u\|_{\mathcal{H}_0^1(\partial M)} = 0$$

pour toute fonction  $u \in \mathcal{H}_0^1(\partial M)$ . La convergence faible n'est pas à confondre avec l'opérateur faible : nous sommes en effet libre de considérer la convergence forte (ce que nous faisons ici) de l'opérateur faible ou bien encore la convergence faible de l'opérateur fort.

Il est nécessaire, lorsque l'on discréteise un opérateur, de savoir quel type de convergence nous souhaitons. Si l'on veut par exemple calculer le vecteur de courbure moyenne, ou bien encore l'énergie de Willmore, nous devons considérer la  $C^2$ -convergence. Dans le cas de la résolution d'équations au dérivées partielles, il est suffisant d'avoir une convergence des quantités intégrées, *i.e.* de considérer la  $\mathcal{H}_0^1$ -convergence. Nous verrons d'ailleurs que

la théorie de la mesure géométrique nous dit qu'il n'est pas possible, pour une certaine classe de discrétilisations, d'obtenir une convergence point-à-point.

**Conclusion** Nous pouvons maintenant conclure cette première partie, qui nous fournit tous les outils d'analyses et de géométrie utiles pour cette thèse. Nous avons présenté la théorie de calcul extérieur, qui généralise le calcul différentiel à des formes plus compliquées : les variétés Riemanniennes. Nous avons présenté l'opérateur de Laplace–Beltrami dans le calcul extérieur et donné sa formulation en coordonnées locales. Nous avons également présenté quelques éléments et théorèmes sur sa décomposition spectrale, utiles pour les applications en analyses de formes géométriques. Nous avons ensuite présenté quelques modèles de représentations des variétés, à savoir les complexes simpliciaux, les complexes cellulaires et les surfaces digitales. Nous avons résumé le pendant discret du calcul extérieur sur les complexes simpliciaux développé par Desbrun, Hirani et ses collègues. Celui-ci nous permet de calculer sur les surfaces discrètes en utilisant uniquement des opérations matricielles. L'injection de la mesure des éléments de surfaces se fait au travers de la discrétilisation de l'opérateur de Hodge. Dans le cas du calcul extérieur discret, la mesure est modélisé comme des rapports des mesures primales et duales de la surface. Pour les surfaces digitales, nous avons exposé des éléments de topologie reliant le bord de la variété et son discrétilisé de Gauss. Nous avons insisté sur la fonction de projection  $\xi$ , qui nous permet entre autre de ramener des quantités définies sur la surface discrète sur la variété. Cet outil se révélera essentiel lors de la preuve de  $C^2$ -convergence de notre discrétilisation de l'opérateur de Laplace–Beltrami. Nous avons également présenté un estimateur de normales convergent sur les surfaces digitales à travers les intégraux invariants, et énoncé un théorème de multigrille convergence. Enfin, nous avons spécifier dans cet interlude les espaces de fonctions utiles à la convergence lorsque l'on s'intéresse à l'opérateur de Laplace–Beltrami. Nous allons maintenant attaquer le coeur de cette thèse, à savoir donner une discrétilisation de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur les surfaces digitales.

# Partie II

---

Discrétisation de l'opérateur de  
Laplace–Beltrami



# Panorama des discrétisations de l'opérateur de Laplace–Beltrami existantes

”

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Propriétés des laplaciens discrets</b>	53
→ 3.1.1	Propriétés du laplacien continu	53
→ 3.1.2	Propriétés du laplacien discret	54
<b>3.2</b>	<b>Opérateurs combinatoires</b>	56
→ 3.2.1	L'opérateur d'ombrelles	56
→ 3.2.2	L'opérateur de Tutte	56
→ 3.2.3	Le laplacien de graphe normalisé	57
<b>3.3</b>	<b>Deux opérateurs sur les triangulations</b>	57
→ 3.3.1	L'opérateur des cotangentes de Pinkall	57
→ 3.3.2	L'opérateur de Desbrun <i>et al.</i>	61
<b>3.4</b>	<b>Opérateur sur des surfaces polygonales généralisées</b>	62
→ 3.4.1	Généralisation de l'aire à un polygone non-planaire	62
→ 3.4.2	Formulation matricielle et algorithme	63
<b>3.5</b>	<b>Opérateur de convolution de Belkin <i>et al.</i></b>	66
→ 3.5.1	Existence et décomposition de la solution fondamentale	66
→ 3.5.2	Approximations pour $t$ petit	67
→ 3.5.3	Laplacien fonctionnel	68
<b>3.6</b>	<b>Une autre approximation globale</b>	69
→ 3.6.1	Fonctions $r$ -locales	70
→ 3.6.2	Discrétisation à partir du schéma des cotangentes	70
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	71

L'opérateur de Laplace–Beltrami est un opérateur différentiel d'ordre deux : il est nécessaire de définir un cadre de calcul discret pour des structures plongées telles que les maillages. Les premiers éléments de calcul discret peuvent être attribués au calcul de Regge [88] pour la physique quantique, où le domaine discret est modélisé par des tétraèdres adjacents et la métrique est complètement déterminé par la longueur des arêtes. On voit également apparaître des opérateurs de Laplace discrets pour la théorie spectrale des graphes dans les années cinquante : sont étudié ici le polynôme caractéristique et la

décomposition en vecteurs propres et valeurs propres de la matrice d'adjacence du graphe (appelée matrice de laplacien) [13, 90, 14].

Plus tard, avec le développement des outils d'acquisition géométrique et des techniques de modélisation, l'intérêt s'est tourné vers un calcul plus général s'appliquant sur les maillages et plus généralement sur les complexes simpliciaux. De là est née la fameuse formule des cotangentes. Elle semble apparaître en premier en 1959 dans le travail de Duffin [25] qui proposa une formulation de l'énergie de Dirichlet sur des surfaces triangulées continues par morceaux. Trente ans après, en 1988, Dziuk [27, 26] étudie les éléments finis linéaires sur les surfaces polyédrales sans référence explicite à la formule des cotangentes. En 1993, Pinkall et Polthier [75] emploie la formule pour une représentation fonctionnelle du vecteur de courbure moyenne, permettant de calculer explicitement les surfaces minimales discrètes [2, 79, 77, 80, 91]. Desbrun *et al.* [21, 66] ont aussi utilisé la formule des cotangentes pour exprimer l'aire du gradient de surfaces continues par morceaux. Ils effectuent une remise à l'échelle via le terme d'aire : en résulte une formulation de l'opérateur qui agit sur des fonctions (*i.e.* des quantités point-à-point) au lieu d'agir sur des fonctionnelles (*i.e.* des quantités intégrées). Plus récemment, Bobenko et Springsborn [6] ont dérivé une version intrinsèque de l'opérateur pour des surfaces polyédrales qui obéit au principe maximum discret. De nombreux autres travaux [96, 97, 78, 36, 62, 66] concernant la formule existent. Enfin, remarquons que la formule peut-être construite via des méthodes d'éléments finis (voir par exemple [61]).

Dans la volonté d'une théorie plus générale s'est développé le calcul extérieur discret dans la communauté des mathématiques appliquées et celle d'analyse de formes. 'L'école allemande' du calcul discret développa un calcul 2D exact qui généralise le laplacien des cotangentes. Celui-ci est basé sur des éléments (conformes ou non-conformes) finis [76], obtenant ainsi des résultats théoriques tel que le théorème de Stokes ou bien encore la décomposition de Hodge. Les applications sont nombreuses : l'intégration exacte permet de faire du remaillage via des projection  $L^2$ , la déformation de structures en prescrivant des données de premier ordre, etc. Cette théorie est un socle pour le calcul effectif, mais possède cependant une limitation importante : la restriction aux surfaces triangulées (et de plus avec de bons ratios pour des laplaciens positifs).

Une autre version du calcul discret provient de la thèse d'Hirani [47] et du monographie de Desbrun, Hirani, Leok et Marsden [20]. Ils proposent ici une construction via la définition d'une surface duale, qui n'est pas restreinte aux triangulations. L'idée centrale n'est pas de proposer une approximation du calcul continu, mais au contraire un analogue discret :

*We do not prove that these definitions converge to the smooth counterparts. The definitions are chosen so as to make some important theorems like the generalized Stokes' theorem true by definition, to preserve naturality with respect to pullbacks, and to ensure that operators are local.*

[47, 20]

Il est possible d'inclure des mesures géométriques dans le calcul via les isomorphismes musicaux (*flat* et *sharp* qui convertissent des k-formes en champs vectoriels et vice versa) et l'opérateur de Hodge. A noter que l'opérateur de Laplace–Beltrami formulé à travers

le calcul extérieur discret coïncide avec le schéma des cotangentes sur les triangulations lorsque la dualité Voronoi / Delaunay est utilisée.

En parallèle émerge un autre calcul discret dans la communauté d'image, graphes, circuits électriques et d'analyse de réseaux, résumé dans le livre de Grady et Polimeni [38]. Les mesures sont aussi incorporées au calcul, mais sans relation avec l'espace ambiant, ce qui permet de faire de l'analyse sans la connaissance du plongement du domaine. Les auteurs montrent comment les processus de filtrages classiques et les (version discrètes des) modèles énergétiques (e.g. Mumford-Shah, Variation Totale) peuvent être formulés dans leur théorie.

Une version similaire du calcul discret sur les ‘chainlets’ apparaît en théorie géométrique de la mesure, pour l’analyse mathématique de formes compactes générales telles que les fractales [41, 40]. Nous pouvons aussi mentionner une approche en analyse complexe [65, 64] avec des applications en paramétrisation de surfaces digitales et cartes de textures [10].

Belkin *et al.* ont développé un opérateur pour les nuages de points [4] qui a été étendu par Qin *et al.* [85]. Cette opérateur a été développé pour l’analyse massive de données en dimension élevée (comme par exemple la reconstruction de sous-variétés en géométrie discrète ou bien en apprentissage automatique). Le cœur de la discréttisation utilise l’équation de la chaleur pour construire l’opérateur. Des opérateurs plus ‘exotiques’ peuvent être trouvés dans [45, 101, 44]. Notons dans notre cas l’opérateur développé par Wardetzky et Alexa sur des surfaces polygonales non planaires [1] : celui-ci généralise le schéma des cotangentes et peut s’appliquer directement sur nos surfaces digitales.

## 3.1 Propriétés des lapaciens discrets

Motivé par la formulation continue de l’opérateur de Laplace–Beltrami sur des variétés Riemanniennes, la question de l’existence d’un opérateur discret sur les surfaces polygonales (*i.e.* les complexes simpliciaux de dimension 2) se pose. Wardetzky *et al.* [101] ont donné une liste de propriétés qu’un opérateur discret devrait remplir afin d’imiter sa contrepartie continue. Pour cela, ils listent les propriétés continues de l’opérateur, et donnent leur pendant discret.

### 3.1.1 Propriétés du laplacien continu

Considérons une surface différentiable  $\mathcal{M}$ , pouvant posséder un bord, équipée d’une métrique Riemannienne, *i.e.*, une notion intrinsèque de distance. Soit  $L^2$  le produit intérieur intrinsèque de deux fonctions  $u$  et  $v$  de  $\mathcal{M}$  défini par  $\langle u, v \rangle_{L^2} := \int_{\mathcal{M}} uv dA$ , et soit  $\Delta = -\operatorname{div} \operatorname{grad}$  l’opérateur de Laplace–Beltrami intrinsèque. Les propriétés de cet opérateur sont les suivantes :

- (NULL)  $\Delta u = 0$  si  $u$  est constante.
- (SYM) Symétrie :  $\langle \Delta u, v \rangle_{L^2} = \langle u, \Delta v \rangle$  si  $u$  et  $v$  sont au moins de classe  $C^2$  et s’annulent sur le bord de  $\mathcal{M}$ .

- (LOC) Support Local : pour toute paire  $p \neq q$  de points,  $\Delta u(p)$  est indépendant de  $u(q)$ . En d'autres termes, changer la valeur de la fonction à un point distant de  $p$  n'affecte pas l'action du laplacien localement.
- (LIN) Précision linéaire :  $\Delta u = 0$  dès que  $\mathcal{M}$  est un sous ensemble d'un plan Euclidien arbitraire, et  $u = ax + by + cz + d$  est une fonction linéaire du plan.
- (MAX) Principe maximum : les fonctions harmoniques (celles qui satisfont  $\Delta u = 0$  à l'intérieur de  $\mathcal{M}$ ) n'ont pas de maxima local (ou bien de minima) sur les points intérieurs.
- (PSD) Positif Semi-Defini : l'énergie de Dirichlet,  $E_D(u) = \int_{\mathcal{M}} \|\operatorname{grad} u\|^2 dA$ , est non-négative. Étant donné le choix du signe de  $\Delta$ , nous avons  $E_D(u) = \langle \Delta u, u \rangle \geq 0$  si  $u$  est au moins de classe  $C^2$  et disparaît aux bord de  $\mathcal{M}$ .

Nous souhaitons donc qu'une version discrète du laplacien vérifie (au moins partiellement) ces propriétés.

### 3.1.2 Propriétés du laplacien discret

Considérons un complexe simplicial  $\mathcal{K}$  composé d'un ensemble de sommets  $V$ , d'un ensemble d'arêtes  $E$  et d'un ensemble de faces  $F$ . Un opérateur de Laplace–Beltrami discret sur  $\mathcal{K}$  est défini par son action sur des fonctions évaluées sur les sommets,

$$(\mathcal{L}u)_i = \sum_j w_{ij}(u_i - u_j), \quad (3.1.1)$$

où  $i$  et  $j$  représentent les indices des sommets. Notons qu'un opérateur de cette forme satisfait automatiquement (NULL). Nous avons déjà parlé précédemment des propriétés de convergences de l'opérateur discret, à savoir la  $C^2$ -convergence ainsi que la  $H_0^1$ -convergence. Nous listons maintenant les autres propriétés désirables pour un laplacien discret de cette forme :

- (SYM)  $w_{ij} = w_{ji}$ . En algèbre linéaire, un opérateur autoadjoint  $\mathcal{A}$  est un opérateur qui satisfait pour tout vecteur  $x$  et  $y$  l'égalité

$$\langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}y \rangle$$

où  $\langle \cdot \rangle$  est le produit scalaire standard sur  $\mathbb{R}^n$ . Cette propriété se traduit sur les matrices par  $A = A^T$  où  $A^T$  correspond à la transposée de la matrice  $A$ . En théorie, cette propriété nous assure qu'il existe une base orthonormée de l'espace vectoriel constituée des vecteurs propres de  $A$  et que de plus toutes les valeurs propres sont réelles. En pratique, cette conséquence nous donne accès à des algorithmes plus rapides lors de la résolution d'équations différentielles discrètes, ou bien encore dans la décomposition spétrale elle-même. Un très bon résumé d'algèbre linéaire peut se trouver dans le livre de Halmos [39] ou bien encore dans celui de Lax [57].

- (LOC) les poids sont associés aux arêtes du maillage, tel que  $w_{ij} = 0$  si et seulement si  $i$  et  $j$  ne partagent pas une arête dans  $\mathcal{K}$ . De la même façon que dans le cas

continu, changer la valeur d'une fonction à un sommet  $j$  n'affecte pas l'action de l'opérateur discret en  $i$ , si  $i$  et  $j$  ne partagent pas une arête commune. Cette propriété ce traduit dans la théorie des graphes : lorsque l'on discrétise un processus de diffusion via une marche aléatoire dans un graphe, les poids  $w_{ij}$  correspondent aux probabilités de transition le long des sommets du graphe.

- (LIN)**  $(Lu)_i = 0$  pour tout sommet qui n'appartient pas au bord si  $\mathcal{K}$  est une ligne droite plongée dans le plan et que  $u$  est une fonction linéaire de ce plan, évaluée aux sommets de  $\mathcal{K}$ . Cette propriété se traduit par l'équation

$$0 = (\mathcal{L}u)(x_i) = \sum_j w_{ij}(u(x_i) - u(x_j)).$$

Etant donné que la fonction  $u$  est linéaire en  $x$ , nous pouvons l'écrire comme  $u(x) = ax + b$  ce qui nous donne

$$0 = (\mathcal{L}u)(x_i) = \sum_j w_{ij}(ax_i + b - (ax_j + b)),$$

ce qui est équivalent à

$$0 = (\mathcal{L}x)_i = \sum_j w_{ij}(x_i - x_j).$$

En d'autres termes, pour montrer (LIN), il suffit d'étudier l'opérateur discret uniquement sur le plongement de  $\mathcal{K}$ .

- (POS)**  $w_{ij} \geq 0$  pour tout  $i \neq j$ . De plus, pour tout sommet  $i$ , il existe au moins un sommet  $j$  tel que  $w_{ij} > 0$ . Cette condition est suffisante pour le principe maximum (MAX).

- (PSD)** la matrice  $L$  associée à l'application linéaire est positive semi-définie vis-à-vis du produit intérieur  $L_2$  et possède un noyau de dimension un. L'énergie positive de Dirichlet est alors donnée par  $\sum_{i,j} w_{ij}(u_i - u_j)^2$  (par simple application du produit scalaire). Il est assez facile de montrer que dans le cas général, (SYM) + (POS) implique (PSD). Soit  $u$  une fonction discrète non constante :

$$\begin{aligned} u^T Lu &= \sum_i u_i \sum_j w_{ij}(u_i - u_j) \\ &= \sum_{ij} u_i w_{ij}(u_i - u_j) \\ &\stackrel{(SYM)}{=} \sum_{i>j} w_{ij}(u_i(u_i - u_j) + u_j(u_j - u_i)) \\ &= \sum_{i>j} w_{ij}(u_i - u_j)^2 \stackrel{(POS)}{\geq} 0. \end{aligned}$$

Nous noterons par la suite la propriété de  $C^2$ -convergence par (C<sup>2</sup>-CON), et la propriété de  $\mathcal{H}_0^1$ -convergence par ( $\mathcal{H}_0^1$ -CON).

Nous allons dans les prochaines sections détailler des opérateurs locaux qui ont la forme de l'Equation (3.1.1). Nous verrons des laplaciens combinatoires qui ne dépendent pas de

la géométrie de la surface, puis le fameux schéma des cotangentes, ainsi qu'une généralisation de celui-ci sur les surfaces constituées de polygones non-planaires. Pour chacune des discrétisations, nous donnerons un résumé des propriétés de l'opérateur.

## 3.2 Opérateurs combinatoires

Cette classe d'opérateurs représentent de la façon la plus simple, des laplacien discrets. Leurs coefficients sont entièrement basés sur des informations de connectivités (parfois appelés combinatoire du maillage). Le principal avantage de ces discrétisations est qu'il n'est pas nécessaire de modifier la matrice associée lors d'une opération géométrique sur celui-ci (par des processus itératifs de lissage par exemple). Cet avantage est encore plus flagrant si l'on requiert une décomposition coûteuse de la matrice (pensez par exemple à la décomposition spectrale). Le principal inconvénient est bien sûr le manque d'informations géométriques, qui s'accentue par exemple lorsque l'échantillonnage n'est pas uniforme. Nous explicitons ici les principaux laplacien combinatoires. Nous référons le lecteur aux travaux de Zhang pour plus de détails vis-à-vis de ces opérateurs [108].

### 3.2.1 L'opérateur d'ombrelles

Cette opérateur est une généralisation directe du laplacien utilisé en traitement d'image sur des grilles régulières. L'idée est ici de prendre la moyenne des valeurs de la fonction dans un petit voisinage. On a :

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ possèdent une arête commune} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Propriétés de l'opérateur** Les propriétés (SYM), (LOC) et (POS) sont satisfaites, cependant (LIN) n'est pas validée. Cela vient du fait que l'opérateur combinatoire est indépendant du plongement du maillage, et donc que le plongement planaire est ‘invisible’ aux yeux d'un tel opérateur (on peut construire un contre-exemple en considérant un échantillonage non-linéaire d'une droite de  $\mathbb{R}^2$ . Nous avons vu que (SYM) + (POS)  $\implies$  (PSD) : l'opérateur combinatoire est donc positif défini. La nature combinatoire de l'opérateur ne permet pas de valider ni ( $\mathcal{H}_0^1$ -CON) et ni ( $C^2$ -CON). On peut expliciter un contre-exemple à ces deux convergences sur la lanterne de Schwartz (voir la figure. 3.3). Voir également le papier de Zhang [108].

### 3.2.2 L'opérateur de Tutte

Cette opérateur est donné par la normalisation par ligne de l'opérateur sur les ombrelles. Il prend donc la forme suivante

$$(\mathfrak{L}_{\text{COMBI}}u)(x_i) := \sum_{x_j \prec \text{Lk } x_i} \frac{1}{d_i} (u(x_j) - u(x_i)) \quad (3.2.1)$$

où  $d_i$  est la valence (ou degré) du sommet  $x_i$  et  $x_j \prec Lk x_i$  représente l'ensemble des sommets adjacents à  $x_i$ . Cette opérateur correspond aux poids suivant dans la formulation de l'Equation (3.1.1) :

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_i} & \text{si } i \text{ et } j \text{ partagent une arête commune} \\ 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Propriétés de l'opérateur** Cette opérateur ne valide pas (SYM) en général. Plus précisément, la propriété n'est plus vraie sur les maillages non-réguliers (où les sommets ne possèdent pas la même valence). De part sa construction, cette opérateur valide (LOC). Nous savons cependant que (PSD) est conservé [108]. Nous savons également que le spectre de cet opérateur est compris dans  $[0; 2]$  est donc qu'il possède la propriété (POS). De la même façon que l'opérateur des ombrelles, (LIN) et ( $\mathcal{H}_0^1$ -CON) ne sont pas respectées.

### 3.2.3 Le laplacien de graphe normalisé

Cette opérateur est une version symétrique de l'opérateur de Tutte. Soit  $d_i$  la valence du sommet  $i$  (le nombre de sommets adjacents à  $i$ ), nous avons :

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}} & \text{si } i \text{ et } j \text{ partagent une arête commune} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Propriétés de l'opérateur** L'opérateur valide (SYM) par construction. Cette opérateur ne possède pas la propriété (PSD) et possède une décomposition spectrale non-bornée. Il n'est pas non plus ni (LIN), ni ( $\mathcal{H}_0^1$ -CON) et encore moins ( $C^2$ -CON) pour les mêmes raisons que les deux derniers opérateurs.

## 3.3 Deux opérateurs sur les triangulations

Nous présentons dans cette section deux opérateurs locaux sur les triangulations. Ces deux opérateurs sont communément regroupés sous le nom d'opérateur des cotangentes, composées de nombreuses discrétilisations du Laplace–Beltrami sur les triangulations. Le premier opérateur, dû à Pinkall et Polthier [75], fut développé dans le cadre du calcul numérique de surfaces discrètes minimales (que nous détaillerons). Le second opérateur, du à Desbrun *et al.* [21, 66], est une discrétilisation du gradient de l'aire.

### 3.3.1 L'opérateur des cotangentes de Pinkall

Comme mentionné dans l'introduction de cette section, l'opérateur des cotangentes de Pinkall et Polthier [75] fut à l'origine construit pour générer des surfaces minimales discrètes. La question de trouver des surfaces d'aire minimum étant donné un bord de  $\mathbb{R}^d$  est un problème énormément étudié depuis les travaux de Lagrange. Le problème peut



**Fig. 3.1** Deux exemples de surfaces minimales qui font partie des surfaces de Seifert : leur bord est un noeud (ou bien un ensemble de noeuds appelé un lien) c'est à dire le plongement d'un cercle dans  $\mathbb{R}^3$ . Les deux bord de cette surface sont le noeud de trèfle (au milieu), et un cercle (qui forme l'anneau extérieur)

être formulé de la façon suivante : étant donné un ensemble fini  $\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots\}$  de courbes fermées plongées dans  $\mathbb{R}^d$ , parmi toutes les surfaces à topologie prescrite (fixe) couvrant  $\Gamma$ , trouver celles qui possèdent l'aire minimum. Les solutions de ce problème sont appelées les surfaces minimales. Dans les années trente, Radó [86] et Douglas [23] résolvent indépendamment le problème pour des surfaces circulaires en montrant l'existence de minimiseurs. Une des clefs de la preuve de Douglas consiste à minimiser l'énergie de Dirichlet  $\mathcal{D}f = \int_{\mathcal{D}} |df|^2 dx$ .

On peut se poser naturellement la question d'une méthode pour calculer ces surfaces minimales en utilisant des approximations finies des surfaces continues. En effet, Douglas [24] dès 1927 utilise une approche basée différences finies pour approximer de telles surfaces. Si l'on se place maintenant dans  $\mathbb{R}^3$ , une approche plus flexible du problème consiste à trianguler l'ensemble  $\Gamma$  de courbes de  $\mathbb{R}^3$  et d'ensuite bouger les sommets afin de minimiser l'aire totale de la triangulation. Suivant cette approche, Wagner [99] applique une méthode type Newton pour trouver les points critiques de l'aire fonctionnelle, Dziuk [26] et Brakke [7] applique une descente de gradient  $L^2$  (le flot de courbure moyenne discret) pour obtenir des minimiseurs discrets, et Pinkall et Polthier [75] (que nous détaillerons dans la section suivante) présentent un algorithme itératif qui minimise aussi le gradient de l'aire (cette méthode peut-être vue comme une descente de gradient  $H^1$ ). Une illustration d'une telle surface se trouve dans la figure. 3.1.

Le papier de Pinkall et Pothier définit une surface minimale discrète avec l'équivalence suivante (voir la Définition 3. du papier) : une surface discrète (au sens des complexes

simpliciaux) est minimale si et seulement si une petite perturbation des sommets de la surface dans une petite région augmenterait l'aire totale de la surface. Soit un complexe simplicial  $\mathcal{K}$  et deux plongement de ce complexe  $\mathfrak{T}_1$  et  $\mathfrak{T}_2$  (c'est-à-dire que  $\mathfrak{T}_1$  et  $\mathfrak{T}_2$  possèdent la même topologie, mais des coordonnées différentes). Le coeur de leur méthode est d'étudier l'application  $f : \mathfrak{T}_1 \rightarrow \mathfrak{T}_2$ , qui correspond à une transformation de  $\mathfrak{T}_1$  en  $\mathfrak{T}_2$ . L'énergie de Dirichlet  $\mathcal{E}_D$  de cette application  $f$  est alors la somme des énergies  $f|_t$  (la restriction de  $f$  à un triangle  $t$  de  $\mathfrak{T}_1$ ) sur chacune des paires de triangles de la transformation. L'énergie s'écrit alors comme dans le cas continu :

$$\mathcal{E}_D(f|_t) = \frac{1}{2} \int_t |\nabla f|^2.$$

Ils montrent alors que cette énergie possède une formule close dépendant des angles et des longueurs de chacun des triangles :

$$\mathcal{E}_D(f|_t) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \cot \alpha_i \cdot |a_i|^2,$$

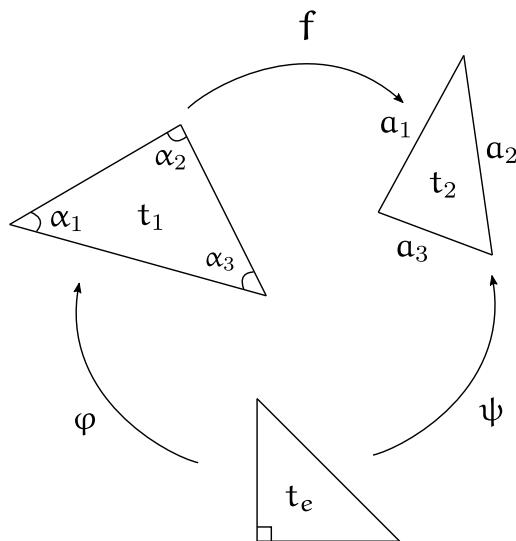
où les  $\alpha_i$  correspondent aux angles du triangle d'origine et  $a_i$  correspond aux longueurs des arêtes du triangle d'arrivé (voir figure. 3.2). Les auteurs montrent également qu'en sommant les énergies autour d'un sommet et en considérant  $f$  comme étant l'identité, la formule précédente devient la formule des cotangentes :

$$(\mathcal{L}_{\text{COT}}^* u)(x_i) := \frac{1}{4} \sum_{x_j \prec \text{Lk } x_i} (\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})) (u(x_i) - u(x_j)),$$

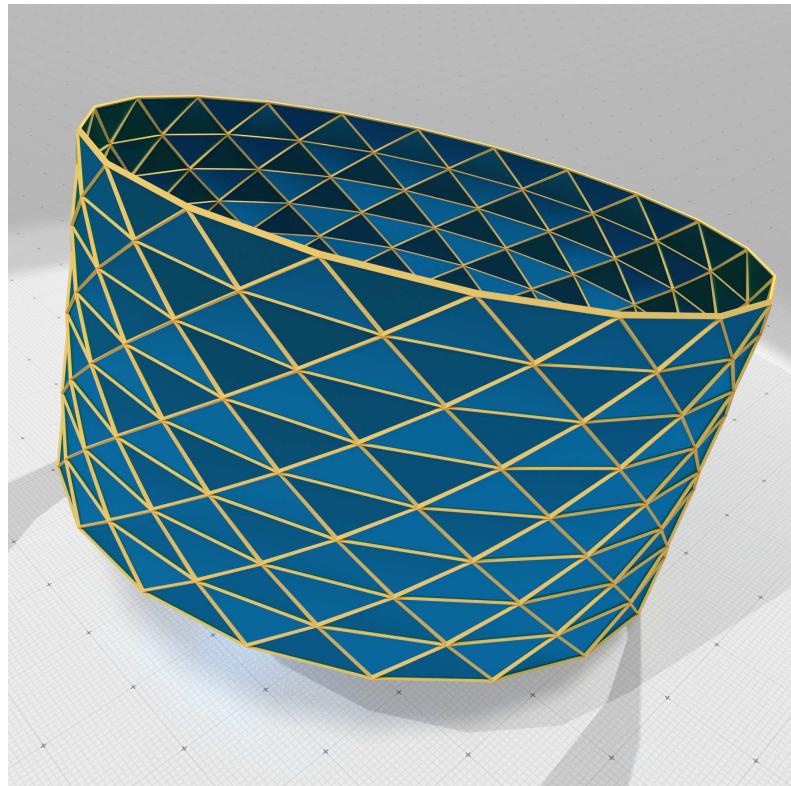
avec  $x_j \prec \text{Lk } x_i$  l'ensemble des sommets du Link de  $x_i$  (ou plus formellement l'ensemble des faces propres du Link de  $x_i$ ), et  $\alpha_{ij}$  et  $\beta_{ij}$  les angles opposés à l'arête  $ij$ . Les poids de la matrice de l'opérateur dans la formulation de l'Equation (3.1.1) sont donc ici

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4} (\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})) & \text{si } i \text{ et } j \text{ partagent une arête commune} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Propriétés de l'opérateur** L'opérateur possède toutes les propriétés d'un opérateur local discret sauf (POS). (SYM) est validée trivialement par construction, ainsi que (LOC).  $\mathcal{L}_{\text{COT}}^*$  possède toujours la propriété (PSD) même si les poids sont négatifs (son spectre est strictement positif [101]). Wardetzky a montré ( $\mathcal{H}_0^1$ -CON) dans sa thèse [100] : étant donné une famille de triangulations qui convergent (au sens de Hausdorff) vers la variété différentielle, le schéma des cotangentes converge dans  $\mathcal{H}_0^1$  si et seulement si les normales des triangles convergent vers les vraies normales de la surface. Sont également montrées la convergence des solutions du problème de Dirichlet, ainsi qu'une convergence en norme d'opérateur. Wardetzky exhibe aussi un contre-exemple pour la convergence point-à-point : il utilise pour cela la fameuse lanterne de Schwarz (voir la figure. 3.3).



**Fig. 3.2** L'application linéaire  $f$  associe un triangle  $t_1$  de  $\mathcal{T}_1$  à un triangle  $t_2$  de  $\mathcal{T}_2$ . L'énergie de Dirichlet peut-être ensuite discrétisée par paire de triangles en utilisant les angles des triangles d'origine ainsi que les longueurs des arêtes du triangle d'arrivé. La preuve décompose  $f$  en  $\varphi$  et  $\psi$  qui associent les triangles à un triangle élémentaire  $t_e$  : il est ensuite possible de calculer les dérivées de ces applications et d'en déduire l'énergie de Dirichlet associée.



**Fig. 3.3** La lanterne de Schwarz utilisée par Wardetzky dans sa thèse pour donner un contre-exemple de la convergence point-à-point de l'opérateur des cotangentes  $\mathfrak{L}_{\text{COT}}^*$ .

### 3.3.2 L'opérateur de Desbrun et al.

Étant donné une surface  $M$  orientée de dimension deux plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , nous pouvons étudier sa forme locale via l'application de Gauss  $v : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  donné par le vecteur normal unitaire (à la surface)  $v = v_p$  pour tout point  $p \in M$ . Sa dérivée au point  $p$  est une forme linéaire du plan tangent  $T_p M$  en  $p$  de  $M$  au plan tangent  $T_{v_p} \mathbb{S}^2$  de la sphère unité. Ces espaces étant naturellement identifiés (ce sont des plans de  $\mathbb{R}^3$ ), nous pouvons voir la dérivée comme un endomorphisme  $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ . Cette application est appelée l'opérateur de forme ou bien encore l'application de Weingarten.

L'opérateur de forme détermine complètement la courbure de la surface. Il est néanmoins plus pratique de ne pas travailler directement avec l'opérateur  $S_p$  mais plutôt avec des quantités scalaires. Les valeurs propres  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  de  $S_p$  sont appelées les courbures principales et apportent beaucoup d'informations géométriques sur la surface (au même titre que la courbure en une dimension).

La courbure Gaussienne  $K = \kappa_1 \kappa_2$  correspond au déterminant de  $S_p$  et la courbure moyenne  $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$  à la moitié de sa trace. Le signe de  $H$  dépendant du choix d'orientation du vecteur normal unitaire  $v$  au point  $p$ , on peut également considérer le vecteur de courbure moyenne  $\mathbf{H} := Hv$ . Dans notre cas, nous supposons que les normales pointent vers l'extérieur de la surface.

La courbure de Gauss est une notion intrinsèque : elle ne dépend pas de l'immersion de la surface dans  $\mathbb{R}^3$ . En d'autres termes,  $K$  reste inchangée en pliant la surface sans l'étirer. De ce fait, les surfaces développables telles que les cylindres ou les cônes possèdent une courbure de Gauss nulle, car elles peuvent être construites en pliant un plan. La courbure moyenne quant à elle est extrinsèque, mais possède une interprétation variationnelle (dont nous reparlerons plus tard dans ce chapitre). Par rapport au produit interne  $L^2 \langle U, V \rangle := \int U_p \cdot V_p dA$  sur les champs vectoriels, le vecteur de courbure moyenne correspond à la négation du gradient de l'aire fonctionnelle, souvent appelée première variation d'aire :  $\mathbf{H} = -\nabla \text{Area}$  (de la même façon que la négation du gradient de la longueur d'une courbe est égale à son vecteur de courbure  $\kappa N$ ). Si l'on considère localement la variété  $M$  comme la fonction de hauteur  $f$  par rapport au plan tangent  $T_p M$  alors  $H(p) = \Delta f$ . Alternative, il est possible d'écrire  $\mathbf{H} = \nabla_M \cdot v = \Delta x$ , où  $x$  correspond au vecteur de plongement appartenant à  $\mathbb{R}^3$  et où  $\Delta$  correspond ici à l'opérateur de Laplace–Beltrami intrinsèque à la surface.

Cette liaison intrinsèque entre l'opérateur de Laplace–Beltrami et la courbure moyenne est le point de départ de la discréétisation de Desbrun et al. sur les surfaces triangulées. Afin de discréétiser la courbure moyenne en un point  $p$  de la surface, nous regardons le gradient vis-à-vis de  $p$  de l'aire  $A_i$  de tous les triangles adjacents à  $p$ . Le calcul du gradient de l'aire pour chaque triangle par rapport à un sommet et la somme de tous ces gradients nous permet de retomber sur la formule des cotangentes pondérée :

$$(\mathcal{L}_{\text{COT}} u)(x_i) := \frac{1}{2A_i} \sum_{x_j \prec \text{Lk } x_i} (\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij}))(u(x_j) - u(x_i)). \quad (3.3.1)$$

Remarquez que l'opérateur de Pinkall et Polthier correspond à la version faible de l'opérateur de Desbrun (*i.e.* nous n'avions pas divisé par  $A_i$ ). C'est donc pour cela que nous l'avions noté  $\mathcal{L}_{COT}^*$  (en référence à la dualité des p-formes).

**Un retour au calcul extérieur discret** Nous avons présenté de façon général l'opérateur de Laplace–Beltrami sur les complexes simpliciaux dans la section 2.1.1. Une dérivation explicite à l'aide des opérateurs de Hodge montre que lorsque l'on considère une triangulation 2D plongée dans  $\mathbb{R}^3$  avec une dualité Voronoi / Delaunay, nous retombons exactement sur l'opérateur des cotangentes  $\mathcal{L}_{COT}$ . Plus précisément nous avons

$$(\star_0)_{ii} = |\star \sigma_i^0| = A_i; \quad (\star_1)_{ii} = \frac{|\star \sigma_i^1|}{|\sigma_i^1|} = \frac{1}{2} \cot(\alpha_i) + \cot(\beta_i)$$

(rappelez-vous que  $A_i$  corresponds ici à un tiers de l'aire des triangles adjacents au sommet numéroté  $i$ ).

**Propriétés de l'opérateur** L'opérateur de Desbrun *et al.* possède les mêmes propriétés que celui de Pinkall et Polthier, sauf (SYM) : la multiplication par  $\frac{1}{2A_i}$  invalide la symétrie de l'opérateur. Il est cependant possible de le rendre symétrique par un changement de base de fonctions (voir [61]).

## 3.4 Opérateur sur des surfaces polygonales généralisées

Nous présentons dans cette section une généralisation du schéma des cotangentes sur les surfaces polygonales généralisées. Nous travaillerons dans toute cette section sur des complexes cellulaires (CW-Complexes) dont les éléments de bases sont des polygones (pas forcément planaires) non-dégénérés. Cette discréttisation est due à Alexa et Wardetzky [1]. Étant donné un polygone  $p$  du complexe possédant  $k_p$  sommets, nous reprenons les notations utilisées dans le papier, à savoir que  $X_p = (x_1^p, \dots, x_{k_p}^p)^T$  désigne la matrice de taille  $k_p \times 3$  des sommets ordonnés cycliquement le long du bord de  $p$ ,  $E_p = (e_1^p, \dots, e_{k_p}^p)^T$  désigne la matrice, toujours de taille  $k_p \times 3$ , des arêtes orientées le long du bord de  $p$  (*i.e.*  $e_i^p := x_{i+1} - x_i$ ) et  $B_p = (b_1^p, \dots, b_{k_p}^p)^T$  la matrice des milieux de chaque  $e_i^p$  (*i.e.*  $b_i^p := 1/2(x_{i+1} + x_i)$ ).

### 3.4.1 Généralisation de l'aire à un polygone non-planaire

En repartant de la section précédente, nous savons que l'opérateur de Laplace–Beltrami est intrinsèquement lié au gradient d'aire de la surface. Afin de calculer ce gradient, il est tout d'abord nécessaire de définir ce que l'on entend par le gradient d'aire d'un polygone non-planaire. Le vecteur d'aire  $A(\gamma)$  d'une courbe fermée simple plongée dans  $\mathbb{R}^3$  est donnée par l'intégrale surfacique du vecteur normal d'une surface ayant pour bord  $\gamma$ . Nous savons,

en utilisant le théorème de Stokes, que cette quantité  $\mathbf{A}(\gamma)$  ne dépend que du bord, et pas du choix de la surface intérieure

$$\mathbf{A}(\gamma) = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \mathbf{x} \times d\mathbf{x},$$

où  $\mathbf{x}$  représente le vecteur de position de  $\gamma$  (voir [94]). La discréétisation de l'opérateur va donc s'effectuer par polygone du complexe.

Il est possible de montrer que la matrice

$$\mathbf{A}_p := \mathbf{E}_p^T \mathbf{B}_p$$

associée à un polygone  $p$  est une matrice antisymétrique de taille  $3 \times 3$  dont le vecteur de Darboux  $\mathbf{a}_p$  (c'est-à-dire l'unique vecteur satisfaisant  $\mathbf{a}_p \times \mathbf{x} = \mathbf{A}_p \mathbf{x}$  pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $\mathbb{R}^3$ ) est égal au vecteur d'aire de  $p$  (voir le Lemme 1. du papier). L'amplitude  $|\mathbf{a}_p|$  du vecteur d'aire associée  $p$  correspond à la plus grande aire parmi toutes les projections orthogonales de  $p$  sur les plans de  $\mathbb{R}^3$ . Assez étonnamment, les points au milieux des arêtes du polygone forment toujours un plan qui possède comme normale  $\mathbf{a}_p$ . L'aire de la projection de  $p$  sur ce plan correspond à l'amplitude du vecteur d'aire (voir Lemme 2. du papier).

Nous savons maintenant comment caractériser le vecteur d'aire d'un polygone  $p$ . La formule close est donnée par

$$\mathbf{a}_p = \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_{i+1}$$

où la somme est cyclique par rapport aux sommets de  $p$ . Le calcul (voir le papier) montre que

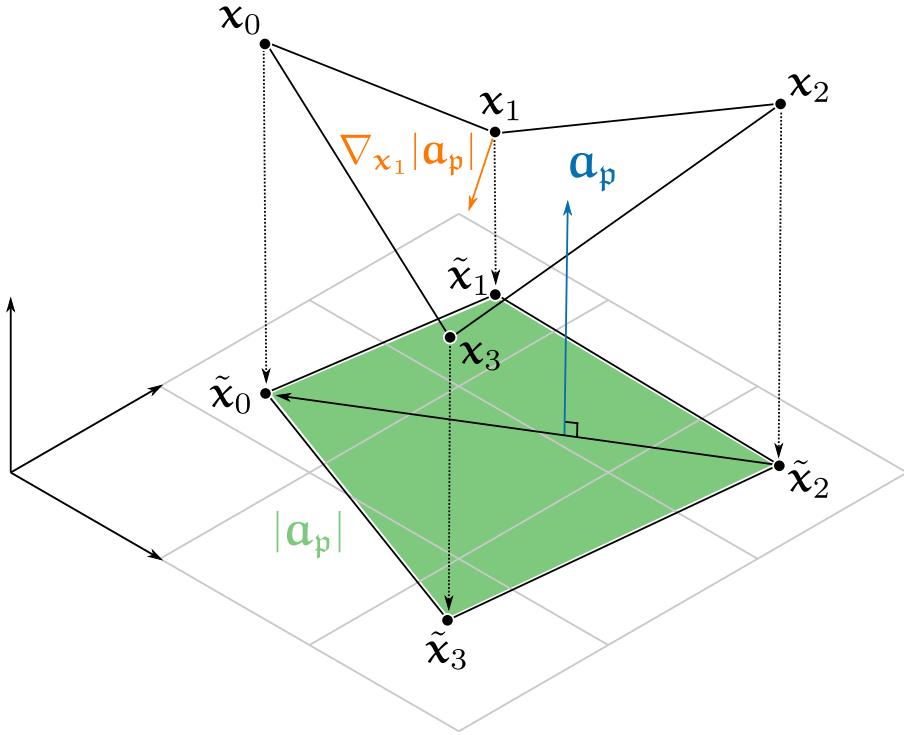
$$(\nabla_{x_i} |\mathbf{a}_p|)^T = \frac{1}{2|\mathbf{a}_p|} \mathbf{a}_p \times (\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i+1}) = \frac{1}{2|\mathbf{a}_p|} \mathbf{A}_p (\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i+1}).$$

Cette formule possède une interprétation géométrique intéressante : la multiplication du vecteur  $\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i+1}$  par la matrice  $\frac{1}{|\mathbf{a}_p|} \mathbf{A}_p$  revient à prendre la moitié du produit vectoriel avec le vecteur d'aire normalisé, donnant un vecteur perpendiculaire à  $\mathbf{a}_p$  et  $\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i+1}$ , de longueur déterminé par la projection de  $\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i+1}$  sur l'espace orthogonal à  $\mathbf{a}_p$ . On peut donc interpréter le gradient comme une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  de l'arête projeté  $\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i+1}$  dans le plan d'aire maximum suivi d'une multiplication par un demi (voir la figure. 3.4). Dans le cas des triangulations, nous retombons sur la construction du schéma des cotangentes de Desbrun *et al.*: le gradient de l'aire  $\nabla_{x_i} |\mathbf{a}_p|$  est perpendiculaire à l'arête opposé à  $x_i$ . Dans le cas des polygones, le produit scalaire entre le gradient et l'arête  $[\mathbf{x}_{i-1} \mathbf{x}_{i+1}]$  vaut 0. Autrement dit, la variation de l'aire par rapport à  $x_i$  ne dépend que des sommets adjacents à  $x_i$ , et de la même façon que sur les triangulations, plus  $x_i$  se rapproche de l'arête  $[\mathbf{x}_{i-1} \mathbf{x}_{i+1}]$  plus la norme du gradient augmente.

### 3.4.2 Formulation matricielle et algorithme

Si nous revenons à la définition discrète de l'opérateur de Laplace–Beltrami, nous savons que

$$\mathcal{L} = \delta d$$



**Fig. 3.4** Le gradient de l'aire maximum  $|a_p|$  par rapport à  $x_1$  est construit en prenant la moitié du produit vectoriel entre le vecteur  $[\tilde{x}_0 \tilde{x}_2]$  et  $a_p$ . Géométriquement, cela revient à prendre la moitié de la rotation d'angle de  $\frac{\pi}{2}$  du vecteur  $[\tilde{x}_0 \tilde{x}_2]$  dans le plan de la projection maximale du polygone.

où  $\delta$ , la codifférentielle, est l'adjoint formel de  $d$  par rapport au produit scalaire  $L_2$ . Nous avons également vu que le gradient de l'aire était relié à l'opérateur de Laplace–Beltrami via

$$H = H\nu = \Delta x = -\nabla \text{Area},$$

c'est-à-dire que la courbure moyenne est égale à l'opérateur de Laplace–Beltrami appliquée au plongement  $x$  de  $M$  et est aussi égale au gradient de l'aire de la surface. C'est précisément ce lien qui permet à Alexa et Wardetzky de montrer via le Lemme 3. (en utilisant les résultats précédents) que

$$\nabla_{x_i} |a_p| = \left( \frac{1}{2|a_p|} a_p \times (x_{i-1} - x_{i+1}) \right)^T = (\tilde{L}_p X)_i$$

où  $\tilde{L}_p := \mathbf{d}^T \tilde{\mathbf{M}}_p \mathbf{d}$  et

$$\tilde{\mathbf{M}}_p := \frac{1}{|a_p|} \mathbf{B}_p \mathbf{B}_p^T.$$

En assemblant les petites matrices  $\tilde{\mathbf{M}}_p$  ils contruisent la version faible de l'opérateur  $\mathcal{L}_{QUAD}^*$  dont la matrice s'écrit

$$\mathbf{L}_{QUAD}^* = \mathbf{d}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{d}. \quad (3.4.1)$$

Ici,  $\mathbf{M}_1$  est la matrice du produit intérieur sur les 1-formes. Malheureusement, cette matrice n'est pas positive définie en général. On peut néanmoins la modifier pour obtenir un opérateur positif défini (voir le Théorème 1 du papier). La construction de chaque petite matrice  $\mathbf{M}_f$  se fait à travers l'Algorithm 1. On peut retrouver l'opérateur fort  $\mathcal{L}_{QUAD}$

**Algorithme 1** Calcul des matrices  $\mathbf{M}_p$  par polygone de la surface discrète. La matrice  $\mathbf{C}$  corresponds aux vecteurs colonnes qui forment la base du noyau de  $\tilde{\mathbf{E}}^T$ . Ceux-ci peuvent être calculés rapidement en utilisant une décomposition en valeurs singulières de la matrice.

---

```

1: CONSTRUIRE  $\mathbf{M}_p$ (polygone  $p$ , paramètre  $\lambda$ )
2:    $\mathbf{B}, \mathbf{E}, \tilde{\mathbf{E}} \in \mathbb{R}^{k_p \times 3}$ 
3:   Pour tous les sommets  $x_i$  de  $p$ 
4:      $(\mathbf{E})_i \leftarrow (x_{i+1} - x_i)^T$ 
5:      $(\mathbf{B})_i \leftarrow \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)^T$ 
6:    $\mathbf{A} = \mathbf{E}^T \mathbf{B}$ 
7:    $\tilde{\mathbf{M}} = \frac{\sqrt{2}}{\|\mathbf{A}\|} \mathbf{B} \mathbf{B}^T$ 
8:    $\tilde{\mathbf{n}} = \text{normaliser}(-\mathbf{A}_{23}, \mathbf{A}_{13}, -\mathbf{A}_{12})^T$ 
9:   Pour tous les sommets  $x_i$  de  $p$ 
10:     $\tilde{x}_i \leftarrow x_i - \langle x_i, \tilde{\mathbf{n}} \rangle \tilde{\mathbf{n}}$ 
11:    Pour tous les sommets  $x_i$  de  $p$ 
12:       $(\tilde{\mathbf{E}})_i \leftarrow (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i)^T$ 
13:     $\mathbf{C} = \text{le noyaux orthogonal à } \tilde{\mathbf{E}}^T$  (en utilisant SVD par exemple)
14:     $\mathbf{M}_p = \tilde{\mathbf{M}} + \lambda \mathbf{C} \mathbf{C}^T$ 

```

---

(évalué sur les sommets) en multipliant par la matrice du produit intérieur sur les 0-forme :

$$\mathbf{L}_{QUAD} = \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{d}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{d}$$

avec

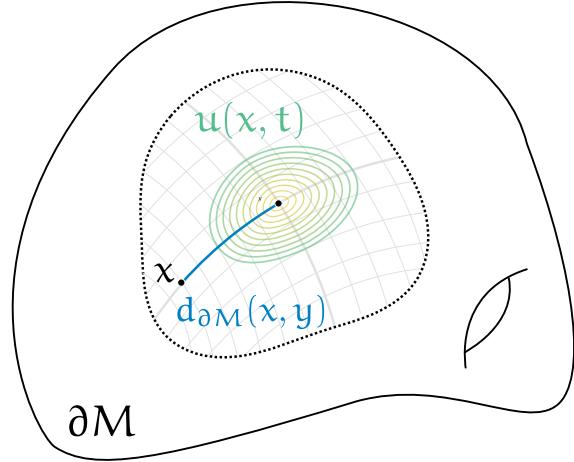
$$(\mathbf{M}_0)_{ii} := \sum_{p \in i} \frac{|\mathbf{a}_p|}{k_p}.$$

En d'autres termes, chaque polygone incident au sommet  $i$  contribue à hauteur de  $1/k_p$  fois l'aire de sa projection à la masse totale de  $i$ . On voit ici que la matrice  $\mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{d}^T \mathbf{M}_1$  est en fait l'opérateur de codifférentielle discrète  $\delta$ . Dans le langage du calcul extérieur discret, la matrice  $\mathbf{M}_0$  correspond à la matrice de l'opérateur de Hodge sur les 0-formes, et la matrice  $\mathbf{M}_1$  correspond à l'opérateur de Hodge sur les 1-formes (qui diffère ici de celui présenté précédemment car il n'est plus diagonal dans le cas général).

**Propriétés de l'opérateur** L'opérateur  $\mathcal{L}_{QUAD}^*$  est symétrique par construction, mais la multiplication par la matrice du produit intérieur des 0-formes annule la symétrie (nous avons obtenu exactement le même résultat pour le schéma des cotangentes). Nous savons de plus (voir le Théorème 1 de l'article) qu'il vérifie (PSD). Au vue de la construction locale sur chaque polygone, (LOC) est aussi satisfaite. La section 3.1 du papier démontre aussi (LIN). Seule la convergence de Dirichlet ( $\mathcal{H}_0^1$ -CON) n'est pas prouvée, mais seulement observée expérimentalement (via la Figure 7.).

Nous avons mis l'accent sur les opérateurs géométriques utiles en analyse géométrique de formes. Ont été omis de nombreuses variantes du schéma des cotangentes, l'opérateur des valeurs moyennes [35] des opérateurs sur les graphes, les opérateurs sur les nuages de points (qui nécessitent des constructions plus compliquées, ou bien des pré-triangulations du nuage) ainsi que tous les algorithmes 2D (tels que les filtres par convolution et les opérateurs de morphologie mathématique). Nous allons maintenant présenter des opéra-

**Fig. 3.5** Le processus de diffusion de la chaleur. Sont représentés pour une variété  $\partial M$ , la solution fondamentale de l'équation de la chaleur (en dégradé de verts)  $u(x, y)$ , ainsi que la distance géodésique (en bleu)  $d_{\partial M}(x, y)$  entre  $x$  et  $y$ . Il est possible de montrer (voir le théorème (3.5.1)) que  $u$  possède un développement asymptotique qui est le produit entre une Gaussienne "géodésique" et un polynôme en  $t$  dont les coefficients sont des invariants Riemanniens (comme l'aire ou la courbure).



teurs non-locaux : malgré la perte de nombreuses propriétés des opérateurs discrets, les opérateurs non-locaux nous permettent d'obtenir une  $C^2$ -convergence en général, ce qui n'est pas le cas des opérateurs définis au sens de l'Equation (3.1.1).

### 3.5 Opérateur de convolution de Belkin *et al.*

Nous introduisons ici une première discréttisation non-locale de l'opérateur de Laplace–Beltrami. Celle-ci est due à Belkin *et al.* [3, 4, 5]. L'opérateur discréttisé agit sur des fonctions définies sur des triangulations, et se base sur l'équation de la chaleur. Cette méthode peut être vue comme une convolution discrète entre des différences de fonctions et une Gaussienne paramétrée par le pas de temps de l'équation de la chaleur.

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne compacte sans bord. L'opérateur de la chaleur  $T := -\Delta + \partial_t$  agit sur les fonctions  $C(M \times (0, +\infty))$  qui sont  $C^2$  sur  $M$  et  $C^1$  sur  $(0, +\infty)$ . L'**équation de la chaleur** est donnée par

$$\begin{cases} T u(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in M \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) & \forall x \in M \end{cases}. \quad (3.5.1)$$

Une **solution fondamentale** de l'équation de la chaleur est une fonction continue  $p : M \times M \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $C^2$  vis-à-vis de  $x$ ,  $C^1$  vis-à-vis de  $t$  et telle que

$$T_y p = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0} p(\cdot, y, t) = \delta_y$$

où  $\delta_y$  est une fonction de Dirac centré en  $y$  (voir la figure. 3.5 pour une illustration).

#### 3.5.1 Existence et décomposition de la solution fondamentale

On peut montrer, via le principe de Duhamel, que cette solution est unique et qu'elle est symétrique vis-à-vis des deux variables spatiales. Celle-ci s'écrit

$$u(x, t) = \int_{y \in \partial M} p(x, y, t) u(y, 0) dy$$

où  $p \in C^\infty(\partial M \times \partial M \times \mathbb{R}^+)$  est le noyau de la chaleur [89].

Si nous prenons la restriction de  $\partial M$  à un espace vectoriel, le noyau de la chaleur possède une forme close :

$$p_{\mathbb{R}^d}(x, y, t) = \frac{e^{-\frac{\|x-y\|_2^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme Euclidienne. Malgré l'existence et l'unicité de  $u$  sur les variétés Riemanniennes, il n'existe pas dans le cas général de formules closes pour la solution de l'équation de la chaleur. Nous avons cependant le théorème suivant dû à Minakshisundaram et Pleijel [67, 68] :

---

T H É O R È M E Développement de Minakshisundaram-Pleijel (3.5.1)

Soit  $\partial M$  une variété Riemannienne compacte. Il existe alors un unique noyau de la chaleur, c'est-à-dire une fonction

$$K \in C^\infty(\partial M \times \partial M \times (0, \infty))$$

qui satisfait l'équation de la chaleur et qui pour chaque  $x \in \partial M$  possède un développement asymptotique

$$K(x, y, t) \underset{t \rightarrow 0}{\simeq} \frac{e^{-\frac{d_{\partial M}(x, y)^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} (v_0(x, y) + tv_1(x, y) + t^2v_2(x, y) + \dots)$$

où les  $v_k \in C^\infty(\partial M \times \partial M)$  sont des invariants Riemanniens qui ne dépendent que de la courbure et de ses dérivées successives.

---

Outre la preuve originale, plusieurs approches sont possibles pour prouver ce théorème. L'idée générale est de se restreindre à une boule géodésique autour de  $x$ , et ensuite d'étendre la solution à toute la variété. La preuve de Minakshisundaram et Pleijel utilise une sommation (due au mathématicien italien E.E. Levi) de solutions élémentaires pour étendre le résultat à toute la variété. D'autres approches [69] relatives à la théorie des semi-groupes peuvent être employées pour effectuer cette opération.

### 3.5.2 Approximations pour $t$ petit

Ne possédant pas de formules closes, nous ne pouvons pas directement discréteriser le noyau de la chaleur. Il existe cependant de nombreuses études sur le comportement du noyau lorsque  $t$  est petit (souvent appelé "small time asymptotics of diffusion process" en anglais). Les travaux les plus célèbres sont certainement ceux de Varadhan, qui a montré que

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \log p(x, y, t) = -\frac{d_{\partial M}(x, y)^2}{4}$$

sur une certaine classe de variétés. En d'autres termes, le noyau de la chaleur se comporte comme la distance géodésique pour  $t$  faible. Nous pouvons également citer un résultat plus général du à Molchanov [69] :

$$p(x, y, t) \underset{t \rightarrow 0}{\simeq} \frac{e^{-\frac{d_{\partial M}(x,y)^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}.$$

La dernière équation nous donne une approximation pour le calcul du noyau de la chaleur. Étant donnée la complexité des algorithmes de calcul de géodésiques sur les surfaces, Belkin *et al.* [3] nous donne une étape supplémentaire pour discréteriser le noyau de la chaleur. Il suffit de remplacer la distance géodésique par la distance Euclidienne :

$$\tilde{p}(x, y, t) = \frac{e^{-\frac{\|x-y\|_2^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}. \quad (3.5.2)$$

On obtient alors un noyau de la chaleur extrinsèque, qui approxime le vrai noyau de la chaleur pour des petits  $t$ .

### 3.5.3 Laplacien fonctionnel

Nous retracons ici les idées développées par Belkin *et al.* pour la discréétisation de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur les complexes simpliciaux [5, 4]. La première étape de discréétisation de l'équation de la chaleur est d'appliquer un schéma d'Euler implicite à  $\partial_t$ . La première partie de l'Equation (3.5.1) devient alors :

$$\Delta u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, t) - u(x, 0)}{t}$$

En injectant l'Equation (3.5.2), et en remarquant que  $\int_{y \in \partial M} \tilde{p}(\cdot, y, \cdot) dy = 1$  nous avons

$$\Delta u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \int_{y \in \partial M} \tilde{p}(x, y, t) u(y, 0) dy - u(x, 0) \right) \quad (3.5.3a)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{y \in \partial M} \tilde{p}(x, y, t) (u(y, 0) - u(x, 0)) dy, \quad (3.5.3b)$$

ce qui nous donne une formulation asymptotique de l'opérateur. Le paramètre de temps joue un rôle essentiel dans la discréétisation : il contrôle en effet la taille de la convolution. Le noyau de la chaleur  $p$  est une Gaussienne paramétrée par son écart type  $\sigma = \sqrt{2t}$ . Plus le temps augmente (c'est-à-dire plus nous laissons la chaleur se diffuser sur la surface) plus la Gaussienne sera étalée et plus nous moyennons la fonction d'entrée. Belkin propose d'utiliser une taille fixe dépendant de la taille de la triangulation. Nous verrons que pour les tests numériques de convergence, il faut mieux utiliser un pas de temps qui est fonction de la taille de la triangulation.

Nous introduisons l'opérateur de Laplace fonctionnel, qui nous donne une notation compacte de l'Equation (3.5.3b) qui se révélera utile par la suite :

DÉFINITION Opérateur de Laplace fonctionnel [5] (3.5.1)

Étant donné un point  $x \in \partial M$  et une fonction  $u \in C^2(\partial M)$ , l'opérateur fonctionnel de Laplace est

$$(\mathcal{L}_h^*)(x) := \frac{1}{t_h(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{y \in \partial M} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} (u(y) - u(x)) dy.$$

où  $t_h$  est une fonction continue qui tend vers zéro quand  $h$  tend vers zéro.

Nous citons également un théorème important de convergence de l'opérateur fonctionnel vers l'opérateur continu :

THÉORÈME Convergence fonctionnelle [5] (3.5.2)

Étant donné un point  $x \in \partial M$  et une fonction  $u \in C^2(\partial M)$ , nous avons

$$\lim_{t_h \rightarrow 0} (\mathcal{L}_h^* u)(x) = (\Delta u)(x)$$

Nous nous servirons de ce théorème pour décomposer notre opérateur et montrer la convergence de celui-ci. La preuve détaillée se trouve dans [3]. Belkin et Niyogi réduisent tout d'abord l'intégrale à une boule géodésique centrée en  $x$ . Ils effectuent ensuite un changement de coordonnées via l'application exponentielle, ce qui leur permet de passer d'un laplacien intrinsèque à un laplacien ambiant (sur le plan tangent). Enfin, une étude fine du noyau donne le résultat de convergence fonctionnelle.

L'opérateur proposé par Belkin *et al.* correspond à la discrétisation de l'Equation (3.5.3b) sur les triangulations. Nous avons

$$(\mathcal{L}_B u)(x_i) = \frac{1}{4\pi t^2} \sum_{x_j} e^{-\frac{d(x_i, x_j)^2}{4t}} (u(x_j) - u(x_i)) A_j, \quad (3.5.4)$$

où  $A_j$  représente un tiers de la somme des aires des triangles adjacents à  $x_j$ , la somme étant faite pour tous les sommets de la triangulation.

**Propriétés de l'opérateur** La construction de l'opérateur par convolution viole la propriété (LOC). En effet, la matrice associée à l'application linéaire n'est pas du tout creuse. L'opérateur ne satisfait pas non plus (SYM) (à cause de la pondération par l'aire des triangles adjacents). L'opérateur valide cependant (POS) et ( $\mathcal{H}_0^1$ -CON) (car il converge point-à-point). (LIN) n'a pas été prouvée.

## 3.6 Une autre approximation globale

Une autre discrétisation par convolution a été proposée par Hildebrandt et Polthier [45] sur des surfaces triangulées. Elle leur permet de montrer la convergence du vecteur normale de courbure moyenne, ainsi que l'énergie de Willmore. Des applications telles que le flot de Willmore, ou bien celui par courbure moyenne sont alors envisageables en utilisant leur nouvelle discrétisation.

### 3.6.1 Fonctions r-locales

L'idée de ce papier est de partir de la définition faible de l'opérateur de Laplace–Beltrami (typiquement l'opérateur des cotangentes) et de venir le tester sur certaines fonctions localisées à norme  $L^1$  constante. Ils introduisent donc le concept de fonctions r-locales.

DÉFINITION Fonction r-locale [45] (3.6.1)

Soit  $M$  une variété différentielle plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $C_D$  une constante positive. Pour tout  $x \in M$  et pour  $r \in \mathbb{R}^+$ , une fonction  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  est dite r-locale en  $x$  (par rapport à  $C_D$ ) si les critères suivants sont respectés :

- P1  $\varphi \in H_0^1(M)$ ,
- P2  $\varphi(y) \geq 0$  pour tout  $y \in M$ ,
- P3  $\varphi(y) = 0$  pour tout  $y \in M$  lorsque  $d_M(x, y) \geq r$ ,
- P4  $\|\varphi\|_{L^1} = 1$ , et
- P5  $|\varphi|_{W^{1,1}} \leq \frac{C_D}{r}$ .

Les fonctions satisfaisant les propriétés (P2), (P3) et (P4) peuvent être utilisées pour approximer la valeur d'une fonction en  $x$  de toute fonction  $f$  via l'intégrale  $\int_M f\varphi d\text{vol}$ . Dans ce sens, les fonctions r-locales sont des approximations de la distribution de Dirac (voir le Lemme 4 du papier). Les auteurs montrent ensuite une convergence point-à-point de l'opérateur testé sur de telles fonctions dans le Théorème 5. La preuve utilise la  $H_0^1$ -convergence de l'opérateur des cotangentes, ainsi que des propriétés sur les fonctions r-locales.

Ils donnent dans l'appendice deux familles de fonctions r-locales. La première est appelée la famille des chapeaux géodésiques. Celle-ci est donnée par

$$\varphi_{r,x_i} = \frac{\tilde{\varphi}_{r,x_i}}{\|\tilde{\varphi}_{r,x_i}\|_{L^1}}$$

avec

$$\tilde{\varphi}_{r,x_i}(x_j) = \max \left\{ 0, 1 - \frac{\delta_M(x_i, x_j)}{r} \right\}$$

où  $\delta_M$  désigne la distance géodésique entre  $x_i$  et  $x_j$  sur la surface triangulée. En pratique, il est coûteux d'évaluer la distance géodésique entre deux points. On peut néanmoins remplacer la distance géodésique par la distance Euclidienne, ce qui donne naissance à la famille de fonction r-locales dites de chapeaux extrinsèques. Pour une valeur de  $r$  suffisamment petite, cette famille de fonctions satisfait les propriétés de r-localité.

### 3.6.2 Discréétisation à partir du schéma des cotangentes

Étant donné l'opérateur des cotangentes sous forme matricielle  $\mathcal{L}_{COT}$ , et la matrice  $\Phi$  possédant les entrées  $\Phi_{ij} = \varphi_{r,x_i}(x_j)$  (c'est-à-dire la fonction r-locale du sommet  $x_i$  évaluée au sommet  $x_j$ ), l'opérateur  $\mathcal{L}_{LOCAL}$  prend la forme

$$\mathbf{L}_{LOCAL} = \Phi \mathbf{L}_{COT}. \quad (3.6.1)$$

	(SYM)	(LOC)	(LIN)	(POS)	(PSD)	( $\mathcal{H}_0^1$ -CON)	(C <sup>2</sup> -CON)
Ombrella	✓	✓	✗	✓	✓	✗	✗
$\mathfrak{L}_{\text{COMBI}}$	✗	✓	✗	✓	✓	✗	✗
$\mathfrak{L}_{\text{COT}}^*$	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✗
$\mathfrak{L}_{\text{COT}}$	✗	✓	✓	✗	✓	✓	✗
$\mathfrak{L}_{\text{QUAD}}^*$	✓	✓	✓	✗	✓	?	✗
$\mathfrak{L}_{\text{QUAD}}$	✗	✓	✓	✗	✓	?	✗
$\mathfrak{L}_{\text{B}}$	✗	✗	?	✓	?	✓	✓
$\mathfrak{L}_{\text{RLOCAL}}$	✓	✗	?	✓	?	✓	✓

**Table 3.1** Résumé des différentes propriétés des opérateurs présentés. Les cinq premières lignes correspondent au opérateur locaux définis au sens de l'Equation (3.1.1), là où les deux dernières correspondent aux opérateurs par convolution. Bien que de nombreuses propriétés soient perdues par ces derniers, nous gagnons la C<sup>2</sup>-convergence.

Le nombre d'entrées de la matrice associée à  $\mathfrak{L}_{\text{RLOCAL}}$  dépend du nombres de sommets dans le support de  $\varphi$  et donc de  $r$ . En pratique, le paramètre  $r$  est une puissance de la taille locale du maillage  $h$  (comme dans le cas des surfaces digitales).

**Propriétés de l'opérateur** L'opérateur possède les même propriétés que celui de Belkin *et al.* à savoir ( $\mathcal{H}_0^1$ -CON) et (POS). Pour un choix arbitraire d'une famille de fonctions r-locales, la matrice  $\Phi$  n'est pas symétrique. Il est cependant possible de la rendre symétrique. L'idée est de décomposer  $\Phi$  en une partie symétrique et une partie anti-symétrique :

$$\Phi = \frac{1}{2}(\Phi + \Phi^T) + \frac{1}{2}(\Phi - \Phi^T).$$

C'est égalité est toujours vraie pour les matrices carrés. Ils remarquent alors que pour un certain choix de fonction r-locale  $\varphi$  les entrées de la partie symétrique dominent largement celles de la partie non-symétrique. Remarquons que si nous prenons la famille des fonctions chapeaux, et si de plus nous fixons un  $r$  constant pour tous les sommets de la surface, la matrice  $\Phi$  est automatiquement symétrique (et de ce fait la partie anti-symétrique est nulle).

## 3.7 Conclusion

Nous résumons les propriétés des opérateurs présentés dans ce chapitre dans la table 3.1. Des opérateurs par convolution sur des nuages de points existent : on peut par exemple utiliser le schéma de Belkin *et al.* sur des triangulations locales de nuages [4]. Il est aussi possible d'utiliser le triangle de Pascal pour construire un opérateur convergent sur les courbes [29]. Nous allons dans le prochain chapitre utiliser la discréttisation de Belkin *et al.* pour construire un opérateur convergent point-à-point sur les surfaces digitales. Nous montrerons la convergence, et l'illustrerons à travers des tests numériques.



# Un opérateur de Laplace–Beltrami convergent sur les surfaces digitales

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Différences finies sur des courbes digitales</b>	74
↪ 4.1.1	Calcul extérieur discret sur des courbes digitales	74
↪ 4.1.2	Différences finies	75
↪ 4.1.3	Opérateur non-symétrique avec estimation des mesures	77
<b>4.2</b>	<b>Adaptation de l'opérateur d'Alexa et Wardetzky sur les surfaces digitales</b>	78
<b>4.3</b>	<b>Discrétisation sur les surfaces digitales</b>	80
↪ 4.3.1	Extension de $u$ à $\mathbb{R}^{d+1}$	81
↪ 4.3.2	Intégration digitale	82
↪ 4.3.3	Formulation de l'opérateur	83
<b>4.4</b>	<b>Preuve de la <math>C^2</math>-convergence</b>	83
↪ 4.4.1	Une borne sur (Q2)	85
↪ 4.4.2	Une borne sur (Q3)	89
↪ 4.4.3	Résultat général de convergence	94
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	94
↪ 4.5.1	Résultats annexes	95

Nous présentons dans ce chapitre une discrétisation de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur des surfaces digitales possédant la propriété de  $C^2$ -convergence (que nous appellerons aussi propriété de convergence point-à-point). Notre méthode adapte le travail de Belkin *et al.* présenté dans le chapitre précédent sur les surfaces digitales. Nous allons définir un opérateur par convolution discrète sur nos surfaces.

La discrétisation combine une discrétisation temporelle de l'équation de la chaleur (via une méthode d'Euler implicite) ainsi qu'une discrétisation spatiale de l'intégrale du noyau de la chaleur (via une estimation locale d'aire). Cette discrétisation peut être vue comme une convolution surfacique entre le noyau de la chaleur et des différences de fonctions. L'opérateur résultant possède la propriété de  $C^2$ -convergence, qui peut-être utilisée pour estimer la courbure moyenne mais aussi l'énergie de Willmore [105].

Nous allons, avant de parler de la discrétisation via l'équation de la chaleur, donner deux motivations pour la définition d'un tel opérateur. Nous montrons pour cela deux contre-exemple à la  $C^2$ -convergence via d'une part l'application du calcul extérieur discret sur les courbes digitales et d'autre part une adaptation de l'opérateur d'Alexa et Wardetzky sur les surfaces digitales. Nous observerons également de façon empirique que l'application directe des opérateurs existant décrits dans le chapitre 3 sur les surfaces digitales ne donne

pas lieux à une  $C^2$ -convergence dans le chapitre 5, ce qui nous donne une autre motivation pour la définition d'un opérateur particulier à nos surfaces. Après avoir présenté le calcul extérieur discret sur les courbes, et l'adaptation de la discréétisation d'Alexa et Wardetzky nous décrivons la discréétisation de l'équation de la chaleur sur les surfaces digitales : nous utilisons un schéma numérique dû à Lachaud et Thibert [54] pour approximer le laplacien fonctionnel introduit par Belkin *et al.* [5]. La dernière section de ce chapitre est consacrée à la preuve de  $C^2$ -convergence de notre opérateur. Nous dérivons des bornes fines sur le noyau de la chaleur euclidien, ce qui nous permet d'utiliser le théorème (4.3.1) pour montrer la convergence de notre opérateur lorsque l'ensemble digital est restreint à la discréétisation de Gauss d'un ensemble compact plongé dans  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

## 4.1 Différences finies sur des courbes digitales

Comme mentionné dans l'introduction, ce résultat motive la section suivante où nous donnerons une discréétisation convergente de l'opérateur en utilisant des convolutions de différences de fonctions avec des Gaussiennes. Nous introduisons dans un premier temps notre définitions du calcul extérieur discret sur les courbes digitales en se basant sur la définition originale du calcul sur les complexes simpliciaux que nous avons décrit dans la section 2.1.1, puis nous montrons que la formulation de l'opérateur à travers le calcul se traduit par un opérateur de double différence finie non-symétrique. Nous utilisons ensuite le théorème de Taylor-Lagrange et montrons que sous certaines conditions, l'opérateur de ne valide pas la propriété de  $C^2$ -convergence dans le cas général.

### 4.1.1 Calcul extérieur discret sur des courbes digitales

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe plongée dans  $\mathbb{R}^2$ , et  $D_h(\mathcal{C})$  son discréétisé de Gauss. Nous numérotions les arrêtes (ou lignels) de la surface de façon que l'arrête  $i$  a pour bord les deux sommets  $x_i$  et  $x_{i+1}$ . La numérotation des sommets (dans le sens horaire ou anti-horaire) induit naturellement une orientation des arrêtes. Une  $k$ -forme discrète  $\sigma^k$  (avec  $k$  valant 0 ou 1 ici) est donnée par une valeur réelle  $\sigma^k(x)$  associée à chaque sommet et chaque arrête (nous avons ici deux complexes de chaînes de dimension zéro et un).

La dérivée extérieure  $d_0 : \Lambda^0(D_h(\mathcal{C})) \rightarrow \Lambda^1(D_h(\mathcal{C}))$  est ici définie comme la matrice d'adjacence signée :  $(d_0)_{i,j} = \pm 1$  si  $x_i$  appartient à l'arrête  $j$  (le signe dépendant de l'orientation de l'arrête). Nous munissons notre calcul extérieur discret avec un produit intérieur  $L_2$  :

$$\langle \sigma_1^k, \sigma_2^k \rangle = (\sigma_1^k)^T \star_k \sigma_2^k$$

où  $\star_k$  est l'opérateur de Hodge entre  $k$ -formes. En tant que matrice, l'étoile de Hodge est une matrice diagonale qui a pour valeurs sur notre courbe discrète

$$(\star_0)_{ii} = 2^{-1}(\mu_i + \mu_{i+1}) ; (\star_1)_{ii} = \mu_i^{-1}$$

où  $\mu_i$  est une mesure de l'arrête  $i$ . La codifférentielle  $\delta_1 : \Lambda^1(D_h(\mathcal{C})) \rightarrow \Lambda^0(D_h(\mathcal{C}))$  est ici toujours l'adjoint de  $d$  par rapport au produit intérieur  $L_2$ . L'opérateur de Laplace–Beltrami (qui correspond à l'opérateur de Rham sur les 0-formes) s'écrit donc

$$L = \delta_1 d_0 = \star_0^{-1} d_0^\top \star_1 d_0.$$

Le calcul extérieur discret sur les courbes digitales (tout comme celui sur les complexes simpliciaux) possède une interprétation en terme de surface duale. Construisons la surface duale  $D_h^d(\mathcal{C})$  à  $D_h(\mathcal{C})$  : nous prenons les sommets duals comme étant les centres des arrêtes, et les arrêtes duals comme étant l'union des demi-arrêtes entre les sommets duals. Nous pouvons alors attacher des valeurs réelles à chacun de ces éléments, ce qui forme l'espace des  $k$ -formes duales  $\Lambda_d^k(D_h^d(\mathcal{C}))$ . L'opérateur de Hodge inversé  $\star_0^{-1}$  correspond alors au passage d'une quantité définie sur les arrêtes duale à une quantité définie sur les sommets primaux (celle-ci est multipliée par  $\frac{1}{2}(\mu_i + \mu_{i+1})$ , *i.e.* la mesure de l'arrête duale). De la même façon, l'opérateur de Hodge  $\star_1$  est une application de  $\Lambda^1(D_h^d(\mathcal{C}))$  dans  $\Lambda_0^0(D_h^d(\mathcal{C}))$ . La transposée de  $d_0$  correspond à la dérivée extérieure sur les 0-formes duals. On peut montrer que l'opérateur  $L$  possède une formule close par sommet :

$$(Lu)(x_i) = \frac{2}{\mu_i + \mu_{i+1}} \left[ \frac{1}{\mu_i} u(x_{i-1}) + \frac{1}{\mu_{i+1}} u(x_{i+1}) - \left( \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_{i+1}} \right) u(x_i) \right].$$

Une illustration géométrique de l'opérateur  $L$  sur les courbes digitales se trouve dans la figure. 4.1 : nous explicitons chaque opération effectuée via les opérateurs du calcul discret en reprenant l'idée de dualité du calcul extérieur discret. L'opérateur  $L$  issu du calcul est en fait alors une double différence finie non symétrique. Nous allons maintenant, en revenant à la définition de la dérivée, montrer que cet opérateur ne possède pas la propriété de  $C^2$ -convergence en général.

### 4.1.2 Différences finies

Nous considérons toujours une courbe continue du plan  $\mathcal{C}$ . Soit de plus une fonction deux fois différentiable  $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ . La dérivée de  $u$  au point  $x \in \mathcal{C}$  est donnée par la limite suivante :

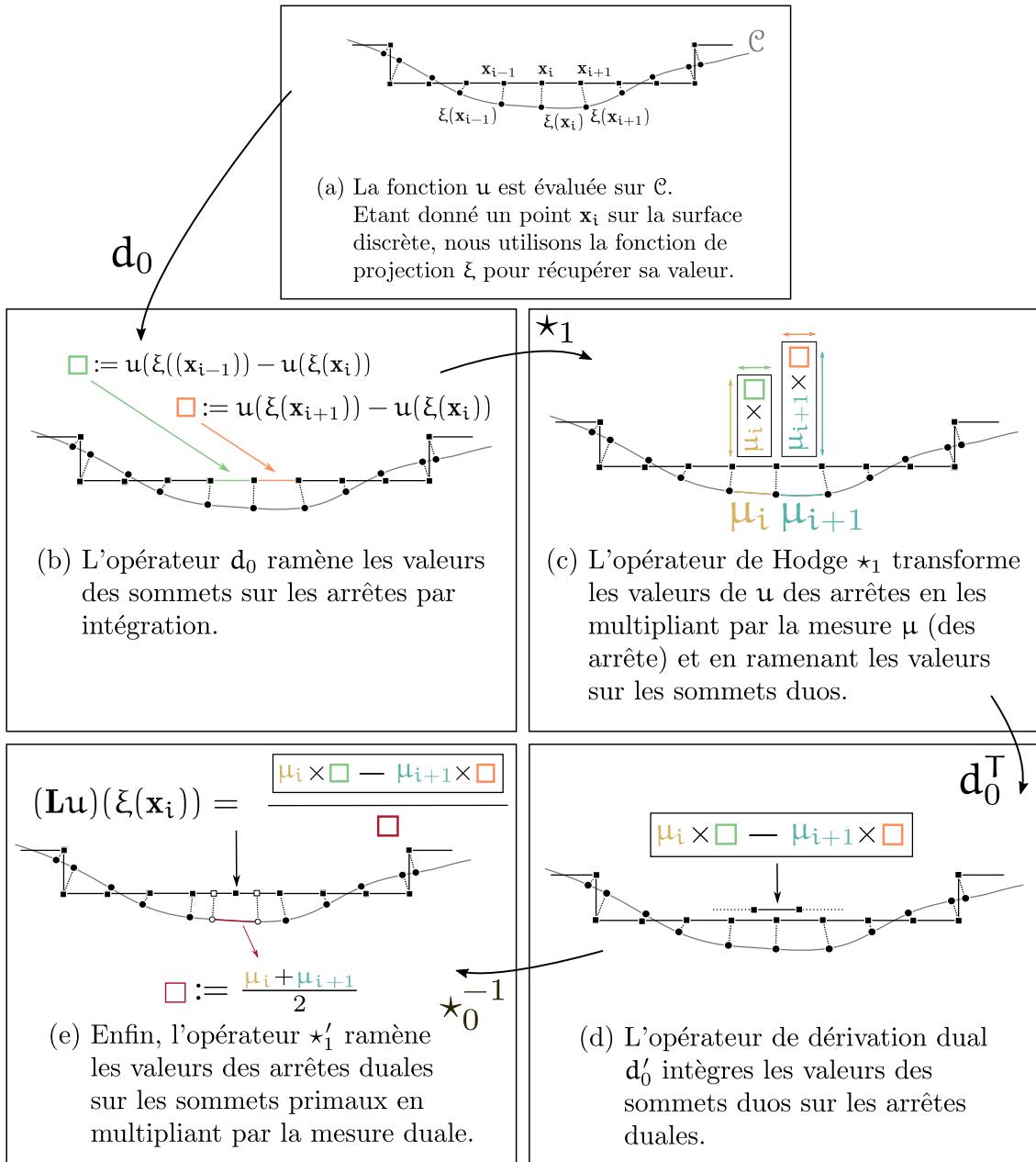
$$u^{(1)}(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(x + \varepsilon) - u(x)}{\varepsilon}.$$

Ici,  $\varepsilon$  représente un petit déplacement géodésique le long de la courbe  $\mathcal{C}$  depuis le point  $x$ . En réappliquant la formule de dérivée sur la dérivée elle-même nous obtenons l'opérateur de Laplace appliqué à la fonction  $u$  sur la courbe  $\mathcal{C}$  :

$$u^{(2)}(x) = (\Delta u)(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(x + \varepsilon) + u(x - \varepsilon) - 2u(x)}{\varepsilon^2}.$$

Nous pouvons donc approximer l'opérateur de Laplace sur la courbe par :

$$(\Delta_1 u)(x) := \frac{u(x + \varepsilon) + u(x - \varepsilon) - 2u(x)}{\varepsilon^2}.$$



**Fig. 4.1** Illustration de l'opérateur de Laplace–Beltrami discret obtenu en utilisant le calcul extérieur discret sur les courbes digitales. L'opérateur discret

$$\mathcal{L} : \bigwedge^0(D_h(\mathcal{L})) \rightarrow \bigwedge^0(D_h(\mathcal{L}))$$

agit sur les 0-formes  $\sigma^0$  (les fonctions) définies sur les sommets de la courbe discrète. Nous injectons les informations de mesures des arrêtes  $\mu$  à travers les opérateurs  $\star_0^{-1}$  et  $\star_1$ . Étant donné un point  $x_i$  et ses deux arrêtes adjacentes numérotées par  $i$  et  $i + 1$ , nous avons

$$(\mathcal{L}u)(x_i) = \frac{2}{\mu_i + \mu_{i+1}} \left[ \frac{1}{\mu_i} u(x_{i-1}) + \frac{1}{\mu_{i+1}} u(x_{i+1}) - \left( \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_{i+1}} \right) u(x_i) \right].$$

Ce schéma correspond donc à une double différence finies non symétrique.

Cette discréétisation est une double différence finie symétrique. En injectant le théorème de Taylor-Lagrange

$$u(x \pm \varepsilon) = u(x) \pm \frac{1}{1!} u^{(1)}(x) \varepsilon + \frac{1}{2!} u^{(2)}(x) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

dans notre approximation du laplacien, on obtient :

$$(\Delta_1 u)(x) = \frac{u^{(2)}(x) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)}{\varepsilon^2} = u^{(2)}(x) + O(\varepsilon).$$

Ainsi l'erreur commise avec ce schéma d'approximation est linéaire en  $\varepsilon$ .

Il est également possible d'approximer l'opérateur par une discréétisation non-symétrique. Étant données deux distances géodésiques  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  (à gauche et à droite) et un point  $x \in \mathcal{C}$  nous avons

$$(\Delta_2 u)(x) := \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} u(x - \varepsilon_1) + \frac{1}{\varepsilon_2} u(x + \varepsilon_2) - \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) u(x) \right].$$

Cette approximation est appelée double différence finie non symétrique. En remplaçant  $u(x - \varepsilon_1)$  et  $u(x + \varepsilon_2)$  par leur développement de Taylor-Lagrange nous avons

$$(\Delta_2 u)(x) = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left[ u^{(1)}(x) + \frac{\varepsilon_1}{2} u^{(2)}(x) + (-u^{(1)}(x)) + \frac{\varepsilon_2}{2} u^{(2)}(x) + O(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \right]$$

qui se simplifie en

$$(\Delta_2 u)(x) = u^{(2)}(x) + O(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Ici l'erreur d'approximation commise est toujours linéaire en  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ .

#### 4.1.3 Opérateur non-symétrique avec estimation des mesures

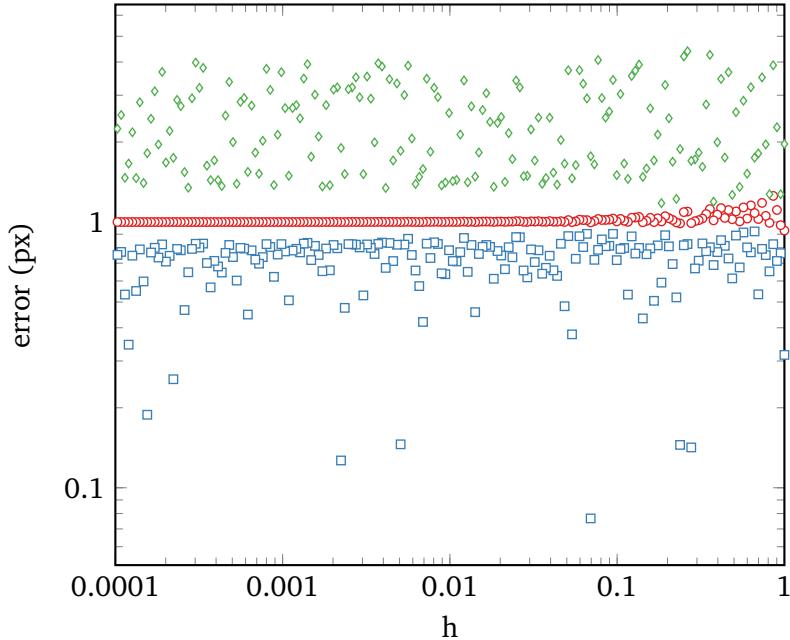
Supposons que nous savons approximer la paire de distance géodésique  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  par  $\tilde{\varepsilon}_1$  et  $\tilde{\varepsilon}_2$ . L'opérateur s'écrit alors

$$(\Delta_3 u)(x) := \frac{2}{\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2} \left[ \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_1} u(x - \varepsilon_1) + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_2} u(x + \varepsilon_2) - \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_1} + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_2} \right) u(x) \right].$$

Toujours en remplaçant  $u(x - \varepsilon_1)$  et  $u(x + \varepsilon_2)$  avec le développement de Taylor-Lagrange dans la définition de  $\Delta_3$  nous avons :

$$(\Delta_3 u)(x) = \frac{2}{\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2} \left[ \left( \frac{\varepsilon_2}{\tilde{\varepsilon}_2} - \frac{\varepsilon_1}{\tilde{\varepsilon}_1} \right) u^{(1)}(x) + \left( \frac{\varepsilon_1^2}{2\tilde{\varepsilon}_1} + \frac{\varepsilon_2^2}{2\tilde{\varepsilon}_2} \right) u^{(2)}(x) + O \left( \frac{\varepsilon_1^3}{\tilde{\varepsilon}_1} + \frac{\varepsilon_2^3}{\tilde{\varepsilon}_2} \right) \right].$$

Nous pouvons donc voir qu'il y a convergence si les ratios  $\frac{\varepsilon_1}{\tilde{\varepsilon}_1}$  et  $\frac{\varepsilon_2}{\tilde{\varepsilon}_2}$  tendent vers 1 : dans ce cas là, le terme de la dérivée première s'annule, et nous obtenons une approximation de la dérivée seconde. A l'inverse, si ces ratios ne tendent pas vers 1, alors il n'y a pas convergence. Nous illustrons dans la figure 4.2 un contre-exemple à la convergence. Nous discréétisons pour cela un cercle unité avec le processus de discréétisation de Gauss, et estimons les normales via la méthode des segments maximaux [16]. Une fois les normales obtenues, nous pouvons récupérer la longueurs des segments en effectuant un produit



**Fig. 4.2** Nous affichons le ratio entre la mesure estimée d'une arrête de la courbe digitale (ici la discréétisation d'un cercle de rayon un) et la vraie mesure projeté (*i.e.* la longueur géodésique). Bien qu'en moyenne ce ratio vole un (en rouge  $\circ$ ), les valeurs extrémées (en vert  $\diamond$  et bleu  $\square$ ) ne tendent pas vers un.

scalaire avec la normale perpendiculaire au segment. Nous savons théoriquement qu'un tel estimateur converge dans le pire des cas avec une erreur en  $O(h)$  pour certaines classes de forme. Nous observons dans le cas de la sphère une vitesse de convergence plus rapide en  $O(h^{\frac{3}{2}})$ . Cependant, nous voyons sur la figure que même si les ratios valent en moyennes 1, les valeurs extrémées des ratios ne tendent pas vers 1 (il y a un biais constant), ce qui nous fournit un contre-exemple à la  $C^2$ -convergence de l'opérateur  $\Delta_3$ .

## 4.2 Adaptation de l'opérateur d'Alexa et Wardetzky sur les surfaces digitales

Une seconde idée pour discréétiser l'opérateur de Laplace–Beltrami sur les surfaces digitales est d'utiliser la formulation proposée par Alexa et Wardetzky sur les surfaces polygonales généralisées [1] que nous avions présentée dans le section 3.4. Le coeur de la méthode réside dans la discréétisation du gradient de l'aire maximum sur un polygone. Nous rappelons que les auteurs montrent que ce gradient prend la forme suivante sur un polygone  $p$  :

$$\nabla_{x_i} |\mathbf{a}_p| = \left( \frac{1}{2|\mathbf{a}_p|} \mathbf{a}_p \times (\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i+1}) \right)^T = (\tilde{\mathbf{L}}_p \mathbf{X})_i$$

où  $\tilde{\mathbf{L}}_p := \mathbf{d}^T \tilde{\mathbf{M}}_p \mathbf{d}$  et

$$\tilde{\mathbf{M}}_p := \frac{1}{|\mathbf{a}_p|} \mathbf{B}_p \mathbf{B}_p^T.$$

Dans le cas des surfaces digitales, le polygone  $\mathfrak{p}$  correspond à un carré (ou face) de côté  $h$ . Le but ici est d'injecter la mesure de cette face dans le calcul du gradient, mesure qui nous est donnée par

$$\mu(\mathfrak{p}) := h^2 \langle \tilde{\mathbf{n}}, \mathbf{n}_e \rangle$$

où  $\tilde{\mathbf{n}}$  est la normale estimée à la face et  $\mathbf{n}_e$  la normale perpendiculaire à la face. Pour ce faire, nous projetons la face sur le plan passant par le centre de la face et ayant pour normale  $\tilde{\mathbf{n}}$ . Plus précisément, si nous notons par  $x_i$  les sommets de cette face et par  $y_i$  les sommets projetés, avec  $1 \leq i \leq 4$  dans notre cas, nous avons

$$y_i := x_i - \langle x_i - b_p, \tilde{\mathbf{n}} \rangle \tilde{\mathbf{n}}$$

où  $b_p$  est le centroid de la face (par exemple  $\frac{1}{2}(x_1 + x_3)$ ). Nous modifions donc la matrice  $B_p$  en remplaçant les milieux des  $x_i$  par les milieux des  $y_i$ . La valeur de  $|\mathbf{a}_p|$  est alors donnée par la mesure de  $\mathfrak{p}$  à savoir  $\mu(\mathfrak{p})$ . Nous modifions l'Algorithme 1 : L'argument qui

---

**Algorithme 2** Calcul des matrices  $M_p$  par face de la surface digitale. La matrice  $C$  correspond aux vecteurs colonnes qui forment la base du noyau de  $E^T$ . Ceux-ci peuvent être calculés rapidement en utilisant une décomposition en valeurs singulières de la matrice.

---

```

1: CONSTRUIRE  $M_p$ (face  $\mathfrak{p}$ , normale estimée  $\tilde{\mathbf{n}}$ , pas de discréétisation  $h$ , paramètre  $\lambda$ )
2:  $\mathbf{B}, \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ 
3:  $b_p \leftarrow \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$ 
4: Pour tous les sommets  $x_i$  de la face  $\mathfrak{p}$ 
5:    $y_i \leftarrow x_i - \langle x_i - b_p, \tilde{\mathbf{n}} \rangle \tilde{\mathbf{n}}$ 
6: Pour tous les sommets  $y_i$ 
7:    $(\mathbf{E})_i \leftarrow (y_{i+1} - y_i)^T$ 
8:    $(\mathbf{B})_i \leftarrow \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_i)^T$ 
9:  $\mu(\mathfrak{p}) \leftarrow h^2 \langle \tilde{\mathbf{n}}, \mathbf{n}_e \rangle$ 
10:  $\tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{\mu(\mathfrak{p})} \mathbf{B} \mathbf{B}^T$ 
11:  $\mathbf{C}$  = le noyaux orthogonal à  $E^T$  (en utilisant SVD par exemple)
12:  $M_p = \tilde{\mathbf{M}} + \lambda \mathbf{C} \mathbf{C}^T$ 

```

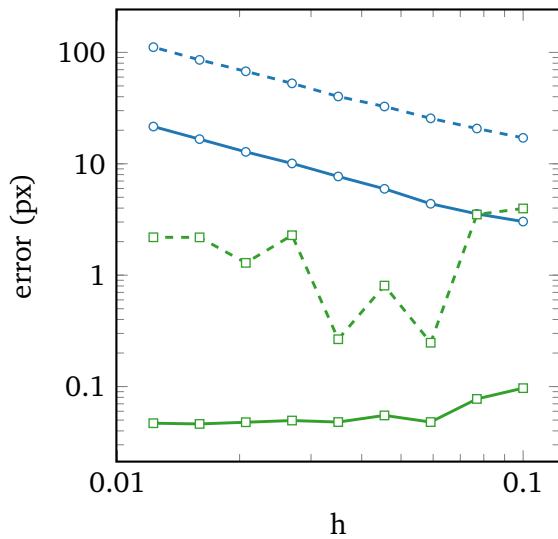
---

nous permet d'utiliser cette projection est l'invariance du calcul du gradient par polygone de la surface. Les auteurs mentionnent, en effet à la fin du paragraphe 3.2 de l'article, que le choix de la base pour le calcul de  $\tilde{\mathbf{M}}$  n'a aucune conséquence à cause de la précense de l'opérateur de dérivée extérieure  $d$ . Le choix de du point appartenant au plan tangent n'a donc pas d'importance, c'est pourquoi nous choisissons le centre de la face  $\mathfrak{p}$ .

Nous allons maintenant montrer un contre-exemple à la  $C^2$ -convergence pour cette discréétisation de l'opérateur. Pour ce faire, nous allons comparer l'estimation de courbure moyenne sur un tore discréétisé via le processus de Gauss à la vraie courbure moyenne sur la surface continue. Nous rappelons que l'opérateur de Laplace–Beltrami est reliée à la courbure moyenne  $H$  via

$$\Delta x = \frac{1}{2} H n$$

où  $x \in M$  et  $n$  est la normale à la surface  $M$  au point  $x$ . Nous affichons le graphe de convergence dans la figure. 4.3 où nous appliquons le laplacien de graphe sur la surface digitale (en bleu) et où nous appliquons la modification que nous venons de décrire avec



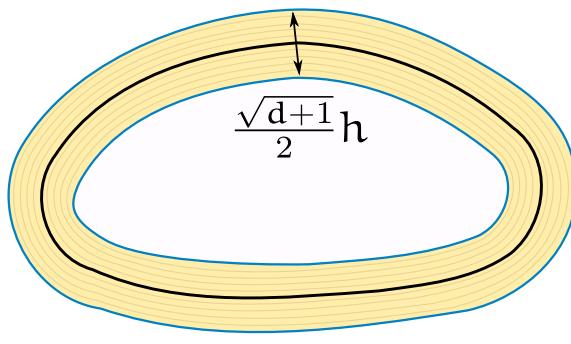
**Fig. 4.3** Résultats de  $C^2$ -convergence de la norme du vecteur de courbure moyenne pour l'adaptation de l'opérateur d'Alexa et Wardetzky sur les surfaces digitales. Nous affichons en bleu (—○—) l'erreur induite par l'application de l'opérateur sur la surface digitale et en vert (—□—) l'erreur induite par la modification présenté dans l'Algorithm 2. Les lignes pointillées correspondent à l'erreur maximum, là où les lignes pleines correspondent à l'erreur moyenne entre le discréteisé et le vrai opérateur de Laplace–Beltrami.

la mesure des faces (en vert). Bien qu'il existe une nette amélioration entre l'opérateur sur les graphes et notre modification en terme d'erreur (nous passons d'une erreur qui diverge à une erreur constante), nous n'obtenons pas expérimentalement la  $C^2$ -convergence.

Nous avons donc vu que d'une part l'application de l'opérateur issu du calcul discret sur les courbes digitales et d'autre part l'adaptation de l'opérateur d'Alexa et Wardetzky sur les surfaces digitales nous permet d'exhiber des contre-exemples à la  $C^2$ -convergence. Nous avions déjà remarqué dans le chapitre 3 qu'en règle générale, les opérateurs locaux définis au sens de l'Equation (3.1.1) ne possèdent pas la propriété ( $C^2$ -CON), ce que nous confirmons sur les surfaces digitales. Nous nous tournons donc vers une formulation globale par convolution de l'opérateur de Laplace–Beltrami pour obtenir une discréétisation convergente de celui-ci.

## 4.3 Discréétisation sur les surfaces digitales

Motivé par les deux paragraphes précédents, nous allons maintenant présenter une discréétisation de l'opérateur qui est  $C^2$ -convergente. Nous nous tournons vers une méthode par convolution introduite par Belkin *et al.* [5] dans la section 3.5 : nous discréétisons pour cela la convolution entre des noyaux de la chaleur euclidiens et des différences de fonctions sur nos surfaces. A la différence de Belkin *et al.*, les sommets de nos maillages ne sont pas sur la variété différentielle sous-jacente. Outre la nécessité d'approximer de façon précise les mesures de nos éléments, nous avons dans un premier temps besoin de mettre en relation la valeur de la fonction sur la surface discrète avec celle sur la variété. Nous utilisons pour cela la théorie de la mesure géométrique de Federer [33] qui nous permet de mettre en lien les deux objets via la fonction de projection  $\xi$  (définie dans la



—  $\partial M$  ■  $(\partial M)^{\frac{\sqrt{d+1}}{2}}$  —  $\partial \left[ (\partial M)^{\frac{\sqrt{d+1}}{2}} \right]$

**Fig. 4.4** Illustration de l'extension tubulaire  $\tilde{u}$  de  $u$  à  $\mathbb{R}^2$  dans le cas d'une fonction du plan. La variété  $\partial M$  est ici une courbe  $\gamma$  (en noir sur la figure) plongée dans  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $\tilde{u}$  est égale à  $u$  quand  $x \in \gamma$ , et est égale à  $u \circ \xi$  lorsque  $x$  est dans le  $\frac{\sqrt{d+1}}{2}h$ -offset de  $\partial M$  (dénommé ici  $\gamma^{\frac{\sqrt{d+1}}{2}h}$  et est représenté en jaune sur la figure).

définition (2.2.4)). Nous considérons dans tout ce qui suit une variété Riemannienne  $M$  de dimension  $d$  plongée dans  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Nous supposons que cette variété est compact : cela nous permet de considérer l'espace des fonctions  $C^2(\partial M)$  équipée de la norme de Lesbegue  $L^\infty$ . Nous rappelons qu'avec ces hypothèses, un tel espace est un espace de Banach (car nos fonctions sont bornées).

### 4.3.1 Extension de $u$ à $\mathbb{R}^{d+1}$

Comme mentionné dans le théorème (2.2.3), le  $h$ -bord  $\partial_h M$  est une  $O(h)$ -Hausdorff approximation de  $\partial M$ . Nous avons donc besoin d'étendre la définition de  $u$  sur  $\partial M$  dans un tube autour de  $\partial_h M$  :

DÉFINITION Extension tubulaire de  $u$  (4.3.1)

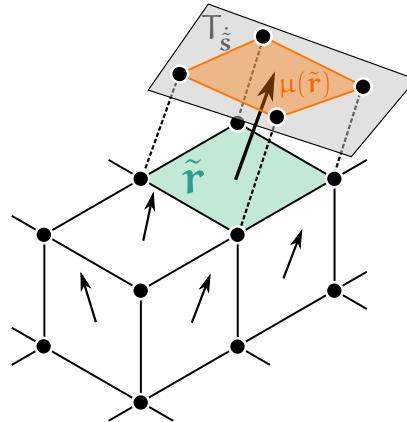
Étant donné une fonction  $u$  définie sur  $\partial M$ , l'extension tubulaire  $\tilde{u}$  de  $u$  à  $\mathbb{R}^{d+1}$  est

$$\tilde{u} : x \mapsto \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \partial M \\ (u \circ \xi)(x) & \text{if } x \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \partial M \text{ et } \delta_{\partial M}(x) \leq \frac{\sqrt{d+1}}{2}h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\xi$  est l'application de projection qui a tout point  $x$  de l'espace associe le ou les plus proche(s) voisin(s) et  $\delta_{\partial M}$  est la fonction de distance. Une illustration de cette définition peut-être trouvée dans la figure. 4.4.

L'idée est ici de prolonger la fonction dans le sens des normales dans un tube de taille  $\frac{\sqrt{d+1}}{2}h$ . Nous savons (cf. théorème (2.2.3)) qu'il existe toujours une projection d'un point de  $\partial_h M$  sur  $\partial M$ , ce qui nous assure que la fonction  $\tilde{u}$  est bien définie. Notons cependant que de part sa définition,  $\tilde{u}$  n'est pas continue sur le bord du tube, et donc non-différentiable.

**Fig. 4.5** Sont représentés par des points noirs les surfels, et par des segments noirs les lignels. La mesure  $\mu(\tilde{r})$  (en orange) d'une cellule  $\tilde{s}$  (en verte) correspond à l'aire de la projection de la cellule sur le plan tangent induit par la normale estimée.



### 4.3.2 Intégration digitale

Il s'agit maintenant de discréteriser l'Equation (3.5.3b) sur nos surfaces digitales. Nous utilisons le schéma numérique introduit par Lachaud et Thibert [54].

---

DÉFINITION Digital surface integration (4.3.2)

Soient  $Z$  un ensemble digital et  $h$  son pas de discréétisation. Soient  $f : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable et  $\hat{n}$  un estimateur de normales. L'intégrale digitale est donnée par

$$DI_h(f, Z, \hat{n}) = \sum_{\tilde{r} \in \mathbb{R}_h^d \cap \partial Q_h[Z]} h^d f(\tilde{r}) \mu(\tilde{r}),$$

où  $\tilde{r}$  est le centroïde d'une  $d$ -cellule  $\tilde{r}$  et  $\mu(\tilde{r}) = |\hat{n}(\tilde{r}) \cdot n(\tilde{r})|$  l'aire estimée d'un surfel  $\tilde{r}$  avec  $n$  la normale triviale de la  $d$ -cellule  $\tilde{r}$ .

---

L'intégrale est approximée par une somme discrète sur les éléments de dimension  $d$ . Étant donné une cellule  $\tilde{r}$ , la fonction est évaluée au centroïde  $\tilde{r}$ , et nous utilisons une approximation de l'aire de la cellule  $\mu$  donnée par le produit scalaire entre une normale estimée en  $\tilde{r}$  et la normale élémentaire perpendiculaire à  $\tilde{r}$ . Cette estimation de l'aire est appelée la mesure de la cellule; elle correspond à l'aire de la cellule projetée sur le plan tangent induit par la normale estimée (voir figure. 4.5). C'est une mesure classique en géométrie discrète [28, 59]. Nous utilisons des intégrants invariaux pour estimer la normale [17, 60] qui possèdent la propriété de convergence vers leur contrepartie lisse. A noter que la somme des mesures sur toute la surface donne un estimateur d'aire globale de  $\partial M$  qui converge vers la vraie aire de  $\partial M$  [54]. Cette mesure est un élément clef de l'intégration discrète, qui donne lieu à un estimateur d'intégrale convergent.

Si l'on restreint  $Z$  dans la définition (4.3.2) à la discréétisation de Gauss d'un ensemble compact à reach positif, le théorème (4.3.1) nous donne une preuve théorique de convergence de l'intégrale digitale vers la somme continue.

THÉORÈME Théorème 4. de [54]

(4.3.1)

Soit  $M$  un domaine compact de  $\mathbb{R}^{d+1}$  à reach positif  $R$ . Pour  $h \leq \frac{R}{\sqrt{d+1}}$ , l'intégrale digitale converge vers l'intégrale continue sur  $\partial M$ . Plus précisément, pour toute fonction intégrable  $f : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , nous avons

$$\left| \int_{\partial M} f(x) dx - DI_h(f, D_h(M), \hat{n}) \right| \leq 2^{d+3}(d+1)^{\frac{3}{2}} \text{Area}(\partial M) \left( \text{Lip}(f) \sqrt{d+1} h + \|f\|_\infty \cdot \|\hat{n}(\cdot) - n(\cdot)\|_{est} \right),$$

où  $\|f\|_\infty := \max_{x \in \mathbb{R}^{d+1}} |f(x)|$  et  $\text{Lip}(f) := \max_{x \neq y} |f(x) - f(y)|/\|x - y\|_2$ .

### 4.3.3 Formulation de l'opérateur

En appliquant le principe de discréétisation des intégrales de la définition (4.3.2) à l'Equation (3.5.3b), nous définissons notre opérateur de Laplace–Beltrami sur les surfaces digitales. Le choix entre l'Equation (3.5.3a) et l'Equation (3.5.3b) est théorique : nous utiliserons la propriété du gradient de  $u$  pour borner  $u(x) - u(y)$ . Concernant le paramètre de temps  $t$ , nous le choisissons ni trop grand (pour ne pas trop lisser) ni trop petit (pour ne pas retomber sur le laplacien de graphe). Nous posons  $t : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction du paramètre de temps discret. C'est une fonction du pas de la grille  $h$ , et pour plus de lisibilité, nous la dénommerons  $t_h$  dans le reste de ce papier. Nous prendrons typiquement  $t_h := k_t h^\alpha$  avec  $\alpha > 0$  et  $k_t$  est une constante qui correspond à la taille de la gaussienne pour un pas de discréétisation égal à un (voir la section 3.5).

DÉFINITION Opérateur de Laplace–Beltrami digital (4.3.3)

Soient  $Z$  un ensemble digital et  $h$  le pas de discréétisation. Soit  $u$  une fonction définie au moins sur  $\partial_h M$ . L'opérateur de Laplace–Beltrami digitale est :

$$(\mathcal{L}_h u)(\tilde{s}) := \frac{1}{t_h (4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} \sum_{\tilde{r} \in \mathbb{F}_h^d \cap \partial Q_h[Z]} e^{-\frac{\|\tilde{r} - \tilde{s}\|^2}{4t_h}} [u(\tilde{r}) - u(\tilde{s})] \mu(\tilde{r}),$$

où  $\tilde{r}$  (resp.  $\tilde{s}$ ) est le centroïde du surfel  $\tilde{r}$  (resp.  $\tilde{s}$ ),  $\mu(\tilde{r})$  est égale au produit scalaire entre une normale estimée et la normale orthogonale au surfel  $\tilde{s}$  et  $t_h$  est une fonction en  $h$  qui tend vers zéro lorsque  $h$  tend vers zéro.

L'algorithme naïf consiste à simplement parcourir deux fois la surface pour effectuer la somme. Nous avons alors une complexité égale à  $O(n^2)$ .

## 4.4 Preuve de la $C^2$ -convergence

Nous posons  $t_h := h^\alpha$  pour  $\alpha > 0$  pour la suite. La stricte positivité de  $\alpha$  est un pré-requis pour le théorème (3.5.2) étant donné que  $t_h$  est une fonction qui a pour limite zéro en zéro. Nous assumons que l'erreur induite par l'estimateur de normales est bornée, c'est-

à-dire que  $\|\hat{\mathbf{n}}(\dot{\mathbf{c}}) - \mathbf{n}(\dot{\mathbf{c}})\|_{\text{est}} \leq O(h^\beta)$  avec  $\beta > 0$ . La valeur de  $\beta$  dépend entièrement de l'estimateur utilisé [16]. Nous rappelons par exemple que la vitesse de convergence multigrille d'Integral Invariant [17, 60] est de  $O(h^{2/3})$ .

Nous prouvons la convergence de notre opérateur lorsque l'ensemble digital  $Z$  considéré est la discréttisation de Gauss  $D_h(M)$  d'une variété compacte  $M$ . Soit  $\dot{s}$  un quad appartenant à  $\mathbb{F}_h^d \cap \partial_h M$ , nous montrons que

$$\left| (\Delta u)(\xi(\dot{s})) - (\mathcal{L}_h \tilde{u})(\dot{s}) \right| \quad (4.4.1)$$

est bornée par une fonction qui tend vers zéro quand  $h$  tend vers zéro.

Tout d'abord, nous découpons l'Equation (4.4.1) en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \left| (\Delta u)(\xi(\dot{s})) - (\mathcal{L}_h \tilde{u})(\dot{s}) \right| &\leq \\ &\left| (\Delta u)(\xi(\dot{s})) - (\mathcal{L}_h^* u)(\xi(\dot{s})) \right| \quad (Q1) \end{aligned}$$

$$+ \left| (\mathcal{L}_h^* u)(\xi(\dot{s})) - (\mathcal{L}_h^* \tilde{u})(\dot{s}) \right| \quad (Q2)$$

$$+ \left| (\mathcal{L}_h^* \tilde{u})(\dot{s}) - (\mathcal{L}_h \tilde{u})(\dot{s}) \right| \quad (Q3)$$

La preuve est découpée en trois parties :

- (i) La convergence de (Q1) est donnée par le théorème (3.5.2) de Belkin *et al.*.
- (ii) Une borne sur (Q2) est donnée dans la section 4.4.1. L'idée est ici d'étudier la différence entre l'intégrale de  $\mathcal{L}_h^*$  appliquée à  $u$  et  $\mathcal{L}_h^*$  appliquée à  $\tilde{u}$ . Nous utiliserons pour cela les résultats présentés en annexe dans la section 4.5.1.
- (iii) Le lemme (4.4.2) de la section 4.4.2 donne une borne sur (Q3). C'est une combinaison du lemme (4.4.3) (où nous étudions la norme et le gradient d'une certaine fonction  $g_{\dot{s}}^h$ ) et du théorème (4.3.1) de Lachaud et Thibert.

Le résultat de convergence générale se trouve dans la section 4.4.3 au travers du théorème (4.4.1). Nous ne donnons pas une vitesse de convergence globale étant donné que nous ne connaissons pas celle du théorème (3.5.2) de Belkin *et al.*.

#### 4.4.1 Une borne sur (Q2)

LEMME Borne sur (Q2)

(4.4.1)

Soient  $s \in \mathbb{F}_h^d \cap \partial_h M$ ,  $u \in C^2(\partial M)$  une fonction et son extension  $\tilde{u}$ . Pour  $t_h = h^\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq \frac{2}{2+d}$  et  $h \leq h_{\max}$  avec  $h_{\max}$  le minimum entre  $\text{Diam}(\partial M)$ ,  $K_3(d, \alpha, \text{Diam}(\partial M))$  et  $R/\sqrt{d+1}$ , nous avons

$$|(\mathcal{L}_h^* u)(\xi(\dot{\tilde{s}})) - (\mathcal{L}_h^* \tilde{u})(\dot{\tilde{s}})| \leq \text{Area}(\partial M) \|\nabla u\|_\infty \left[ K_1(d) h^{1-\alpha(1+\frac{d}{2})} + K_2(d) h^{2-\alpha\frac{3+d}{2}} \right]$$

avec

$$K_1(d) := \frac{\sqrt{d+1}}{2^{d-1} e \pi^{\frac{d}{2}}} \text{ and } K_2(d) := \frac{3(d+1)}{2^{d+\frac{5}{2}} \sqrt{e} \pi^{\frac{d}{2}}}.$$

PREUVE En utilisant la définition (3.5.1), nous avons :

$$\begin{aligned} |(\mathcal{L}_h^* u)(\xi(\dot{\tilde{s}})) - (\mathcal{L}_h^* \tilde{u})(\dot{\tilde{s}})| &= \frac{1}{t_h (4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} \left| \int_{y \in \partial M} e^{-\frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|^2}{4t_h}} [u(y) - u(\xi(\dot{\tilde{s}}))] d\text{Vol} \right. \\ &\quad \left. - \int_{y \in \partial M} e^{-\frac{\|y - \dot{\tilde{s}}\|^2}{4t_h}} [\tilde{u}(y) - \tilde{u}(\dot{\tilde{s}})] \right| d\text{Vol}. \end{aligned}$$

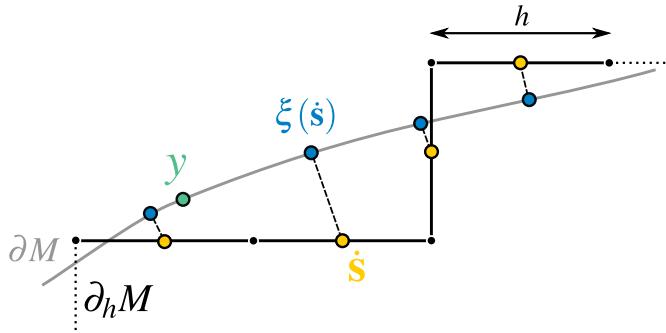
Sachant que  $[u(y) - u(\xi(\dot{\tilde{s}}))] = [\tilde{u}(y) - \tilde{u}(\dot{\tilde{s}})]$ , nous factorisons par  $[u(y) - u(\xi(\dot{\tilde{s}}))]$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} &|(\mathcal{L}_h^* u)(\xi(\dot{\tilde{s}})) - (\mathcal{L}_h^* \tilde{u})(\dot{\tilde{s}})| \\ &= \frac{1}{t_h (4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} \left| \int_{y \in \partial M} \left( e^{-\frac{\|y - \dot{\tilde{s}}\|^2}{4t_h}} - e^{-\frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|^2}{4t_h}} \right) [u(y) - u(\xi(\dot{\tilde{s}}))] d\text{Vol} \right|. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Étant donné que la norme du gradient de  $u$  est bornée (cf. le théorème des valeurs maximales), nous savons que  $u$  est Lipschitz-continue avec une constante de Lipschitz égale à  $\|\nabla u\|_\infty$ . L'Equation (4.4.3) devient alors

$$\begin{aligned} &|(\mathcal{L}_h^* u)(\xi(\dot{\tilde{s}})) - (\mathcal{L}_h^* \tilde{u})(\dot{\tilde{s}})| \\ &\leq \frac{1}{t_h (4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} \int_{y \in \partial M} \left| e^{-\frac{\|y - \dot{\tilde{s}}\|^2}{4t_h}} - e^{-\frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|^2}{4t_h}} \right| \cdot |u(y) - u(\xi(\dot{\tilde{s}}))| d\text{Vol} \\ &\leq \frac{\|\nabla u\|_\infty}{t_h (4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} \int_{y \in \partial M} \left| e^{-\frac{\|y - \dot{\tilde{s}}\|^2}{4t_h}} - e^{-\frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|^2}{4t_h}} \right| \cdot \|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\| d\text{Vol} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Notons  $b := e^{-\frac{\|y - \dot{\tilde{s}}\|^2}{4t_h}} - e^{-\frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|^2}{4t_h}}$  et donnons une borne sur  $|b|$ . Étant donné le signe arbitraire de  $b$ , nous allons dans un premier temps donner une borne inférieure négative puis une borne supérieure positive à  $b$  et conclure en utilisant le lemme (4.5.1).



**Fig. 4.6** Illustration de la fonction de projection  $\xi$ . Le centre des surfels  $\hat{s}$  (in yellow) sont projetés en utilisant  $\xi$  sur les points bleus. Le coeur de la preuve du lemme (4.4.1) réside dans la comparaison entre  $\|y - \hat{s}\|$  et  $\|y - \xi(\hat{s})\|$ . Nous utilisons également une inégalité triangulaire dans  $(\hat{s}, \xi(\hat{s}), y)$  pour la preuve.

Dérivons tout d'abord la borne supérieure. Nous utilisons l'inégalité triangulaire dans  $(\hat{s}, \xi(\hat{s}), y)$  (voir figure. 4.6) :

$$\|y - \hat{s}\|^2 \geq \|y - \xi(\hat{s})\|^2 - \|\hat{s} - \xi(\hat{s})\|^2 - 2\|y - \hat{s}\| \|\hat{s} - \xi(\hat{s})\|.$$

Sachant que  $\|y - \hat{s}\| \leq \|y - \xi(\hat{s})\| + \|\hat{s} - \xi(\hat{s})\|$  nous avons :

$$\begin{aligned} & \|y - \hat{s}\|^2 \\ & \geq \|y - \xi(\hat{s})\|^2 - \|\hat{s} - \xi(\hat{s})\|^2 - 2(\|y - \xi(\hat{s})\| + \|\hat{s} - \xi(\hat{s})\|) \|\hat{s} - \xi(\hat{s})\| \\ & = \|y - \xi(\hat{s})\|^2 - 3\|\hat{s} - \xi(\hat{s})\|^2 - 2\|y - \xi(\hat{s})\| \|\hat{s} - \xi(\hat{s})\|. \end{aligned}$$

Nous appliquons maintenant la propriété de Hausdorff entre  $\partial_h M$  et  $\partial M$  au terme  $\|\hat{s} - \xi(\hat{s})\|$  (théorème (2.2.3)) :

$$\|y - \hat{s}\|^2 \geq \|y - \xi(\hat{s})\|^2 - \frac{3(d+1)}{4} h^2 - \|y - \xi(\hat{s})\| \sqrt{d+1} h.$$

Nous divisons ensuite par  $4t_h$ , et appliquons la fonction  $e^{-x}$  à l'inégalité

$$e^{-\frac{\|y - \hat{s}\|^2}{4t_h}} \leq e^{-\frac{\|y - \xi(\hat{s})\|^2}{4t_h}} e^{\frac{3(d+1)}{16t_h} h^2 + \frac{\|y - \xi(\hat{s})\| \sqrt{d+1}}{4t_h} h}$$

et soustrayons  $e^{-\frac{\|y - \xi(\hat{s})\|^2}{4t_h}}$  de chaque côté :

$$b \leq e^{-\frac{\|y - \xi(\hat{s})\|^2}{4t_h}} \left( e^{\frac{3(d+1)}{16t_h} h^2 + \frac{\|y - \xi(\hat{s})\| \sqrt{d+1}}{4t_h} h} - 1 \right).$$

Pour  $0 \leq x \leq 2.51286$  l'inégalité  $e^{x/2} - 1 \leq x$  est vraie (voir le lemme (4.5.2) dans l'annexe). Nous l'appliquons à la dernière équation :

$$b \leq e^{-\frac{\|y - \xi(\hat{s})\|^2}{4t_h}} \left[ \frac{3(d+1)}{8t_h} h^2 + \frac{\|y - \xi(\hat{s})\| \sqrt{d+1}}{2t_h} h \right] =: c.$$

La borne  $c$  est valide lorsque  $0 \leq x \leq 2.51286$ . En remplaçant  $x$  par  $\frac{3(d+1)}{8}h^{2-\alpha} + \frac{\|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\| \sqrt{d+1}}{2}h^{1-\alpha}$  et en supposant que  $h \leq \text{Diam}(\partial M)$  (ce qui est raisonnable dans notre contexte) nous avons :

$$\begin{aligned}
& \frac{3(d+1)}{8}h^{2-\alpha} + \frac{\|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\| \sqrt{d+1}}{2}h^{1-\alpha} \leq 2.51286 \\
& \iff \frac{3(d+1)}{8}h^{2-\alpha} + \frac{\text{Diam}(\partial M) \sqrt{d+1}}{2}h^{1-\alpha} \leq 2.51286 \\
& \iff h^{2-\alpha} \left( \frac{3(d+1)}{8} + \frac{\sqrt{d+1}}{2} \right) \leq 2.51286 \\
& \iff h \leq \exp \left[ \frac{3.00086 - \log(3(d+1) + 4\sqrt{d+1})}{2-\alpha} \right] =: K_3(d, \alpha).
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

L'étape suivante est de trouver une borne inférieure négative pour  $b$ . Nous utilisons une inégalité triangulaire dans  $(\dot{\mathbf{s}}, \xi(\dot{\mathbf{s}}), \mathbf{y})$  (voir figure. 4.6) et à nouveau la propriété d'Hausdorff entre  $\partial_h M$  et  $\partial M$  :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{y} - \dot{\mathbf{s}}\|^2 & \leq \|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\|^2 + \|\dot{\mathbf{s}} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\|^2 + 2\|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\| \|\dot{\mathbf{s}} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\| \\
& \leq \|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\|^2 + \frac{d+1}{4}h^2 + \|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\| \sqrt{d+1}h.
\end{aligned}$$

En utilisant la même dérivation que précédemment nous avons

$$b \geq e^{-\frac{\|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\|^2}{4t_h}} \left( e^{-\frac{d+1}{16t_h}h^2 - \frac{\|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\| \sqrt{d+1}}{4t_h}h} - 1 \right) =: a.$$

Le lemme (4.4.3) nous donne  $|b| \leq \max\{|a|, c\}$ . Il s'agit maintenant de borner la valeur absolue de  $a$ :

$$\begin{aligned}
|a| &= e^{-\frac{\|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\|^2}{4t_h}} \left| e^{-\frac{d+1}{16t_h}h^2 - \frac{\|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\| \sqrt{d+1}}{4t_h}h} - 1 \right| \\
&= e^{-\frac{\|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\|^2}{4t_h}} \left( 1 - e^{-\frac{d+1}{16t_h}h^2 - \frac{\|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\| \sqrt{d+1}}{4t_h}h} \right).
\end{aligned}$$

Pour  $0 \leq x$ , l'inégalité  $1 - e^{-x} \leq x$  est vraie ce qui donne

$$|a| \leq e^{-\frac{\|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\|^2}{4t_h}} \left[ \frac{d+1}{16t_h}h^2 + \frac{\|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\| \sqrt{d+1}}{4t_h}h \right].$$

Nous avons donc  $\max\{|a|, c\} = c$  ce qui donne en utilisant le lemme (4.4.3):

$$\begin{aligned}
|b| &= \left| e^{-\frac{\|\mathbf{y} - \dot{\mathbf{s}}\|^2}{4t_h}} - e^{-\frac{\|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\|^2}{4t_h}} \right| \\
&\leq e^{-\frac{\|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\|^2}{4t_h}} \left[ \frac{3(d+1)}{8t_h}h^2 + \frac{\|\mathbf{y} - \xi(\dot{\mathbf{s}})\| \sqrt{d+1}}{2t_h}h \right].
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Nous injectons l'Equation (4.4.6) dans l'Equation (4.4.4) :

$$\begin{aligned}
& |(\mathcal{L}_h^* u)(\xi(\dot{\tilde{s}})) - (\mathcal{L}_h \tilde{u})(\dot{\tilde{s}})| \\
& \leq \frac{\|\nabla u\|_\infty}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} \cdot \frac{3(d+1)}{8t_h} h^2 \int_{y \in \partial M} \|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\| e^{-\frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|^2}{4t_h}} dVol \\
& + \frac{\|\nabla u\|_\infty}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{d+1}}{2t_h} h \int_{y \in \partial M} \|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|^2 e^{-\frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|^2}{4t_h}} dVol \\
& = \frac{3(d+1)\|\nabla u\|_\infty}{8(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} h^2 \int_{y \in \partial M} \frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|}{t_h^2} e^{-\frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|^2}{4t_h}} dVol \\
& + \frac{\|\nabla u\|_\infty \sqrt{d+1}}{2(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} h \int_{y \in \partial M} \frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|^2}{t_h^2} e^{-\frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|^2}{4t_h}} dVol
\end{aligned}$$

Pour borner la première intégrale, nous utilisons l'inégalité  $xe^{-x^2} \leq 1/\sqrt{2e}$  qui est valide pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Soit  $x = \frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|}{2\sqrt{t_h}}$  nous avons

$$\frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|}{t_h^2} e^{-\frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|^2}{4t_h}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e} \cdot t_h^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour la second intégrale, nous savons que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 e^{-x^2} \leq 1/e$ . Soit  $x = \frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|}{2\sqrt{t_h}}$  nous avons

$$\frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|^2}{t_h^2} e^{-\frac{\|y - \xi(\dot{\tilde{s}})\|^2}{4t_h}} \leq \frac{4}{e \cdot t_h}.$$

La combinaison de ces deux résultats nous donne :

$$\begin{aligned}
& |(\mathcal{L}_h^* u)(\xi(\dot{\tilde{s}})) - (\mathcal{L}_h \tilde{u})(\dot{\tilde{s}})| \\
& \leq \left[ \frac{3\sqrt{2}(d+1)\|\nabla u\|_\infty}{8\sqrt{e}(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot \frac{h^2}{t_h^{\frac{3+d}{2}}} + \frac{2\|\nabla u\|_\infty \sqrt{d+1}}{e(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{h}{t_h^{1+\frac{d}{2}}} \right] \int_{y \in \partial M} dVol \\
& = \left[ \frac{3\sqrt{2}(d+1)\|\nabla u\|_\infty}{8\sqrt{e}(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot \frac{h^2}{t_h^{\frac{3+d}{2}}} + \frac{2\|\nabla u\|_\infty \sqrt{d+1}}{e(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{h}{t_h^{1+\frac{d}{2}}} \right] \text{Area}(\partial M).
\end{aligned}$$

Nous remplaçons finalement  $t_h$  par  $h^\alpha$

$$\begin{aligned}
& |(\mathcal{L}_h^* u)(\xi(\dot{\tilde{s}})) - (\mathcal{L}_h \tilde{u})(\dot{\tilde{s}})| \\
& \leq \left[ \frac{3\sqrt{2}(d+1)\|\nabla u\|_\infty}{8\sqrt{e}(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot h^{2-\alpha\frac{3+d}{2}} + \frac{2\|\nabla u\|_\infty \sqrt{d+1}}{e(4\pi)^{\frac{d}{2}}} h^{1-\alpha(1+\frac{d}{2})} \right] \text{Area}(\partial M) \\
& = \text{Area}(\partial M) \|\nabla u\|_\infty \left[ \frac{3 \cdot (d+1)}{2^{d+\frac{5}{2}} \sqrt{e} \pi^{\frac{d}{2}}} h^{2-\alpha\frac{3+d}{2}} + \frac{\sqrt{d+1}}{d^{d-1} e \pi^{\frac{d}{2}}} h^{1-\alpha(1+\frac{d}{2})} \right].
\end{aligned}$$

ce qui nous donne la borne souhaitée. L'erreur converge lorsque l'exposant de  $h$  est positif, c'est-à-dire que  $2 - \alpha\frac{3+d}{2} > 0$  et  $1 - \alpha(1 + \frac{d}{2}) > 0$ . Il en découle d'un analyse simple que  $\alpha \leq 2/(2+d)$ , ce qui conclut la preuve du lemme.

□

#### 4.4.2 Une borne sur (Q3)

LEMME

(4.4.2)

Supposons que l'estimateur de normales converge avec une vitesse en  $O(h^\beta)$  et posons  $t_h = h^\alpha$ . Pour  $h \leq h_0 = R/\sqrt{d+1}$ ,  $\mathcal{L}_h C^2$ -converge vers  $\mathcal{L}_h$  si

$$0 < \alpha < \min \left\{ \frac{2}{d+2}, \frac{2\beta}{d+1} \right\}$$

à une vitesse de

$$C h^{1-\alpha(\frac{d}{2}+1)} + O(h^{\beta-\alpha\frac{1+d}{2}}),$$

où

$$C := \frac{48(d+1)^2}{\pi^{\frac{d}{2}}} \text{Area}(\partial M) \|\nabla u\|_\infty.$$

Nous n'explicitons la constante que pour le premier terme de la vitesse de convergence car le second terme dépend d'un estimateur de normales arbitraire. Nous introduisons une fonction  $g_{\dot{s}}^h : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$  définie comme

$$\forall x \in \mathbb{R}^{d+1}, g_{\dot{s}}^h(x) := \frac{1}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x-\dot{s}\|^2}{4t_h}} (\tilde{u}(x) - \tilde{u}(\dot{s})). \quad (4.4.7)$$

Le lemme (4.4.2) donne des conditions nécessaires pour la convergence de l'approximation digitale de l'intégrale de  $g_{\dot{s}}^h$  sur  $\partial M$ . Plus précisément, nous voulons montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{x \in \partial M} g_{\dot{s}}^h(x) d\text{Vol} - \sum_{r \in \mathbb{F}_h^d \cap \partial_h M} g_{\dot{s}}^h(\dot{r}) \mu(r) \right| = 0.$$

En utilisant théorème (4.3.1) nous avons

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x \in \partial M} g_{\dot{s}}^h(x) d\text{Vol} - \sum_{r \in \mathbb{F}_h^d \cap \partial_h M} g_{\dot{s}}^h(\dot{r}) \mu(r) \right| \\ & \leq 2^{d+3} (d+1)^{\frac{3}{2}} \text{Area}(\partial M) \left( \text{Lip}(g_{\dot{s}}^h) \sqrt{d+1} h + \|g_{\dot{s}}^h\|_\infty O(h^\beta) \right). \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Nous allons maintenant donner une borne supérieure fine de  $\text{Lip}(g_{\dot{s}}^h)$  et  $\|g_{\dot{s}}^h\|_\infty$ , qui dépendra de  $h$ . Dans un premier temps, nous étudions la restriction de  $\tilde{u}$  à l'extension tubulaire de  $\partial_h M$  dans la section 4.4.2.1, ce qui nous permet de montrer une bonne supérieure sur la constante de Lipschitz associée à  $\tilde{u}$ . Nous montrerons ensuite dans la section 4.4.2.2 une borne pour  $\text{Lip}(g_{\dot{s}}^h)$  ainsi que pour  $\|g_{\dot{s}}^h\|$  dans la restriction tubulaire. Finalement, en injectant les bornes calculées dans la section 4.4.2.2 dans le théorème (4.3.1) nous montrerons le lemme (4.4.2).

#### 4.4.2.1 Une borne sur $\text{Lip}(\tilde{u})$

Étant donné que  $\tilde{u}$  est définie comme la composition entre  $u$  et la fonction de projection  $\xi$ , nous avons besoin d'expliciter la constante de Lipschitz associée à  $\xi$ . Pour trouver une borne sur  $\text{Lip}(\tilde{u})$ , nous bornons le gradient de  $\tilde{u}$ . Nous avons donc besoin que  $\tilde{u}$  soit différentiable. Malheureusement, les dérivées de  $\tilde{u}$  ne sont pas définies sur le bord topologique de l'extension de  $\partial M$ . Nous allons, pour le moment, restreindre notre analyse à l'intérieur de l'extension tubulaire (*i.e.* l'offset)  $\mathcal{T} := (\partial M)^{\frac{\sqrt{d+1}}{2}h}$  (voir figure. 4.4). Nous notons pour une fonction arbitraire  $\text{Lip}_{\mathcal{T}} f := \max_{x, y \in \mathcal{T}, x \neq y} |f(x) - f(y)|/\|x - y\|_2$ . Nous savons que la constante de Lipschitz est bornée par la norme (vectorielle) maximale :

$$\text{Lip}_{\mathcal{T}}(\tilde{u}) \leq \max_{x \in \mathcal{T}} \left\{ \|(\nabla \tilde{u})(x)\|_{\infty} \right\} = \max_{x \in \mathcal{T}} \left\{ \|(\nabla u \circ \xi)(x)\|_{\infty} \right\}.$$

En utilisant la propriété de dérivation des fonctions composées nous avons :

$$\text{Lip}_{\mathcal{T}}(\tilde{u}) \leq \max_{x \in \mathcal{T}} \left\{ \|(J\xi(x))^T (\nabla u)(\xi(x))\|_{\infty} \right\}, \quad (4.4.9)$$

où  $J\xi(x)$  est le Jacobien de  $\xi$  au point  $x$  et  $(\nabla u)(\xi(x))$  est l'application du gradient de  $u$  au point  $\xi(x)$ . Pour  $h \leq R/\sqrt{d+1}$  (avec  $R$  le reach de  $\partial M$ ), nous savons du théorème (2.2.1) que  $\xi$  est 2-Lipschitz dans une boule de rayon  $R/2$  (ici nous posons  $\iota = 1/2$  ce qui nous donne une borne supérieure sur  $h$ , et la propriété 2-Lipschitz de  $\xi$ ). En conséquence, chacun des termes dans la transposée de la Jacobienne est bornée par 2 (car chacune des dérivées partielles sont bornées). On a donc :

$$\text{Lip}_{\mathcal{T}}(\tilde{u}) \leq 2 \max_{x \in \mathcal{T}} \left\{ \|(\nabla u)(\xi(x))\|_{\infty} \right\} \quad (4.4.10)$$

Nous savons de plus que  $\xi$  est surjective dans tout le domaine, Equation (4.4.9) devient alors

$$\text{Lip}_{\mathcal{T}}(\tilde{u}) \leq 2 \max_{x \in \mathcal{T}} \left\{ \|(\nabla u)(\xi(x))\|_{\infty} \right\} = 2\|\nabla u\|_{\infty}. \quad (4.4.11)$$

En effet, comme tout point de  $\partial M$  possède une pré-image dans  $(\partial M)^{\frac{\sqrt{d+1}}{2}h}$  par la fonction  $\xi$ , la norme infinie atteint la même valeur pour les deux côtés de l'égalité.

#### 4.4.2.2 Bornes pour $\text{Lip}_{\mathcal{T}}(g_{\tilde{s}}^h)$ et $\|g_{\tilde{s}}^h\|_{\mathcal{T}}$

Nous donnons ici des bornes exactes pour la constante de Lipschitz ainsi que la norme de  $g_{\tilde{s}}^h$ . Nous utilisons la notation raccourcie suivante pour cette section :

$$\|\nabla \tilde{u}\|_{\mathcal{T}} := \max_{x \in \mathcal{T}} \left\{ \|(\nabla \tilde{u})(x)\|_{\infty} \right\}.$$

Nous montrons une preuve du lemme suivant :

Pour  $h \leq h_0 = R/\sqrt{d+1}$  nous avons

$$\|g_{\dot{s}}^h\|_{\mathcal{T}} \leq \frac{2 \cdot \|\nabla u\|_{\infty} \cdot h^{-\alpha \frac{1+d}{2}}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \text{ and } \text{Lip}_{\mathcal{T}}(g_{\dot{s}}^h) \leq \frac{6 \cdot \|\nabla u\|_{\infty} \cdot h^{-\alpha(1+\frac{d}{2})}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}.$$

PREUVE En injectant la propriété de Lipschitz de  $\tilde{u}$  dans Equation (4.4.7) nous avons

$$\|g_{\dot{s}}^h\|_{\mathcal{T}} = \max_{x \in \mathcal{T}} \left( \frac{e^{-\frac{\|x-\dot{s}\|^2}{4t_h}}}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} \cdot (\tilde{u}(x) - \tilde{u}(\dot{s})) \right) \leq \max_{x \in \mathcal{T}} \left( \frac{e^{-\frac{\|x-\dot{s}\|^2}{4t_h}}}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} \cdot \text{Lip}_{\mathcal{T}}(\tilde{u}) \cdot \|x - \dot{s}\|_2 \right).$$

Nous savons que pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $ye^{-y^2} \leq 1/2$ . En remplaçant  $y$  par  $\frac{\|x-\dot{s}\|}{2\sqrt{t_h}}$  dans l'équation précédente nous avons

$$\frac{\|x - \dot{s}\|}{t_h} e^{-\frac{\|x-\dot{s}\|^2}{4t_h}} \leq \frac{1}{\sqrt{t_h}}.$$

Finalement, en utilisant Equation (4.4.11) et en remplaçant  $t_h$  par  $h^\alpha$  nous obtenons la borne sur la norme de  $g_{\dot{s}}^h$  :

$$\|g_{\dot{s}}^h\|_{\mathcal{T}} \leq \frac{2 \cdot \|\nabla u\|_{\infty}}{t_h^{\frac{1}{2}}(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} = \frac{2 \cdot \|\nabla u\|_{\infty}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot h^{-\alpha \frac{1+d}{2}}.$$

Étudions maintenant la constante de Lipschitz de  $g_{\dot{s}}^h$ . Sachant que  $\text{Lip}_{\mathcal{T}}(g_{\dot{s}}^h) \leq \|\nabla g_{\dot{s}}^h\|_{\mathcal{T}}$  nous allons tout d'abord dériver  $g_{\dot{s}}^h$  et ensuite trouver une borne sur le gradient de cette dérivée. Le gradient de  $g_{\dot{s}}^h$  est :

$$\nabla g_{\dot{s}}^h(x) = \frac{\nabla \tilde{u}(x)}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x-\dot{s}\|^2}{4t_h}} + \frac{\tilde{u}(x) - \tilde{u}(\dot{s})}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} \nabla e^{-\frac{\|x-\dot{s}\|^2}{4t_h}}.$$

Nous calculons maintenant le gradient de l'exponentielle :

$$\nabla e^{-\frac{\|x-\dot{s}\|^2}{4t_h}} = -\frac{\|x - \dot{s}\|}{2t_h} e^{-\frac{\|x-\dot{s}\|^2}{4t_h}}.$$

Ce qui nous donne :

$$\nabla g_{\dot{s}}^h(x) = \frac{\nabla \tilde{u}(x)}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x-\dot{s}\|^2}{4t_h}} - \frac{\|x - \dot{s}\| [\tilde{u}(x) - \tilde{u}(\dot{s})]}{2t_h^2(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x-\dot{s}\|^2}{4t_h}}.$$

Nous appliquons maintenant l'inégalité triangulaire pour continuer :

$$\begin{aligned} \|\nabla g_{\dot{s}}^h\|_{\mathcal{T}} &\leq \frac{\|\nabla \tilde{u}\|_{\mathcal{T}}}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x-\dot{s}\|^2}{4t_h}} + \max_{x \in \mathcal{T}} \left\{ \frac{|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(\dot{s})| \|x - \dot{s}\|_2}{2t_h^2(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x-\dot{s}\|^2}{4t_h}} \right\} \\ &\leq \frac{\|\nabla \tilde{u}\|_{\mathcal{T}}}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x-\dot{s}\|^2}{4t_h}} + \text{Lip}_{\mathcal{T}}(\tilde{u}) \cdot \max_{x \in \mathcal{T}} \left\{ \frac{\|x - \dot{s}\|^2}{2t_h^2(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x-\dot{s}\|^2}{4t_h}} \right\}. \end{aligned}$$

Comme mentionné dans la preuve du lemme (4.4.1), une étude élémentaire de fonction montre que  $\forall y \in \mathbb{R}$ ,  $y^2 e^{-y^2} \leq 1$  (nous utilisons ici une borne moins fine pour ensuite pouvoir factoriser plus facilement certains termes). En remplaçant  $y$  par  $\frac{\|x - \dot{s}\|}{2\sqrt{t_h}}$  dans l'équation précédente nous avons :

$$\frac{\|x - \dot{s}\|^2}{t_h^2} e^{-\frac{\|x - \dot{s}\|^2}{4t_h}} \leq \frac{4}{t_h} \quad (4.4.12)$$

ce qui nous permet d'extraire la borne finale sur  $\|\nabla g_{\dot{s}}^h\|_{\mathcal{T}}$  :

$$\begin{aligned} \|\nabla g_{\dot{s}}^h\|_{\mathcal{T}} &\leq \frac{\|\nabla \tilde{u}\|_{\mathcal{T}}}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} + \text{Lip}_{\mathcal{T}}(\tilde{u}) \cdot \max_{x \in \mathcal{T}} \left\{ \frac{\|x - \dot{s}\|^2}{2t_h^2(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x - \dot{s}\|^2}{4t_h}} \right\} \\ &\leq \frac{\|\nabla \tilde{u}\|_{\mathcal{T}}}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} + \frac{2 \text{Lip}_{\mathcal{T}}(\tilde{u})}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} \quad (\text{avec l'Equation (4.4.12)}) \\ &\leq \frac{\|\nabla \tilde{u}\|_{\mathcal{T}}}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} + \frac{4\|\nabla u\|_{\infty}}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} \quad (\text{avec l'Equation (4.4.11)}). \end{aligned}$$

En combinant Equation (4.4.9) et Equation (4.4.11) nous avons  $\|\nabla \tilde{u}\|_{\mathcal{T}} \leq 2\|\nabla u\|_{\infty}$ . Nous injectons cette inégalité pour continuer le calcul :

$$\begin{aligned} \|\nabla g_{\dot{s}}^h\|_{\mathcal{T}} &\leq \frac{2\|\nabla u\|_{\infty}}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} + \frac{4\|\nabla u\|_{\infty}}{t_h(4\pi t_h)^{\frac{d}{2}}} \\ &= \frac{6\|\nabla u\|_{\infty}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot h^{-\alpha(1+\frac{d}{2})} \quad (\text{avec } t_h = h^{\alpha}), \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme (4.4.3).

□

#### 4.4.2.3 Conclusion sur la borne de (Q3)

Nous injections lemme (4.4.3) dans Equation (4.4.8) :

$$\begin{aligned} &\left| \int_{x \in \partial M} g_{\dot{s}}^h(x) d\text{Vol} - \sum_{r \in \mathbb{F}_h^d \cap \partial_h M} g_{\dot{s}}^h(\dot{r}) \mu(r) \right| \\ &\leq 2^{d+3} (d+1)^{\frac{3}{2}} \text{Area}(\partial M) \left( \text{Lip}(g_{\dot{s}}^h) \sqrt{d+1} h + \|g_{\dot{s}}^h\|_{\infty} O(h^{\beta}) \right) \\ &\leq 2^{d+3} (d+1)^{\frac{3}{2}} \text{Area}(\partial M) \left( \frac{6 \cdot \|\nabla u\|_{\infty}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot h^{-\alpha(1+\frac{d}{2})} \sqrt{d+1} h + \frac{2 \cdot \|\nabla u\|_{\infty}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot h^{-\alpha \frac{1+d}{2}} O(h^{\beta}) \right) \\ &= \frac{48(d+1)^2}{\pi^{\frac{d}{2}}} \text{Area}(\partial M) \|\nabla u\|_{\infty} h^{1-\alpha(\frac{d}{2}+1)} + O(h^{\beta-\alpha \frac{1+d}{2}}). \end{aligned}$$

Le résultat peut être étendu à tout l'espace (*i.e.* en remplaçant  $\mathcal{T}$  par  $\infty$  dans la norme) étant donné que le théorème (4.3.1) ne considère que la borne Lipschitz et la borne  $L_{\infty}$

dans  $\mathcal{T}$  (la preuve est restreinte à des quantités calculées dans l'extension tubulaire de  $\partial_h M$ ). Nous écrivons donc :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x \in \partial M} g_{\dot{s}}^h(x) dVol - \sum_{r \in \mathbb{F}_h^d \cap \partial_h M} g_{\dot{s}}^h(\dot{r}) \mu(r) \right| \\ & \leq \frac{48(d+1)^2}{\pi^{\frac{d}{2}}} \text{Area}(\partial M) \|\nabla u\|_\infty h^{1-\alpha(\frac{d}{2}+1)} + O(h^{\beta-\alpha\frac{1+d}{2}}). \end{aligned}$$

ce qui montre le lemme (4.4.2).

### 4.4.3 Résultat général de convergence

Nous résumons le résultat central de cette thèse au travers du théorème (4.4.1), qui nous donne les conditions nécessaires pour la  $C^2$ -convergence de notre discréétisation de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur les surfaces digitales. La preuve de ce théorème est aussi l'occasion de résumer tous les résultats présentés dans cette partie concernant la convergence.

THÉORÈME

(4.4.1)

Soient  $s$  un surfel de  $\mathbb{F}_h^d \cap \partial_h M$ , une fonction  $u \in C^2(\partial M)$  et son extension  $\tilde{u}$  de la définition (4.3.1). Soient  $t_h = h^\alpha$  et supposons que l'estimateur de normales possède une vitesse de convergence égale à un  $O(h^\beta)$ . Soit  $h_0$  le minimum entre  $\text{Diam}(\partial M)$ ,  $R/\sqrt{d+1}$  et  $K_3(d, \alpha, \text{Diam}(\partial M))$  (où  $K_3$  est une constante définie dans l'Equation (4.4.5)). Pour  $0 < h \leq h_0$  nous avons

$$0 < \alpha < \min \left\{ \frac{2}{d+2}, \frac{2\beta}{d+1} \right\} \implies \lim_{h \rightarrow 0} |(\Delta u)(\xi(\dot{s})) - (\mathfrak{L}_h \tilde{u})(\dot{s})| = 0.$$

PREUVE Nous rappelons au lecteur que la condition  $\alpha > 0$  est donnée par le théorème (3.5.2) étant donné que  $t_h$  doit tendre vers zéro lorsque  $h$  tend vers zéro. Alors le lemme (4.4.1) nous donne la condition suivante pour la convergence :

$$\alpha < \frac{2}{d+2},$$

et le lemme (4.4.2) la même condition plus

$$\alpha < \frac{2\beta}{d+1}.$$

En combinant ces conditions pour  $\alpha$ , le théorème (3.5.2) de Belkin *et al.* pour la convergence de l'Equation (Q1), le lemme (4.4.1) pour la borne sur l'Equation (Q2) et le lemme (4.4.2) pour la borne sur l'Equation (Q3), nous obtenons notre théorème. Notre opérateur de Laplace–Beltrami digital est donc fortement cohérent avec l'opérateur continu sur les variétés. Les conditions sur la borne supérieure pour  $h_0$  de  $h$  sont données par le lemme (4.4.1) et le lemme (4.4.2).

□

## 4.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre deux discréétisations de l'opérateur de Laplace–Beltrami : l'une sur les courbes digitales utilisant la théorie du calcul extérieur discret et l'autre sur les surfaces digitales qui est en fait une adaptation de l'opérateur d'Alexa et Wardetzky où nous injections la mesure de nos faces. Ces deux opérateurs ont motivé la définition d'un opérateur par convolution. Nous avons adapté la méthode de Belkin *et*

al. sur les surfaces digitales, toujours en intégrant cette notion de mesure des face. Nous avons montré dans les paragraphes suivants les différents lemmes et théorèmes nécessaires à la preuve théorique de la  $C^2$ -convergence, résultat que nous résumons au travers du théorème (4.4.1). Nous allons maintenant faire une analyse numérique de l'opérateur dans le prochain chapitre.

#### 4.5.1 Résultats annexes

LEMME

(4.5.1)

Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , si  $a \leq 0$  et  $c \geq 0$ , alors

$$a \leq b \leq c \implies |b| \leq \max\{|a|, c\}.$$

**PREUVE** Nous séparons la preuve en deux cas suivant le signe de  $b$ . Si  $b \leq 0$ , alors  $|b| \leq |a|$  et donc  $|b| \leq \max\{|a|, c\}$ . Si  $b > 0$ , alors  $|b| = b \leq |c| = c$  comme  $c \geq 0$  et donc  $|b| \leq \max\{|a|, c\}$ .

□

LEMME

(4.5.2)

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

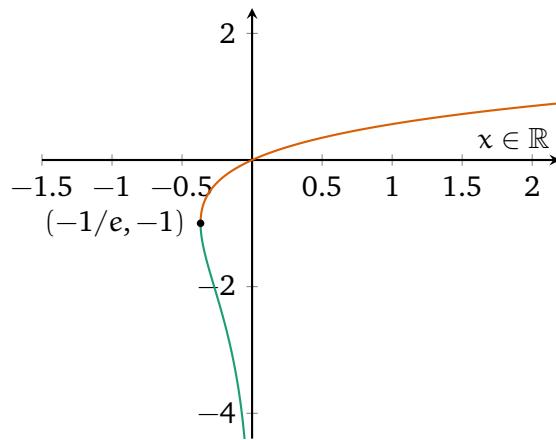
$$e^{\frac{x}{2}} - 1 \leq x \iff 0 \leq x \leq -\frac{1}{2} \left[ 2W_{-1}\left(-\frac{1}{2\sqrt{e}}\right) + 1 \right] \approx 2.51286$$

où  $W_{-1}$  est la branche inférieure de la  $W$ -fonction de Lambert (parfois appelée fonction omega fonction ou bien "product logarithms").

**PREUVE** Nous utilisons la  $W$ -fonction de Lambert pour montrer ce lemme. Un étude approfondie de celle-ci peut-être trouvée dans le livre de Corless, Gonnet, Hare et Knuth [18]. Elle est définie comme la fonction multi-valuée  $W$  qui satisfait

$$z = W(z)e^{W(z)}$$

pour  $z \in \mathbb{C}$ . C'est de façon équivalente la fonction inverse de  $f(w) = we^w$ . Le graphe de cette fonction sur la ligne des réelles est dessiné dans la figure. 4.7.  $W$  possède deux branches réelles communément appelées  $W_0$  et  $W_{-1}$  définies dans l'intervalle  $-1/e < x < 0$  qui se joignent en  $x = -1/e$ . Cela veut dire entre autre que l'équation  $x = we^w$  possède deux solutions dans cet intervalle (un par branche). Nous utiliserons également l'identité  $W(xe^x) = x$ . Notons finalement que la branche  $W_0$  est croissante dans cet intervalle, contrairement à  $W_{-1}$  qui est décroissante.



**Fig. 4.7** Graph des deux branches principales de la  $W$ -fonction de Lambert.  $W_0$  est en orange et  $W_{-1}$  en verte. Les deux branches sont jointes de façon continue au point  $(-1/e, -1)$ .

Nous effectuons une preuve par équivalence d'inégalités :

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{x}{2}} - 1 &\leq x \\
 \iff e^{\frac{x}{2}} &\leq x + 1 \\
 \iff -(x + 1)e^{-\frac{x}{2}} &\leq -1 \\
 \iff -(\frac{x}{2} + \frac{1}{2})e^{-(\frac{x}{2} + \frac{1}{2})} &\leq -\frac{1}{2\sqrt{e}}. \quad \text{en multipliant par } \frac{1}{2\sqrt{e}}
 \end{aligned}$$

En remplaçant  $X$  par  $-\frac{1}{2}(x + 1)$  nous avons

$$X \geq W_{-1}(-\frac{1}{2\sqrt{e}}) \text{ et } X \leq W_0(-\frac{1}{2\sqrt{e}})$$

ce qui donne

$$-(2W_0(-\frac{1}{2\sqrt{e}}) + 1) = 0 \leq x \leq -(2W_{-1}(-\frac{1}{2\sqrt{e}}) + 1) \approx 2.51286$$

étant donné que  $W_0(-\frac{1}{2\sqrt{e}}) = \frac{1}{2}$ .

□

# Analyse numérique de la C<sup>2</sup>-Convergence

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Tests sur la sphère</b>	97
↪ 5.1.1	Consistance pour différentes valeurs de $\alpha$	98
↪ 5.1.2	Comparaisons avec d'autres opérateurs	98
<b>5.2</b>	<b>Consistence de la courbure moyenne</b>	99
<b>5.3</b>	<b>Coupe de la gaussienne</b>	102
<b>5.4</b>	<b>Diffusion de la chaleur</b>	105
<b>5.5</b>	<b>Lissage</b>	106
↪ 5.5.1	Approximation via la décomposition spectrale	106
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	108

## 5.1 Tests sur la sphère

Nous analysons ici la C<sup>2</sup>-convergence sur les surfaces digitales de notre opérateur de Laplace–Beltrami discret. Nous considérons une boule unité  $\mathbb{S}^3$  et trois fonctions continues  $u : \partial\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  à savoir  $z$ ,  $x^2$  et  $e^x$ . Soient  $\theta$  l'angle azimutale et  $\phi$  l'angle polaire. L'opérateur de Laplace sphérique s'écrit alors :

$$\Delta_{\partial\mathbb{S}^3} u(\theta, \phi) = \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right). \quad (5.1.1)$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \Delta_{\partial\mathbb{S}^3} z &= \Delta_{\partial\mathbb{S}^3} \cos \phi = -2 \cos \phi, \\ \Delta_{\partial\mathbb{S}^3} x^2 &= \Delta_{\partial\mathbb{S}^3} \sin^2 \theta \cos^2 \phi \\ &= 2 \cos^2 \theta (2 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + 2(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta), \\ \Delta_{\partial\mathbb{S}^3} e^x &= \Delta_{\partial\mathbb{S}^3} e^{\sin \theta \cos \phi} \\ &= \frac{e^{\sin \theta \cos \phi}}{\sin \phi} (\sin^2 \theta \sin \phi - \cos \theta) + e^{\sin \theta \cos \phi} \cos \theta (\cos \theta \cos^2 \phi - \sin \phi + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \phi}). \end{aligned}$$

Nous calculons le discrétilisé de Gauss de  $\mathbb{S}^3$  pour des pas de  $h$  décroissants. A titre d'exemple, le discrétilisé possède 1902 faces pour  $h = 0.1$  et 188502 faces pour  $h = 0.01$ . Étant donné que la surface discrète n'interpole pas le bord de la sphère, nous remplaçons les fonctions  $u$  par des fonctions  $\tilde{u}$  (voir la définition (4.3.1)). Nous utilisons l'estimateur de normale des intégrants invariaux [17] pour calculer la mesure des faces  $\mu$ . Nous regardons tout

**Table 5.1** Résumé des vitesses de convergence pour différentes valeurs de  $t_h$  et différentes fonctions  $\tilde{u}$ . Le modèle  $h^\gamma$  est plaqué sur les valeurs pour donner une idée de la vitesse de convergence. Les données utilisées sont les mêmes que dans la figure. 5.2. La table nous donne les valeurs du paramètre du modèle  $\gamma$  en fonction de la valeur de  $\alpha$  et de la fonction  $\tilde{u}$ . Notons que plus la valeur de  $\alpha$  est grande, plus la vitesse de convergence est élevée.

$\alpha$	$\tilde{u}(x, y, z) = z$	$\tilde{u}(x, y, z) = x^2$	$\tilde{u}(x, y, z) = e^x$
1	0.9846	1.0594	0.985
$\frac{2}{3}$	1.1039	0.8147	0.8630
$\frac{1}{3}$	1.0993	0.3468	0.3612
$\frac{1}{6}$	1.0621	0.1732	0.1732
$\frac{1}{12}$	1.0611	0.0861	0.0852

d'abords la convergence pour des valeurs différentes de  $\alpha$ , et comparons ensuite notre opérateur avec d'autres opérateurs de la littérature.

### 5.1.1 Consistence pour différentes valeurs de $\alpha$

Nous affichons les graphes pour différentes valeurs de  $\alpha$  dans  $t_h$  :  $h$  (en rouge  $\textcolor{red}{\circ}$ ),  $h^{\frac{2}{3}}$  (en bleu  $\textcolor{blue}{\square}$ ),  $h^{\frac{1}{3}}$  (en vert  $\textcolor{green}{\triangle}$ ),  $h^{\frac{1}{6}}$  (en violet  $\textcolor{violet}{\diamond}$ ) et  $h^{\frac{1}{12}}$  (en orange  $\textcolor{orange}{\diamond}$ ). Les résultats numériques de convergence sont compilés dans la Table 5.1. Notre opérateur  $\mathcal{L}_h$  est une convolution entre une Gaussienne de déviation standard  $\sigma = \sqrt{2t_h}$  et des différences de fonctions. Lorsque le pas de discréétisation  $h$  diminue (i.e. l'approximation digitale de la surface s'affine), la déviation standard de la Gaussienne diminue et le nombre de sommets en son sein croie.

Nous pouvons observer que quand  $h$  tend vers zéro, l'erreur infinie  $\| \cdot \|_\infty$  diminue. De plus, pour les fonctions  $x^2$  et  $e^x$ , la vitesse de convergence augmente en corrélation avec  $\alpha$  (i.e. plus  $\alpha$  est grand, plus la vitesse de convergence est rapide). Même si la convergence théorique est atteinte pour  $t_h = h^{\frac{1}{3}}$ , le comportement empirique est à l'opposé de celui donné par le lemme (4.4.1) et le lemme (4.4.2). Nous pensons que la différence entre la théorie et l'application provient du théorème (3.5.2) où la vitesse de convergence n'est pas explicite. Notons aussi que la sphère est une forme très spécifique, ce qui peut entraîner un biais sur les résultats.

### 5.1.2 Comparaisons avec d'autres opérateurs

Nous comparons dans la figure. 5.3 la vitesse de convergence de nombreuses discréétisations de l'opérateur. Les opérateurs  $\mathcal{L}_{COMBI}$  (de l'Equation (3.2.1)),  $\mathcal{L}_{QUAD}$  (de l'Equation (3.4.1)) et  $\mathcal{L}_h$  (définition (4.3.3)) sont directement calculés sur la surface digitale  $\partial_h \mathbb{S}^3$ ;  $\mathcal{L}_{COT}$  (de l'Equation (3.3.1)),  $\mathcal{L}_B$  (de l'Equation (3.5.4)) et  $\mathcal{L}_{RLOCAL}$  (de l'Equation (3.6.1)) sont eux calculés sur la triangulation construite avec l'algorithme des marching cubes. Étant donné que les sommets de cette triangulation coïncident avec les centroïdes des surfels de la surface digitales, tous ces opérateurs sont évalués aux même points. Le paramètre de temps  $t$  pour la discréétisation de Belkin *et al.* [5] doit dépendre de densité de la triangulation. Nous prenons ici le même paramètre que pour notre dis-

crétisation, à savoir  $t_h = h^{\frac{1}{3}}$ . Quant au paramètre  $r$  de  $\mathcal{L}_{RLOCAL}$ , nous prenons, comme conseillé par les auteurs  $h^{\frac{1}{3}}$  (ce qui correspond en fait à la même taille de convolution que les deux opérateurs précédents).

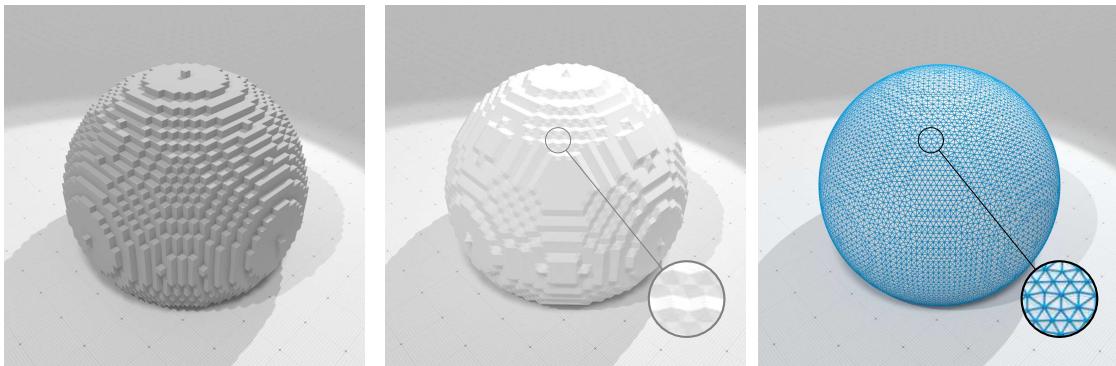
Afin d'imiter le cadre pratique du papier de Belkin *et al.* [5], nous considérons également l'opérateur  $\mathcal{L}_B^P$ , qui correspond l'application de  $\mathcal{L}_B$  sur la projection des sommets du marching cubes sur la sphère analytique. Dans notre cas, cette opérateur est la vérité terrain étant donné que les sommets sont sur le bords de la sphère. Finalement, nous calculons aussi  $\mathcal{L}_{COT}^P$ ,  $\mathcal{L}_{RLOCAL}^P$  et  $\mathcal{L}_{QUAD}^P$  sur cette même projection. Les différentes discrétisations de la sphère sont illustrées dans la figure. 5.1.

Nous voyons tout d'abords, comme prévu par la théorie, que  $\mathcal{L}_{COMBI}$  ( $\textcolor{blue}{\square}$ ),  $\mathcal{L}_{COT}$  ( $\textcolor{teal}{\circ}$ ) et  $\mathcal{L}_{COT}^P$  ( $\textcolor{orange}{\oplus}$ ) ne sont pas fortement cohérents sur le marching cubes et sur sa projection. L'opérateur sur les surfaces polygonales généralisées (ici notre surface) d'Alexa et Wardetzky possède le même comportement que  $\mathcal{L}_{COT}$  (ce qui est attendu étant donné que cette algorithme est une généralisation du schéma des cotangentes). La mauvaise approximation de l'espace tangent par nos surfaces digitales au travers des normales élémentaires ne donne pas une approximation convergente des aires et donc aucun des ces opérateurs ne convergent. Nous savons également (voir [106, 107]) que  $\mathcal{L}_{COT}$  n'est fortement cohérent que si chaque sommet du maillage est de valence six, ce qui n'est pas le cas ici. Concernant les opérateurs sur la projection du marching cubes, même si la somme des aires des triangles convergent vers l'aire de la sphère, beaucoup de triangles sont dégénérés (à cause de la projection) ce qui a pour effet une mauvaise approximation locale des mesures, et donc pas de  $C^2$ -convergence. Nous observons aussi que  $\mathcal{L}_B$  ( $\textcolor{red}{\triangle}$ ) n'est pas cohérent, mais avec des erreurs moindres (encore une fois à cause de la mauvaise approximation du plan tangent). A l'opposé,  $\mathcal{L}_B^P$  ( $\textcolor{green}{\diamond}$ ) converge point-à-point, comme attendu [5]. Les erreurs entre  $\mathcal{L}_h$  et  $\mathcal{L}_B^P$  sont proches. On observe cependant un écart de  $10^2$  pour la fonction  $u(x, y, z) = z$ .  $\mathcal{L}_{RLOCAL}$  montre un comportement non convergent. En effet, notre cadre pratique ne colle pas avec celui prévu dans le papier [45] : notre fonction de projection  $\xi$  n'étant pas bijective en général, et les normales estimées sur le marching cube n'étant pas convergentes, la convergence en norme d'opérateur faible de  $\mathcal{L}_{COT}$  n'est plus valable (voir [101]), ce qui est un pré-requis pour la convergence point à point de  $\mathcal{L}_{RLOCAL}$ . Concernant  $\mathcal{L}_{RLOCAL}^P$ , la projection du marching cube, même si cette surface satisfait les propriétés du Théorème 7. de [45], le ratio d'aspect des triangles  $\rho$  diverge sur la projection, invalidant la constante  $C$  de leur théorème.

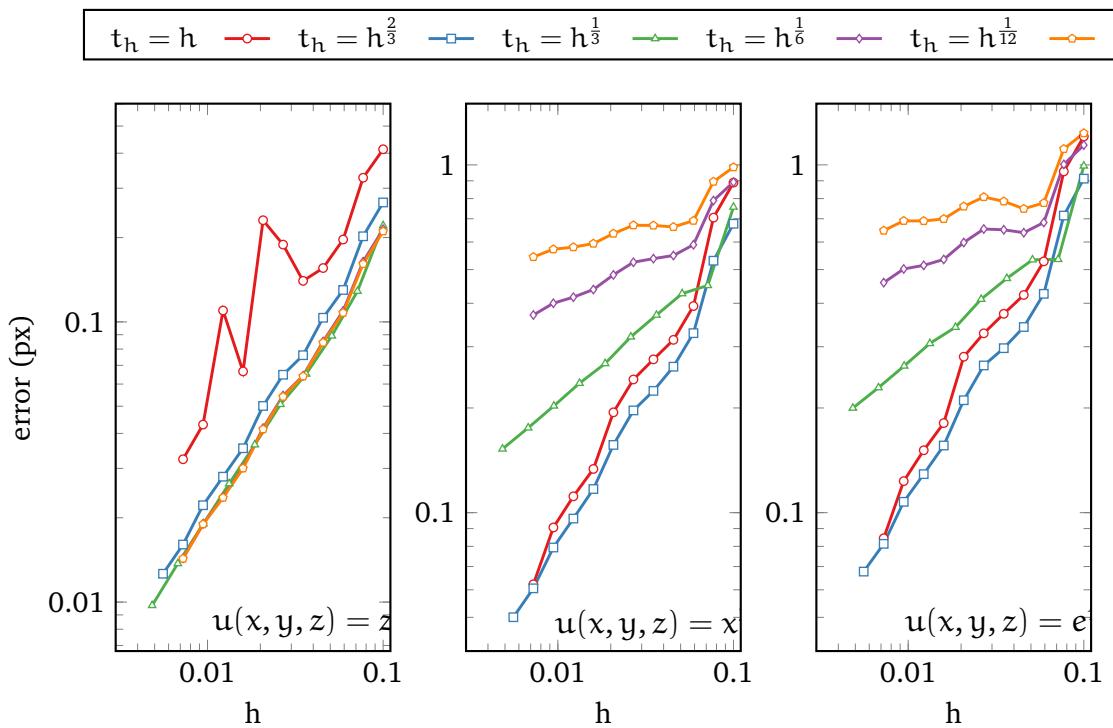
## 5.2 Consistence de la courbure moyenne

Nous présentons dans cette section d'autres résultats numériques pour la convergence de notre opérateur. On s'intéresse ici au calcul du vecteur de courbure moyenne à travers l'opérateur de Laplace–Beltrami. Nous rappelons que l'opérateur est lié au vecteur de courbure moyenne :

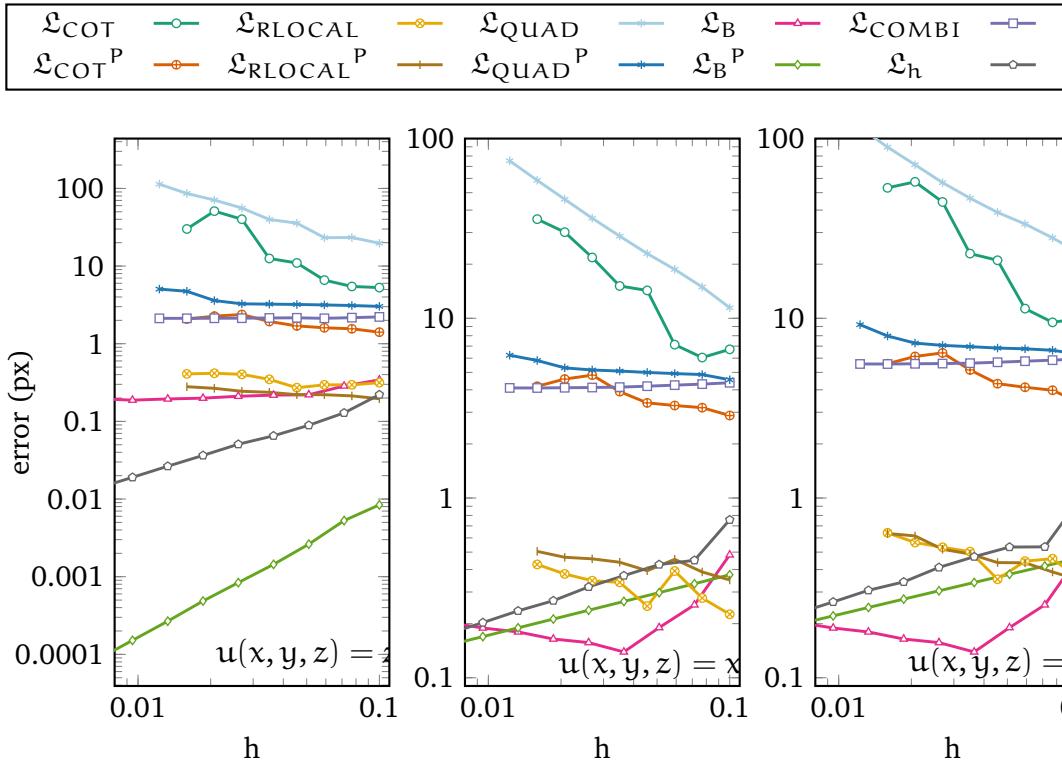
$$\Delta e(\mathbf{x}) = H_x \mathbf{n}_x$$



**Fig. 5.1** Les différentes discrétisations de la sphère utilisées pour comparer les opérateurs de Laplace-Beltrami. La boule unité  $\mathbb{S}^3$  est discrétisée en utilisant le processus de Gauss décrit dans la définition (2.2.1). L'image de gauche correspond à la surface digitale  $\partial_h \mathbb{S}^3$  (voir la définition (2.2.2) pour la construction d'un tel objet) où sont calculés  $\mathcal{L}_h$ ,  $\mathcal{L}_{QUAD}$  et  $\mathcal{L}_{COMBI}$ . L'image centrale est la surface obtenue après l'application de l'algorithme des marching cubes où nous calculons  $\mathcal{L}_B$ ,  $\mathcal{L}_{RLOCAL}$  et  $\mathcal{L}_{COT}$ . Enfin, l'image à droite représente la projection du marching cubes sur la sphère analytique. Sont calculés sur celle-ci  $\mathcal{L}_B^P$ ,  $\mathcal{L}_{COT}^P$  et  $\mathcal{L}_{RLOCAL}^P$ .



**Fig. 5.2** Des résultats de convergence entre  $\Delta$  et  $\mathcal{L}_h$  pour la norme infinie sont affichées sur la boule unité  $\partial \mathbb{S}^3$ . Nous utilisons  $t_h = h$  en rouge,  $t_h = h^{\frac{2}{3}}$  en bleu,  $t_h = h^{\frac{1}{3}}$  en vert,  $t_h = h^{\frac{1}{6}}$  en violet et  $t_h = h^{\frac{1}{12}}$  en orange.



**Fig. 5.3** Résultats de convergence point à point sur de nombreuses approximations de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur différents discrétilisés de la boule unité. Sont affichées les erreurs infinies entre  $\Delta$  et  $\mathcal{L}_{\text{COT}}$ ,  $\mathcal{L}_{\text{COT}}^P$ ,  $\mathcal{L}_{\text{COMBI}}$ ,  $\mathcal{L}_B$ ,  $\mathcal{L}_B^P$ ,  $\mathcal{L}_{\text{RLOCAL}}$ ,  $\mathcal{L}_{\text{RLOCAL}}^P$ ,  $\mathcal{L}_{\text{QUAD}}$ ,  $\mathcal{L}_{\text{QUAD}}^P$  et  $\mathcal{L}_h$ . Les paramètres de convolution  $t_h$  et  $r$  sont tous égaux à  $h^{\frac{1}{3}}$ .

où  $n_x$  correspond au vecteur normal unitaire à la surface au point  $x$ ,  $H_x$  la courbure moyenne au point  $x$  et  $e$  est ici la fonction qui à un point  $x$  de la variété associe son plongement (voir section 3.3.2). Nous avons, étant donné la matrice  $X$  de taille  $k \times 3$  ( $k$  correspond ici aux nombres de faces du maillage) des coordonnées et  $L$  la matrice associée à l'opérateur de Laplace–Beltrami discret  $\mathcal{L}$

$$LX = H \cdot N,$$

i.e. l'application de  $L$  aux coordonnées  $X$  nous donne une matrice  $k \times 3$  où chaque ligne correspond au vecteur de courbure moyenne associé à chaque éléments de la surface discrète ( $\cdot$  désigne ici la multiplication ligne par ligne des vecteur  $n_x$  par la courbure moyenne associée  $H_x$ ). Nous désignerons la courbure moyenne associée à un opérateur de Laplacien par  $H$  avec en indice le nom de l'opérateur (par exemple  $H_{\text{COTAN}}$  pour la courbure moyenne associée à l'opérateur des cotangentes).

Outre le calcul de la courbure moyenne via les opérateurs de Laplace–Beltrami discrétilisés, nous utilisons également deux estimateurs de courbure moyenne sur les surfaces digitales. Le premier estimateur est celui des invariants intégraux présenté dans la section 2.2.3. Nous utilisons ici une implémentatino via la transformée de Fourier de la grille cubique (la convolution sur la grille dans le domaine spatial correspond à une multiplication dans le domaine spectral). Nous notons cet estimateur par  $H_{II}$ . Nous estimons également la courbure moyenne via la méthode de *Jet Fitting* [11] que nous notons  $H_{JET}$ . Nous

affichons dans un premier temps la courbure calculée sur la surface du Goursat discréétisé via le processus de Gauss avec un pas de discréétisation de  $h = 0.1$  (ce qui correspond à une forme de taille  $200 \times 200 \times 200$  dans l'espace digital) dans la figure. 5.4. Comme attendu, les courbures  $H_{COMBI}$  et  $H_{COTAN}$  calculées via les opérateurs locaux  $\mathcal{L}_{COMBI}$  et  $\mathcal{L}_{COTAN}$  ne sont pas de bons estimateurs de courbure moyenne du fait qu'ils sont pas  $C^2$ -convergents. Les autres opérateurs sont similaires visuellement, avec peut-être le meilleur résultat pour  $H_{JET}$ . Nous affichons également dans le tableau l'erreur infinie pour chaque discréétisation : nous observons ici que le meilleur estimateur est  $H_{JET}$ . Viens ensuite  $H_{II}$  avec une erreur de 0.05 et tout de suite derrière notre discréétisation  $H_h$ . Notre opérateur montre donc dans ce cas de bonnes propriétés par rapport à l'état de l'art sur les surfaces digitales. En terme de temps de calcul, il est vingt fois plus rapide que  $H_{JET}$  mais à peu près dix fois plus lent que l'estimation faite par  $H_{II}$  via la transformée de Fourier.

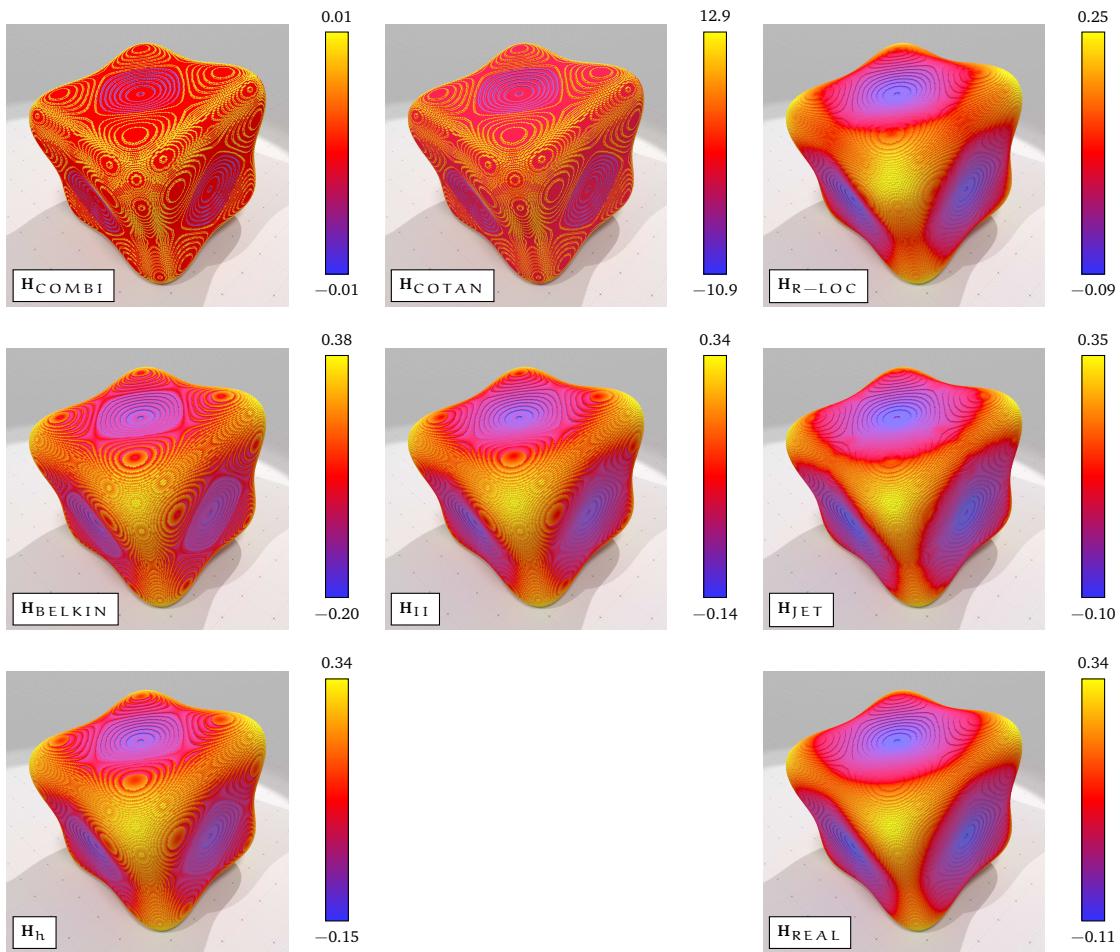
Nous affichons dans un second temps dans la figure. 5.5 les erreurs ponctuelles pour chaque opérateur, ainsi que le graphe de convergence associé. L'affichage des erreurs met en évidence là où les opérateurs sont les moins bons. Par exemple, pour  $H_{JET}$ , les erreurs sont maximales près des axes. Dans le cas de  $H_{II}$  et  $H_h$ , les erreurs sont concentrées près des escaliers de la surface. Pour  $H_{R-LOC}$ , les erreurs se situent aux arêtes de la forme. Le graphe de convergence nous confirme les résultats de  $C^2$ -convergence obtenus dans le paragraphe précédent, à savoir que seul  $H_h$  possède cette propriété. Nous voyons que comme précédemment,  $H_{JET}$  est le meilleur estimateur en terme d'erreur, avec derrière  $H_{II}$  et enfin  $H_h$ .

Nous avons montré dans ce paragraphe que notre nouvel opérateur fournit une bonne approximation de la courbure moyenne sur les surfaces digitales. Bien que par rapport à  $H_{II}$  et  $H_{JET}$ ,  $H_h$  exhibe des erreurs de convergence plus élevées, il reste quand même une bonne approche à l'estimation de courbure moyenne sur les surfaces digitales.

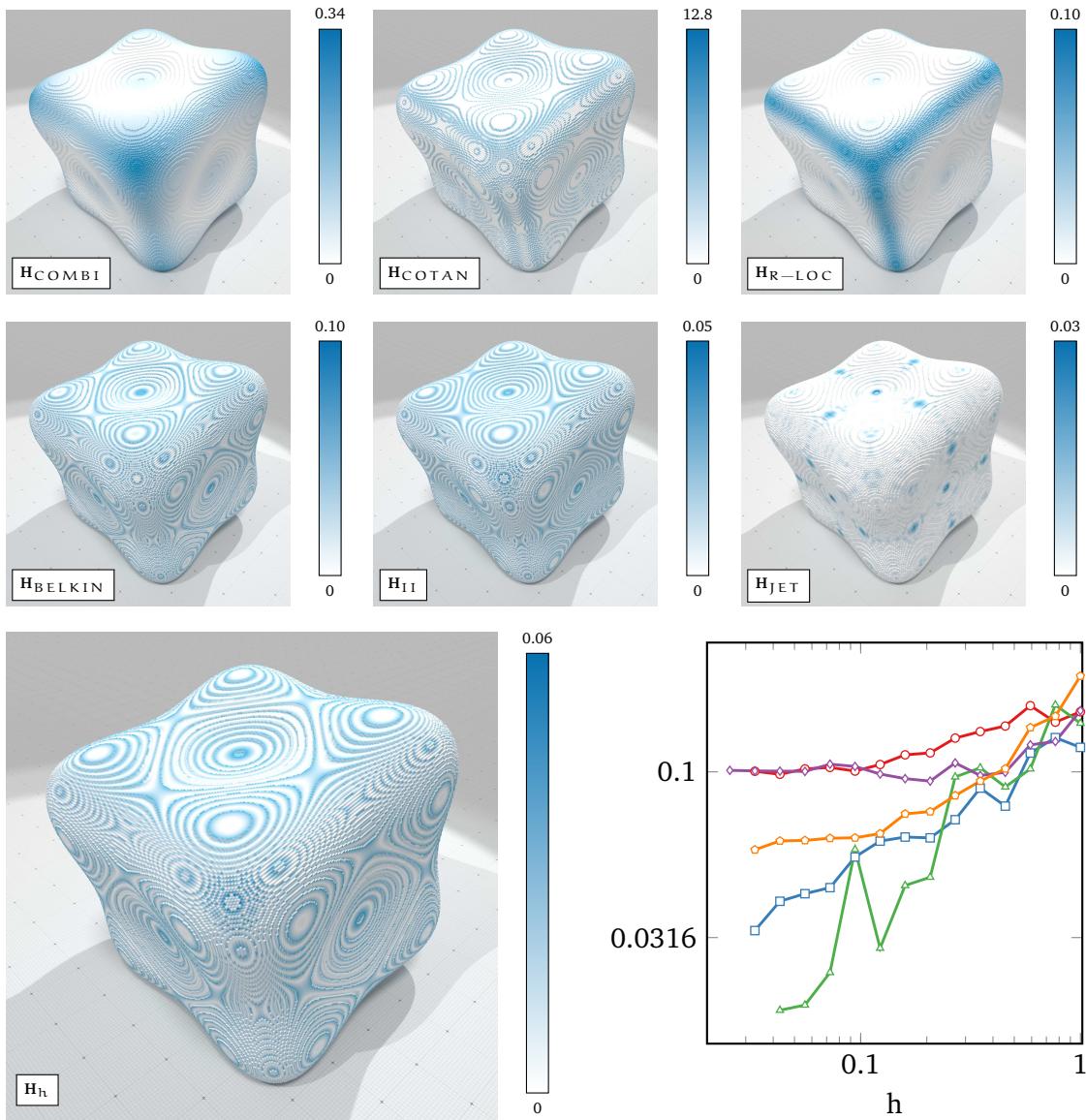
### 5.3 Coupure de la gaussienne

Nous avons jusqu'à maintenant calculer  $\mathcal{L}_h$  sur toute la surface. La méthode est une convolution entre une gaussienne de variance  $\sigma = \sqrt{2t}$ , hors nous savons que l'information contenu en dessous de la gaussienne se situe à quelques multiples de cette variance (voir figure. 5.6). Nous pouvons donc mettre à zéro, lors du calcul de matrice, les valeurs qui à distance plus grande que  $k(t_h)\sqrt{2t_h}$ , où  $k$  est un paramètre qui dépend de  $t_h$ . Nous affichons dans la figure. 5.7 les graphes de convergence de l'opérateur utilisé jusqu'à maintenant mais également de l'opérateur coupé que nous appelons  $\mathcal{L}_h|_{k(t_h) \times \sigma}$  dans cette figure. Nous avons fixé  $t_h = h^{1/3}$  et  $k(t_h) = \log(-\log(t_h)) + 1$  (qui correspond à une fonction qui augmente très lentement vers l'infini quand  $t_h$  tend vers zéro). Nous observons toujours la même vitesse de convergence, avec un petit biais en plus. Pour des raisons pratiques d'implémentation, nous utiliserons dorénavant la version coupée de la méthode, qui nous donne une matrice plutôt creuse et qui réduit grandement la vitesse de calcul de l'opérateur.

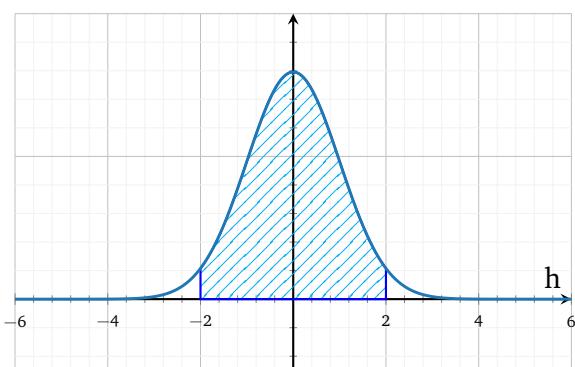
Opérateur	Valeur Min.	Valeur Max.	$\  \cdot \ _\infty$	Taille	Timing
$H_{COMBI}$	-0.01	0.01	0.34	—	52.7ms
$H_{COTAN}$	-10.9	12.9	12.81	—	1.1s
$H_{R-LOC}$	-0.09	0.25	0.10	$4.5 h^{\frac{1}{3}}$	506s
$H_h$	-0.15	0.34	0.06	$4.5 h$	53s
$H_{BELKIN}$	-0.20	0.38	0.10	$4.5 h$	144s
$H_{II}$	-0.14	0.34	0.05	$4.5 h^{\frac{1}{3}}$	7.3s
$H_{JET}$	-0.10	0.35	0.03	$4.5 h^{\frac{1}{3}}$	1200s



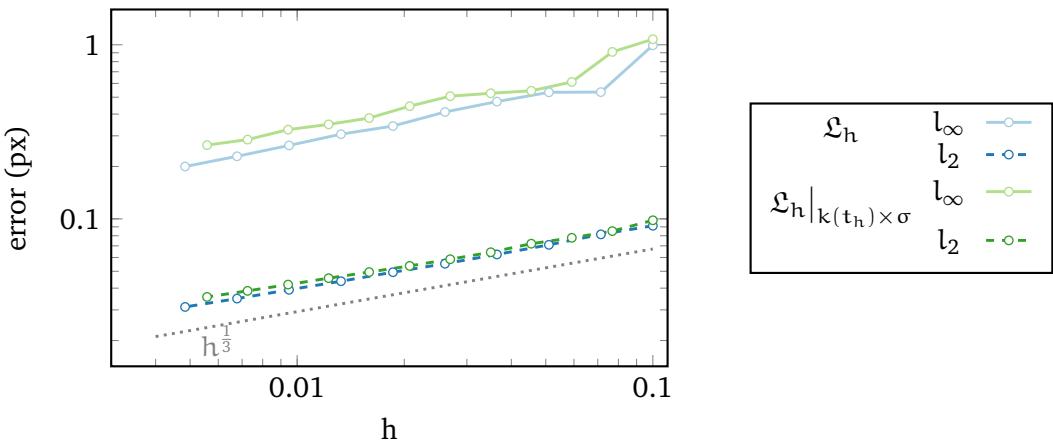
**Fig. 5.4** Illustration de différentes estimateurs de courbure moyenne sur le discrétement d'une surface d'équation  $0.03(x^4 + y^4 + z^4) - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 8$  avec un pas de discréttisation  $h$  valant 0.1 (soit 236094 surfels pour la surface digitales et 438470 sommets pour la triangulation et une forme de taille  $200 \times 200 \times 200$  dans l'espace digital). Nous affichons la norme du vecteur de courbure moyenne (c'est-à-dire la valeur absolue de la courbure moyenne) sur les images. Se trouve dans le tableau les valeurs min. et max., l'erreur infinie  $\| \cdot \|_\infty$ , la taille de la convolution et le temps de calcul pour la norme du vecteur de courbure moyennes des opérateurs  $H_{COMBI}$ ,  $H_{COTAN}$ ,  $H_{R-LOC}$ ,  $H_h$ ,  $H_{BELKIN}$ ,  $H_{II}$  et  $H_{JET}$ .



**Fig. 5.5** Illustration de différentes estimateurs de courbure moyenne sur le discrétement d'une surface d'équation  $0.03(x^4 + y^4 + z^4) - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 8$  avec un pas de discrétement  $h$  valant 0.1 (soit 72678 surfels pour la surface digitales et 135102 sommets pour la triangulation et une forme de taille  $200 \times 200 \times 200$  dans l'espace digital). Nous affichons l'erreur infinie entre la norme du vecteur de courbure moyenne estimée (via les différents opérateurs) et la vraie norme du vecteur de courbure moyenne. Nous affichons également le graphe de convergence avec  $H_{R-LOC}$  (—○—),  $H_{II}$  (—□—),  $H_{JET}$  (—△—),  $H_{BELKIN}$  (—◇—) et  $H_h$  (—○—).



**Fig. 5.6** Une gaussienne de variance  $\sigma = 1$  centrée en zéro. La majorité de l'aire sous la courbe est située entre quelques multiples de  $\sigma$ , ce que nous affichons via les hachures sous la courbe.



**Fig. 5.7** Nous affichons les graphes de convergence sans la coupe de la gaussienne (—○—) et avec la coupe de gaussienne (—○—). Le paramètre  $t_h$  est fixé à  $h^{\frac{1}{3}}$  et  $k(t_h) := \log(-\log(t_h))$ .

## 5.4 Diffusion de la chaleur

Nous mettons en évidence, dans cette section, la propriété d'isotropie de  $\mathcal{L}_h$  par rapport à  $\mathcal{L}_{COMBI}$ . Rappelez-vous que l'équation de la chaleur discrète est donnée par

$$\mathbf{Lu}(x, t) = \frac{1}{t}(u(x, t) - u(x, 0))$$

où  $u(x, 0)$  est donné. Nous allons prendre ici un Dirac centrée en  $x$  comme fonction initiale pour la résolution de la chaleur (cette méthode correspond à la première étape de l'algorithme décrit par Crane [19]). Dans le cas de l'opérateur combinatoire, la solution de l'équation de la chaleur correspond à la solution de l'équation suivante :

$$(\mathbf{I} - t\mathbf{L}_{COMBI})u_{COMBI}(x, t) = u(x, 0) \quad (5.4.1)$$

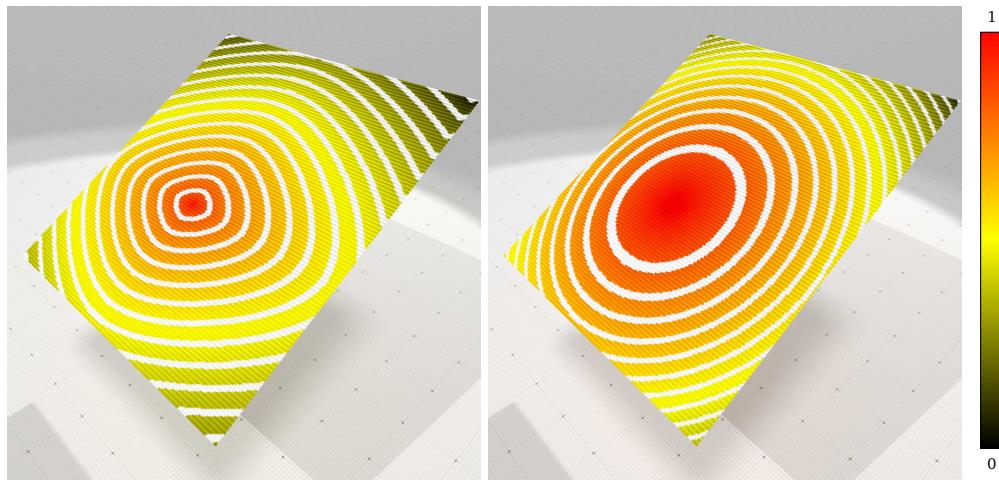
où  $\mathbf{I}$  correspond à la matrice d'identité et  $\mathbf{L}_{COMBI}$  correspond à la matrice associée à l'opérateur  $\mathcal{L}_{COMBI}$  (voir l'Equation (3.2.1)). Cette approximation correspond à un schéma d'Euler implicite, qui est inconditionnellement stable (*i.e.* l'erreur d'approximation n'est pas dépendante du pas de temps  $t$  choisi). Nous avons également vu que dans le cas de  $\mathcal{L}_h$ , nous avions explicitement discréteriser la solution de l'équation de la chaleur :

$$u_h(\tilde{p}, t) = \frac{1}{4\pi t} \sum_{\tilde{w}} e^{-\frac{\|\tilde{w}-\tilde{p}\|^2}{4t}} u(\tilde{w}, 0) \mu(\tilde{w})$$

avec  $\mu$  la mesure d'un élément  $\tilde{w}$  de notre surface. Dans le cas où  $u$  est restreinte à un Dirac nous avons

$$u_h(\tilde{p}, t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{\|\tilde{w}-\tilde{p}\|^2}{4t}} \mu(\tilde{w}). \quad (5.4.2)$$

Nous allons donc calculer d'une part la diffusion de la chaleur via l'opérateur combinatoire  $\mathcal{L}_{COMBI}$  en résolvant l'Equation (5.4.1) et d'autre part calculer directement cette diffusion via l'Equation (5.4.2) qui correspond à notre discréterisation de l'opérateur de Laplace–Beltrami. Pour mettre en évidence la correction d'anisotropie, nous discrétonisons un plan d'équation  $x + 2z = 0$ . La surface digitale produite prends la forme de marches d'escaliers.



**Fig. 5.8** Résultat de diffusion de la chaleur pour les opérateurs  $\mathcal{L}_{\text{COMBI}}$  (à gauche) et  $\mathcal{L}_h$  (à droite).

Les résultats sont affichés dans la figure. 5.8. Étant donné que cette diffusion décroît exponentiellement, nous affichons le négatif du logarithme de la solution. Nous ramenons également les valeurs entre 0 et 1 pour avoir des échelles homogènes. Nous pouvons voir que la diffusion via la résolution de l'Equation (5.4.1) est aplatie dans le sens des marches d'escaliers, effet que nous corrigons via notre discrétisation.

## 5.5 Lissage

Nous illustrons dans cette section deux méthodes de lissage via l'opérateur de Laplace–Beltrami discret  $\mathcal{L}_h$  sur les surfaces digitales. La première (“Laplace Smoothing” en anglais) consiste tout simplement à appliquer l'opérateur de lissage

$$\mathbf{L}_s = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{L}$$

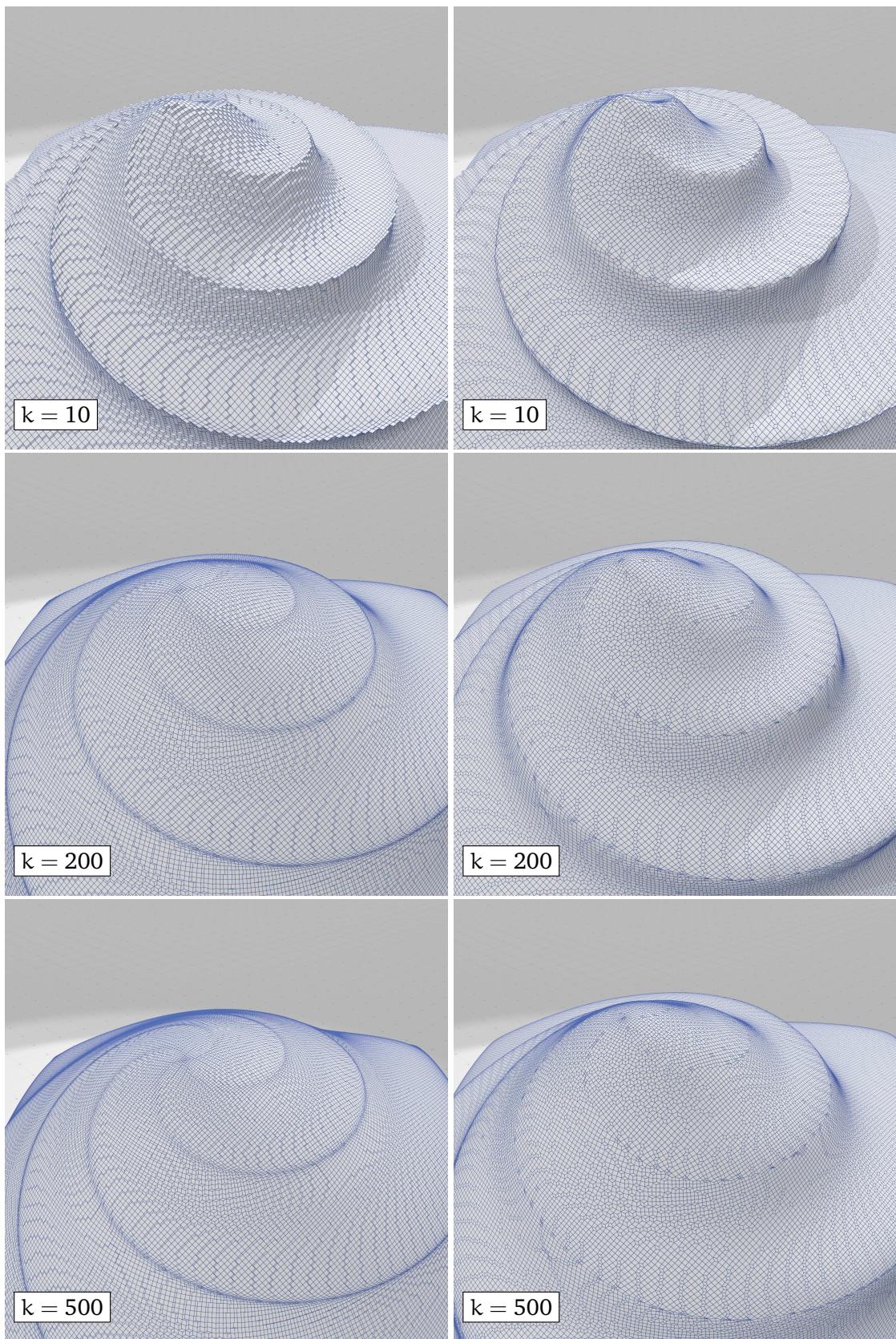
Étant donné la matrice du plongement  $\mathbf{E}$  la forme lissée s'écrit

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{L}_s^k \mathbf{E}$$

où  $k$  représente le nombre d'applications de l'opérateur de lissage  $\mathbf{L}_s$ . Cette opération correspond en fait à un lissage des coordonnées. La taille du lissage est déterminée par l'opérateur de Laplace–Beltrami discret choisi. Nous comparons, dans la figure. 5.9, le lissage via  $\mathcal{L}_h$  (sur la colonne de gauche) et  $\mathcal{L}_{\text{COMBI}}$  (sur la colonne de droite) pour différentes valeurs de  $k$ . Le principal désavantage de cette est qu'elle réduit le volume de la forme (celle-ci tend en fait vers son barycentre), ce que nous observons bien dans les deux cas. Néanmoins, nous observons que dans le cas de  $\mathcal{L}_h$ , les lignes saillantes de l'octaflower sont mieux conservées que dans le cas de  $\mathcal{L}_{\text{COMBI}}$ .

### 5.5.1 Approximation via la décomposition spectrale

Le spectre de l'opérateur de Laplace–Beltrami est un outil puissant en analyse géométrique des surfaces discrètes. Il procure en effet une base des fonctions  $C^2$  sur la surface, au même



**Fig. 5.9** Lissage par l'opérateur de Laplace–Beltrami discret  $\mathfrak{L}_h$  avec  $k = 10, 50, 200$ . L'image en haut à gauche correspond à la surface discrète initiale nommée OctaFlower.

titre que la transformée de Fourier sur les grilles. Si nous savons calculer ce spectre, alors nous pouvons utiliser des techniques de signals pour faire par exemple de l'approximation de surfaces, ou bien encore du filtrage. Nous illustrons tout d'abord dans la figure 5.10 les fonctions propres associées à notre opérateur  $\mathcal{L}_h$ . Nous pouvons donc mettre en évidence les symétries présentes sur notre surface discrète.

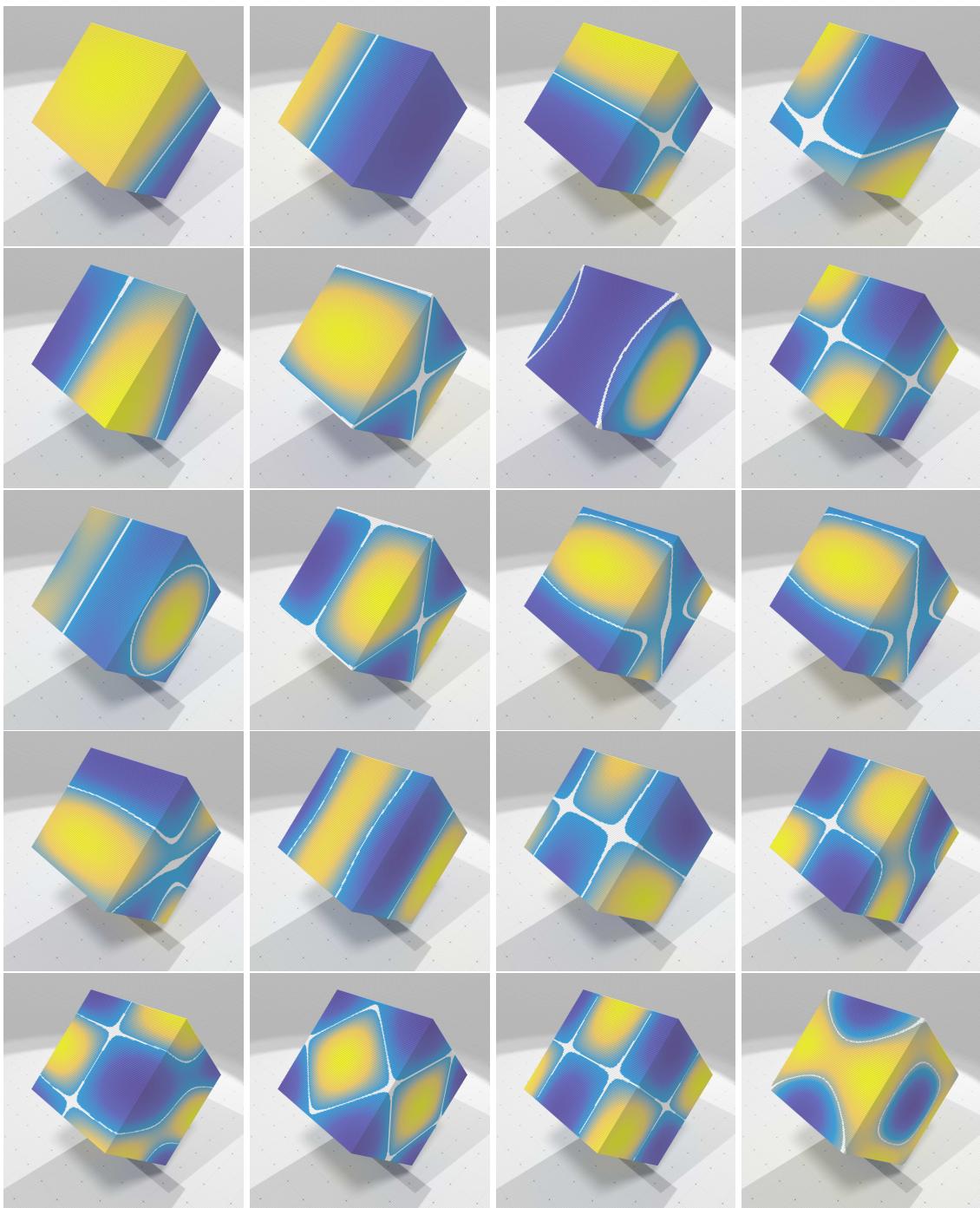
Une fois la décomposition spectrale calculée, nous pouvons nous en servir pour faire de l'approximation de formes. Soit  $\mathbf{E}$  la matrice des vecteurs propres colonnes triés dans l'ordre croissant de leur valeur propre associée. Notons également la matrice  $\mathbf{X}$  de taille  $n_{\text{sommets}} \times 3$  des coordonnées de la surfaces. L'idée est de venir projeter ces coordonnées sur une partie de la base spectrale. Nous avons plus précisément :

$$\mathbf{X}^{(k)} := \mathbf{E}^{(k)} (\mathbf{E}^{(k)})^T \mathbf{X}$$

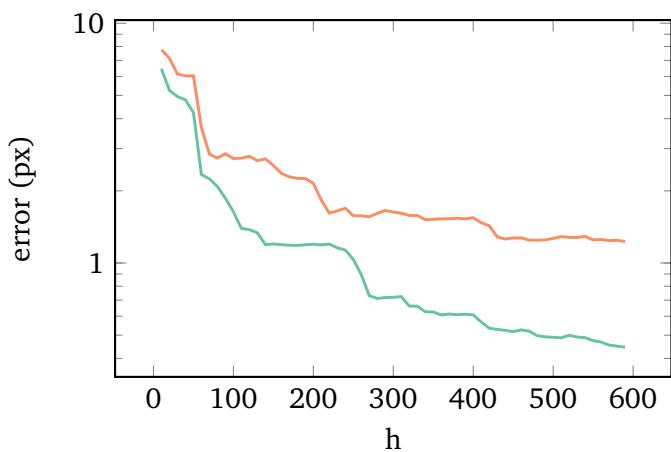
où l'exposant ( $k$ ) sur la matrice  $\mathbf{E}$  signifie que l'on prend les  $k$  premiers vecteurs propres de l'opérateur. Physiquement, les plus petites valeurs propres correspondent aux fréquences les plus faibles de la forme : plus nous ajoutons de vecteurs propres à la décomposition, plus nous captions les détails de la forme. Nous présentons dans la figure 5.11 l'erreur Hausdorff entre la surface approximée et la surface digitale originale. Nous comparons la décomposition de notre opérateur avec celle de  $\mathcal{L}_{\text{COMBI}}$ . Nous voyons qu'avec  $\mathcal{L}_h$ , nous atteignons une précision sub-pixel pour environ 250 vecteurs propres, là où cette précision n'est pas atteinte pour 600 vecteurs propres dans le cas de  $\mathcal{L}_{\text{COMBI}}$ .

## 5.6 Conclusion

Nous avons mis en évidence au travers de multiples applications tout d'abord la propriété de  $C^2$ -convergence, puis la propriété d'anisotropie de  $\mathcal{L}_h$ . Ces résultats confirment le chapitre précédent où nous avions montré théoriquement la  $C^2$ -convergence. Nous présentons dans le prochain chapitre une méthode alternative pour construire un opérateur  $C^2$ -convergent à partir d'un opérateur non convergent. Ce dernier chapitre constitue l'ouverture de la thèse en cela que ces travaux ne sont pas encore publiés et qu'il reste de nombreux problèmes ouverts à résoudre.



**Fig. 5.10** Les vingt premières valeurs propres de  $\mathfrak{L}_h$  sur un cube digital. Nous n'affichons pas ici la première valeur propre qui est toujours constante sur la forme.



**Fig. 5.11** Nous affichons l'erreur Hausdorff entre la surface digitale et l'approximation via la décomposition spectrale. Est représenté en orange l'erreur induite par  $\mathcal{L}_{COMBI}$  et en vert l'erreur induite par  $\mathcal{L}_h$ .

# Ouverture : équation de la chaleur et $C^2$ -convergence

Nous souhaitons introduire dans ce chapitre une méthode pour construire un opérateur possédant la propriété de  $C^2$ -convergence depuis un opérateur ne possédant pas cette propriété. Nous revenons pour cela au lien entre l'opérateur de Laplace–Beltrami et l'équation de la chaleur. Nous avions vu dans la section 3.5 que l'équation de la chaleur s'écrit

$$\Delta u(x, t) = \partial_t u(x, t) \quad (5.6.1)$$

et avions appliqué un schéma d'Euler implicite pour arriver à l'équation suivante :

$$\Delta u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, t) - u(x, 0)}{t}.$$

Nous avions appliqué l'idée de Belkin de discréteriser  $u(x, t)$  en utilisant une approximation euclidienne des solutions de l'équation de la chaleur basée sur une convolution entre un noyau Gaussien et la fonction au temps zéro. Nous allons maintenant donner une autre technique de discréétisation de  $u(x, y)$ . Nous considérons la version discrète de l'équation précédente :

$$Lu_{x,t} = \frac{1}{t} (u_{x,t} - u_{x,0})$$

où  $L$  est la matrice d'une discréétisation de l'opérateur de Laplace–Beltrami. En réarrangeant les termes nous obtenons

$$(I - tL) u_{x,t} = u_{x,0}. \quad (5.6.2)$$

Nous présentons dans les trois prochains paragraphes quelques propriétés du nouvel opérateur de Laplace–Beltrami construit via cette méthode.

**Existence de l'inverse de  $(I - tL)$**  Nous pouvons donc, sous réserve de l'existence de l'inverse de  $(I - tL)$ , calculer les valeurs de  $u_{x,t}$  avec une résolution de système linéaire. Nous savons que si l'inverse de  $(I - tL)$  alors elle est donnée par la série de Neumann suivante (voir [102]) :

$$(I - tL)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k L^k.$$

Nous pouvons donc dériver facilement une condition d'existence de l'inverse via cette égalité. Soit  $\|\cdot\|$  une norme de matrice arbitraire, la matrice  $(\mathbf{I} - t\mathbf{L})$  est inversible si la série converge, ce qui veut dire que la norme de la série est bornée. Nous avons

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbf{L}^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} t^k \|\mathbf{L}^k\|$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Supposons de plus que la norme est sous-multiplicative, c'est-à-dire que pour toute matrice  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ ,  $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$ , nous avons

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbf{L}^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} t^k \|\mathbf{L}\|^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - t^k \|\mathbf{L}\|^k}{1 - t \|\mathbf{L}\|}.$$

Ce qui nous donne le petit lemme suivant :

**LEMME** (5.6.1)

$\mathbf{u}_{x,t} = (\mathbf{I} - t\mathbf{L})^{-1} \mathbf{u}_{x,0}$  est solution de l'Equation (5.6.2) si  $t \leq \frac{1}{\|\mathbf{L}\|}$  où  $\|\cdot\|$  est une norme de matrice sous-multiplicative.

A noter qu'il existe d'autres conditions d'existence de l'inverse : on peut par exemple citer un résultat de la théorie de Perron-Frobenius des matrices non-négatives qui relie l'existence de l'inverse avec le rayon spectrale (la plus grande valeur propre) de la matrice (voir le théorème 4 de [98] ou bien encore le lemme 3 de l'article de Chebotarev [12]).

**Un lien théorique entre l'équation de la chaleur discrète et le schéma d'Euler implicite**  
 Nous cherchons ici à quantifier l'erreur d'approximation induite par le schéma d'Euler implicite. Cette erreur est en fait reliée à une théorie plus générale sur la résolution des systèmes linéaires appelée la théorie des semi-groupes. Nous n'entrerons pas dans les détails de cette théorie, mais nous conseillons le livre de Hille et Phillips [46] ou bien encore le livre de Hunter [49] que nous avions déjà mentionné pour la convergence dans les espaces de fonctions. L'application de la théorie à la version discrète de l'Equation (5.6.1) nous dit que la solution de cette équation est donnée par la série suivante :

$$\mathbf{u}_{x,t} = e^{-t\mathbf{L}} \mathbf{u}_{x,0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{L}^k \mathbf{u}_{x,0}$$

qui correspond en fait à l'exponentielle de  $t\mathbf{L}$ . Nous prouvons dans ce paragraphe le lemme suivant :

**LEMME** (5.6.2)

Soit  $\mathbf{L}$  une matrice et  $\|\cdot\|$  une norme sous-multiplicative. Nous avons

$$\left\| (\mathbf{I} - t\mathbf{L})^{-1} - e^{-t\mathbf{L}} \right\| = \left\| \sum_k t^k \mathbf{L}^k - \sum_k \frac{t^k}{k!} \mathbf{L}^k \right\| \leq \frac{1}{1 - t \|\mathbf{L}\|} - e^{-t \|\mathbf{L}\|}$$

sous réserve d'existence de  $(\mathbf{I} - t\mathbf{L})^{-1}$ .

**PREUVE** Nous avons

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{I} - t\mathbf{L})^{-1} - e^{-t\mathbf{L}}\| &= \left\| \sum_k t^k \mathbf{L}^k - \sum_k \frac{t^k}{k!} \mathbf{L}^k \right\| \\ &\leq \sum_k \|\mathbf{L}^k\| \left| t^k - \frac{t^k}{k!} \right| \\ &= \sum_k t^k \|\mathbf{L}^k\| \left| 1 - \frac{1}{k!} \right|\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Nous savons que la norme est sous-multiplicative ce qui nous donne :

$$\|(\mathbf{I} - t\mathbf{L})^{-1} - e^{-t\mathbf{L}}\| \leq \sum_k t^k \|\mathbf{L}\|^k \left| 1 - \frac{1}{k!} \right|.$$

En remarquant que pour  $k > 0$ ,  $\left| 1 - \frac{1}{k!} \right| > 0$  nous avons

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{I} - t\mathbf{L})^{-1} - e^{-t\mathbf{L}}\| &\leq \sum_k t^k \|\mathbf{L}\|^k \left( 1 - \frac{1}{k!} \right) \\ &= \sum_k t^k \|\mathbf{L}\|^k - \sum_k \frac{t^k}{k!} \|\mathbf{L}\|^k \\ &= \frac{1}{1 - t \|\mathbf{L}\|} - e^{-t \|\mathbf{L}\|}\end{aligned}$$

ce qui montre notre lemme pour  $k > 0$ . Il est alors facile de voir que pour  $k = 0$ , la norme de la différence des deux matrices est égale à zéro ce qui conclue la preuve de ce lemme.

□

Ce lemme nous dit que l'erreur d'approximation via la méthode d'Euler implicite diminue quand  $t$  tend vers zéro, propriété que nous souhaitons naturellement quand l'on utilise cette approximation.

**Spectre du l'opérateur** Nous notons le nouvel opérateur construit via l'inversion du système linéaire par  $\mathcal{L}_C$ . Celui-ci s'écrit sous forme matricielle comme

$$\mathbf{L}_C := \frac{1}{t} ((\mathbf{I} - t\mathbf{L})^{-1} - \mathbf{I}). \quad (5.6.3)$$

La matrice  $\mathbf{L}_C$  vérifie également l'équation récursive suivante :

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{L}(\mathbf{I} + t\mathbf{L}_C), \quad (5.6.4)$$

ce qui nous dit que  $L_C$  tend vers  $L$  quand  $t$  tend vers zéro. Nous montrons cette équation récursive. En injectant la série de Neumann dans l'Equation (5.6.3) nous avons :

$$L_C = \frac{1}{t} \left( \sum_k t^k L^k - I \right) = \sum_{k=1} t^{k-1} L^k$$

car  $L^0 = I$  par définition. Injectons maintenant ce résultat dans l'Equation (5.6.4) :

$$L_C = L \left( I + t \sum_{k=1} t^{k-1} L^k \right).$$

Nous retombons donc bien sur la définition de l'opérateur  $L_C$ .

Soient  $\lambda_i$  (resp.  $\lambda_i^C$ ) les valeurs propres de  $L$  (resp.  $L_C$ ) avec les vecteurs propres correspondant  $\varphi_i$  (resp.  $\varphi_i^C$ ). Nous montrons une connection entre le spectre de  $L$  et  $L_C$ . La décomposition spectrale de  $L_C$  vérifie

$$\forall i, L_C \varphi_i^C = \lambda_i^C \varphi_i^C.$$

Nous injectons l'Equation (5.6.4) dans l'équation de la décomposition spectrale :

$$\forall i, L(I - tL_C) \varphi_i^C = \lambda_i^C \varphi_i^C.$$

Finalement, en développant et en remplaçant  $L_C \varphi_i^C$  par  $\lambda_i^C \varphi_i^C$  nous avons

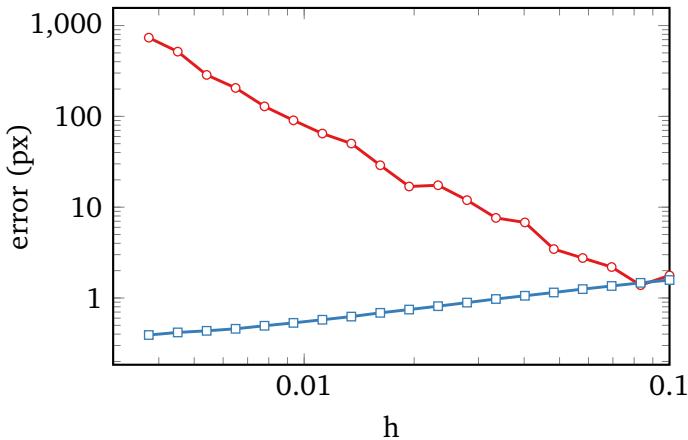
$$\forall i, L \varphi_i^C = \frac{\lambda_i^C}{1 - t\lambda_i^C} (\varphi)_i^C,$$

ce qui veut dire que

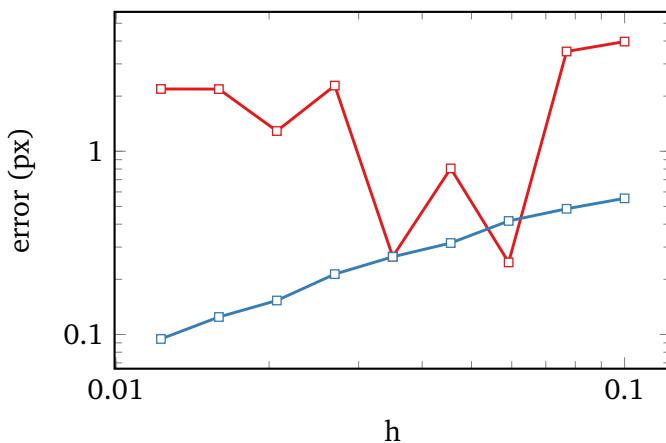
$$\forall i, \begin{cases} \lambda_i = \frac{\lambda_i^C}{1-t\lambda_i^C} \equiv \lambda_i^C = \frac{\lambda_i}{1+t\lambda_i} \\ \varphi_i = \varphi_i^C. \end{cases}$$

Notre nouvel opérateur possède donc les même vecteurs propres que  $L$ , et nous avons une relation entre les valeurs propres des deux matrices. Nous savons que l'amplitude des valeurs propres de l'opérateur de Laplace–Beltrami représentent l'intensité des vibrations sur la surface lorsque l'opérateur est utilisé dans un processus de diffusion. Nous voyons donc que nous avons en quelque sorte effectué une opération de lissage du spectre puisque les nouvelles valeurs propres sont plus petites que les valeurs propres d'origines. Ce résultat est en accord avec l'interprétation physique de l'équation de la chaleur qui diffuse les valeurs de la fonction au temps zéro sur la surface. Il faut en effet se rappeler que les solutions de l'équation de la chaleur sont donnés par la convolution entre une gaussienne et la fonction au temps zéro : c'est opération lisse les valeurs de la fonctions sur la surface, ce que nous observons également via le spectre du nouvel opérateur. Une autre propriété qui découle immédiatement est que si  $L$  est (PSD) alors  $L^C$  l'est aussi automatiquement.

**Le choix de la matrice  $L$**  Nous n'avons jusqu'à maintenant pas préciser quelle matrice utiliser dans notre méthode. Nous rappelons que nous souhaitons que notre nouvel opéra-



**Fig. 5.12** Nous affichons l'erreur infinie d'estimation de la courbure moyenne via  $\mathcal{L}_{\text{QUAD}}$  en rouge (—○—) et via  $\mathcal{L}_C$  en utilisant  $\mathcal{L}_{\text{QUAD}}$  comme entrée en bleu (—□—) sur la triangulation de la surface de Goursat.



**Fig. 5.13** Nous affichons l'erreur infinie pour l'adaption de l'algorithme d'Alexa et Wardetzky sur les surfaces digitales en rouge (—□—) et l'erreur obtenue avec  $\mathcal{L}_C$  en utilisant  $\mathcal{L}_{\text{QUAD}}$

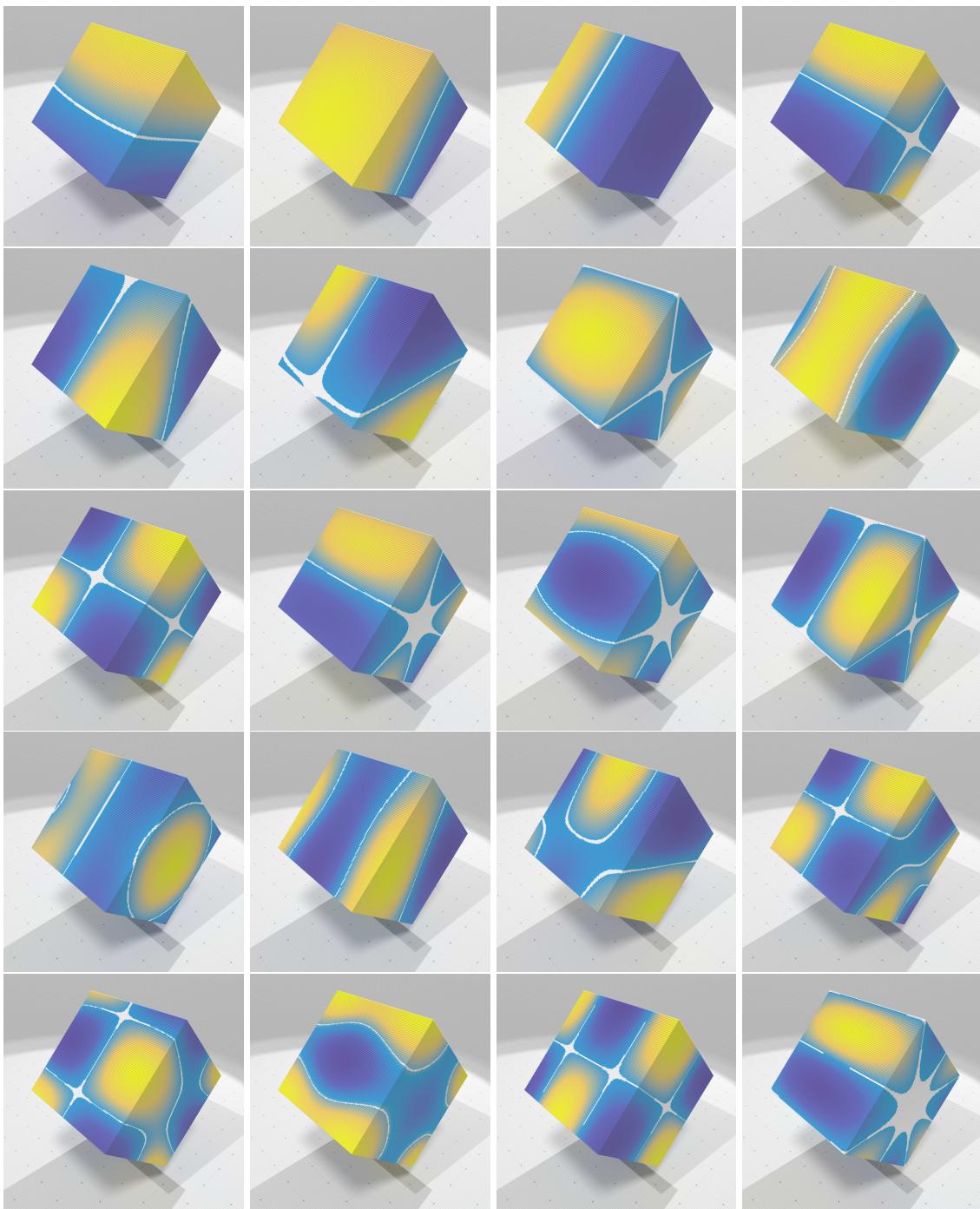
teur soit  $C^2$ -convergent. Nos expériences nous montrent qu'un bon choix d'opérateur sur les surfaces digitales est l'adaptation de l'opérateur d'Alexa et Wardetzky sur ces surfaces présentée dans la section 3.4. Nous affichons dans la figure. 5.13 les erreurs infinies pour  $\mathcal{L}_{\text{QUAD}}$  ainsi que pour  $\mathcal{L}_C$  en utilisant  $\mathcal{L}_{\text{QUAD}}$  pour l'estimation de courbure moyenne sur la surface de Goursat via sa discréttisation de Gauss. Nous affichons également dans la figure. 5.12 les erreurs d'estimation de la courbure moyenne avec  $\mathcal{L}_{\text{COT}}$  et  $\mathcal{L}_C$  en utilisant  $\mathcal{L}_{\text{COT}}$ . La surface considérée pour cette seconde expérience est la triangulation d'un échantillonage régulier du Goursat. Nous voyons dans les deux cas que nos obtenons empiriquement la  $C^2$ -convergence via notre méthode.

Un autre motivation pour l'utilisation  $\mathcal{L}_{\text{QUAD}}$  sur les surfaces digitales provient de l'analyse spectrale. Nous affichons dans la figure. 5.14 les fonctions propres de l'adaptation de l'opérateur  $\mathcal{L}_{\text{QUAD}}$  sur les surfaces digitales. Ses propriétés de symétrie et de localité nous permettent de calculer rapidement la décomposition spectrale de la matrice (la forme est contenue ici dans un cube de côté 512, pour un total de 545018 faces : le calcul des 300 premières valeurs propres prend ici moins d'une minute). Nous remarquons bien ici que les fonctions propres caractérisent les symétries de la surface. Si l'on se compare

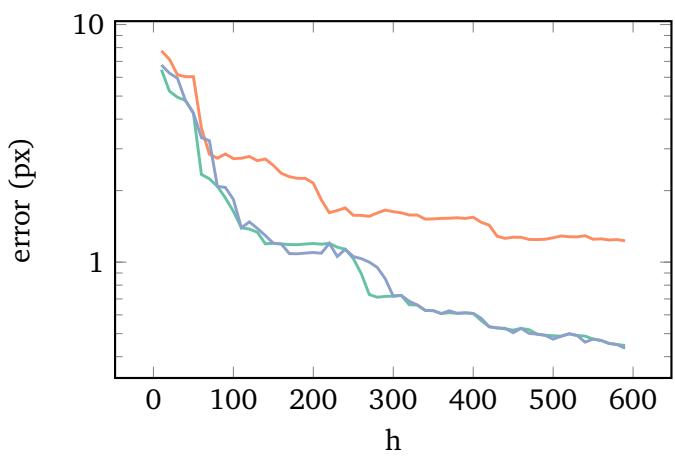
au spectre obtenu via  $\mathcal{L}_h$  dans la figure. 5.10, nous remarquons que les résultats visuels sont légèrement moins satisfais mais restent néanmoins tout à fait correctes.

Enfin, la méthode que nous présentons ici est en fait relié au flot de courbure moyenne : le vecteur de courbure moyenne calculée en appliquant  $\mathcal{L}_C$  aux coordonnées de la forme discrète nous donne en fait la direction et l'intensité du flot. Nous affichons dans la figure. 5.16 le flot calculé via l'adaptation de  $\mathcal{L}_{QUAD}$  sur les surfaces digitales. Nous regardons également dans la figure. 5.15 l'erreur Hausdorff d'approximation via la projection sur la base spectrale (voir le chapitre 5 pour les détails de la méthode). Nous observons qu'il faut un peu plus de vecteurs propres pour atteindre la précision sub-pixel de l'approximation (environ 280 au lieu de 250 pour  $\mathcal{L}_h$ ). Dépassé ce seuil, les deux approximations se rejoignent : cela est sûrement dû à la forme qui ne possède pas de vibrations petites significatives.

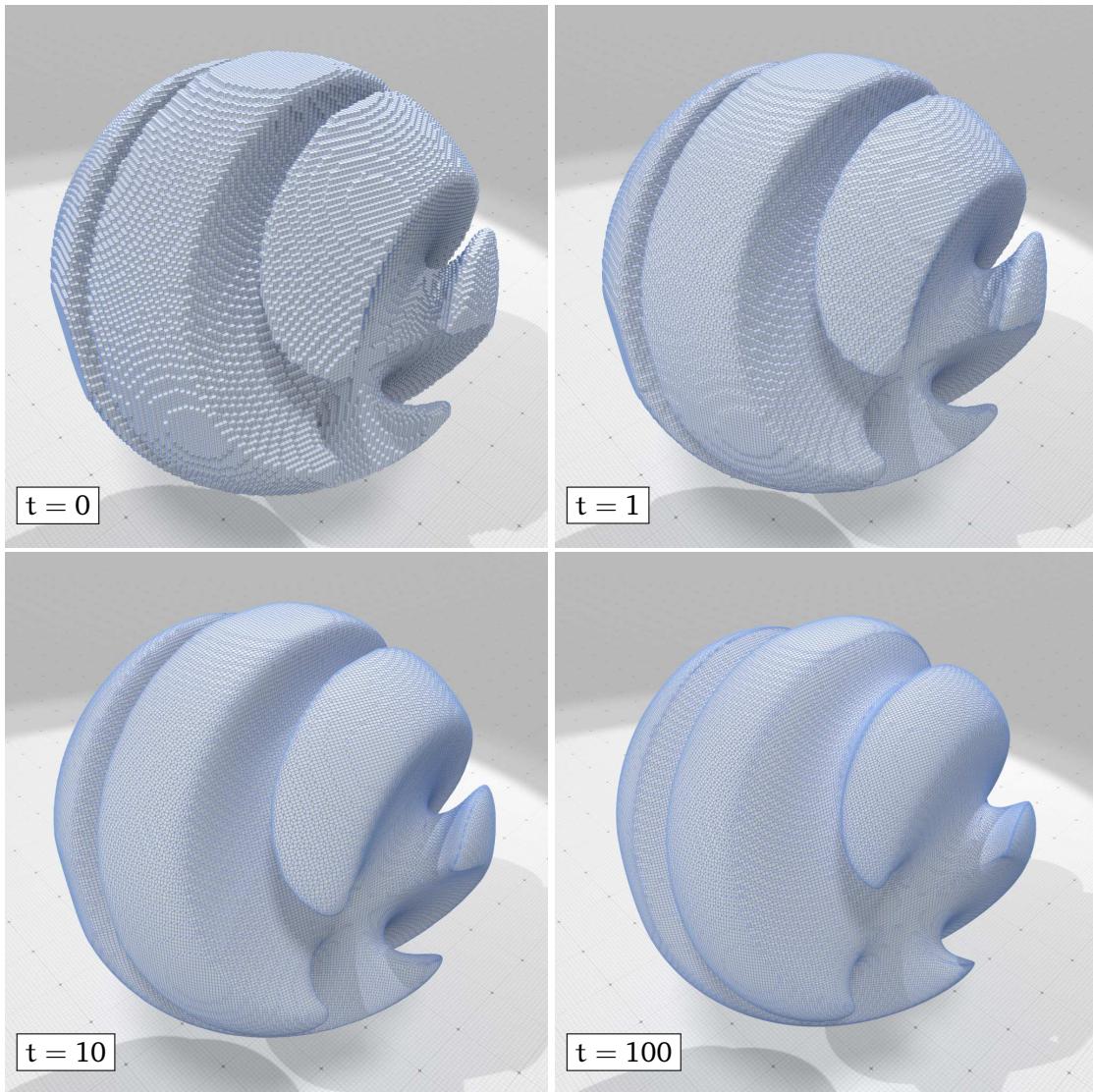
**Conclusion** Cette analyse numérique et les quelques applications montrées ici concluent cette ouverture. Nous avons essayé de donner des justifications pratiques à l'utilisation de  $\mathcal{L}_{QUAD}$  comme opérateur en entrée de la méthode. Nous avons tout d'abord observé la  $C^2$ -convergence empiriquement, puis nous avons illustré quelques propriétés spectrales de l'opérateur comme nous l'avions fait pour  $\mathcal{L}_h$ . Nous passons donc maintenant à la conclusion de cette thèse, où nous présenterons plusieurs perspectives tant pour les discrétilisations de l'opérateur de Laplace–Beltrami que pour le calcul discret en lui-même.



**Fig. 5.14** Nous affichons ici les vingt premières valeurs propres de l'adaptation de  $\mathfrak{L}_{\text{QUAD}}$  sur les surfaces digitales pour justifier de l'utilisation de cet opérateur dans notre méthode.



**Fig. 5.15** Nous affichons l'erreur Hausdorff entre la surface digitale et l'approximation via la décomposition spectrale. Est représenté en orange l'erreur induite par  $\mathcal{L}_{COMBI}$  et en vert l'erreur induite par  $\mathcal{L}_h$  et en bleu celle induite par  $\mathcal{L}_{QUAD}$ .



**Fig. 5.16** Flot de courbure via l'opérateur  $\mathcal{L}_{QUAD}$  sur les surfaces digitales.

# Conclusion et perspectives

Nous avons, au travers de l'opérateur de Laplace–Beltrami, mis en évidence de bonnes façons d'élaborer un calcul discret sur les surfaces digitales. Nous avons vu que l'opérateur permet de tester de nombreuses propriétés du calcul à l'aide de l'étude de la convergence des opérateurs ainsi que de l'étude spectrale de ceux-ci. Nous avons proposé une nouvelle discrétisation qui possède la propriété de  $C^2$ -convergence sur les surfaces digitales, que nous avons à la fois montré théoriquement et observé à travers diverses analyses numériques. Nous nous sommes comparés à différentes discrétisations existantes de l'opérateur de Laplace–Beltrami et avons montré que seul notre opérateur était convergent. Nous avons également illustré ce nouvel opérateur via l'estimation de courbure moyenne sur la surface, le lissage de surfaces ainsi que la diffusion de la chaleur. Nous avons proposé en ouverture une méthode (sans preuve théorique) pour récupérer la  $C^2$ -convergence à partir d'une discrétisation locale de l'opérateur de Laplace–Beltrami et nous avons mis en évidence quelques propriétés de ce nouvel opérateur comme le lien entre les solutions de l'équation de la chaleur et la discrétisation de cette équation via le schéma d'Euler implicite ou bien encore via l'étude de son spectre.

De nombreuses questions restent bien sûr encore ouvertes. Concernant notre discrétisation de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur les surfaces digitales, nous résumons quelques perspectives :

- Nous n'avons pas mentionné le fait qu'il était possible d'obtenir une matrice plus creuse que la méthode présenté dans cette thèse. En effet, nous savons que toute l'information contenu sous la gaussienne se situe à quelques multiples de la variance  $\sigma$ , typiquement égal à deux ou trois. On peut donc alors couper la convolution sur la surface dans un rayon de quelques  $\sigma$ . Faire cette coupe de l'opérateur nous permet à la fois d'obtenir une matrice creuse de  $\mathfrak{L}_h$ , mais aussi d'employer des algorithmes plus rapides pour son calcul, comme par exemple un parcours de graphe local. Nous observons empiriquement que cet opérateur coupé possède toujours la propriété de  $C^2$ -convergence, mais la preuve théorique reste à faire. Une des pistes que nous envisageons est d'utiliser le lemme 7.1 de Belkin *et al.* présent dans leur article ‘Towards a Theoretical Foundation for Laplacian-Based Manifold Methods’ [3].
- Nous savons que le spectre de l'opérateur de Belkin *et al.* converge sur les triangulations sous certaines propriétés d'échantillonnages de la surface, résultat qui est du à Dey *et al.* [22]. Une perspective naturelle serait d'obtenir un résultat théorique similaire sur nos surfaces digitales, ce qui validerait la propriété (PSD) pour  $\mathfrak{L}_h$ . Pour prouver un tel théorème, nous pensons qu'il est nécessaire de tout d'abord montrer la convergence en norme d'opérateur de notre discrétisation. Il existe en effet de nombreux résultats en théorie spectral supposant cette convergence. La preuve d'une telle propriété reste néanmoins un vrai challenge, puisqu'elle allie des théories

mathématiques diverses (théorie spectrale, théorie sur la convergence de fonctions entre autre).

- Puisque nous parlons des propriétés de notre opérateur, la question de (LIN) reste un problème ouvert à la fois pour notre discrétisation, ainsi que pour celle Belkin *et al.*. Nous ne savons pas à ce jour si l'un ou l'autre des opérateurs vérifie cette propriété.
- Concernant les applications de l'opérateur sur les surfaces digitales, nous pouvons envisager l'application de nombreuses méthodes existantes sur les surfaces digitales comme le flot par courbure moyenne, ou bien encore le flot de Willmore. Bien que n'étant pas une réelle avancée, il serait intéressant d'étudier le comportement de ces méthodes sur nos surfaces.
- Une autre question ouverte est le lien entre notre opérateur et le formalisme du calcul extérieur. Les différences de fonctions dans la convolution nous font fortement penser à l'opérateur de dérivée extérieure du calcul, et nous pouvons donc raisonnablement penser qu'il existe un lien entre les deux objets. Là où ce lien est plutôt évident dans le cas des opérateurs locaux (comme pour les cotangentes par exemple), nous ne savons pas dans quel cadre les deux objets s'entrelacent.

Concernant la méthode proposée dans l'ouverture de cette thèse :

- La première chose que nous allons faire pour la suite de l'étude de cette méthode est de montrer la  $(C^2)$ -convergence. Nous avons vu dans le lemme (5.6.2) que l'erreur entre notre approximation des solutions de l'équation de la chaleur via la méthode d'Euler implicite et les solutions discrètes de l'équation sont bornées, sous réserve d'une relation entre le paramètre de temps et la norme de la matrice utilisée en entrée de la méthode. Nous souhaitons explorer deux approches pour montrer la convergence. La première serait d'étudier l'erreur entre les vraies solutions de l'équation de la chaleur et les solutions discrètes. Il faudrait alors calculer une erreur entre une matrice infinie, qui correspond aux vraies solutions, et une matrice finie qui correspond à l'équation discrète. Nous pourrions utiliser une méthode similaire au papier de Dey *et al.* [22] qui donne un moyen de relier ces deux objets. L'autre approche que nous envisageons et de relier directement les solutions de l'équation de la chaleur calculées via notre discrétisation et celles calculées via la méthode de Belkin *et al.*. Nous pensons cette approche plus prometteuse, car nous pourrions réutiliser à la fois les résultats théoriques de convergence développés dans cette thèse mais aussi ceux sur les triangulations.
- Un autre problème à résoudre pour cette méthode est le choix de la matrice en entrée. Nous pensons actuellement que toute matrice possédant la propriété de  $H_0^1$ -convergence peut produire un opérateur convergent. Cette supposition vient du fait que nous observons empiriquement que les discrétisations possédant cette propriété donnent des opérateurs  $C^2$ -convergents. C'est cependant encore une question largement ouverte qui sera sûrement résolu via la preuve de  $C^2$ -convergence de la méthode.
- Si nous arrivons à montrer la  $C^2$ -convergence de cette méthode dans le cadre général des surfaces polygonales, nous avons bon espoir de montrer la convergence du

spectre du nouvel opérateur en utilisant par exemple pour les triangulations les résultats existants pour la discréétisation de Belkin *et al.*. Or, nous avons vu que l'opérateur en entrée de la méthode et l'opérateur produit par la méthode possèdent en fait à peu près la même décomposition spectrale. Nous pourrions peut-être ainsi répondre à un problème ouvert qui concerne la convergence des vecteurs propres de l'opérateur des cotangentes sur les triangulations (seul la convergence des valeurs propres a pour l'instant été montrée).

discret, les surfaces digitales nous posent un problème supplémentaire qu'est l'inclusion de la mesure des éléments de surface dans le calcul et plus précisément le fait que nous ne possédons pas une représentation explicite du plan tangent en un point de la surface. Nous avions évoqué rapidement l'adaptation de la discréétisation d'Alexa et Wardetzky sur les surfaces digitales. La méthode employée dans ce papier constitue en fait une approche pour l'élaboration du calcul discret. Sont en effet définis au travers de l'opérateur la différentielle  $d$  ainsi que la codifférentielle  $\delta$  qui sont les deux briques de base du calcul discret. De récents travaux de Velho et Ptackova [84, 83] nous montrent que l'approche primal-primal (dit autrement un calcul discret sans espace dual) semble être à ce jour la meilleure approche au calcul discret sur les surfaces polygonales. En plus de présenter  $d$  et  $\delta$ , les auteurs proposent une discréétisation du produit extérieur sur les surfaces polygonales, ainsi que du cup-product et de la dérivée de Lie. Dans le cas des surfaces digitales, nous pourrions adapter leur méthode en utilisant les techniques de projections sur le plan tangents présentés dans la section 4.2. Pour obtenir un calcul complet, il nous resterait néanmoins à définir les opérateurs musicaux  $\sharp$  et  $\flat$ , qui jouent un rôle critique dans le calcul discret.



# Bibliographie

- [1] Marc Alexa and Max Wardetzky. „Discrete Laplacians on General Polygonal Meshes“. In: *ACM SIGGRAPH 2011 Papers*. SIGGRAPH '11. Vancouver, British Columbia, Canada: ACM, 2011, 102:1–102:10 (cit. on pp. 31, 53, 62, 78).
- [2] and. „Construction of triply periodic minimal surfaces“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 354.1715 (1996). Ed. by and, pp. 2077–2104. eprint: <http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/354/1715/2077.full.pdf> (cit. on p. 52).
- [3] Mikhail Belkin and Partha Niyogi. „Towards a theoretical foundation for Laplacian-based manifold methods“. In: *J. Comput. Syst. Sci.* 74.8 (2008), pp. 1289–1308 (cit. on pp. 66, 68, 69, 119).
- [4] Mikhail Belkin, Jian Sun, and Yusu Wang. „Constructing Laplace Operator from Point Clouds in  $\mathbb{R}^d$ “. In: *Proceedings of the Twentieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 1031–1040 (cit. on pp. 53, 66, 68, 71).
- [5] Mikhail Belkin, Jian Sun, and Yusu Wang. „Discrete laplace operator on meshed surfaces“. In: *Proceedings of the 24th ACM Symposium on Computational Geometry, College Park, MD, USA, June 9-11, 2008*. Ed. by Monique Teillaud. ACM, 2008, pp. 278–287 (cit. on pp. 66, 68, 69, 74, 80, 98, 99).
- [6] Alexander I. Bobenko and Boris Springborn. „A Discrete Laplace-Beltrami Operator for Simplicial Surfaces“. In: *Discrete & Computational Geometry* 38.4 (2007), pp. 740–756 (cit. on p. 52).
- [7] Kenneth A. Brakke. „The surface evolver“. In: *Experiment. Math.* 1.2 (1992), pp. 141–165 (cit. on p. 58).
- [8] Thomas Caissard, David Coeurjolly, Jacques-Olivier Lachaud, and Tristan Roussillon. „Heat kernel Laplace-Beltrami operator on digital surfaces“. In: *International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*. Springer. 2017, pp. 241–253 (cit. on p. 9).
- [9] Thomas Caissard, David Coeurjolly, Jacques-Olivier Lachaud, and Tristan Roussillon. „Laplace-Beltrami Operator on Digital Surfaces“. In: (2018) (cit. on p. 9).
- [10] C. Cartade, C. Mercat, R. Malgouyres, and C. Samir. „Mesh Parameterization with Generalized Discrete Conformal Maps“. In: *Journal of mathematical imaging and vision* 46.1 (2013), pp. 1–11 (cit. on p. 53).
- [11] F. Cazals and M. Pouget. „Estimating differential quantities using polynomial fitting of osculating jets“. In: *Computer Aided Geometric Design* 22.2 (2005), pp. 121 –146 (cit. on p. 101).
- [12] Pavel Chebotarev. „The walk distances in graphs“. In: *Discrete Applied Mathematics* 160.10 (2012), pp. 1484 –1500 (cit. on p. 112).
- [13] F. R. K. Chung. *Spectral Graph Theory*. American Mathematical Society, 1997 (cit. on p. 52).
- [14] Fan Chung and Linyuan Lu. *Complex Graphs and Networks (Cbms Regional Conference Series in Mathematics)*. Boston, MA, USA: American Mathematical Society, 2006 (cit. on p. 52).

- [15] David Coeurjolly, Jacques-Olivier Lachaud, and Jérémie Levallois. „Integral Based Curvature Estimators in Digital Geometry“. In: *Discrete Geometry for Computer Imagery - 17th IAPR International Conference, DGCI 2013, Seville, Spain, March 20-22, 2013. Proceedings*. Ed. by Rocío González-Díaz, María José Jiménez, and Belén Medrano. Vol. 7749. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2013, pp. 215–227 (cit. on p. 38).
- [16] David Coeurjolly, Jacques-Olivier Lachaud, and Tristan Roussillon. „Multigrid Convergence of Discrete Geometric Estimators“. In: *Digital Geometry Algorithms: Theoretical Foundations and Applications to Computational Imaging*. Ed. by Valentin E. Brimkov and Reneta P. Barneva. Dordrecht: Springer Netherlands, 2012, pp. 395–424 (cit. on pp. 38, 77, 84).
- [17] David Coeurjolly, Jacques-Olivier Lachaud, and Jérémie Levallois. „Multigrid convergent principal curvature estimators in digital geometry“. In: *Computer Vision and Image Understanding* 129 (2014), pp. 27–41 (cit. on pp. 38, 40, 82, 84, 97).
- [18] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth. „On the LambertW function“. In: *Advances in Computational Mathematics* 5.1 (1996), pp. 329–359 (cit. on p. 95).
- [19] K. Crane, C. Weischedel, and M. Wardetzky. „Geodesics in heat: a new approach to computing distance based on heat flow“. In: *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 32.5 (2013), p. 152 (cit. on p. 105).
- [20] M. Desbrun, A. N. Hirani, M. Leok, and J. E. Marsden. „Discrete exterior calculus“. In: *arXiv preprint math/0508341* (2005) (cit. on pp. 31, 52).
- [21] Mathieu Desbrun, Mark Meyer, Peter Schröder, and Alan H. Barr. „Implicit Fairing of Irregular Meshes Using Diffusion and Curvature Flow“. In: *Proceedings of the 26th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH 1999, Los Angeles, CA, USA, August 8-13, 1999*. Ed. by Warren N. Waggenspack. ACM, 1999, pp. 317–324 (cit. on pp. 52, 57).
- [22] Tamal K. Dey, Pawas Ranjan, and Yusu Wang. „Convergence, Stability, and Discrete Approximation of Laplace Spectra“. In: *Proceedings of the Twenty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 650–663. eprint: <http://pubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9781611973075.54> (cit. on pp. 119, 120).
- [23] J. Douglas. *Solution of the Problem of Plateau*. Transactions of AMS. AMS, 1931 (cit. on p. 58).
- [24] Jesse Douglas. „A Method of Numerical Solution of the Problem of Plateau“. In: *Annals of Mathematics* 29.1/4 (1927), pp. 180–188 (cit. on p. 58).
- [25] R. J. DUFFIN. „Distributed and Lumped Networks“. In: *Journal of Mathematics and Mechanics* 8.5 (1959), pp. 793–826 (cit. on p. 52).
- [26] G. Dziuk. „An algorithm for evolutionary surfaces“. In: *Numerische Mathematik* 58.1 (1990), pp. 603–611 (cit. on pp. 52, 58).
- [27] Gerhard Dziuk. „Finite Elements for the Beltrami operator on arbitrary surfaces“. In: *Partial Differential Equations and Calculus of Variations*. Ed. by Stefan Hildebrandt and Rolf Leis. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1988, pp. 142–155 (cit. on p. 52).
- [28] T.J. Ellis, D. Proffitt, D. Rosen, and W. Rutkowski. „Measurement of the lengths of digitized curved lines“. In: *Computer Graphics and Image Processing* 10.4 (1979), pp. 333 –347 (cit. on p. 82).

- [29] H.-A. Esbelin, R. Malgouyres, and C. Cartade. „Convergence of binomial-based derivative estimation for 2 noisy discretized curves“. In: *Theoretical Computer Science* 412.36 (2011), pp. 4805 –4813 (cit. on p. 71).
- [30] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2010 (cit. on p. 22).
- [31] G. Faber. *Beweis, daß unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt*. Vol. 1923.8. Sitzungsbericht der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. München: Verl.d.Bayer.Akad.d.Wiss., 1923 (cit. on p. 26).
- [32] H. Federer. *Geometric measure theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1969 (cit. on p. 37).
- [33] Herbert Federer. „Curvature measures“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 93.3 (1959), pp. 418–491 (cit. on pp. 36, 37, 80).
- [34] F. Flin, J. B. Brzoska, B. Lesaffre, et al. „An adaptive filtering method to evaluate normal vectors and surface areas of 3D objects. Application to snow images from X-ray tomography“. In: *IEEE Transactions on Image Processing* 14.5 (2005), pp. 585–596 (cit. on p. 33).
- [35] Michael S. Floater and Kai Hormann. „Surface Parameterization: a Tutorial and Survey“. In: *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*. Ed. by Neil A. Dodgson, Michael S. Floater, and Malcolm A. Sabin. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005, pp. 157–186 (cit. on p. 65).
- [36] Koji Fujiwara. „Eigenvalues of Laplacians on a Closed Riemannian Manifold and Its Nets“. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 123.8 (1995), pp. 2585–2594 (cit. on p. 52).
- [37] C. Gordon and D. Webb. „You Can't Hear the Shape of a Drum“. In: *American Scientist* 84 (Jan. 1996), pp. 46–55 (cit. on pp. 25, 26).
- [38] L. J. Grady and J. Polimeni. *Discrete calculus: Applied analysis on graphs for computational science*. Springer, 2010 (cit. on p. 53).
- [39] P.R. Halmos. *Finite Dimensional Vector Spaces*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1948 (cit. on p. 54).
- [40] J. Harrison. „Flux across nonsmooth boundaries and fractal Gauss/Green/Stokes' theorems“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 32.28 (1999), p. 5317 (cit. on p. 53).
- [41] J. Harrison. „Stokes' theorem for nonsmooth chains“. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 29.2 (1993), pp. 235–242 (cit. on p. 53).
- [42] G.T. Herman. *Geometry of Digital Spaces*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Boston, 2012 (cit. on p. 33).
- [43] T. Hildebrand, A. Laib, R. Müller, J. Dequeker, and P. Rüegsegger. „Direct three-dimensional morphometric analysis of human cancellous bone: microstructural data from spine, femur, iliac crest, and calcaneus.“ In: *Journal of bone and mineral research : the official journal of the American Society for Bone and Mineral Research* 14.7 (1999), pp. 1167–74 (cit. on p. 33).
- [44] K. Hildebrandt, K. Polthier, and M. Wardetzky. „On the convergence of metric and geometric properties of polyhedral surfaces“. English. In: *Geometriae Dedicata* 123.1 (2006), pp. 89–112 (cit. on p. 53).

- [45] Klaus Hildebrandt and Konrad Polthier. „On approximation of the Laplace–Beltrami operator and the Willmore energy of surfaces“. In: *Computer Graphics Forum* 30.5 (2011), pp. 1513–1520 (cit. on pp. 53, 69, 70, 99).
- [46] E. Hille and R.S. Phillips. *Functional Analysis and Semi Groups*. Colloquium Publications - American Mathematical Society. American Mathematical Soc., 1957 (cit. on p. 112).
- [47] A. N. Hirani. „Discrete exterior calculus“. PhD thesis. California Institute of Technology, 2003 (cit. on pp. 31, 32, 52).
- [48] W.V.D. Hodge. *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*. Cambridge mathematical library. Cambridge University Press, 1989 (cit. on p. 23).
- [49] J.K. Hunter and B. Nachtergael. *Applied Analysis*. World Scientific, 2001 (cit. on pp. 43, 46, 112).
- [50] Jost J. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer Universitat texts. Springer, 2005 (cit. on p. 24).
- [51] Mark Kac. „Can One Hear the Shape of a Drum?“ In: *The American Mathematical Monthly* 73.4 (1966), pp. 1–23 (cit. on p. 26).
- [52] Reinhard Klette and Azriel Rosenfeld. *Digital geometry : geometric methods for digital picture analysis*. The Morgan Kaufmann series in computer graphics and geometric modeling. Amsterdam, Boston: Elsevier, 2004 (cit. on pp. 33, 34).
- [53] E. Krahn. „Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises“. In: *Mathematische Annalen* 94.1 (1925), pp. 97–100 (cit. on p. 26).
- [54] J.-O. Lachaud and B. Thibert. „Properties of Gauss Digitized Shapes and Digital Surface Integration“. In: *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 54.2 (2016), pp. 162–180 (cit. on pp. 33, 34, 36, 37, 74, 82, 83).
- [55] Jacques-Olivier Lachaud. „Non-Euclidean spaces and image analysis : Riemannian and discrete deformable models, discrete topology and geometry“. Habilitation à diriger des recherches. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, Dec. 2006 (cit. on p. 36).
- [56] P. D. Lax and R. D. Richtmyer. „Survey of the stability of linear finite difference equations“. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 9.2 (1956), pp. 267–293 (cit. on p. 44).
- [57] P.D. Lax. *Linear Algebra and Its Applications*. Linear algebra and its applications v. 10. Wiley, 2007 (cit. on p. 54).
- [58] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003 (cit. on pp. 13, 16, 17, 19).
- [59] Alexandre Lenoir, Rémy Malgouyres, and Marinette Revenu. „Fast computation of the normal vector field of the surface of a 3-D discrete object“. In: *Discrete Geometry for Computer Imagery: 6th International Workshop, DGCI'96 Lyon, France, November 13–15, 1996 Proceedings*. Ed. by Serge Miguet, Annick Montanvert, and Stéphane Ubéda. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1996, pp. 101–112 (cit. on p. 82).
- [60] Jérémie Levallois, David Coeurjolly, and Jacques-Olivier Lachaud. „Parameter-Free and Multigrid Convergent Digital Curvature Estimators“. In: *Discrete Geometry for Computer Imagery - 18th IAPR International Conference, DGCI 2014, Siena, Italy, September 10–12, 2014. Proceedings*. 2014, pp. 162–175 (cit. on pp. 82, 84).
- [61] B. Lévy and H. Zhang. *Spectral Mesh Processing*. Tech. rep. SIGGRAPH Asia 2009 Courses, 2008 (cit. on pp. 25, 52, 62).

- [62] Uwe Mayer. „Numerical solutions for the surface diffusion flow in three space dimensions“. In: 20 (Jan. 2001) (cit. on p. 52).
- [63] H. P. McKean Jr. and I. M. Singer. „Curvature and the eigenvalues of the Laplacian“. In: *J. Differential Geom.* 1.1-2 (1967), pp. 43–69 (cit. on p. 26).
- [64] C. Mercat. „Discrete Complex Structure on Surfel Surfaces“. English. In: *Discrete Geometry for Computer Imagery*. Vol. 4992. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2008, pp. 153–164 (cit. on p. 53).
- [65] C. Mercat. „Discrete Riemann surfaces and the Ising model“. In: *Communications in Mathematical Physics* 218.1 (2001), pp. 177–216 (cit. on p. 53).
- [66] Mark Meyer, Mathieu Desbrun, Peter Schröder, and Alan H. Barr. „Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds“. In: *Visualization and Mathematics III*. Ed. by Hans-Christian Hege and Konrad Polthier. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003, pp. 35–57 (cit. on pp. 52, 57).
- [67] S. Minakshisundaram. „Eigenfunctions on Riemannian manifolds“. In: *J. Indian Math. Soc.* 17 (1953), pp. 158–165 (cit. on pp. 26, 67).
- [68] S. Minakshisundaram and A. Pleijel. „Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds“. In: *Can. J. Math.* 1 (1949), pp. 242–256 (cit. on pp. 26, 67).
- [69] S A Molchanov. „Diffusion Processes and Riemannian Geometry“. In: *Russian Mathematical Surveys* 30.1 (1975), p. 1 (cit. on pp. 67, 68).
- [70] Jean-Marie Morvan. *Generalized Curvatures*. 1st ed. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008 (cit. on p. 38).
- [71] James R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison Wesley Publishing Company, 1984 (cit. on p. 31).
- [72] Maks Ovsjanikov, Etienne Corman, Michael Bronstein, et al. „Computing and Processing Correspondences with Functional Maps“. In: *ACM SIGGRAPH 2017 Courses*. SIGGRAPH '17. Los Angeles, California: ACM, 2017, 5:1–5:62 (cit. on p. 25).
- [73] T. Pavlidis. *Algorithms for Graphics and Image Processing*. Springer, 1982 (cit. on p. 36).
- [74] Hélène Perrier, Jérémie Levallois, David Coeurjolly, et al. „Interactive Curvature Tensor Visualization on Digital Surfaces“. In: *DGCI2016*. Ed. by Springer. Vol. Lecture Notes in Computer Sciences. International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery. Nantes, France, 2016 (cit. on p. 40).
- [75] U. Pinkall and K. Polthier. „Computing discrete minimal surfaces and their conjugates“. In: *Experimental mathematics* 2.1 (1993), pp. 15–36 (cit. on pp. 52, 57, 58).
- [76] K. Polthier and E. Preuss. „Identifying vector field singularities using a discrete Hodge decomposition“. In: *Visualization and Mathematics* 3 (2003), pp. 113–134 (cit. on p. 52).
- [77] Konrad Polthier. *Computational Aspects of Discrete Minimal Surfaces*. 2002 (cit. on p. 52).
- [78] Konrad Polthier. *Computational Aspects of Discrete Minimal Surfaces*. 2002 (cit. on p. 52).
- [79] Konrad Polthier. *Unstable Periodic Discrete Minimal Surfaces*. 2002 (cit. on p. 52).
- [80] Konrad Polthier and Wayne Rossman. *Discrete constant mean curvature surfaces and their index*. 2002 (cit. on p. 52).

- [81] H. Pottmann, J. Wallner, Q. Huang, and Y. Yang. „Integral invariants for robust geometry processing“. In: *Computer Aided Geometric Design* 26.1 (2009), pp. 37–60 (cit. on pp. 38–40).
- [82] H. Pottmann, J. Wallner, Y. Yang, Y. Lai, and S. Hu. „Principal curvatures from the integral invariant viewpoint“. In: *Computer Aided Geometric Design* 24.8-9 (2007), pp. 428–442 (cit. on pp. 38, 39).
- [83] Lenka Ptáčková. „A Discrete Wedge Product on Polygonal Pseudomanifolds“. PhD thesis. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada Rio de Janeiro, Brazil, 2017 (cit. on p. 121).
- [84] Lenka Ptackova and Luiz Velho. „A Primal-to-Primal Discretization of Exterior Calculus on Polygonal Meshes“. In: *Symposium on Geometry Processing 2017- Posters*. Ed. by Jakob Andreas Bærentzen and Klaus Hildebrandt. The Eurographics Association, 2017, pp. 7–8 (cit. on p. 121).
- [85] Hongxing Qin, Yi Chen, Yunhai Wang, et al. „Laplace–Beltrami Operator on Point Clouds Based on Anisotropic Voronoi Diagram“. In: *Computer Graphics Forum* (), n/a–n/a (cit. on p. 53).
- [86] T. Radó. *On the Problem of Plateau*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge. Springer Berlin Heidelberg, 1933 (cit. on p. 58).
- [87] J.W.S.B. Rayleigh. *The Theory of Sound*. The Theory of Sound v. 1. Macmillan, 1877 (cit. on p. 26).
- [88] T. Regge. „General relativity without coordinates“. English. In: *Il Nuovo Cimento Series 10* 19.3 (1961), pp. 558–571 (cit. on p. 51).
- [89] Steven Rosenberg. *The Laplacian on a Riemannian Manifold*. Cambridge Books Online. Cambridge University Press, 1997 (cit. on pp. 23, 24, 67).
- [90] Elissa Ross. „Spectral Graph Drawing : A Survey“. In: 2004 (cit. on p. 52).
- [91] Wayne Rossman. „Infinite periodic discrete minimal surfaces without self-intersections“. In: 2005 (cit. on p. 52).
- [92] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1976 (cit. on p. 47).
- [93] Jean Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Orlando, FL, USA: Academic Press, Inc., 1983 (cit. on p. 36).
- [94] John M. Sullivan. „Curvatures of Smooth and Discrete Surfaces“. In: *Discrete Differential Geometry*. Ed. by Alexander I. Bobenko, John M. Sullivan, Peter Schröder, and Günter M. Ziegler. Basel: Birkhäuser Basel, 2008, pp. 175–188 (cit. on p. 63).
- [95] Jia chang Sun. „ON APPROXIMATION OF LAPLACIAN EIGENPROBLEM OVER A REGULAR HEXAGON WITH ZERO BOUNDARY CONDITIONS“. In: *Journal of Computational Mathematics* 22.2 (2004), pp. 275–286 (cit. on p. 24).
- [96] G. Taubin. „A signal processing approach to fair surface design“. In: *Proc. SIGGRAPH*. 1995, pp. 351–358 (cit. on p. 52).
- [97] Gabriel Taubin. „Geometric Signal Processing on Polygonal Meshes“. In: 4 (June 2001) (cit. on p. 52).
- [98] G.L. Thompson. *Lectures on game theory, Markov chains, and related topics*. Sandia Corporation monograph. Sandia Corp., 1958 (cit. on p. 112).

- [99] H. J. Wagner. „A contribution to the numerical approximation of minimal surfaces“. In: *Computing* 19.1 (1977), pp. 35–58 (cit. on p. 58).
- [100] M. Wardetzky. „Discrete Differential Operators on Polyhedral Surfaces - Convergence and Approximation“. PhD thesis. Freie Universität Berlin, 2010 (cit. on p. 59).
- [101] M. Wardetzky, S. Mathur, F. Kaelberer, and E. Grinspun. „Discrete Laplace operators: No free lunch“. In: *Eurographics Symposium on Geometry Processing* (2007), pp. 33–37 (cit. on pp. 8, 53, 59, 99).
- [102] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2007 (cit. on p. 111).
- [103] H. Weyl. „Ueber die asymptotische Verteilung der Eigenwerte“. In: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1911 (1911), pp. 110–117 (cit. on p. 26).
- [104] H. Whitney, J. Eells, and D. Toledo. *Collected Papers of Hassler Whitney*. Contemporary Mathematicians. Birkhäuser Boston, 1992 (cit. on p. 46).
- [105] T.J. Willmore. *Riemannian Geometry*. Oxford science publications. Clarendon Press, 1996 (cit. on pp. 23, 73).
- [106] Guoliang Xu. „Convergence of discrete Laplace-Beltrami operators over surfaces“. In: *Computers and Mathematics with Applications* 48.3 (2004), pp. 347 –360 (cit. on p. 99).
- [107] Guoliang Xu. „Discrete Laplace–Beltrami operators and their convergence“. In: *Computer Aided Geometric Design* 21.8 (2004). Geometric Modeling and Processing 2004, pp. 767 –784 (cit. on p. 99).
- [108] Hao Zhang. „Discrete combinatorial Laplacian operators for digital geometry processing“. In: *in SIAM Conference on Geometric Design, 2004*. Press, 2004, pp. 575–592 (cit. on pp. 56, 57).