Grafos - Conceitos Básicos

Prof. Andrei Braga

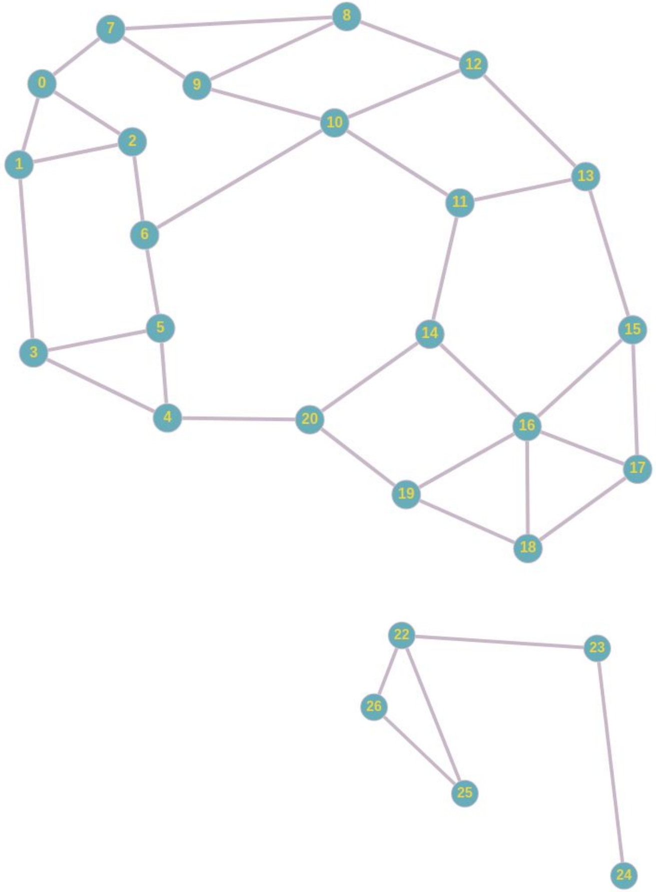
UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

Conteúdo

- Motivação (revisão)
- Conceitos básicos
- Exercícios
- Referências

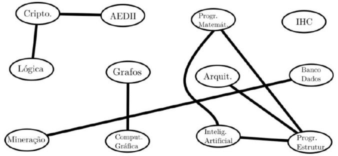
Motivação (Revisão)

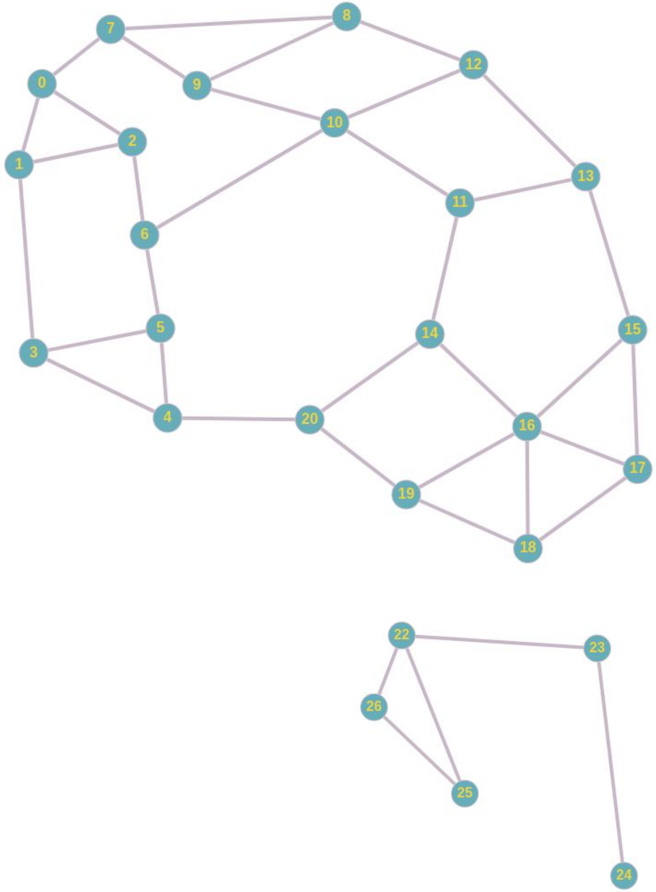
- Muitas aplicações computacionais envolvem
  - Itens (dados ou conjuntos de dados)
  - Conexões entre os itens
- Para modelar situações como estas, usamos uma estrutura matemática (ou uma estrutura de dados) chamada de **grafos**



Motivação (Revisão)

- Exemplos de aplicações:
  - Problemas de roteamento
  - Estudo de redes sociais
  - Problemas de topologia em redes
  - Problemas de alocação

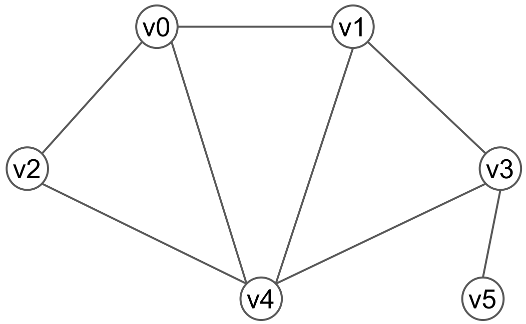




Grafo

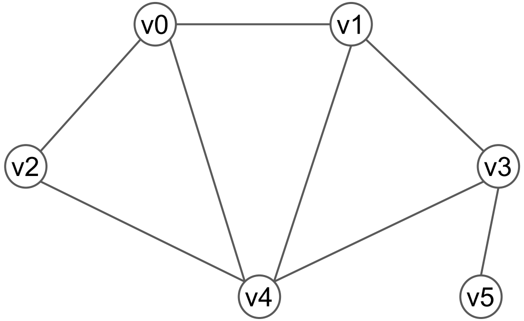
- Um **grafo** G é um par ordenado (V, E) composto por
  - um conjunto de **vértices** V e
  - um conjunto de **arestas** E, sendo cada aresta um conjunto $\{ v_i , v_j \}$ de dois vértices de G
    - note que $\{ v_i , v_j \} = \{ v_j , v_i \}$, ou seja, não consideramos uma direção para a aresta

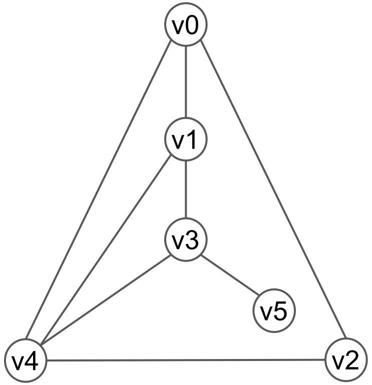
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \},$
      $\{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \},$
      $\{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$



Desenho de um grafo

- Um **desenho** de um grafo é uma representação gráfica do grafo onde
  - **pontos** (ou **círculos**) representam os vértices do grafo e
  - **linhas** conectando os pontos (ou círculos) representam as arestas do grafo
- Um desenho nos dá uma intuição sobre a estrutura do grafo, mas devemos usar esta intuição com cautela, porque o grafo é definido independentemente das suas representações gráficas
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

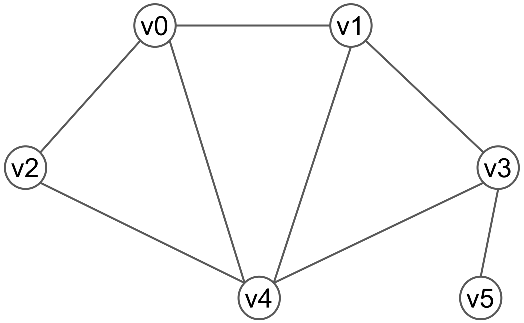




Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

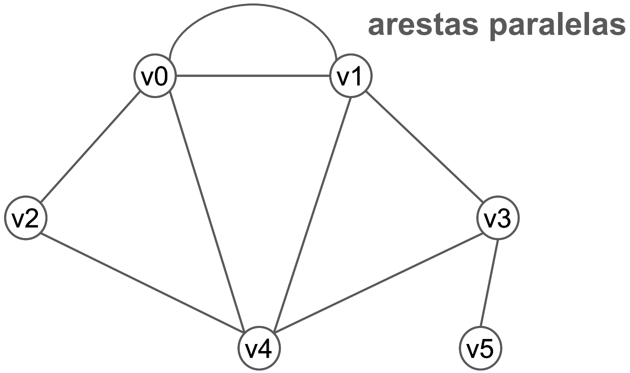
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \},$
      $\{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \},$
      $\{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

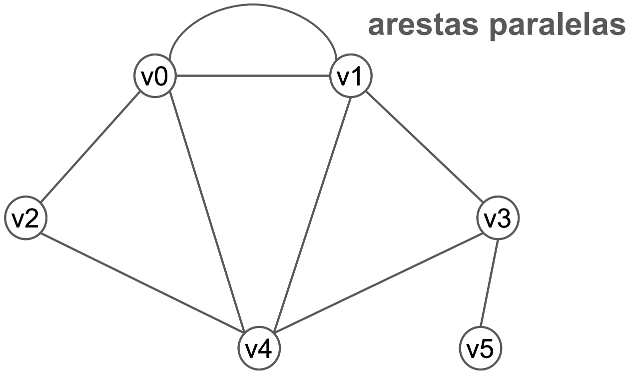
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \},$
      $\{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \},$
      $\{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

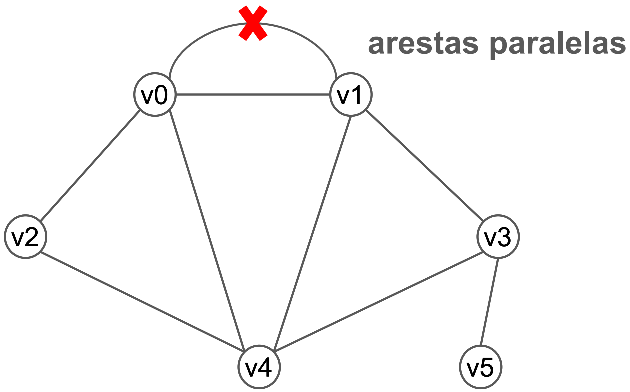
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \}, \boldsymbol{\{ v_0, v_1 \}} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

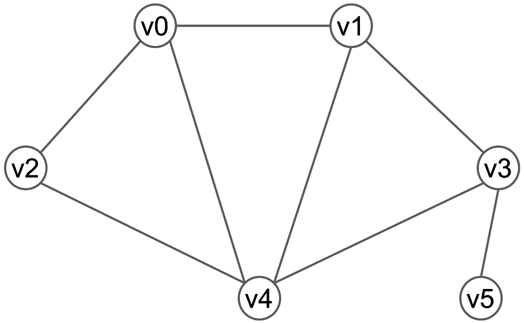
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \},$
      $\{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \},$
      $\{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \}, \boldsymbol{\{ v_0, v_1 \}} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

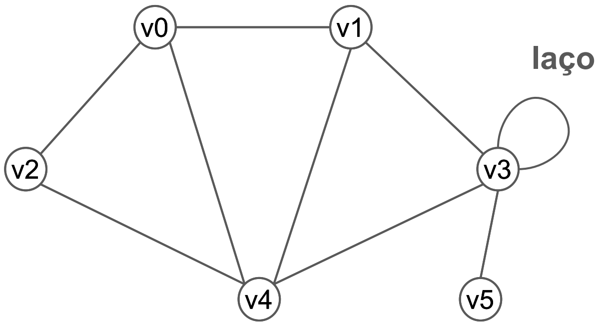
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \},$
      $\{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \},$
      $\{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

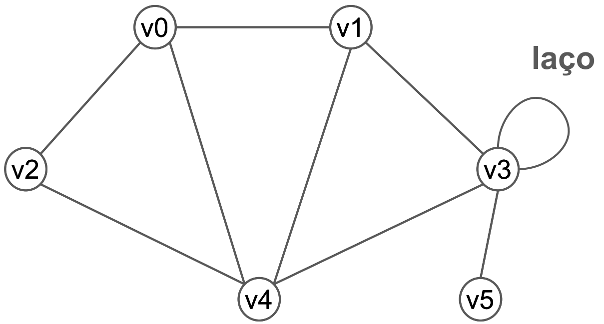
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

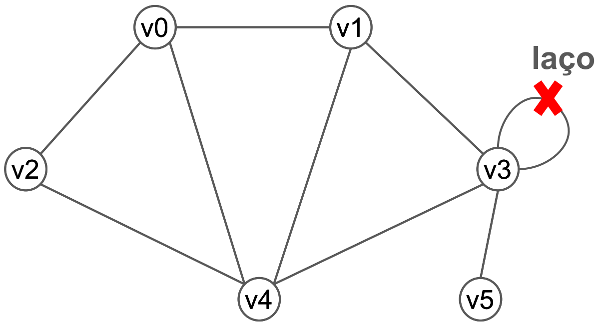
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \}, \boldsymbol{\{ v_3, v_3 \}} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
    - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
    - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

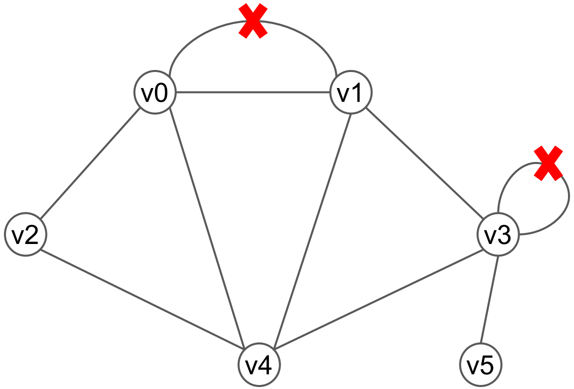
- Exemplo:
    - $G = (V, E)$, onde
        - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
        - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \},$
          $\{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \},$
          $\{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \}, \boldsymbol{\{ v_3, v_3 \}} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

- Um grafo que não contém arestas paralelas nem laços também é chamado de **grafo simples**



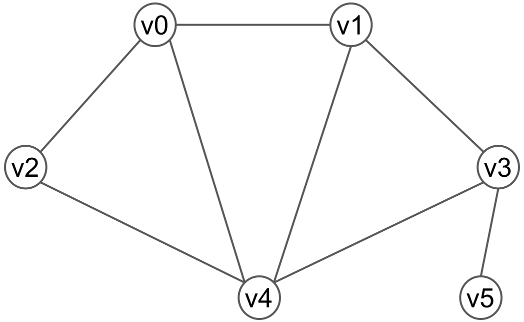
Grafo (simples)

- **Propriedade:** Um grafo (simples) $G = (V, E)$ possui no máximo $|V|\ (|V| - 1) / 2$ arestas.
  Prova:
  - Para cada vértice, a quantidade máxima de arestas conectando o vértice aos outros vértices é $|V| - 1$.
  - O somatório de todas estas quantidades é $|V|\ (|V| - 1)$.
  - Neste somatório, cada aresta é contada duas vezes (como $\{ v_i , v_j \}$ e como $\{ v_j , v_i \}$).
  - Portanto, G possui no máximo $|V|\ (|V| - 1) / 2$ arestas. □

Ordem e tamanho

- Dado um grafo $G = (V, E)$, denotamos por
  - $V(G)$ o conjunto de vértices de G, ou seja, $V(G) = V$ e
  - $E(G)$ o conjunto de arestas de G, ou seja, $E(G) = E$
- Dizemos que
  - a **ordem** de G é o número de vértices de G, ou seja, $|V(G)|$, e
  - o **tamanho** de G é o número de arestas de G, ou seja $|E(G)|$

- Exemplo:
  - A ordem do grafo ao lado é 6 e o seu tamanho é 8

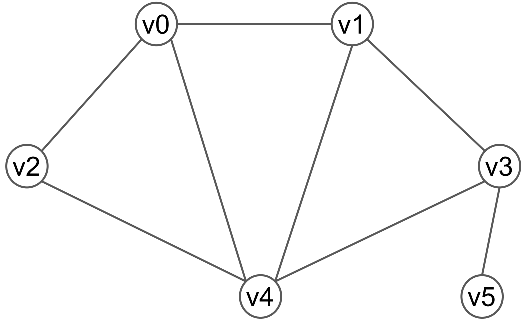


Vizinhança e grau

- Por simplicidade, também denotamos uma aresta $\{ v_i , v_j \}$ como $v_i v_j$
- Dada uma aresta $v_i v_j$, os vértices v_i e v_j são os **extremos** desta aresta

- Se $v_i v_j$ é uma aresta de um grafo G, então
  - os vértices v_i e v_j são **vizinhos** ou **adjacentes** em G,
  - v_i é **vizinho** de v_j em G (e vice-versa),
  - v_i é **adjacente** a v_j em G (e vice-versa) e
  - a aresta $v_i v_j$ **incide** em v_i e incide em v_j

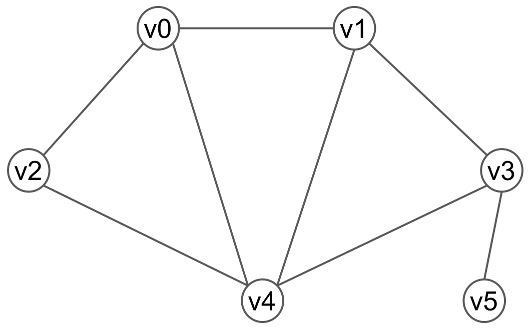
- Exemplo:
  - No grafo ao lado, v_0 é vizinho de (ou adjacente a) v_2 (e vice-versa), os vizinhos de v_3 são v_1, v_4 e v_5 e a aresta $v_1 v_4$ incide em v_1 e em v_4



Vizinhança e grau

- Dado um vértice v_i de um grafo G,
  - a **vizinhança** de v_i em G é o conjunto dos vizinhos de v_i em G e
  - o **grau** de v_i em G é o número de arestas de G incidentes em v_i
- Denotamos por
  - $N_G(v_i)$, ou simplesmente $N(v_i)$, a vizinhança de v_i em G e
  - $d_G(v_i)$, ou simplesmente $d(v_i)$, o grau de v_i em G
- Note que $d_G(v_i) = | N_G(v_i) |$

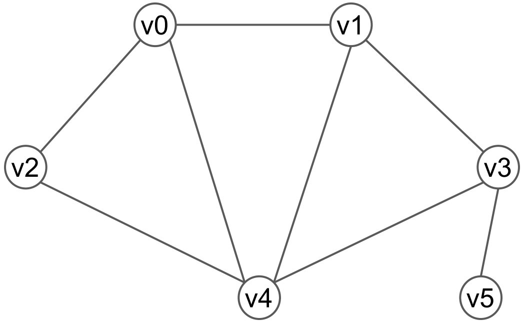
- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $N(v_0) = \{ \qquad \}$ e $N(v_5) = \{ \quad \}$ e
    - $d(v_0) = \quad$, $d(v_1) = \quad$, $d(v_2) = \quad$, $d(v_3) = \quad$, $d(v_4) = \quad$ e $d(v_5) =$



Vizinhança e grau

- Dado um vértice v_i de um grafo G,
  - a **vizinhança** de v_i em G é o conjunto dos vizinhos de v_i em G e
  - o **grau** de v_i em G é o número de arestas de G incidentes em v_i
- Denotamos por
  - $N_G(v_i)$, ou simplesmente $N(v_i)$, a vizinhança de v_i em G e
  - $d_G(v_i)$, ou simplesmente $d(v_i)$, o grau de v_i em G
- Note que $d_G(v_i) = | N_G(v_i) |$

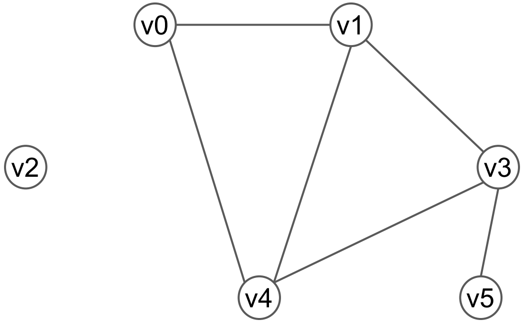
- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $N(v_0) = \{ v_1, v_2, v_4 \}$ e $N(v_5) = \{ v_3 \}$ e
    - $d(v_0) = 3$, $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 4$ e $d(v_5) = 1$



Vizinhança e grau

- Dado um vértice v_i de um grafo G,
  - a **vizinhança** de v_i em G é o conjunto dos vizinhos de v_i em G e
  - o **grau** de v_i em G é o número de arestas de G incidentes em v_i
- Denotamos por
  - $N_G(v_i)$, ou simplesmente $N(v_i)$, a vizinhança de v_i em G e
  - $d_G(v_i)$, ou simplesmente $d(v_i)$, o grau de v_i em G
- Note que $d_G(v_i) = | N_G(v_i) |$

- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d(v_2) =$

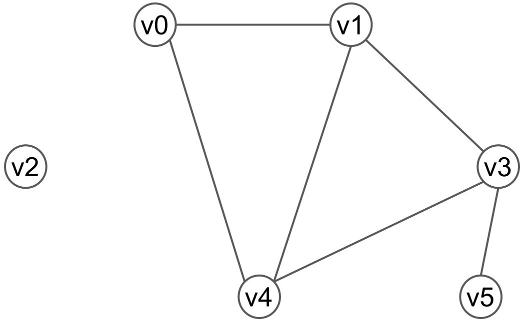


Vizinhança e grau

- Dado um vértice v_i de um grafo G,
  - a **vizinhança** de v_i em G é o conjunto dos vizinhos de v_i em G e
  - o **grau** de v_i em G é o número de arestas de G incidentes em v_i
- Denotamos por
  - $N_G(v_i)$, ou simplesmente $N(v_i)$, a vizinhança de v_i em G e
  - $d_G(v_i)$, ou simplesmente $d(v_i)$, o grau de v_i em G
- Note que $d_G(v_i) = | N_G(v_i) |$

- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d(v_2) = 0$

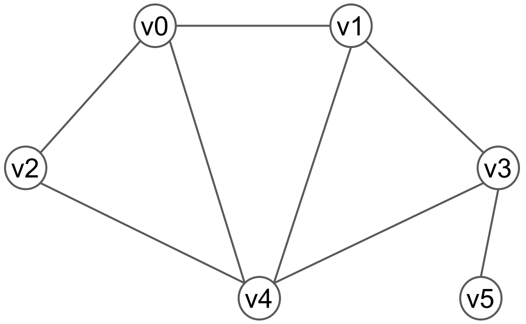
Chamamos de vértice **isolado** um vértice v_i tal que $d(v_i) = 0$



Grau mínimo e máximo

- Dado um grafo G,
  - o **grau mínimo** de G, denotado por $\delta(G)$, é o menor grau de um vértice de G, ou seja, $\delta(G) = \min\{\, d(v_i) : v_i \in V(G) \,\}$
  - o **grau máximo** de G, denotado por $\Delta(G)$, é o maior grau de um vértice de G, ou seja, $\Delta(G) = \max\{\, d(v_i) : v_i \in V(G) \,\}$

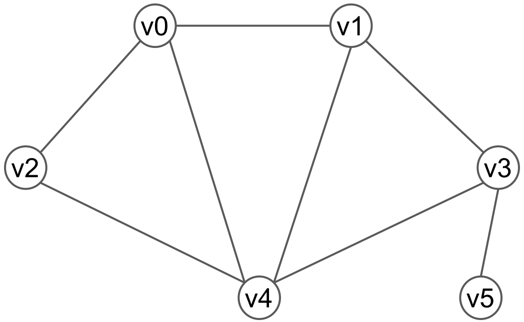
- Exemplo:
  - Para o grafo ao lado, $\delta(G) =$ e $\Delta(G) =$



Grau mínimo e máximo

- Dado um grafo G,
  - o **grau mínimo** de G, denotado por $\delta(G)$, é o menor grau de um vértice de G, ou seja, $\delta(G) = \min\{\ d(v_i) : v_i \in V(G)\ \}$
  - o **grau máximo** de G, denotado por $\Delta(G)$, é o maior grau de um vértice de G, ou seja, $\Delta(G) = \max\{\ d(v_i) : v_i \in V(G)\ \}$

- Exemplo:
  - Para o grafo ao lado, $\delta(G) = 1$ e $\Delta(G) = 4$



Exercícios

1. É possível construir um grafo tal que $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3 \}$ e $d(v_0) = 0$, $d(v_1) = 1$, $d(v_2) = 2$ e $d(v_3) = 3$?

Exercícios

2. Prove que, em qualquer grupo de duas ou mais pessoas, sempre existem pelo menos duas pessoas que possuem exatamente o mesmo número de amigos presentes no grupo.

Exercícios

2. Prove que, em qualquer grupo de duas ou mais pessoas, sempre existem pelo menos duas pessoas que possuem exatamente o mesmo número de amigos presentes no grupo.

   Prova:

   - Considere o grafo *G* que é definido da seguinte maneira:
     - os vértices do grafo correspondem às pessoas do grupo e
     - existe uma aresta entre os vértices v_i e v_j se e somente se as pessoas correspondentes a v_i e v_j são amigas
   - A princípio, existem $|V(G)|$ valores possíveis para o grau de um vértice de G: $0, 1, 2, \ldots, |V(G)| - 1$

Exercícios

2. Prove que, em qualquer grupo de duas ou mais pessoas, sempre existem pelo menos duas pessoas que possuem exatamente o mesmo número de amigos presentes no grupo.

   Prova:

   - No entanto, se existe um vértice de G com grau 0, então não pode existir um vértice de G com grau $|V(G)| - 1$
   - O contrário também vale: se existe um vértice de G com grau $|V(G)| - 1$, então não pode existir um vértice de G com grau 0
   - Portanto, na verdade, existem apenas $|V(G)| - 1$ valores possíveis para o grau de um vértice de G
   - Como existem $|V(G)|$ vértices em G, pelo menos dois dos vértices de G possuem o mesmo grau

Princípio da casa dos pombos

Exercícios

2. Prove que, em qualquer grupo de duas ou mais pessoas, sempre existem pelo menos duas pessoas que possuem exatamente o mesmo número de amigos presentes no grupo.

   Prova:

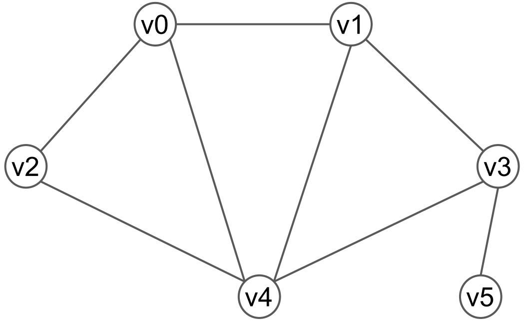
   - Isto quer dizer que pelo menos duas pessoas possuem exatamente o mesmo número de amigos presentes no grupo □

Igualdade entre grafos

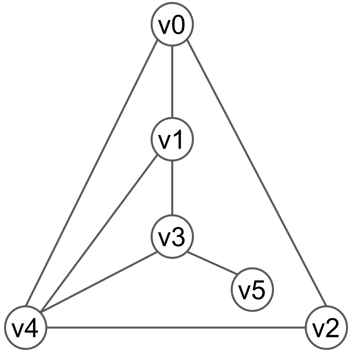
- Dois grafos G_1 e G_2 são **iguais** se
  - $V(G_1) = V(G_2)$ e
  - $E(G_1) = E(G_2)$

- Exemplo:

G_1



G_2



  - $V(G_1) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G_1) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

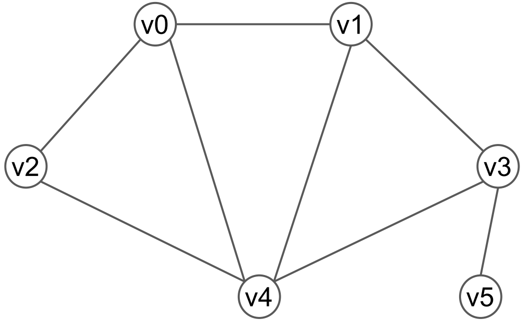
  - $V(G_2) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G_2) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

Isomorfismo

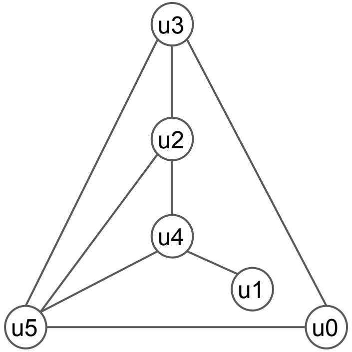
- Dois grafos G_1 e G_2 são **isomorfos** se apresentam estruturas idênticas quando os rótulos de seus vértices são ignorados

- Exemplo:

G_1



G_2



  - $V(G_1) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G_1) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

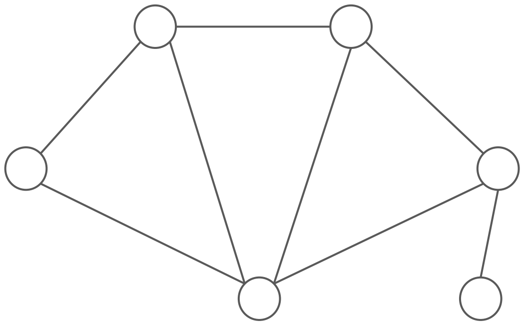
  - $V(G_2) = \{ u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \}$ e
  - $E(G_2) = \{ \{ u_0, u_3 \}, \{ u_0, u_5 \}, \{ u_1, u_4 \}, \{ u_2, u_3 \}, \{ u_2, u_4 \}, \{ u_2, u_5 \}, \{ u_3, u_5 \}, \{ u_4, u_5 \} \}$

Isomorfismo

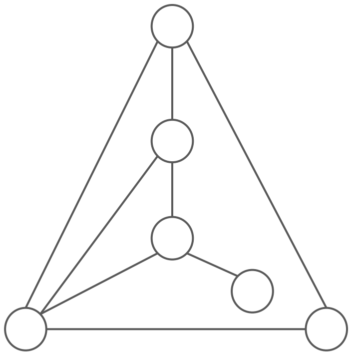
- Dois grafos G_1 e G_2 são **isomorfos** se apresentam estruturas idênticas quando os rótulos de seus vértices são ignorados

- Exemplo:

G_1



G_2

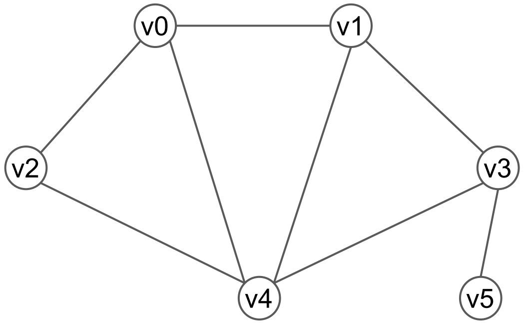


Isomorfismo

- Dois grafos G_1 e G_2 são **isomorfos** se existe uma função bijetiva $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que $v_i v_j$ é uma aresta de G_1 se e somente se $f(v_i)f(v_j)$ é uma aresta de G_2

- Exemplo:

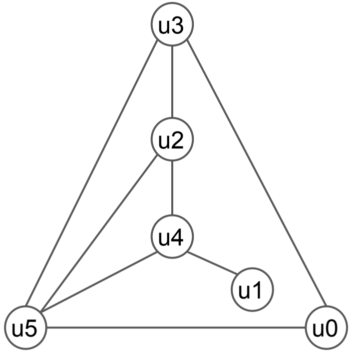
G_1



função f :

- $v_0 \rightarrow u_3$
- $v_1 \rightarrow u_2$
- $v_2 \rightarrow u_0$
- $v_3 \rightarrow u_4$
- $v_4 \rightarrow u_5$
- $v_5 \rightarrow u_1$

G_2



👏👏👏

Isomorfismo

- Dois grafos G_1 e G_2 são **isomorfos** se existe uma função bijetiva $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que $v_i v_j$ é uma aresta de G_1 se e somente se $f(v_i)f(v_j)$ é uma aresta de G_2

- Determinar se dois grafos são isomorfos ou não é um **problema difícil**!

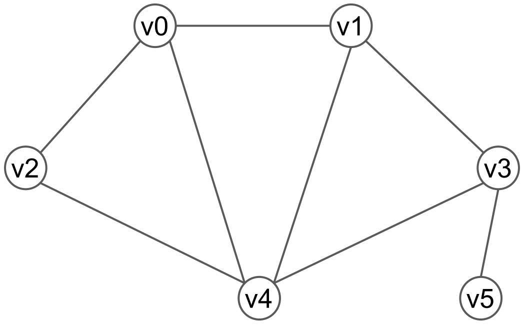
Exercícios

3. Mostre que os grafos G_1 e G_2 definidos a seguir são isomorfos.
   $V(G_1)$ ={ a, b, c, d, e }, $E(G_1)$={ { a, b }, { a, c }, { a, e }, { b, d }, { b, e }, { c, d } }
   $V(G_2)$ ={ v, w, x, y, z }, $E(G_2)$={ { v, x }, { v, y }, { w, x }, { w, z }, { x, y }, { y, z } }

Passeio

- Um **passeio** em um grafo G é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de G tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em G do seu antecessor

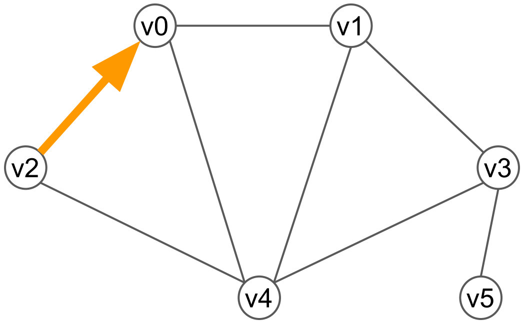
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um grafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em *G* do seu antecessor

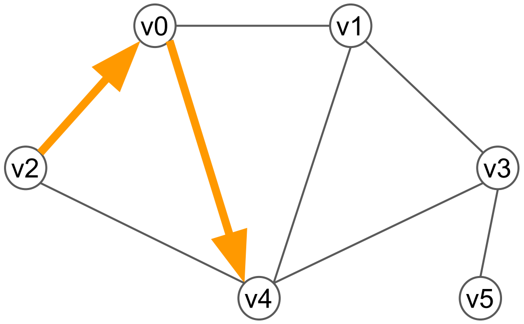
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um grafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\dots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em *G* do seu antecessor

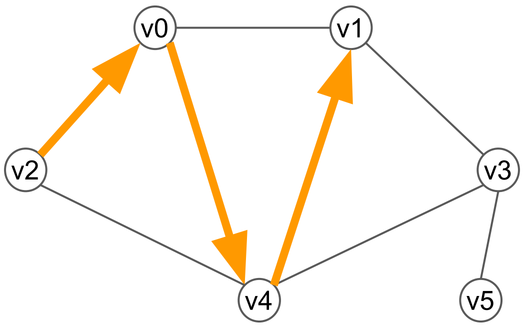
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um grafo G é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de G tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em G do seu antecessor

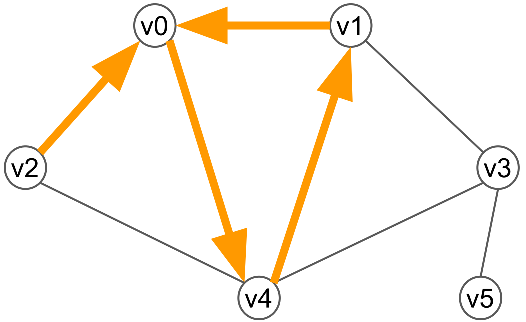
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um grafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em *G* do seu antecessor

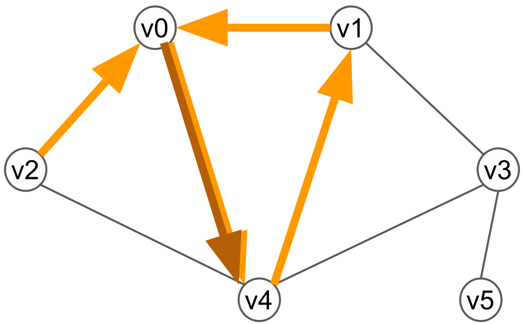
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um grafo G é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de G tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em G do seu antecessor

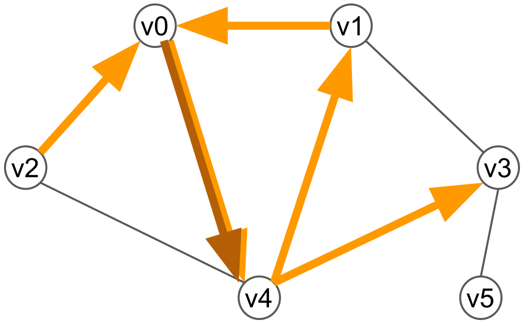
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um grafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em *G* do seu antecessor

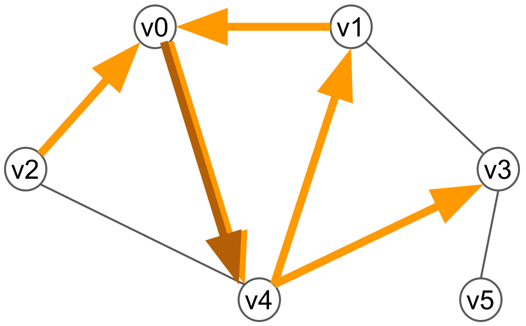
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um grafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em *G* do seu antecessor

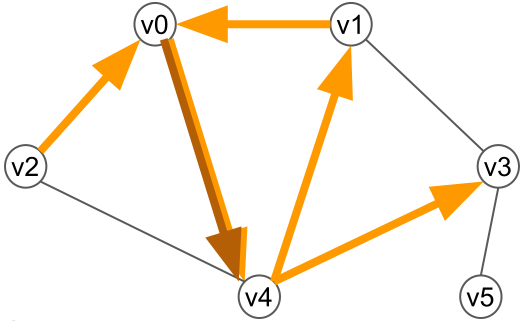
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



- Em um passeio, especificamos os vértices, mas as arestas envolvidas também estão implicitamente especificadas
- Por isso, podemos nos referir às **arestas de um passeio**

Passeio

- Um **passeio** em um grafo G é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de G tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em G do seu antecessor

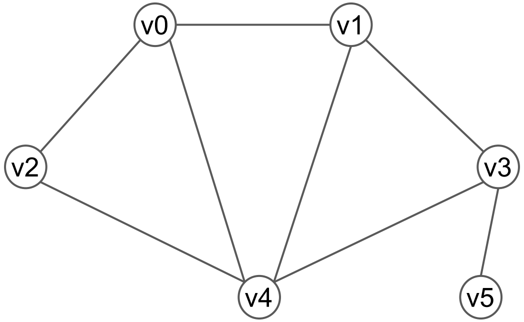


- Dado um passeio $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik-1}v_{ik}$, dizemos que
  - v_{i0} e v_{ik} são os **extremos** do passeio;
  - $v_{i1}, \ldots, v_{ik-1}$ são os **vértices internos** do passeio;
  - o **comprimento** do passeio é k, ou seja, a quantidade de arestas percorridas;
  - o passeio é **par** se o seu comprimento é par e é **ímpar** caso contrário e
  - o passeio é **fechado** se $v_{i0} = v_{ik}$ e é **aberto** caso contrário

Trilha

- Uma **trilha** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

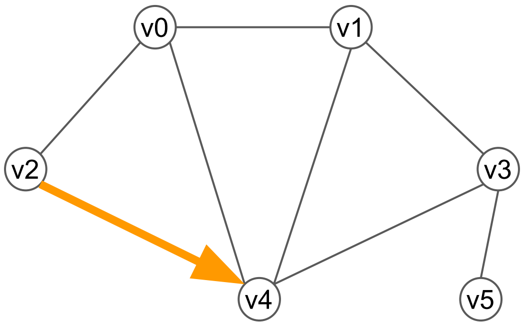
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_4v_1v_0v_4v_3$ é uma trilha no grafo ao lado



Trilha

- Uma **trilha** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

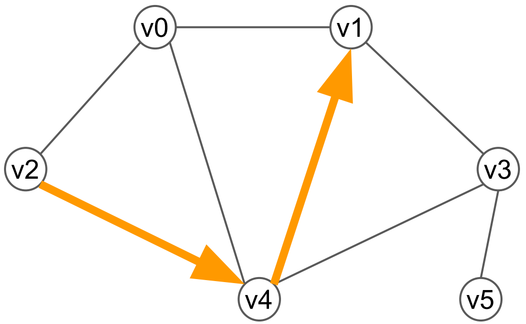
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_4v_1v_0v_4v_3$ é uma trilha no grafo ao lado



Trilha

- Uma **trilha** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

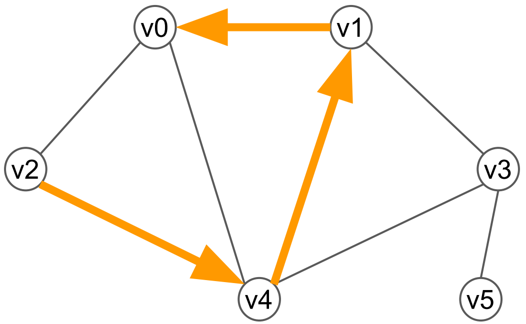
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_4v_1v_0v_4v_3$ é uma trilha no grafo ao lado



Trilha

- Uma **trilha** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

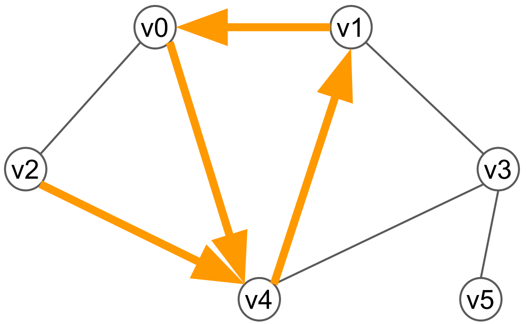
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_4v_1v_0v_4v_3$ é uma trilha no grafo ao lado



Trilha

- Uma **trilha** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

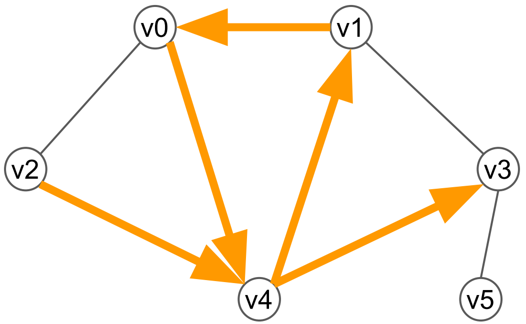
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_4v_1v_0v_4v_3$ é uma trilha no grafo ao lado



Trilha

- Uma **trilha** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

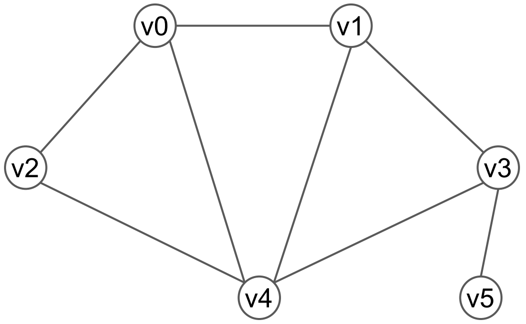
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_4v_1v_0v_4v_3$ é uma trilha no grafo ao lado



Caminho

- Um **caminho** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha

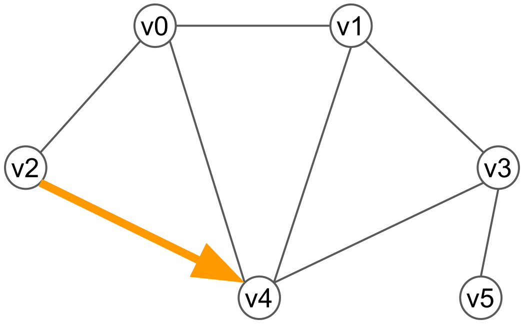
- Exemplo:
  - A sequência $v_2 v_4 v_0 v_1 v_3$ é um caminho no grafo ao lado



Caminho

- Um **caminho** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha

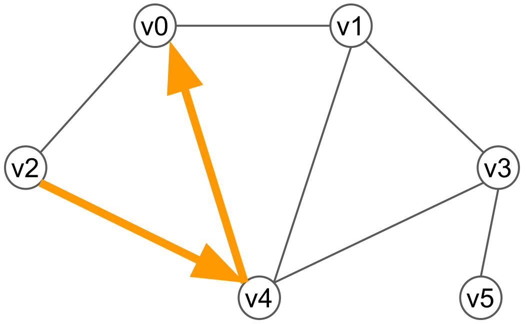
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_4v_0v_1v_3$ é um caminho no grafo ao lado



Caminho

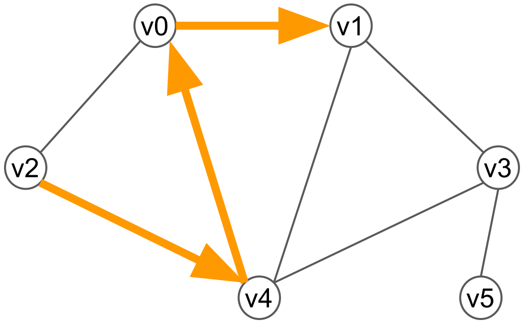
- Um **caminho** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha

- Exemplo:
  - A sequência $v_2 v_4 v_0 v_1 v_3$ é um caminho no grafo ao lado



Caminho

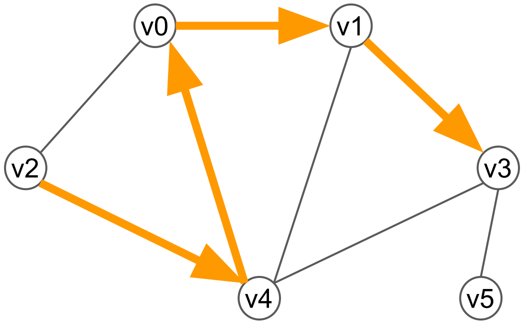
- Um **caminho** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_4v_0v_1v_3$ é um caminho no grafo ao lado



Caminho

- Um **caminho** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha

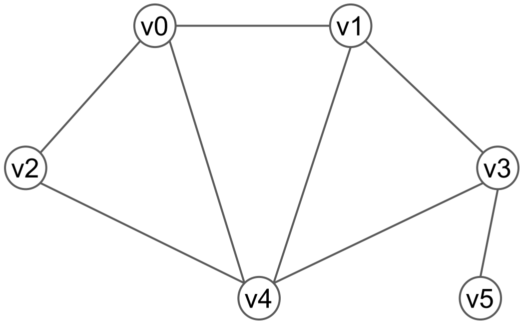
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_4v_0v_1v_3$ é um caminho no grafo ao lado



Ciclo

- Um **ciclo** em um grafo *G* é um passeio fechado em *G*, com comprimento maior ou igual a 3 e onde não existem vértices internos repetidos

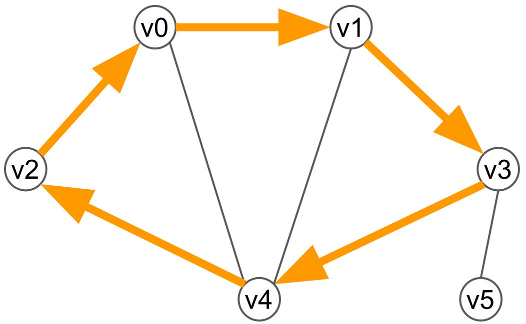
- Exemplo:
  - A sequência $v_2 v_0 v_1 v_3 v_4 v_2$ é um ciclo no grafo ao lado



Ciclo

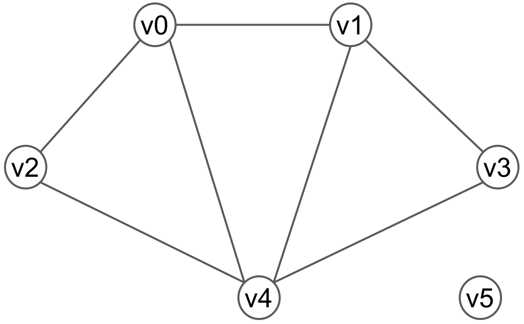
- Um **ciclo** em um grafo *G* é um passeio fechado em *G*, com comprimento maior ou igual a 3 e onde não existem vértices internos repetidos

- Exemplo:
  - A sequência $v_2 v_0 v_1 v_3 v_4 v_2$ é um ciclo no grafo ao lado



Distância

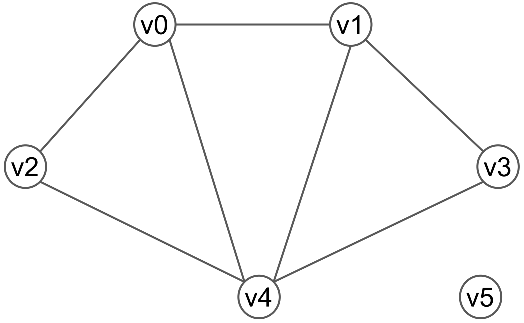
- A **distância** entre dois vértices v_i e v_j em G, denotada por $d(v_i, v_j)$ é
  - o menor comprimento de um caminho entre v_i e v_j em G ou
  - ∞ (infinita) caso não exista um caminho entre v_i e v_j em G
- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d(v_2, v_3) =$,
    - $d(v_0, v_1) =$,
    - $d(v_4, v_4) =$ e
    - $d(v_1, v_5) =$



Distância

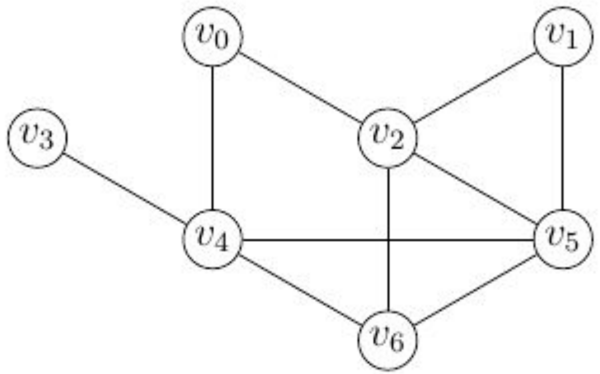
- A **distância** entre dois vértices v_i e v_j em G, denotada por $d(v_i\,, v_j)$ é
  - o menor comprimento de um caminho entre v_i e v_j em G ou
  - ∞ (infinita) caso não exista um caminho entre v_i e v_j em G

- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d(v_2, v_3) = 2$,
    - $d(v_0, v_1) = 1$,
    - $d(v_4, v_4) = 0$ e
    - $d(v_1, v_5) = \infty$



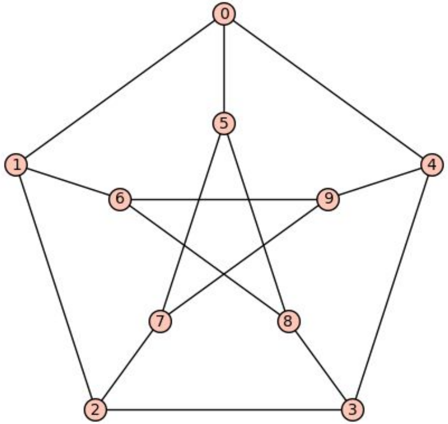
Exercícios

4. Indique todas as afirmações corretas sobre o grafo ao lado:
   a. O comprimento máximo de um caminho entre v_0 e v_1 é 5.
   b. A distância entre v_0 e v_1 é 5.
   c. A sequência $v_3v_4v_0v_2v_6v_4v_3$ é um ciclo.



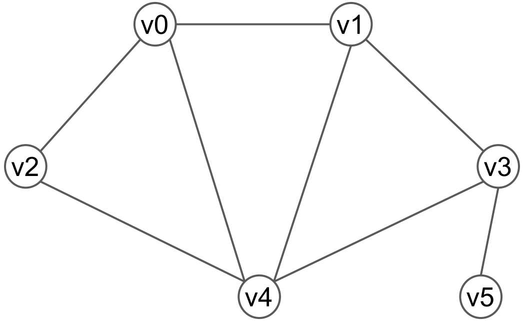
Exercícios

5. Indique todas as afirmações corretas sobre o grafo G ao lado:
    a. $N(0) = \{ 1, 3, 5 \}$.
    b. G contém 5 vértices de grau 2 e 5 vértices de grau 3.
    c. $d(5) = \delta(G)$.
    d. A sequência de vértices 0 1 2 7 5 0 é uma trilha de G.
    e. $\delta(G) = \Delta(G)$.



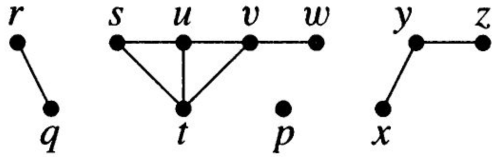
Exercícios

6. Descreva todos os caminhos entre os vértices v_2 e v_3 no grafo abaixo:



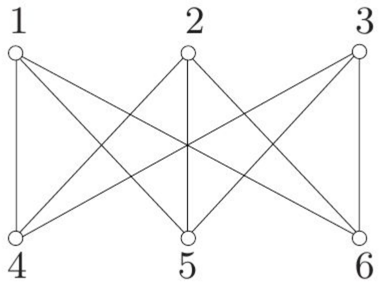
Exercícios

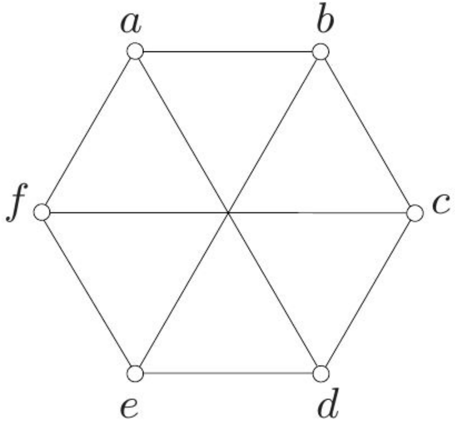
7. Indique todas as afirmações corretas sobre o grafo *G* ao lado:
    a. $d(s, p) = 3$.
    b. $d(t, p) = \infty$.
    c. *G* contém 3 vértices isolados.
    d. A ordem de *G* é 11.
    e. O tamanho de *G* é 8.



Exercícios

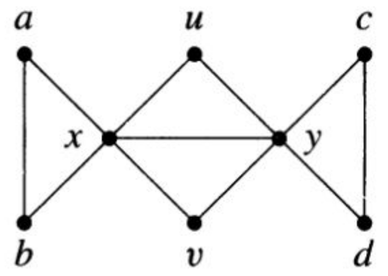
8. Mostre que os grafos abaixo são isomorfos.





Exercícios

9. Responda às seguintes perguntas sobre o grafo *G* abaixo:
    - A sequência de vértices *a x a x u y c d y v x b a* é um passeio aberto em *G*?
    - A sequência de vértices *a x u y c d y v x b a* é um trilha em *G*?
    - Quais são os ciclos em *G*?



Exercícios

10. Prove que todo passeio entre dois vértices v_i e v_j contém um caminho entre v_i e v_j.

Referências

- Um tratamento mais detalhado dos conceitos básicos definidos nesta apresentação pode ser encontrado em qualquer uma das referências básicas e complementares da disciplina