Grafos - Representação Computacional

Prof. Andrei Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

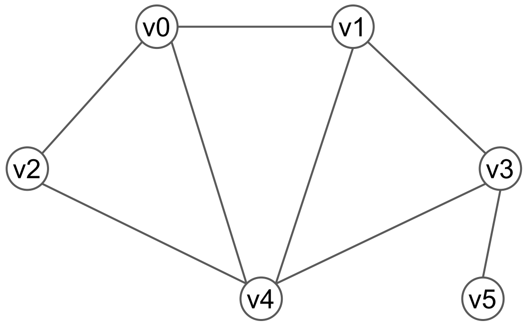
Conteúdo

- Representação computacional
- Exercícios
- Referências

Grafo (Revisão)

- Um **grafo** G é um par ordenado (V, E) composto por
  - um conjunto de **vértices** V e
  - um conjunto de **arestas** E, sendo cada aresta um conjunto $\{ v_i , v_j \}$ de dois vértices de G
    - note que $\{ v_i , v_j \} = \{ v_j , v_i \}$, ou seja, não consideramos uma direção para a aresta

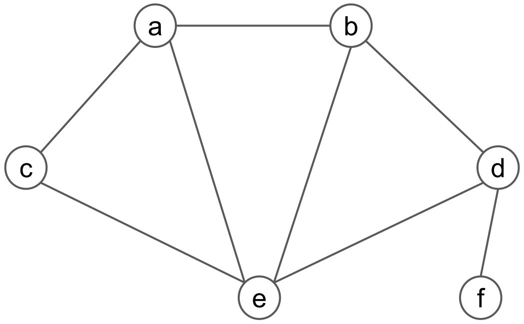
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \},$
      $\{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \},$
      $\{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$



Representação computacional

- A seguir, veremos duas formas comuns de representar um grafo *G*
- Para isso, vamos considerar que fizemos uma associação dos índices 0, 1, … $|V(G)|$ - 1 aos vértices de *G*

G

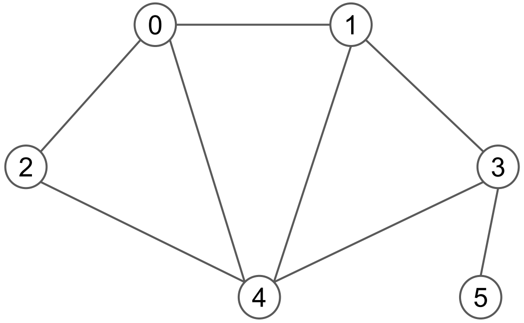


- $0 \rightarrow a$
- $1 \rightarrow b$
- $2 \rightarrow c$
- $3 \rightarrow d$
- $4 \rightarrow e$
- $5 \rightarrow f$

Matriz de adjacências

- A representação de *G* como uma **matriz de adjacências** consiste em uma matriz de |*V*(*G*)| linhas, com índices 0, 1, …, |*V*(*G*)| - 1, e de |*V*(*G*)| colunas, com índices 0, 1, …, |*V*(*G*)| - 1, tal que a célula (*i*, *j*) da matriz é igual a
  - 1 se i j é uma aresta de *G*
  - 0 caso contrário

G



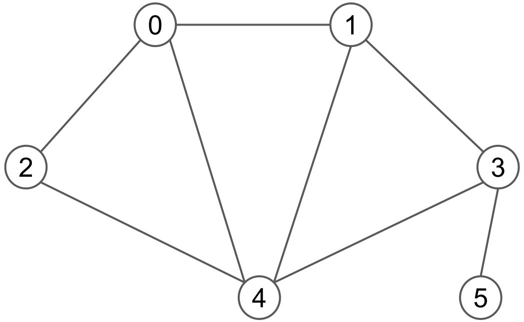
Matriz de adjacências de *G*

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0
2	1	0	0	0	1	0
3	0	1	0	0	1	1
4	1	1	1	1	0	0
5	0	0	0	1	0	0

Matriz de adjacências

- Observações:
  - Não é possível representar arestas paralelas
  - Para grafos simples, todas as células da diagonal principal da matriz são iguais a 0
  - Para grafos onde não consideramos uma direção para as arestas, uma aresta *i j* é representada por duas células da matriz: (*i*, *j*) e (*j*, *i*)

G



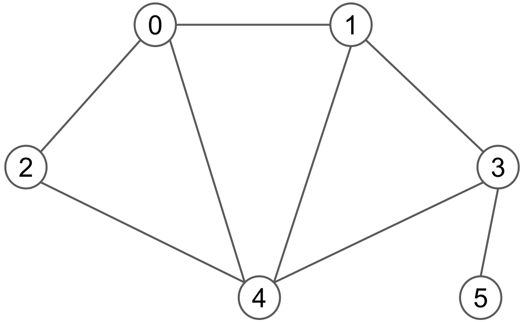
Matriz de adjacências de *G*

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0
2	1	0	0	0	1	0
3	0	1	0	0	1	1
4	1	1	1	1	0	0
5	0	0	0	1	0	0

Matriz de adjacências

- Observações:
  - Para grafos onde não consideramos uma direção para as arestas, a matriz é simétrica em relação à diagonal principal

G



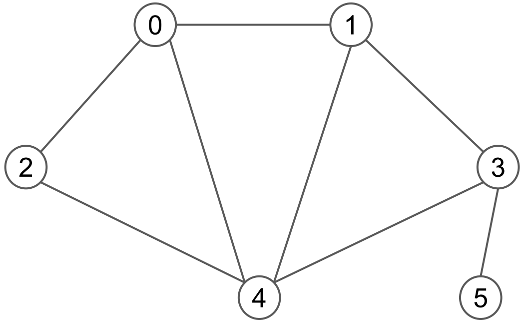
Matriz de adjacências de *G*

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0
2	1	0	0	0	1	0
3	0	1	0	0	1	1
4	1	1	1	1	0	0
5	0	0	0	1	0	0

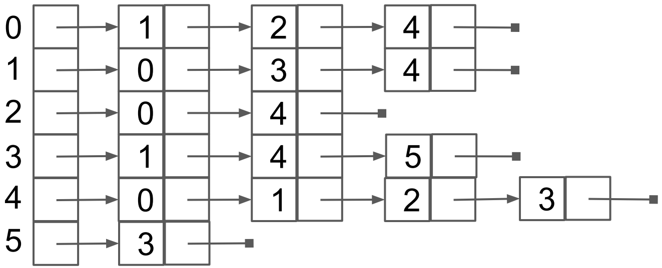
Listas de adjacência

- A representação de *G* como **listas de adjacência** consiste em um vetor de |*V*(*G*)| elementos, com índices 0, 1, …, |*V*(*G*)| - 1, tal que o elemento *i* do vetor armazena uma lista com os vértices adjacentes ao vértice *i* em *G*

G



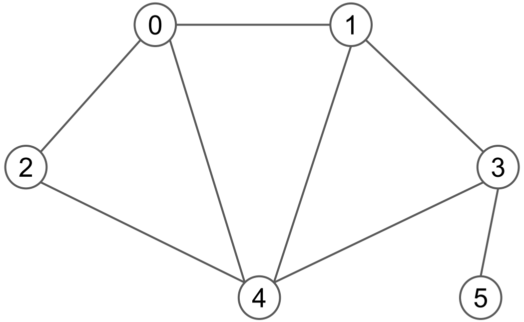
Listas de adjacência de *G*



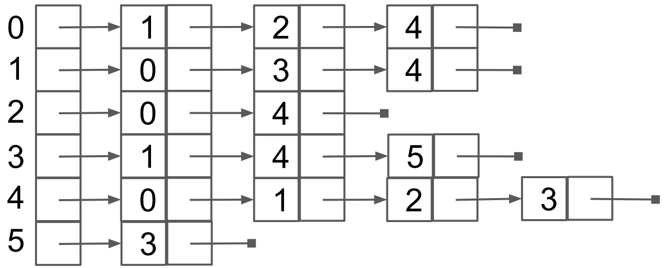
Listas de adjacência

- Observações:
  - Para grafos onde não consideramos uma direção para as arestas, uma aresta *i j* é representada em duas listas de adjacência: o vértice *i* está na lista do vértice *j* e o vértice *j* está na lista do vértice *i*

G



Listas de adjacência de *G*



Matriz de adjacências vs. listas de adjacência

- Dado um grafo $G = (V, E)$, a quantidade de memória utilizada para representar G
  - como uma matriz de adjacências é proporcional a $|V|^2$ e
  - como listas de adjacências é proporcional a $|V| + |E|$
- Se G é um grafo **esparso**, isto é, $|E|$ é bem menor que $|V|^2$, então é usualmente mais interessante representar G como listas de adjacência
- Se G é um grafo **denso**, isto é, $|E|$ é um número próximo a $|V|^2$, então é usualmente mais interessante representar G como uma matriz de adjacências

Matriz de adjacências vs. listas de adjacência

- Dado um grafo $G = (V, E)$:

	Matriz de Adjacências	Listas de Adjacência
Memória utilizada	$\|V\|^2$	$\|V\| + \|E\|$
Tempo para inserir aresta	constante	constante
Tempo para verificar aresta	constante	pior caso: $\|V\|$
Tempo para remover aresta	constante	pior caso: $\|V\|$

Valores proporcionais a

Exercícios

1. Implement em C++ uma classe que
    a. represente um grafo como uma matriz de adjacências e
    b. permita a realização das seguintes operações no grafo:
        - construir o grafo com um dado número de vértices e sem arestas
        - obter o número de vértices do grafo
        - obter o número de arestas do grafo
        - verificar se uma aresta existe no grafo
        - inserir uma aresta no grafo
        - remover uma aresta do grafo
        - imprimir o grafo (imprimir, para cada vértice, quais são os vizinhos do vértice)
        - (se necessário) destruir o grafo (liberar a memória alocada para o grafo)

Referências

- Esta apresentação é baseada nos seguintes materiais:
  - Capítulo 22 do livro
    Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. Introduction to Algorithms. 3rd. ed. MIT Press, 2009.
  - Capítulo 17 do livro
    Sedgewick, R. Algorithms in C++ – Part 5. Graph Algorithms. 3rd. ed. Addison-Wesley, 2002.