Sujet de Thèse
Stabilité des opérateurs différentiels sur des structures géométriques génériques pour l'analyse de données hétérogènes

Encadrants: Jacques-Olivier Lachaud (LAMA, Université Savoie Mont Blanc)
Boris Thibert (LJK, Université Grenoble-Alpes)

May 13, 2024

En traitement numérique de la géométrie, que ce soit pour des problématiques de reconstruction de surface, de recalage de formes, de compression, de débruitage, de paramétrisation, ou plus généralement du traitement de champs scalaires ou vectoriels définis sur une surface 3D, nous sommes souvent amenés à résoudre des problèmes variationnels sur des structures discrètes (nuages de points, graphes plongés, approximation linéaire –triangulaire ou non– par morceaux, surfaces de voxels, etc), très souvent affectés de perturbations ou d'incohérences topologiques (voir Figure 1).

Pour cela, nous avons besoin d'opérateurs robustes sur ces structures, et notamment les analogues des opérateurs de la géométrie différentielle classique (gradient, divergence, rotationnel, Laplace-Beltrami, connections. . .). Par ailleurs, nous devons aussi garantir certaines propriétés sur ces opérateurs via une notion de convergence vers leurs pendants continus sur des variétés différentielles lisses, mais aussi en conservant leurs propriétés algébriques. La littérature est riche de boites à outils d'opérateurs et de schémas permettant un calcul sur des variétés discrètes (calcul extérieur discret, éléments finis, volumes finis. . .). Par le passé, nous avons proposé certains opérateurs discrets et schéma d'optimisation de manière parfois *ad hoc* selon le type de données géométriques considéré [1, 2, 3, 4, 5].

Le projet de thèse porte sur une poursuite de ces travaux sous un angle de la généricité, avec une approche originale pour traiter des objets non-variétés ou de mauvaise qualité (géométrique et topologique). Il s'agit donc :

- de définir un cadre mathématique cohérent qui permettent la définition d'opérateurs discrets génériques sur des surfaces polygonales (variété ou non), discrètes et/ou représentées par des nuages de points et d'étudier leurs propriétés : axiomatiques, convergence, stabilité ;

- d'étendre ces opérateurs dans le cas où la donnée géométrique est *corrigée* par une information externe (nouveau plongement géométrique, nouvel espace tangent défini par une carte de normales, nouvelle métrique riemannienne...). Dans le cas de surfaces non-variétés, on pourra également s'intéresser à la notion de *proxy* géométrique approximant la donnée initiale, et qui lui serait une variété topologique ;

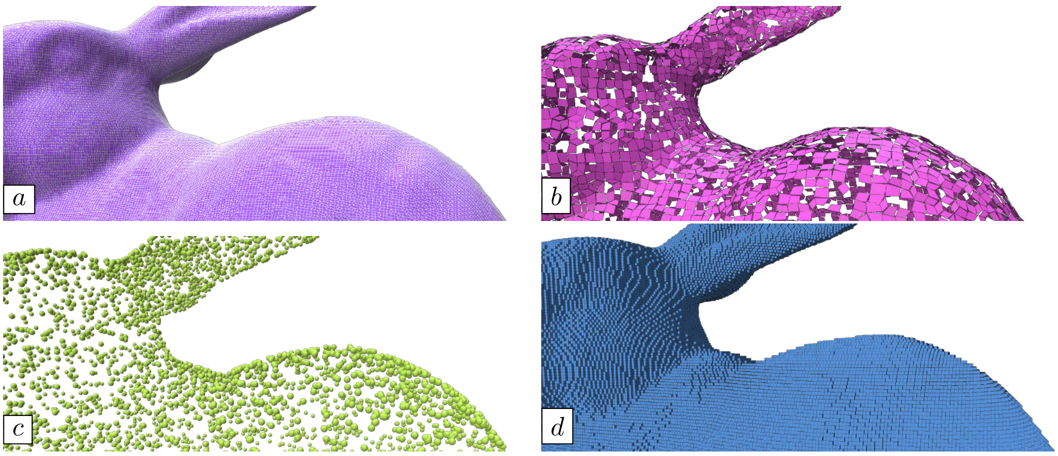

Figure 1: Elementary discrete models to represent surfaces embedded in $\mathbb{R}^3$: polygonal meshes with piecewise linear elements, without (a) or with topological defects (b); point clouds sampling the underlying smooth surface (c), or a digital surface, the boundary of a voxel representation of the object in $\mathbb{Z}^d$ (d).

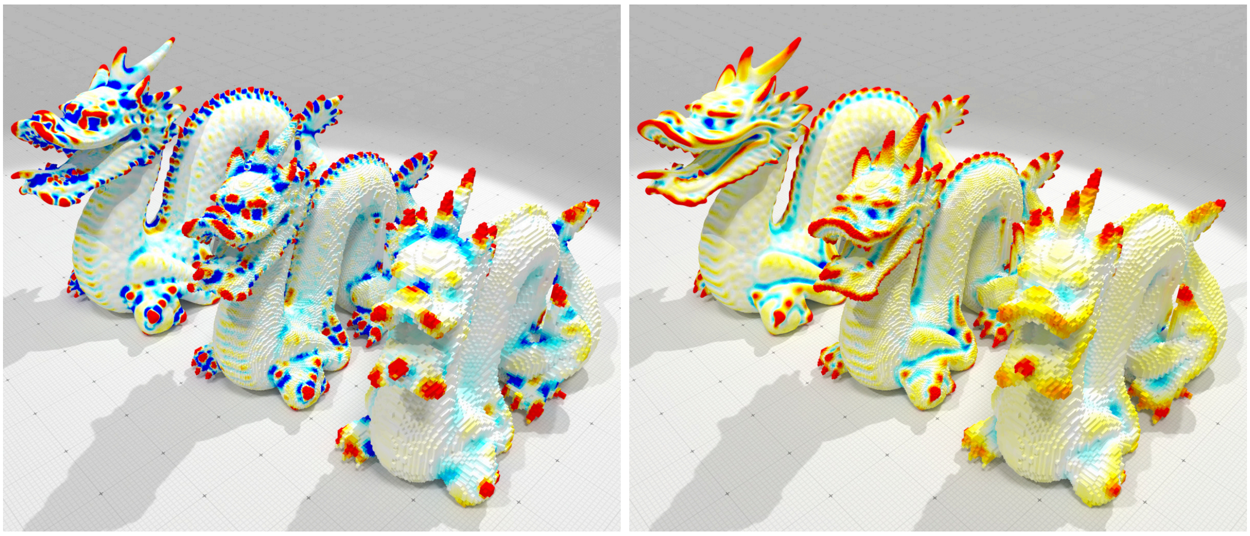

Figure 2: Convergence des courbures gaussiennes (gauche) et moyennes (droite) sur des surfaces digitales [6].

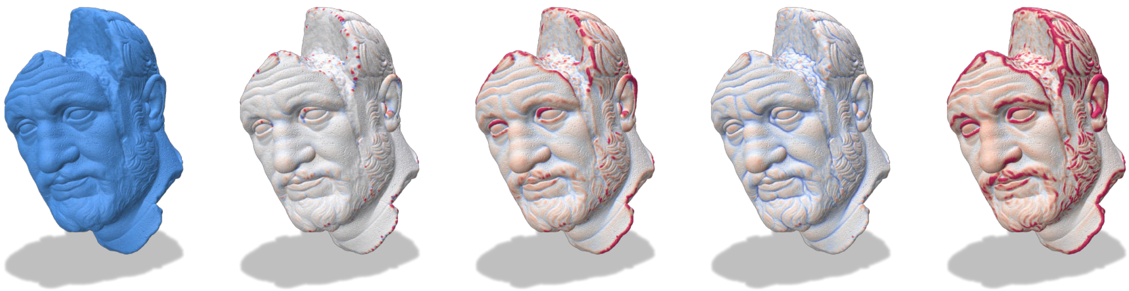

Figure 3: Estimation convergente des courbures sur un nuage de points (499500 points), de gauche à droite, données, courbure gaussienne, courbure moyenne, première courbure principale, deuxième courbure principale [7]

- d'optimiser les paramètres d'un proxy géométrique léger pour simuler au mieux le comportement des opérateurs différentiels sur des données géométriques massives ;
- d'utiliser ces nouveaux schémas numériques pour résoudre des problèmes variationnels sur des données géométriques variées.

Les travaux principaux sur lesquels ce sujet s'appuie recouvrent les domaines suivants :

Calcul différentiel discret De nombreux schémas numériques ont été proposés pour le calcul scientifique (différences finies, élements finis, volume finis, méthode de Galerkin, etc) qui font tout à fait sens dans l'étude et la simulation d'objets ou de phénomènes où la géométrie des formes est choisie. Pour l'étude de données discrètes, hétérogènes, perturbées, ces modèles sont moins pertinents. Nous étudierons plus particulièrement les modèles de calcul discret [8], calcul extérieur discret [9] ou calcul différentiel discret [10, 11], ou la méthode des éléments virtuels, qui cherchent à respecter les propriétés structurelles du calcul (e.g. théorème de Stokes), plutôt que de focaliser sur la précision. Nous avons montré récemment qu'on pouvait adapter un calcul sur des surfaces polygonales [12] à un calcul sur des surfaces digitales [13], ce qui montre la possibilité d'utiliser des proxys géométriques en lieu et place de modèles géométriques plus coûteux.

Opérateur de Laplace-Beltrami L'opérateur de Laplace-Beltrami est essentiel dans de nombreux problèmes variationnels ou équations à dérivées partielles. Sa discrétisation a fait l'objet de nombreux travaux notamment sur les surfaces polygonales, de [14] au récent panorama [15]. Nous avons nous-mêmes développé un opérateur de Laplace-Beltrami fortement convergent sur des surfaces digitales [4], ce qui montre que l'on peut définir des opérateurs différentiels convergents même sur des supports géométriques fortement perturbés. D'autres auteurs ont proposé un tel opérateur pour des surfaces triangulées non-variété [16]. Il reste à voir comment étendre ces approches à des objets géométriques encore plus génériques.

Stabilité et inférence géométrique Il existe une littérature très importante sur l'approximation de quantités géométriques différentielles (normales, courbures) à partir de données discrètes (surfaces triangulées, surfaces digitales, nuages de points, etc). Nous nous focaliserons ici plutôt sur les modèles mathématiques capables d'englober toutes ces géométries dans le même espace. On peut citer notamment le cycle normal [17, 18, 19] qui, au travers des mesures de courbures, est capable d'embrasser les surfaces polygonales et les surfaces lisses dans le même modèle, en assurant la stabilité de sa géométrie. Nous avons étendu ces travaux à des surfaces plus générales [5, 6], induisant ici la convergence des mesures de courbure (et même des courbures point à point) sur des surfaces difficiles comme les surfaces digitales ou la lanterne de Schwartz, avec en plus des résultats numériques meilleurs que l'état de l'art sur les surfaces polygonales usuelles. Récemment nous avons montré que ce cadre permet aussi de définir de façon stable les courbures sur des nuages de points [7].

Un autre cadre mathématique intéressant est celui des varifolds [20], qui définit les objets géométriques au travers de leur mesure en position et normales. Il été montré récemment que ce cadre conduit à des mesures stables de courbure [21, 22, 23].

Il s'agit maintenant de voir si cette stabilité de quantités différentielles géométriques dans les cadres précités peut s'étendre en une stabilité d'opérateurs différentiels.

Transport optimal La définition et le calcul d'un proxy géométrique capable de représenter et de simuler des objets géométriques très variés nécessitera très probablement un mécanisme d'optimisation, afin d'adapter ses paramètres au mieux pour que le proxy se comporte de façon similaire à son modèle dans une application de simulation numérique. Un moyen de définir un telle ressemblance entre des objets très divers est le transport optimal, au travers de la distance de transport [24]. Cet outil s'est avéré précieux dans de nombreux domaines liés à la géométrie [25], et la distance de transport peut se calculer de manière efficace dans certaines situations [26, 27]. Nous étudierons aussi cet axe de recherche comme outil naturel pour définir la stabilité, sachant qu'il s'est déjà avéré pertinent dans le cadre de l'inférence géométrique via les distances à une mesure [28].

Ce sujet de thèse est donc à l'interface des mathématiques appliquées et de l'informatique géométrique, à l'interface aussi des domaines d'expertise des deux encadrants de thèse. Il est dans le prolongement des projets ANR CoMeDiC et Stable Proxies.

Argumentaire scientifique présentant les enjeux du projet de la thèse

L'objectif de la thèse est de développer un cadre mathématique unifié pour représenter des structures géométriques hétérogènes (surfaces triangulées, surfaces digitales, surfaces non-variétés, structures cellulaires, réseaux, nuages de points) et de proposer des opérateurs différentiels stables dans ce cadre général. Par exemple, diffuser de la chaleur sur une surface lisse ou sur un nuage de points échantillonnant cette surface devrait donner un résultat similaire. S'il existe actuellement des solutions spécifiques à certaines représentations géométriques, ce problème reste ouvert dans un cadre général. L'enjeu est important car beaucoup de données géométriques produites (LiDAR, photogrammétrie, scanners X, IRM) sont par nature discrètes, perturbées, hétérogènes et rentrent dans ce cadre. Or leur analyse et traitement géométrique sont très souvent formulés en termes variationnels ou différentiels. De même simuler certaines propriétés physiques ou mécaniques (e.g. résistance, conductivité) requiert des opérateurs différentiels stables par rapport aux perturbations géométriques, mais qui conservent aussi des propriétés axiomatiques. Cette thèse vise à donc à créer les outils pour résoudre de nombreux problèmes concrets où les formes analysées/simulées/transformées ne sont pas connues exactement mais seulement au travers d'acquisitions réelles.

Avis argumenté par rapport au projet scientifique du laboratoire

Cette thèse fait partie des axes prioritaires du laboratoire, en développant les thèmes autour de la géométrie discrète, l'inférence géométrique et le calcul différentiel discret. De nombreux travaux ont déjà été menés au laboratoire dans cette thématique, notamment dans le cadre du projet ANR CoMeDiC (2015-2021), porté par un des encadrants. Cette thèse est aussi dans la thématique du nouveau projet ANR Stable Proxies (2023-2028), dont les deux encadrants sont responsables scientifiques. Même si cette thèse est portée par l'équipe LIMD du laboratoire, les interactions possibles sont fortes avec l'équipe EDP, et ont déjà montré par le passé de nombreux succès. Enfin ce cadre mathématique vise à être rendu effectif par son implémentation dans la bibliothèque DGtal, qui a obtenu le prestigieux "Software award" lors de la conférence SGP2016, et qui est un des projets open-source phare du LAMA.

References

[1] Jacques-Olivier Lachaud and Boris Thibert. Properties of Gauss digitized shapes and digital surface integration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 54(2):162–180, 2016.

[2] David Coeurjolly, Marion Foare, Pierre Gueth, and Jacques-Olivier Lachaud. Piecewise smooth reconstruction of normal vector field on digital data. *Computer Graphics Forum*, 35(7):157–167, 2016.

[3] Nicolas Bonneel, David Coeurjolly, Pierre Gueth, and Jacques-Olivier Lachaud. Mumford-Shah mesh processing using the Ambrosio-Tortorelli functional. *Computer Graphics Forum*, 37(7):75–85, 2018.

[4] Thomas Caissard, David Coeurjolly, Jacques-Olivier Lachaud, and Tristan Roussillon. Laplace–Beltrami operator on digital surfaces. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 61(3):359–379, 2019.

[5] Jacques-Olivier Lachaud, Pascal Romon, Boris Thibert, and David Coeurjolly. Interpolated corrected curvature measures for polygonal surfaces. In *Computer Graphics Forum*, volume 39, pages 41–54. Wiley Online Library, 2020.

[6] Jacques-Olivier Lachaud, Pascal Romon, and Boris Thibert. Corrected curvature measures. *Discret. Comput. Geom.*, 68(2):477–524, 2022.

[7] Jacques-Olivier Lachaud, David Coeurjolly, Céline Labart, Pascal Romon, and Boris Thibert. Lightweight curvature estimation on point clouds with randomized corrected curvature measures. *Comput. Graph. Forum*, 42(5):i–viii, 2023.

[8] L. J. Grady and J. Polimeni. *Discrete calculus: Applied analysis on graphs for computational science.* Springer, 2010.

[9] M. Desbrun, A. N. Hirani, M. Leok, and J. E. Marsden. Discrete exterior calculus. *arXiv preprint math/0508341*, 2005.

[10] V. E. Adler, A. I. Bobenko, and Y. B. Suris. Classification of integrable equations on quad-graphs. the consistency approach. *Communications in Mathematical Physics*, 233(3):513–543, 2003.

[11] K. Polthier and E. Preuss. Identifying vector field singularities using a discrete Hodge decomposition. *Visualization and Mathematics*, 3:113–134, 2003.

[12] Fernando De Goes, Andrew Butts, and Mathieu Desbrun. Discrete differential operators on polygonal meshes. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 39(4):110–1, 2020.

[13] David Coeurjolly and Jacques-Olivier Lachaud. A simple discrete calculus for digital surfaces. In *Discrete Geometry and Mathematical Morphology: Second International Joint Conference, DGMM 2022, Strasbourg, France, October 24–27, 2022, Proceedings*, pages 341–353. Springer, 2022.

[14] M. Wardetzky, S. Mathur, F. Kaelberer, and E. Grinspun. Discrete Laplace operators: No free lunch. *Eurographics Symposium on Geometry Processing*, pages 33–37, 2007.

[15] Astrid Bunge and Mario Botsch. A survey on discrete laplacians for general polygonal meshes. In *Computer Graphics Forum*, volume 42, pages 521–544. Wiley Online Library, 2023.

[16] Nicholas Sharp and Keenan Crane. A laplacian for nonmanifold triangle meshes. In *Computer Graphics Forum*, volume 39, pages 69–80. Wiley Online Library, 2020.

[17] P. Wintgen. Normal cycle and integral curvature for polyhedra in riemannian manifolds. *Differential Geometry. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York*, 1982.

[18] J. Fu. Curvature measures of subanalytic sets. *American Journal of Mathematics*, pages 819–880, 1994.

[19] D. Cohen-Steiner and J.-M. Morvan. Second fundamental measure of geometric sets and local approximation of curvatures. *Journal of Differential Geometry*, 74(3):363–394, 2006.

[20] Frederick J Almgren. *Plateau's problem: an invitation to varifold geometry*, volume 13. American Mathematical Soc., 1966.

[21] Blanche Buet, Gian Paolo Leonardi, and Simon Masnou. A varifold approach to surface approximation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 226(2):639–694, 2017.

[22] Blanche Buet, Gian Paolo Leonardi, and Simon Masnou. Discretization and approximation of surfaces using varifolds. *Geometric Flows*, 3(1):28–56, 2018.

[23] Blanche Buet, Gian Paolo Leonardi, and Simon Masnou. Weak and approximate curvatures of a measure: a varifold perspective. *arXiv preprint arXiv:1904.05930*, 2019.

[24] C. Villani. *Topics in optimal transportation*, volume 58. American Mathematical Soc., 2003.

[25] J. Solomon, R. Rustamov, L. Guibas, and A. Butscher. Earth Mover's Distances on Discrete Surfaces. *ACM Trans. Graph.*, 33(4):67:1—-67:12, 2014.

[26] Quentin Mérigot, Jocelyn Meyron, and Boris Thibert. An algorithm for optimal transport between a simplex soup and a point cloud. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 11(2):1363–1389, 2018.

[27] Jun Kitagawa, Quentin Mérigot, and Boris Thibert. Convergence of a newton algorithm for semi-discrete optimal transport. *Journal of the European Mathematical Society*, 21(9):2603–2651, 2019.

[28] Louis Cuel, Jacques-Olivier Lachaud, Q. Mérigot, and Boris Thibert. Robust geometry estimation using the generalized voronoi covariance measure. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 8(2):1293–1314, 2015.