Nome: Edson

Disciplina: Álgebra Linear

email: edson.santos@uffs.edu.br

Sala: 330

1) Matrizes e determinantes;

2) Sistemas Lineares;

3) Espaços vetoriais e subespaços vetoriais;

4) Transformações Lineares;

5) [illegible] e autovetores;

6) Diagonalização de matrizes;

Livro: Álgebra Linear

Autor: Alfredo SteinBruch

Paulo Winterle

Avaliações:

Será feito duas avaliações A_1 e A_2 sendo que A_1 vai até 3 (no máx. metade de 4) e A_2 o restante do conteúdo.

Se $3 \leq A_1 < 6$ ou $3 \leq A_2 < 6$

o aluno poderá fazer uma recuperação R que será feita da seguinte forma:

I caso: $A_1 \geq 6$ e $3 \leq A_2 < 6$ então

Média final: $MF = \dfrac{A_1 + \max\{A_2, R\}}{2}$

II caso: Se $3 \leq A_1 < 6$ e $A_2 \geq 6$ então

$$MF = \frac{\max\{A_1, R\} + A_2}{2}$$

A recuperação R será feita no final do semestre.

Horário de atendimento: Segunda e quarta
das 18:00 até as 19:00

Matrizes

Def: Uma matriz é uma tabela de números com m Linhas e n colunas. Cada entrada da matriz é representada por $a_{ij} \in \mathbb{R}$ em que i representa a posição da linha e j a posição da coluna do elemento na matriz.

obs: As n
por f

Notação:

obs: As matrizes são representadas por Letras maiúsculas A, B, C, ...

Notação: $$A = \begin{array}{l} \\ \left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{matrix}\right]_{n \times m} \end{array}$$

colunas

linhas

Ex. 1) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$ 2) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times3}$

2) $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times2}$

Tipos de matrizes

1) Matriz Linha É uma matriz com uma linha e $\underline{\underline{m}}$ colunas

Ex. 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 3}$

2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{1\times 5}$

2) Matriz coluna: É uma matriz com $\underline{\underline{n}}$ Linhas e uma coluna

Ex 1) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$

3) Matriz quadrada. É uma matriz em que o número de Linhas e de colunas são iguais.

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

4) Matriz triangular superior:

É uma matriz quadrada em que $a_{ij} = 0$ sempre que $j < i$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Analogamente definimos matriz triangular inferior

5) Matriz identidade: É uma matriz quadrada em que $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ se $i = j$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 0 & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} = I$$

6) Transposta de uma matriz: Dada uma matriz A de ordem $n \times m$ definimos como a transposta da matriz A como sendo uma matriz B tal que os elementos de B são dados por:

$$b_{ij} = a_{ji}$$

Notação: $B = A^T$

Ex. 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Scanné avec CamScanner

7) Matriz inversa:

Dada uma matriz quadrada A de ordem $\underline{\underline{n}}$ a matriz inversa de A, quando existir, é uma matriz B de mesma ordem que A tal que

$$AB = I = BA$$

Operações de matrizes

i) Soma: Sejam A e B duas matriz de mesma ordem.

Definimos: $C = A + B$ tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Ex 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

ii) Multiplicação de matriz por escalar.

Sejam A uma matriz e $k \in \mathbb{R}$

Definimos $C = k.A$ tal que

$c_{ij} = k a_{ij}$

Ex. 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $k = 3$

$$C = 3A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 0 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} = (1, 2, 3) \text{ ou}$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = (-1, 0, 2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2, 3) \cdot (-1, 0, 2) = -1 + 0 + 6 = 5$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Generalizando o produto escalar

$\vec{u} = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m})$

$\vec{v} = (y_{11}, y_{21}, y_{31}, \ldots, y_{m1})$

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$

$$[x_{11} \; x_{12} \cdots x_{1m}] \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{bmatrix} =$$

$x_{11} y_{11} + x_{12} y_{21} + x_{13} y_{31} + \cdots + x_{1m} y_{m1}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{k=1}^{m} x_{1k} y_{k1}$$

iii) Multiplicação de matrizes

Sejam as matrizes $A_{n \times m}$ e $B_{m \times n}$. Definimos $C = AB$ tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

obs:

$$\begin{cases} c_{11} = \sum_{k=1}^{m} a_{1k} b_{k1} \\ c_{21} = \sum_{k=1}^{m} a_{2k} b_{k1} \\ \vdots \end{cases}$$

Ex. 1) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

2x3

Ex. 1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2.1+1.0+1.1 & 2.(-1)+1.1+1.0 \\ -3.1+4.0+1.1 & (-3)(-1)+4.1+1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Geralmente

$AB \neq BA$

Prop

i

ii

iii

iv)

e

v) A(

vi) A. I

vii) (AB)C

Propriedades das operações de matrizes

i) $A+B=B+A$

ii) $(A+B)+C = A+(B+C)$

iii) $A+O = O+A = A$ $\left(O = [\,0\,]\right)$

iv) Dada uma matriz A existe uma matriz B tal que:
$A+B = O = B+A$, a saber $B=-A$

v) $A(B+C) = AB+AC$ e $(B+C)A = BA+CA$

vi) $A.I = I.A = A$ (A é quadrada de ordem n)

vii) $(AB)C = A(BC)$

viii) $(k_1+k_2)A = k_1A + k_2A$

(x) $k(A+B) = kA + kB$

x) $1.\ A = A$

Determinantes

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. O determinante de uma matriz A é uma função que associa cada matriz quadrada de ordem n um número real $\det(A)$

$$\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto \det(A)$$

sendo que a função det satisfaz:

i) Se A uma linha (coluna) multiplo de outra então $\det(A)=0$

ii) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

iii) ?!?

No caso em que $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ então $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\det(A) := ad - bc$

Scanné avec CamScanner

Se $n \geq 3$ então $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Daí, definimos, fixando a i-ésima linha da matriz A, o determinante por:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} D_{ik}$$

em que D_{ik} é o determinante da matriz resultante eliminando de A a i-ésima linha e k-ésima coluna.

Ou ainda, fixando j-ésima coluna, temos

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}$$

Ex. 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ fixar primeira linha $i=1$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{1+k} a_{1k} D_{1k}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} D_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} D_{12} = a_{11} D_{11} - a_{12} D_{12}$$

$$= D_{11} - 2D_{12}$$

D_{11}

D_{12}

$$D_{11} = \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right) = 5.4 - 1(-1) = 21$$

$$D_{12} = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = 4.4 - 2(-1) = 18$$

$$D_{13} = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4 - 2.5 = -6$$

$$\det(A) = D_{11} - 2D_{12} + 3D_{13}$$

$$= 21 - 2.18 + 3(-6) = -33$$

fixar $j = 3$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+3} a_{k3} D_{k3}$$

$$= (-1)^4 a_{13} D_{13} + (-1)^{2+3} a_{23} D_{23} + (-1)^{3+3} a_{33} D_{33}$$

$$= a_{13} D_{13} - a_{23} D_{23} + a_{33} D_{33}$$

$$= 3D_{13} + D_{23} + 4D_{33}$$

$$D_{13} = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = -6 \qquad D_{23} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = -3$$

$$D_{33} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right) = -3$$

$$\det(A) = 3.(-6) - 3 + 4(-3)$$

$$= -18 - 3 - 12$$

$$= -33$$

Determinantes

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ então.

i) fixando a linha i.

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} D_{ik}$$

ii) fixando a coluna j:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}$$

Exemplos: 1) Calcule o determinante das matrizes abaixo:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solução:

a) fixar a linha $i = 1$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{1+k} a_{1k} D_{1k}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} D_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} D_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} D_{13}$$

$$= 1 . D_{11} - (-1) D_{12} + 0 D_{13}$$

$$= D_{11} + D_{12}$$

Scanné avec CamScanner

$$D_{11} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 1.1 = 0$$

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 1.0 = 1$$

Logo, $\det(A) = D_{11} + D_{12} = 0 + 1 = 1$

) fixar a coluna $j = 4$

$$\det(A) = \sum_{K=1}^{4} (-1)^{K+4} a_{K4} D_{K4} = (-1)^{1+4} a_{14} D_{14} + (-1)^{2+4} a_{24} D_{24} + (-1)^{3+4} a_{34} D_{34} + (-1)^{4+4} a_{44} D_{44}$$

$$= -3D_{14} - D_{24} + D_{34} - D_{44}$$

$$D_{14} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$ fixar coluna $j = 3$

$$\det(D_{14}) = \sum_{K=1}^{3} (-1)^{k+3} b_{k3} E_{k3}$$

$$= (-1)^{1+3} b_{13} E_{13} + (-1)^{2+3} b_{23} E_{23} + (-1)^{3+3} b_{33} E_{33}$$

$$= 3E_{13} - E_{23} + 2E_{33}$$

Scanné avec CamScanner

$$E_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\,3 - 3.1 = 3$$

$$E_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$E_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_{14} = 3E_{13} - E_{23} + 2E_{33}$$

$$= 3.3 - 5 + 2.4 \Rightarrow$$

$$D_{14} = 12$$

$$D_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

fixar a $j = 1$

$$D_{24} = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} C_{k1} F_{k1}$$

$$= (-1)^{1+1} C_{11} F_{11} + (-1)^{2+1} C_{21}.F_{21} + (-1)^{3+1} C_{31}.F_{31}$$

$$= F_{11} - 2F_{21} + F_{31}$$

$$F_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \;;\; F_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$F_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$D_{24} = 3 - 2.7 + 5$$

$$\boxed{D_{24} = -6}$$

$$D_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$ fixar coluna $j = 1$

$$D_{34} = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} d_{k1} G_{k1} = (-1)^{1+1} d_{11} G_{11} + (-1)^{2+1} d_{21} G_{21} + (-1)^{3+1} d_{31} G_{31}$$

Scanné avec CamScanner

$$D_{34} = G_{11} - 2G_{21} + G_{31}$$

$$G_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 - 3.3 = -7$$

$$G_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$G_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$D_{34} = -7 - 2.7 + 7 = -14$$

$$D_{34} = -14$$

$$= -3D_{14} - D_{24} + D_{34} - D_{44}$$

$$D_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

Sarrus

$$1.1.1 + 2.3.2 + (-1).2.3 - [2.1.(-1) + 3.3.1 + 1.2.2]$$

$$D_{44} = 1 + 12 - 6 - [-2 + 9 + 4] \Rightarrow D_{44} = 7 - 11 \Rightarrow D_{44} = -4$$

Logo, $\det(A) = -3D_{14} - D_{24} + D_{34} - D_{44}$

$$= -3.12 - (-6) - 14 - (-4) \Rightarrow \det(A) = -40$$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Fixar a linha $i = 1$ pois é a linha com maior quantidade de zeros.

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{1+k} a_{1k} D_{1k}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} D_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} D_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} D_{13} + (-1)^{1+4} a_{14} D_{14}$$

$$\det(A) = 0\, D_{11} - D_{12} + 0\, D_{13} - D_{14}$$

$$\det(A) = -D_{12} - D_{14}$$

$$D_{12} = \left| \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= 1.1.1 + 2.1.1 + 1.0.1 - [1.1.1 + 1.1.1 + 1.0.2]$$

$$D_{12} = 1 + 2 - 2 \Rightarrow D_{12} = 1$$

$$D_{14} = \left| \begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$= 1.1.1 + (-1).1.1 + 2.0.0 - [1.1.2 + 0.1.1 + 1.0.(-1)]$$

$$= 1 - 1 - 2 \Rightarrow D_{14} = -2$$

Logo, $\det(A) = -D_{12} - D_{14}$

$$= -1 - (-2)$$

$$= 1$$

Sistemas Lineares

Equação Linear: Uma eq. Linear é uma equação do tipo:

$$(*)\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

em que $a_{1j} \in \mathbb{R}\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$; $b_1 \in \mathbb{R}$ e x_j são as incógnitas $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

Uma solução da equação $(*)$, se houver, será um vetor $v = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ em que as coordenadas de v satisfazem a igualdade:

$$a_{11} k_1 + a_{12} k_2 + \cdots + a_{1n} k_n = b_1$$

Sistema de equações lineares:

Um sistema de equações lineares é um conjunto de $\underline{\underline{n}}$ equações lineares com $\underline{\underline{m}}$ incógnitas, a saber:

$$(**) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_m = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_m = b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + \cdots + a_{3n} x_m = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_m = b_n \end{cases}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$; $b_i \in \mathbb{R}$

x_j são incógnitas.

Scanné avec CamScanner

Uma solução do Sistema Linear (**) é um vetor $v = (k_1, k_2, \ldots, k_m) \in \mathbb{R}^n$ em que as coordenadas de v satisfazem todas as eq. Lineares do sistema.

Se $n = m = 2$ então o sistema Linear será da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

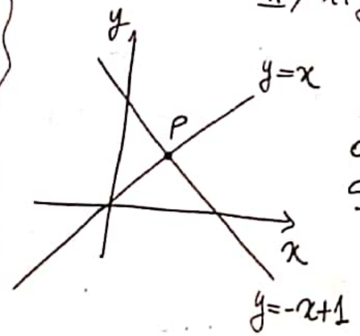
Solução, se houver, será $v = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Por ex:

1) $\begin{cases} x + y = 1 \rightarrow \text{reta} \\ x - y = 0 \rightarrow \text{reta} \end{cases}$

Notem que: I) $x - y = 0 \Rightarrow y = x$

II) $x + y = 1 \Rightarrow y = -x + 1$

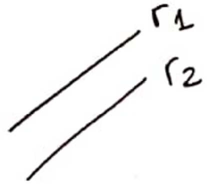


A solução do sistema será: $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Neste caso, dizemos que o sistema é possível e determinado

2) $\begin{cases} x - 2y = 1 \rightarrow \text{reta } r_1 \\ x - 2y = 3 \rightarrow \text{reta } r_2 \end{cases}$

$r_1: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ $\quad$ $r_2: y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$



Como $r_1 // r_2$ temos que o sistema é impossív[el]

3) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

A solução desse sistema São todos os pontos que pertencem à reta $r: 3x - y = 1$

Neste caso, dizemos que o sistema é possível e indeterminado.

Resumindo: Um sistema pode ser:

i) possível e determinado;
ii) possível e indeterminado;
iii) impossível.

Notem que o sistema $(**)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$(**)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

obs: Quando $\vec{b} = \vec{0}$ dizemo que o sistema linear é homogêneo.

Resolução de Sistemas Lineares

Método do escalonamento:

Primeiro passo: Vamos escrever o sistema linear da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Segundo Passo: Montada a matriz ✯

Vamos aplicar operações elementares em ✯ de tal forma que a solução do sistema original não se altere.

<u>operações elementares</u>:

i) Somar ou subtrair duas linhas gerando uma nova linha;

ii) Multiplicar uma linha por um número não nulo gerando uma nova linha;

iii) Fazer uma combinação de i) e ii).

Ex. 1) Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] L_2 = L_2 - 3L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] L_3 = L_3 - L_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x+y-z=1 \Rightarrow x=1 \\ -y-2z=-3 \Rightarrow y=1 \\ 2z=2 \Rightarrow z=1 \end{cases}$$

Solução do sistema será
$v=(1,1,1)$

b) $$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ -x+2y+3z=5 \\ x-y-z=2 \end{cases}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] L_3 \leftrightarrow L_1 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] L_2 = L_2 + L_1 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] L_3 = L_3 - 2L_1 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{array}\right] L_3 = L_3 - 3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -25 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x-y-z=2 \Rightarrow x=4 \\ y+2z=7 \Rightarrow y=-3 \\ -5z=-25 \Rightarrow z=5 \end{cases}$$

$v=(4,-3,5)$

síve

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + y + z = 1 \\ 0x \quad 3y + 4z = 1 \end{cases}$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 + L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3y + 4z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

$3y + 4z = 1$

$y = -\frac{4}{3}z + \frac{1}{3}$

Se $z = t \in \mathbb{R}$ temos

$y = -\frac{4}{3}t + \frac{1}{3}$

Scanné avec CamScanner

$x = -2y - 3z$

$= -2\left[-\frac{4}{3}t + \frac{1}{3}\right] - 3t$

$x = \frac{8}{3}t - 3t - \frac{2}{3}$

$x = -\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}$

Solução do sistema será:

$V = \left(-\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}t + \frac{1}{3}, t\right); t \in \mathbb{R}$

Logo, o sistema é possível e indeterminado.

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] L_3 \leftrightarrow L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] L_2 = L_2 + L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] L_3 = L_3 - 2L_1$$

Sistemas Lineares

Ex. 1) Resolva, se possível, os sistemas Lineares abaixo:

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} L_2 = L_2 - 2L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 1 \\ 3 & -1 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} L_3 = L_3 - 3L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & -4 & 4 & \vdots & 4 \end{bmatrix} L_2 = -L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & -4 & 4 & \vdots & 4 \end{bmatrix} L_3 = L_3 +$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & -8 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y - 3z = -1 \Rightarrow y = -1 \\ -8z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{cases}$$

O vetor solução do sistema será:
$\vec{v} = (1, -1, 0)$. Logo, o sistema é possível e determinado.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ -x + y - z = -1 \\ 2x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 = -L_1}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 = L_2 - 3L_1}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 = L_3 - 2L_1}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ \quad 5y - 4z = 1 \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{1+4z}{5}} \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

$x - y + z = 1 \Rightarrow x = 1 + y - z$

$\Rightarrow x = 1 + \dfrac{1+4z}{5} - z$

$\Rightarrow x = \dfrac{5+1+4z-5z}{5} \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{6-z}{5}}$

Se $z = t \in \mathbb{R}$ então:

$x = \dfrac{6-t}{5}$ e $y = \dfrac{1+4t}{5}$

O vetor solução será:

$v = \left(\dfrac{6-t}{5}, \dfrac{1+4t}{5}, t\right)$; $t \in \mathbb{R}$

O sistema é possível e indeterminado.

Notem que: $v = \left(\dfrac{6}{5} - \dfrac{t}{5}, \dfrac{1}{5} + \dfrac{4t}{5}, t\right)$

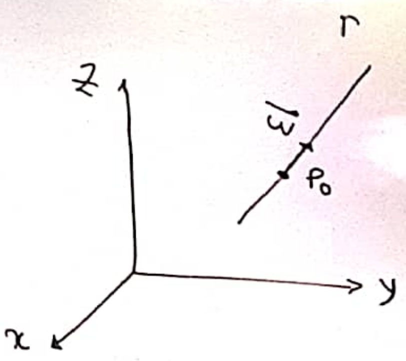
$= \left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{1}{5}, 0\right) + \left(\dfrac{-t}{5}, \dfrac{4t}{5}, t\right)$

$= \left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{1}{5}, 0\right) + t\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{4}{5}, 1\right)$

$= P_0 + t.\vec{w}$

em que: $\begin{cases} P_0 = \left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{1}{5}, 0\right) \\ \vec{w} = \left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{4}{5}, 1\right) \end{cases}$

Logo, $\vec{v} = \underbrace{P_0 + t\vec{w}}_{\text{eq. vetorial de uma reta } r}$; $t \in \mathbb{R}$



c) $\begin{cases} -3x + y + z = 1 \\ 5x - y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 \longleftrightarrow L_1}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_1 = \frac{1}{2} L_1}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_2 = L_2 - 5L_1}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 = L_3 + 3L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \quad L_2 = \frac{1}{4} L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \quad L_3 = L_3 + 2L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ \underbrace{0x + 0y + 0z}_{0} = 1 \end{cases}$$

Como $0x + 0y + 0z \neq 1$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ segue que o sistema é impossível.

Lembrar: Genéricamente um sistema linear pode ser escrito da seguinte forma: $A\vec{x} = \vec{b}$ em que A é uma matriz, $\vec{x}$ é o vetor incógnita e $\vec{b}$ é um vetor dado.

Quando $\vec{b} = \vec{0}$, ou seja, $A\vec{x} = \vec{0}$ dizemos que sistema é homogêneo.

Além disso, é claro que $\vec{x} = \vec{0}$ é uma solução do sistema homogêneo.

Pergunta: Como saber se a única solução do sistema homogêneo é a solução $\vec{x} = \vec{0}$.

Para responder essa pergunta vamos estudar o que é matriz inversa.

Matriz inversa.

Definição: Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ Dizemo que a matriz $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é a inversa de A se, e somente se, $AB = I = BA$ em que I é a matriz identidade de ordem n. Neste caso dizemos que A é inversível

Nota

Como

é

Se

B

A

ue

se, e somente se

de de ordem $\underline{n}$.

Notação: $B = A^{-1}$

Como descobrir se uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é inversível?

Se A é inversível existe uma matriz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que:

$$AB = I \Rightarrow \det(AB) = \det(I) = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\det(A)}_{\text{número}}\,\underbrace{\det(B)}_{\text{número}} = 1$$

$$\Rightarrow \det(A) \neq 0$$

Scanné avec CamScanner

Conclusão: Se A é inversível então $\det(A) \neq 0$.

Sendo A inversível como encontramos sua inversa A^{-1}?

Para isso devemos aplicar o método do escalonamento como segue.

Ex. 1) Encontre a inversa das matrizes abaixo:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_2 = L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\underbrace{}_{I}$ $\underbrace{}_{B}$

$L_3 = L_3 - 2L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_2 = \frac{1}{2} L_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_3 = L_3 - 2L_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_3 = -L_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 = L_1 - L_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 = L_1 + L_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Logo, $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -2 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_1 = -\frac{1}{2} L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 = L_2 - 3L_1 \\ L_3 = L_3 + 4L_1 \\ L_4 = L_4 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 1 & 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 3/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_2 = -2L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_3 = L_3 - L_2 \\ L_4 = L_4 + \frac{1}{2} L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 = -\frac{1}{2} L_3}$$

$_3 = L_3 - L_2$

$_4 = L_4 + \frac{1}{2} L_2$

$\frac{1}{2} L_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_4 = L_4 - L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \quad L_4 = 2L_4$$

Scanné avec CamScanner

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad L_1 = L_1 + L_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad L_2 = L_2 - 4L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_1 = L_1 - \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 = L_3 + \frac{1}{2} L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right. \underbrace{\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}}_{A^{-1}} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\end{array}}\right]$$

Quando o sistema homogêneo $A\vec{x}=\vec{0}$ admite solução não trivial?

Notem que se A é inversível então existe A^{-1} ($\det(A)\neq 0$). Daí,

$$A\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\cdot\vec{0}$$

$$\Rightarrow (A^{-1}\cdot A)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow I.\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$$

Em outras palavras $A\vec{x}=\vec{0}$ tem solução não trivial quando $\det(A)=0$.

Nota: Se A é inversível e $A\vec{x}=\vec{b} \Rightarrow$

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}b \Rightarrow$$

$$(A^{-1}A)\vec{x} = A^{-1}b \Rightarrow$$

$$I.\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow \boxed{\vec{x}=A^{-1}b}$$

Solução do Sistema.

Espaços Vetoriais

Definição Seja V um conjunto não vazio munido de duas operações

$$+ : V \times V \to V \qquad \text{e} \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \to V$$
$$(u, v) \mapsto u+v \qquad\qquad (k, u) \mapsto k.u$$

Tais que:

i) $u + v = v + u$ (comutativa);

ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associativa);

iii) Existe $0_v \in V$ tal que
$u + 0_v = 0_v + u = u$ (elemento neutro)

iv) Dado $u \in V$ existe $v \in V$ tal que $u + v = 0_v$ $(v = -u)$; (oposto)

v) $(k_1 + k_2) u = k_1 u + k_2 u$;

vi) $k_1 (u + v) = k_1 u + k_1 v$;

vii) $(k_1 k_2) u = k_1 (k_2 u)$;

viii) $1. u = u$

$\forall u, v, w \in V$

$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplos:

1) $V=\mathbb{R}$ é um E.V

2) $V=\mathbb{R}^2$

Se $u, v \in \mathbb{R}^2$ então: $\begin{cases} u=(x_0, y_0) \\ v=(x_1, y_1) \end{cases}$

Definimos:

$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(u, v) \longmapsto u+v = (x_0, y_0) + (x_1, y_1) = (x_0+x_1, y_0+y_1)$

$\cdot\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(k, u) \longmapsto ku = k(x_0, y_0) = (kx_0, ky_0)$

Vamos mostrar agora as 8 propriedades:

Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Então: $\begin{cases} u=(x_0, y_0) \\ v=(x_1, y_1) \\ w=(x_2, y_2) \end{cases}$

Daí,

i) $u+v = (x_0, y_0) + (x_1, y_1)$

$= (x_0+x_1, y_0+y_1)$

$= (x_1+x_0, y_1+y_0)$

$= (x_1, y_1) + (x_0, y_0)$

$= v + u$

ii) $(u+v)+w = \left((x_0,y_0)+(x_1,y_1)\right)+(x_2,y_2)$

$= (x_0+x_1,\ y_0+y_1) + (x_2,y_2)$

$= \left((x_0+x_1)+x_2,\ (y_0+y_1)+y_2\right)$

$= \left(x_0+(x_1+x_2),\ y_0+(y_1+y_2)\right)$

$= (x_0,y_0)+(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$

$= (x_0,y_0)+\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right)$

$= u+(v+w)$

iii) $0_V=(0,0)\in\mathbb{R}^2$. Daí,

$u+0_V = (x_0,y_0)+(0,0)$

$= (x_0+0,\ y_0+0)$

$= (x_0,y_0)$

$= u$

Analogamente, $0_V+u=u$.

iv) Dado $u=(x_0,y_0)$ escolha $v=(-x_0,-y_0)$ e com isso:

$u+v=(x_0,y_0)+(-x_0,-y_0)=(x_0-x_0,\ y_0-y_0)=(0,0)=0_V$

Scanné avec CamScanner

v) $(k_1+k_2)u =$

$$(k_1+k_2)(x_0,y_0) = \left((k_1+k_2)x_0,\ (k_1+k_2)y_0\right)$$
$$= \left(k_1x_0+k_2x_0,\ k_1y_0+k_2y_0\right)$$
$$= (k_1x_0,\ k_1y_0)+(k_2x_0,\ k_2y_0)$$
$$= k_1(x_0,y_0)+k_2(x_0,y_0)$$
$$= k_1u + k_2u$$

vi) $k_1(u+v) = k_1\left((x_0,y_0)+(x_1,y_1)\right)$
$$= k_1(x_0+x_1,\ y_0+y_1)$$
$$= \left(k_1(x_0+x_1),\ k_1(y_0+y_1)\right)$$
$$= \left(k_1x_0+k_1x_1,\ k_1y_0+k_1y_1\right)$$
$$= (k_1x_0,\ k_1y_0)+(k_1x_1,\ k_1y_1)$$
$$= k_1(x_0,y_0)+k_1(x_1,y_1)$$
$$= k_1u + k_1v$$

vii) $(k_1k_2)u = (k_1k_2)(x_0,y_0)$
$$= \left((k_1k_2)x_0,\ (k_1k_2)y_0\right)$$
$$= \left(k_1(k_2x_0),\ k_1(k_2y_0)\right)$$

= k

=

= k

vii

Log

<u>obs</u>

$$= (k_1 x_0 + k_1 x_1, k_1 y_0 + k_1 y_1)$$

$$= (k_1 x_0, k_1 y_0) + (k_1 x_1, k_1 y_1)$$

$$= k_1 (x_0, y_0) + k_1 (x_1, y_1)$$

$$= k_1 u + k_1 v$$

vii) $(k_1 k_2) u = (k_1 k_2)(x_0, y_0)$

$$= ((k_1 k_2) x_0, (k_1 k_2) y_0)$$

$$= (k_1 (k_2 x_0), k_1 (k_2 y_0))$$

$$= k_1 (k_2 x_0, k_2 y_0)$$

$$= k_1 (k_2 (x_0, y_0))$$

$$= k_1 (k_2 u)$$

viii) $1 . u = u$

Logo, $V = \mathbb{R}^2$ é um <u>E.V.</u>

<u>obs</u>: $\mathbb{R}^n$; $n \in \mathbb{N}$ é um <u>E.V</u>

2) $V = M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

Se $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ então $\begin{cases} A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \end{cases}$

$+ : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

$(A, B) \longmapsto A+B = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$

$\cdot : \mathbb{R} \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

$(k, A) \longmapsto kA = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix}.$

Sejam A, B e $C \in M_2(\mathbb{R})$ então $\begin{cases} A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \end{cases}$

e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

i) $A+B = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_2+a_1 & b_2+b_1 \\ c_2+c_1 & d_2+d_1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = B+A$

Scanné avec CamScanner

ii) $(A+B)+C = A(B+C)$

FAÇAM.

iii) $O_V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A + O_V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1+0 & b_1+0 \\ c_1+0 & d_1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = A$$

iv) Dada $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ escolha $B = \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_1 \end{bmatrix}$

e com isso $A+B = O_V$

Façam.

v) $(k_1+k_2)A = (k_1+k_2)\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (k_1+k_2)a_1 & (k_1+k_2)b_1 \\ (k_1+k_2)c_1 & (k_1+k_2)d_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k_1a_1 + k_2a_1 & k_1b_1 + k_2b_1 \\ k_1c_1 + k_2c_1 & k_1d_1 + k_2d_1 \end{bmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

e com isso $A+B=0_V$

Façam.

v) $(k_1+k_2)A = (k_1+k_2)\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (k_1+k_2)a_1 & (k_1+k_2)b_1 \\ (k_1+k_2)c_1 & (k_1+k_2)d_1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} k_1a_1+k_2a_1 & k_1b_1+k_2b_1 \\ k_1c_1+k_2c_1 & k_1d_1+k_2d_1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} k_1a_1 & k_1b_1 \\ k_1c_1 & k_1d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2a_1 & k_2b_1 \\ k_2c_1 & k_2d_1 \end{bmatrix} =$

$k_1\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} =$

$k_1A + k_2A$.

vi); vii) e viii) Façam!

Logo, $V = M_2(\mathbb{R})$ é um $\underline{\underline{E.V}}$.

Scanné avec CamScanner

obs: $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é um E.V.

3) $V = \mathcal{F} = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{ é função} \}$

$+ : V \times V \longrightarrow V$
$(f, g) \longmapsto f+g$ em que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\cdot\ \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$
$(k, f) \longmapsto k.f$ em que $(kf)(x) = kf(x)$

Vamos mostrar que V é um <u>EV</u>

Sejam $f, g, h \in V$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

i) $(f+g)(x) = \underset{\in \mathbb{R}}{f(x)} + \underset{\in \mathbb{R}}{g(x)}$

$= g(x) + f(x)$

$= (g+f)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

logo, $f+g = g+f$

$\varphi = \psi$

$\Longleftrightarrow$

$D\varphi = D\psi$ e

$\varphi(x) = \psi(x)$

$\forall x \in D\varphi$

ii) $\big(((f+g)+h\big)(x) =$

$(f+g)(x) + h(x) =$

$\big(f(x)+g(x)\big) + h(x) =$

$f(x) + \big(g(x)+h(x)\big) =$

$f(x) + (g+h)(x) =$

$\big(f+(g+h)\big)(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $(f+g)+h = f+(g+h)$

iii)

$(f+$

$f+0_V$

iv) Da

e co

$(f+g)(x$

iii) $0_V = 0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$(f + 0_V)(x) = f(x) + 0(x)$$
$$= f(x) + 0$$
$$= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f + 0_V = f$

iv) Dada $f \in V$ escolha $g \in V$; $g(x) = -f(x)$

e com isso:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) - f(x) = 0 = 0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Logo, $f + g = 0_V$

v) $((k_1+k_2)f)(x) =$

$(k_1+k_2)f(x) =$

$k_1 f(x) + k_2 f(x) =$

$(k_1 f)(x) + (k_2 f)(x) =$

$(k_1 f + k_2 f)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Logo, $(k_1+k_2)f = k_1 f + k_2 f$

vi) e vii) façam.

viii) $(1.f)(x) = 1.f(x) = f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $1.f = f$.

V

$\subseteq$

i)

(

logo

Scanné avec CamScanner

4) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ definimos o traço de A por:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$V = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ tr(A) = 0\}$$

é um EV?

i) Sejam $A, B, C \in V$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

então $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$; $tr(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 0$

$$tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = 0$$

i) $tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii})$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$

$= tr(A) + tr(B)$

$= 0 + 0 = 0$

Por outro lado, $tr(B+A) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} + a_{ii}$

$= tr(A) + tr(B) = 0$

Ou seja,

$tr(A+B) = tr(B+A)$

ii)

$tr((A+B)+C) =$

$tr(A+(B+C))$ Façam!

iii) $0_V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$

$tr(A+0_V) = tr(A)$

iv) Se $A \in V$ escolha $B = -A$

$$tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + b_{ii}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} - a_{ii}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} 0 = tr(0_V)$$

v) $$tr((k_1+k_2)A) = \sum_{i=1}^{n} (k_1+k_2) a_{ii}$$
$$= (k_1+k_2) \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = (k_1+k_2) tr(A)$$
$$= (k_1+k_2) 0 = 0$$

Por outro lado,

$$tr(k_1 A + k_2 A) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} k_1 a_{ii} + k_2 a_{ii} =$$
$$k_1 \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + k_2 \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$
$$= k_1 tr(A) + k_2 tr(A)$$
$$k_1 \cdot 0 + k_2 0 = 0$$

vi) e vii) Façam.

viii)

$$tr(1.A) = \sum_{i=1}^{n} 1.a_{ii}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$
$$= tr(A) = 0$$

logo, V é um E.V.

Subespaços vetoriais

Def. Sejam V um EV e $\emptyset \neq S \subset V$. Dizemos que S é um subespaço vetorial se S é fechado com as operações de soma e multiplicação por escalar de V e além disso S também é um EV.

obs. fechado pelas operações: $\begin{cases} u, v \in S \Rightarrow u+v \in S \\ k \in \mathbb{R}, u \in S \Rightarrow k.u \in S \end{cases}$

Proposição: Sejam V um EV e $S \subset V$. Então, S é um subespaço vetorial de V se, e somente se:

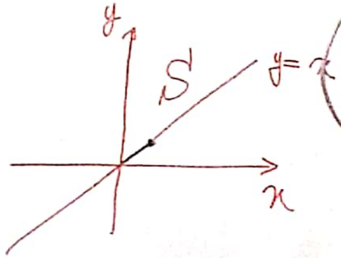
i) $0_V \in S$;

ii) $u, v \in S \Rightarrow u+v \in S$;

iii) $k \in \mathbb{R}, u \in S \Rightarrow ku \in S$.

Exemplos:

1) $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x,y) \in \mathbb{R} ;\ y = x\}$



i) $0_V = (0,0) \in S$

$0 = 0 \quad (y = x)$

ii) Sejam $u, v \in S$ então

$$\begin{cases} u = (x_1, y_1) \text{ e } y_1 = x_1 \\ v = (x_2, y_2) \text{ e } y_2 = x_2 \end{cases}$$

Logo, $u+v = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ e

$y_1+y_2 = x_1+x_2$. Portanto, $u+v \in S$

iii) $k \in \mathbb{R}$ e $u \in S$ então $u = (x_1, y_1)$ e $y_1 = x_1$

Logo, $k.u = k(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$ e

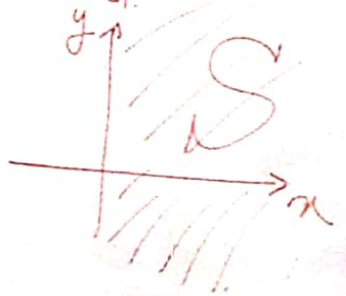
$ky_1 = kx_1$. Portanto, $ku \in S$

Com isso, S é um subesp. vetorial

2) $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0\}$.

S é um subesp. vet. de $V = \mathbb{R}^2$?

i) $0_V = (0,0) \in S$ pois $0 \geq 0$



ii) Sejam $u, v \in S$ então
$u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ e
$x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

Daí, $u+v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$
$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ temos que $x_1 + x_2 \geq 0$.

Logo, $u+v \in S$

iii) Sejam $k \in \mathbb{R}$ e $u \in S$ então $u = (x_1, y_1)$ e x_1

Daí,
$$ku = k(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$$

Sabemos que $x_1 \geq 0 \Longrightarrow kx_1 \geq 0 \; \forall k \in \mathbb{R}$?

Isso não é verdade. Se $k < 0$ então $kx_1 < 0$

Logo, não necessariamente, $ku \in S$.

Portanto, S não é um subesp. vetorial.

3) $V = \mathbb{R}^3$

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0\}$

S é um subesp. vet. de $\mathbb{R}^3$?

i) $0_V = (0,0,0) \in S$ $\quad 0+0+0=0$

ii) Sejam $u, v \in S \Rightarrow \begin{cases} u = (x_1, y_1, z_1) \text{ e } x_1+y_1+z_1=0 \\ v = (x_2, y_2, z_2) \text{ e } x_2+y_2+z_2=0 \end{cases}$

Daí,

$u + v = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ e

$(x_1+x_2) + (y_1+y_2) + (z_1+z_2) =$
$(x_1+y_1+z_1) + (x_2+y_2+z_2)$
$\quad 0 \quad + 0 \quad = 0$

Logo, $u+v \in S$

iii) Sejam $k \in \mathbb{R}$ e $u \in S$ então $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $x_1+y_1+z_1=0$

Daí, $ku = k(x_1, y_1, z_1) = (kx_1, ky_1, kz_1)$

e $kx_1 + ky_1 + kz_1 = k(x_1+y_1+z_1) = k0 = 0$. Portanto, $ku \in S$

Subespaços Vetoriais

V é um EV e $\emptyset \neq W \subset V$.

Prop W é um subesp vet. se, e somente se

i) $0_V \in W$;

ii) $u, v \in W \Rightarrow u+v \in W$;

iii) $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W \Rightarrow \alpha u \in W$.

Exemplos.

1) $V = \mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f$ é funções $\}$

$W = \{ f \in \mathcal{F} \ ; \ f(0) = 0 \}$

W é um subesp vet. ?

i) $0_V \Rightarrow 0_V(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. $\left((f + 0_V)(x) = f(x) + 0_V(x) = f(x) + 0 = f(x) \right)$

Como $0_V(0) = 0$ temos que $0_V \in W$. $f + 0_V = f$

ii) Sejam $f, g \in W$ então:

$$f(0) = 0 = g(0)$$

Daí,

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$$

Logo, $f+g \in W$.

iii) Sejam $k \in \mathbb{R}$ e $f \in W$ então $f(0) = 0$

Daí, $(k.f)(0) = k.f(0) = k.0 = 0$

Logo, $kf \in W$.

Portanto, W é um subesp. vet. de F.

2) Considere o sistema homogêneo:

$$* \begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

Mostre que o conjunto $S = \{ v = (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ v \text{ é solução do sistema } * \}$

é um subesp. vetorial de $V=\mathbb{R}^2$.

Solução.

i) $0_V \in S$

Temos $0_V=(0,0)\in\mathbb{R}^2$. Neste caso, $x=y=0$ e com isso $0_V\in S$

ii) Sejam $v_1, v_2 \in S$ então $v_1=(x_1,y_1)$ e $v_2=(x_2,y_2)$. Além disso,

$$\begin{cases} ax_1+by_1=0 \\ cx_1+dy_1=0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} ax_2+by_2=0 \\ cx_2+dy_2=0 \end{cases}$$

Queremos mostrar que $v_1+v_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)\in S$

De fato,

$$\begin{cases} a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2) = ax_1+ax_2+by_1+by_2 = (ax_1+by_1)+(ax_2+by_2) \\ \qquad = 0 + 0 = 0 \\ c(x_1+x_2)+d(y_1+y_2) = (cx_1+dy_1)+(cx_2+dy_2) = 0+0=0 \end{cases}$$

Logo, $v_1+v_2\in S$.

iii) Sejam $k\in\mathbb{R}$ e $v_1\in S$. Então, $v_1=(x_1,y_1)$ e $\begin{cases} ax_1+by_1=0 \\ cx_1+dy_1=0 \end{cases}$

Queremos mostrar que $kv_1 = (kx_1, ky_1) \in S$.

De fato,

$$\begin{cases} a(kx_1)+b(ky_1) = k(ax_1+by_1) = k.0 = 0 \\ c(kx_1)+d(ky_1) = k(cx_1+dy_1) = k.0 = 0 \end{cases}$$

Logo, $kv_1 \in S$.

Portanto, S é um subesp. vet. de $\mathbb{R}^2 = V$.

Conjuntos L.I e L.D

Def: Seja V um E.V e $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$.

Dizemos que β é Linearmente dependente (L.D) se existir $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0.$$

Caso contrário, ou seja $a_i = 0 \ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, β é Linearmente independente. (L.I)

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = 0$

<u>Caso</u> contrário, ou seja $a_i = 0$

$\forall i \in \{1, 2, \ldots n\}$, β é

Linearmente independente (L.I)

Obs.:

1- Porque β é chamado de L.D?

Vamos supor que exista $a_j \neq 0$

então:

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_j v_j + \ldots a_n v_n = 0 \Rightarrow$

$a_j v_j = -a_1 v_1 - a_2 v_2 + \ldots + (-a_n v_n) \Rightarrow$

$v_j = -\frac{a_1}{a_j} v_1 - \frac{a_2}{a_j} v_2 + \ldots + \left(-\frac{a_n}{a_j}\right) v_n$

Neste caso, v_j depende dos outros vetores, por isso o nome linearmente dependente.

2) A soma $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$ é chamado de combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots v_n$.

Scanné avec CamScanner

3)} é L.I?

$\Rightarrow$

2) A soma $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$ é chamado de combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

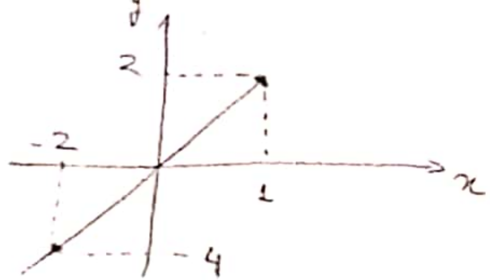
Exemplos:

1) $V = \mathbb{R}^2$

$\beta = \{(1,2), (-2,-4)\} \subset \mathbb{R}^2$ β é L.I?

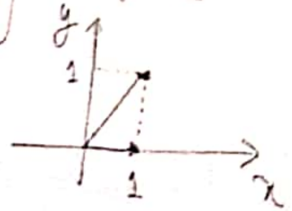
Não é L.I, pois $\underset{a_1}{2}(1,2) + \underset{a_2}{1}(-2,-4) = (2,4) + (-2,-4) = (0,0) = \vec{0}$

Como $a_1 \neq 0$ ($a_2 \neq 0$) então β é L.D



2) $V = \mathbb{R}^2$

$\beta = \{(1,0),(1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ é L.I?



$a_1(1,0) + a_2(1,1) = (0,0) \Rightarrow$

$(a_1, 0) + (a_2, a_2) = (0,0) \Rightarrow$

$(a_1 + a_2, a_2) = (0,0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Como $a_1 = a_2 = 0$ temos $\beta = \{(1,0),(1,1)\}$ é L.I.

3) $V = \mathbb{R}^2$; $\beta = \{(1,2); (-1,3)\}$ é LI?

$$a_1(1,2) + a_2(-1,3) = (0,0) \Rightarrow$$

$$(a_1 - a_2, 2a_1 + 3a_2) = (0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = a_1} \\ 2a_1 + 3a_2 = 0 \end{cases}$$

$$2a_1 + 3a_1 = 0 \Rightarrow 5a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = a_2 = 0}$$

Logo, β é LI.

4) $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1,1,1); (1,-1,1); (-1,1,1)\}$ é LI

$$a_1(1,1,1) + a_2(1,-1,1) + a_3(-1,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$(a_1 + a_2 - a_3, a_1 - a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ -2a_2 + 2a_3 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \\ 2a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \end{cases}$$

Logo, β é L.I.

5) $V = \mathbb{R}^3$; $\beta = \{(1,2,-1); (1,-1,1); (2,1,0)\}$ é L.I?

$$a_1(1,2,-1) + a_2(1,-1,1) + a_3(2,1,0) = (0,0,0)$$

$$(a_1 + a_2 + 2a_3,\ 2a_1 - a_2 + a_3,\ -a_1 + a_2) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ 2a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ -a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad L_2 = -\frac{1}{3} L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad L_3 = L_3 - 2L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema é possível e indeterminado. Ou seja, existem infinitas soluções.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = -a_2} \end{cases}$$

$$a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 - 2a_2 = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{a_1 = a_2}$$

As soluções do sistema serão dadas por:

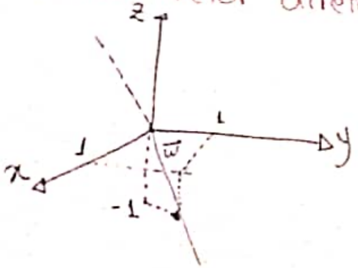
$$\vec{v} = (a_1, a_1, -a_1),\ a_1 \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma encontramos a_1, a_2, a_3 não todos nulos que são solução do sistema *. Logo, β é L.D.

obs Se $a_1 = t \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

$$\vec{v} = (t, t, -t)$$
$$= (0,0,0) + t(1,1,-1)$$
$$= \underbrace{P_0 + t\,\vec{w}}_{\text{eq. vet de uma reta.}}$$

que passa pelo ponto $P_0 = (0,0,0)$ e tem vetor diretor $\vec{w} = (1,1,-1)$



6) $V = P_2(\mathbb{R}) = \{ax^2 + bx + c \,;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$\beta = \{1+x,\ 1-x,\ x^2+2x+1\} \subset P_2(\mathbb{R})$ é L.I.?

$$a_1(1+x) + a_2(1-x) + a_3(x^2+2x+1) = 0$$

$$a_3 x^2 + (a_1 - a_2 + 2a_3)x + (a_1 + a_2 + a_3) = 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \boxed{a_3 = 0} \\ a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow a_1 = a_2 = 0$$

Logo, β é L.I.

Base de um EV

Def. Sejam V um EV e

$\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$

Dizemos que β gera V se dado $w \in V$ existem $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

Em outras palavras, dizemos que β gera V se qualquer elemento de V pode ser expresso como uma combinação linear dos elementos de β.

Notação: β gera V escrevemos da seguinte forma

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n] = V$$

Definição: Sejam V um E.V e $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Dizemos que β é uma base de V se:

i) β é L.I;

ii) β gera V.

obs

1) $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,0)\}$

- β é L.I

$a_1(1,0) = (0,0) \Rightarrow (a_1, 0) = (0,0)$
$\Rightarrow a_1 = 0.$

- β não gera V.

Pois, $w = (1,1)$ não pode ser expresso como combinação linear dos vetores de β.
Ou seja, não existe $a_1 \in \mathbb{R}$; $a_1(1,0) = (1,1)$

2) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1,0);(0,1);(1,1)\}$

- β não é L.I

$\underset{a_1}{1}.(1,0) + \underset{a_2}{1}.(0,1) - \underset{a_3}{1}(1,1) = (0,0)$

Logo, β é L.D.

- β gera V.

Dado $w \in \mathbb{R}^2$ então $w = (x,y)$.

Daí, $w = (x,y) = x(1,0) + y(0,1) + 0(1,1)$. Logo, β gera V.

Scanné avec CamScanner

Ex 1) Verifique quais dos conjuntos abaixo formam uma base p/ o EV dado

a) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(-1,1),(1,2)\}$

i) β é L.I?

$a_1(-1,1) + a_2(1,2) = (0,0) \Rightarrow$

$(-a_1 + a_2, a_1 + 2a_2) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} -a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$

Logo, β é L.I.

ii) β gera V?

$a_1(-1,1) + a_2(1,2) = w = (x,y)$

$(-a_1 + a_2, a_1 + 2a_2) = (x,y)$

$\begin{cases} -a_1 + a_2 = x \\ a_1 + 2a_2 = y \end{cases}$ +

$3a_2 = x + y$

$\boxed{a_2 = \frac{x+y}{3}}$

$a_1 = a_2 - x \Rightarrow a_1 = \frac{x+y}{3} - x \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{-2x+y}{3}}$

$(x, y) = \frac{-2x+y}{3}(-1, 1) + \frac{x+y}{3}(1, 2)$

Logo, $[(-1,1);(1,2)] = \mathbb{R}^2$

Portanto, β é base.

b) $V = \mathbb{R}^3 \quad \beta = \{(1,1,-1);(1,-1,1);(-1,1,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$?

i) β é L.I? $a_1(1,1,-1) + a_2(1,-1,1) + a_3(-1,1,1) = (0,0,0)$

$(a_1 + a_2 - a_3, a_1 - a_2 + a_3, -a_1 + a_2 + a_3) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ -a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 + L_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ -2a_2 + 2a_3 = 0 \\ 2a_2 = 0 \end{cases}$$

$a_2 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

Logo, β é L.I.

Scanné avec CamScanner

4) β gen la $V = \mathbb{R}^3$

$$\partial_1(1,1,-1) + \partial_2(1,-1,1) + \partial_3(-1,1,1) = W = (x,y,z)$$

$$\begin{cases} \partial_1 + \partial_2 - \partial_3 = x \\ \partial_1 - \partial_2 + \partial_3 = y \\ -\partial_1 + \partial_2 + \partial_3 = z \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 1 & -1 & 1 & y \\ -1 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + L_1}{\overset{L_2 = L_2 - L_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & -2 & 2 & y-x \\ 0 & 2 & 0 & x+z \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} \partial_1 + \partial_2 - \partial_3 = x \\ -2\partial_2 + 2\partial_3 = y - x \\ 2\partial_2 = x + z \Rightarrow \boxed{\partial_2 = \frac{x+z}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_1 + \frac{x+z}{2} - \partial_3 = x \\ -(x+z) + 2\partial_3 = y - x \Rightarrow 2\partial_3 = y - x + x + z \end{cases}$$

$$2\partial_3 = y + z \Rightarrow \boxed{\partial_3 = \frac{y+z}{2}}$$

$$\partial_1 = x + \partial_3 - \frac{x+z}{2} \Rightarrow \partial_1 = x + \frac{y+z}{2} - \frac{x+z}{2} \Rightarrow \partial_1 = \frac{2x + y + z - (x+z)}{2}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{x+y}{2}}$$

Logo, β gera $V = \mathbb{R}^3$.

Portanto,

$$[(1,1,-1);(1,-1,1);(-1,1,1)] = \mathbb{R}^3.$$

Ou seja, β é base.

Scanné avec CamScanner

Base de um EV

Sejam V um EV e $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$.
Dizemos que β é base se:

i) β é L.I;

ii) β gera V.

Ex.

1) $V = P_3(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 ;\ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

$\beta = \{1 + x ;\ 1 - x + x^2 - x^3 ;\ x + x^2 + x^3 ;\ 1 + 2x^2\}$

i) β é L.I?

$a_0(1+x) + a_1(1 - x + x^2 - x^3) + a_2(x + x^2 + x^3) + a_3(1 + 2x^2) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$

$(a_0 + a_1 + a_3) + (a_0 - a_1 + a_2)x + (a_1 + a_2 + 2a_3)x^2 + (-a_1 + a_2)x^3 = 0$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + 0a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 + 0a_3 = 0 \\ 0a_0 + a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ 0a_0 - a_1 + a_2 + 0a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_2 = L_2 - L_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 \longleftrightarrow L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_3 = L_3 + 2L_2 \\ \sim \\ L_4 = L_4 + L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 = \frac{1}{3} L_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_4 = \\ \sim \\ L_4 - 2L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como o sistema equivalente tem uma linha toda nula segue que o sistema original tem infinitas soluções. Ou seja, o sistema é possível e indeterminado. Portanto, β não é L.I e isso nos diz que β não é base.

Transformações Lineares

Definição: Sejam V, W esp. vet. Uma aplicação $T: V \to W$ é uma transformação linear se:

i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

ii) $T(ku) = kT(u)$.

$\forall u, v \in V$ e $\forall k \in \mathbb{R}$.

Ex.

1) $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$T(x) = ax \quad ; \quad a \in \mathbb{R}.$$

i) $T(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2)$

$$= ax_1 + ax_2$$

$$= T(x_1) + T(x_2)$$

ii) $T(kx_1) = a(kx_1) = k(ax_1) = kT(x_1)$

2) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$T(x, y) = ax + by \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

i) $T(v_1 + v_2) = T\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big)$

$$= T(\underbrace{x_1 + x_2}_{x}, \underbrace{y_1 + y_2}_{y})$$

$$= a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2)$$

$$= (ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$$

$$T(v_1) + T(v_2)$$

$$\|$$

ii) $T(kv_1) = T(k(x_1,y_1))$

$= T(kx_1, ky_1)$

$= a(kx_1) + b(ky_1)$

$= k\,(ax_1 + by_1)$

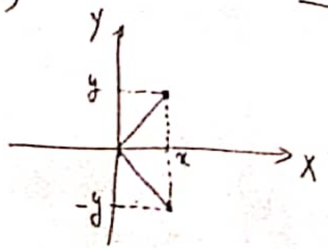
$= kT(x_1,y_1)$

$= kT(v_1)$

Logo, T é um TL

3) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x,-y)$



i) $T(v_1+v_2) = T\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big)$

$= T(\underbrace{x_1+x_2}_{x}, \underbrace{y_1+y_2}_{y})$

$= (x_1+x_2, -(y_1+y_2))$

$= (x_1+x_2, -y_1-y_2)$

$= (x_1,-y_1)+(x_2,-y_2)$

$= T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2)$

$= T(v_1)+T(v_2)$

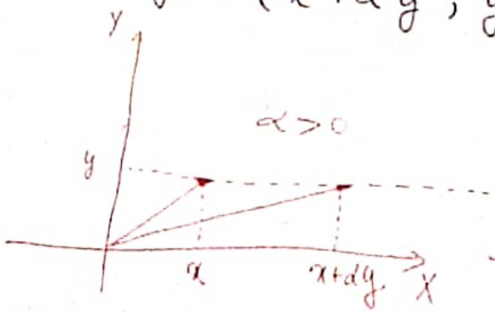
$$
\begin{aligned}
ii)\ T(k v_1) &= T(k(x_1, y_1)) \\
&= T(kx_1, ky_1) \\
&= (kx_1, -ky_1) \\
&= k(x_1, -y_1) \\
&= k\,T(x_1, y_1) \\
&= k\,T(v_1)
\end{aligned}
$$

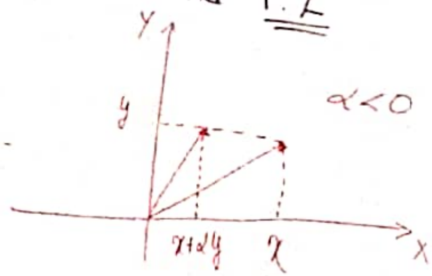
Logo, T é uma T.L.

4) $\alpha \in \mathbb{R}^*$ Fixado.

$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(x, y) = (x + \alpha y, y)$ é uma T.L

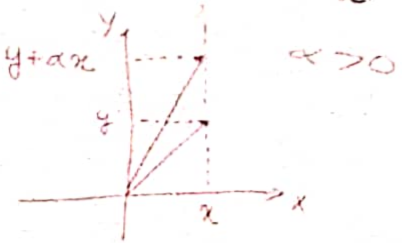




5) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}^*$

$$T(x,y) = (x, \; y + \alpha x)$$

é uma T.L.



As transformações lineares de 4) e 5) são chamadas de cisalhamento.

obs:

1) $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,0);(0,1)\} = \{e_1, e_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ chamada de base canônica.

2) $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canônica de $\mathbb{R}^3$.

3) $V = \mathbb{R}^n$ e $\beta = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

5) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}^*$

$$T(x,y) = (x,\ y + \alpha x)$$

é uma T.L.

As transformações lineares de 4) e 5) são chamadas de cisalhamento.

obs:

1) $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,0);(0,1)\} = \{e_1, e_2\}$

é uma base de $\mathbb{R}^2$ chamada de base canônica

2) $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\} = \{e_1, e_2, e_3\}$

base canônica de $\mathbb{R}^3$.

3) $V = \mathbb{R}^n$ e $\beta = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

4) Se $V=\mathbb{R}^2$ e $\beta=\{e_1,e_2\}$ temos que.

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow v=(x,y)$$
$$= x(1,0)+y(0,1)$$
$$= xe_1+ye_2$$

5) $V=\mathbb{R}^3$ e $\beta=\{e_1,e_2,e_3\}$

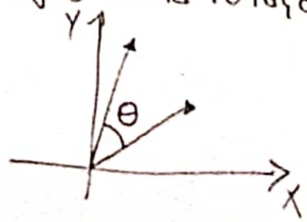
$$v=(x,y,z)=xe_1+ye_2+ze_3$$

6) $V=\mathbb{R}^n$ e $\beta=\{e_1,e_2,\dots,e_n\} \Rightarrow v=(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$$= x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+\dots+x_ne_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_ie_i$$

Voltando aos exemplos.

objetivo: Construir uma T.L $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ que faz uma rotação de θ graus em um Vetor.



Se $v \in \mathbb{R}^2$ então $v = (x, y)$

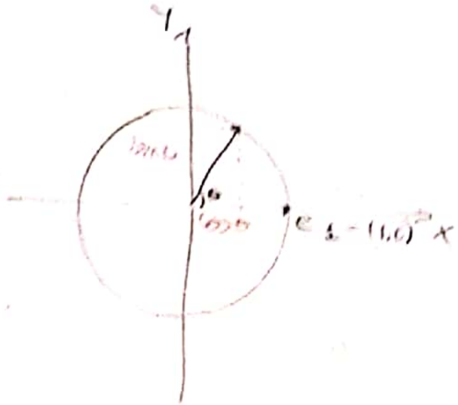
$= x e_1 + y e_2$

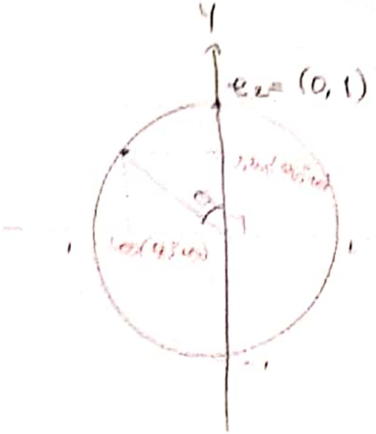
Logo, $T(v) = T(x e_1 + y e_2)$

$= T(x e_1) + T(y e_2)$

$= x T(e_1) + y T(e_2)$

Queremos descobrir $T(e_1)$ e $T(e_2)$





Para e_1: $T(e_1) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

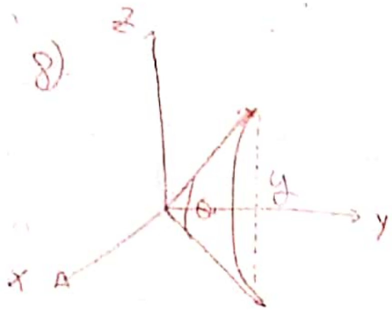
Para e_2: $T(e_2) = (\cos(90°+\theta), \operatorname{sen}(90°+\theta)) = (\cos 90° \cos\theta - \operatorname{sen} 90° \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen} 90° \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos 90°) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

7)

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z) = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta,\ z)$

8)



$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z) = (x\cos\theta - z\sin\theta,\ y,\ x\sin\theta + z\cos\theta)$

9) $T: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b)+(c+d)x+(a+b+c)x^2$$

i) $$T(A_1+A_2) = T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}\right) = \left((a_1+a_2)+(b_1+b_2)\right)+\left((c_1+c_2)+(d_1+d_2)\right)x+\left((a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)\right)x^2 =$$

$$= \left[(a_1+b_1)+(c_1+d_1)x+(a_1+b_1+c_1)x^2\right]+\left[(a_2+b_2)+(c_2+d_2)x+(a_2+b_2+c_2)x^2\right] =$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= T(A_1)+T(A_2)$$

ii) $T(kA_1) = T\left(k\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right)$

$$= T\left(\begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix}\right) = (ka_1+kb_1)+(kc_1+kd_1)x+(ka_1+kb_1+kc_1)x^2 = k\left[(a_1+b_1)+(c_1+d_1)x+(a_1+b_1+c_1)x^2\right] = kT\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) = kT(A_1)$$

10) $C^1(\mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,;\, f \text{ é derivável} \right\}$

$$T: C^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$T(f) = f'(x_0)$$

i) $T(f+g) = (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
$= T(f) + T(g)$

ii) $T(kf) = (kf)'(x_0)$
$= kf'(x_0)$
$= kT(f)$

Logo, T é Linear.

11) $C^0([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ é contínua} \}$

$T : C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$

$$T(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

i) $$T(f+g) = \int_a^b (f+g)(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = T(f)+T(g)$$

ii) $$T(kf) = \int_a^b (kf)(x)\,dx$$

$$= \int_a^b k\,f(x)\,dx$$

$$= k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= kT(f)$$

1) Encontre o núcleo das transformações abaixo:

a) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x+y, 0)$

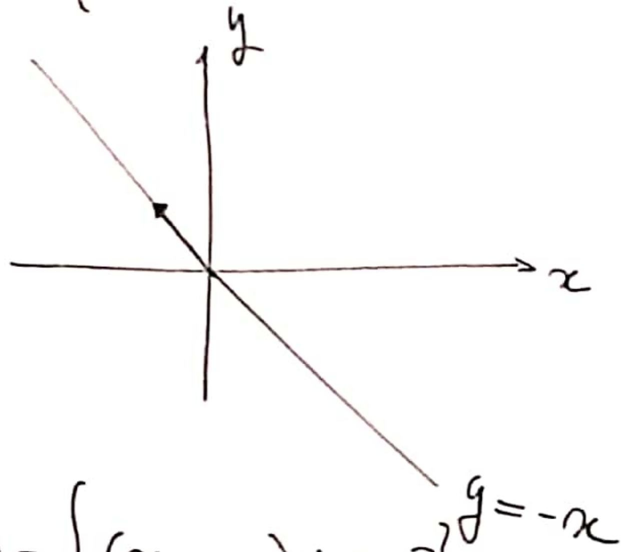
$N(T) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 ; \ T(v) = 0 \right\}$

$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ T(x,y) = (0,0) \right\}$

$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ (x+y, 0) = (0,0) \right\}$

$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x+y = 0 \right\}$

$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ y = -x \right\}$



$N(T) = \left\{ (x, -x) ; \ x \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ x(1,-1) ; \ x \in \mathbb{R} \right\}$

$N(T) = [(1,-1)]$

b) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(x,y,z) = (z - x + y,\ x - y)$

$$N(T) = \left\{ v \in V;\ T(v) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ T(x,y,z) = (0,0) \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (z - x + y,\ x - y) = (0,0) \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z - x + y = 0 \ \text{ e } \ x - y = 0 \right\}$$

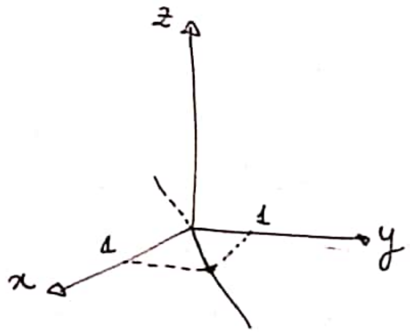
$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x - y \ \text{ e } \ y = x \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0 \ \text{ e } \ y = x \right\}$$

$$= \left\{ (x, x, 0);\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x(1,1,0);\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N(T) = [(1,1,0)]$$



c) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z) = (x-y,\ x+y,\ z)$

$N(T) = \{v \in V;\ T(v) = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ T(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x-y,\ x+y,\ z) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y=0,\ x+y=0 \text{ e } z=0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x=y=z=0\} = \{(0,0,0)\} = \{\vec{0}\}$

d) $T: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$

$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b) + (c-d)x + (a+b+c)x^2$

$N(T) = \{v \in V;\ T(v) = 0\}$

$= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0 + 0x + 0x^2\right\}$

$= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ (a+b) + (c-d)x + (a+b+c)x^2 = 0 + 0x + 0x^2\right\}$

Scanné avec CamScanner

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ a+b=0,\ c-d=0 \text{ e } a+b+c=0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ b=-a,\ d=c \text{ e } c=0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ b=-a,\ d=c=0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N(T) = \left[\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]$$

e) $T: C^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R})$

$T(f) = f'$

$$N(T) = \{ v \in V;\ T(v)=0 \}$$

$$= \{ f \in C^1(\mathbb{R});\ T(f)=0 \} = \{ f \in C^1(\mathbb{R});\ f'=0 \} = \{ f \in C^1(\mathbb{R});\ f'(x)=0\ \forall x \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ f \in C^1(\mathbb{R}) \; ; \; f(x) = C \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ f \in C^1(\mathbb{R}) \; ; \; f(x) = C \cdot 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \}$$

$$N(T) = [\; 1 \;]$$

4) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(x,y,z) = (-x - 2y + z, 0, 0)$$

$$N(T) = \{ v \in V \; ; \; T(v) = 0 \} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; T(x,y,z) = (0,0,0) \}$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; (-x - 2y + z, 0, 0) = (0,0,0) \}$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; -x - 2y + z = 0 \}$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z = x + 2y \}$$

$$= \{ (x, y, x+2y) \; ; \; x, y \in \mathbb{R} \}$$

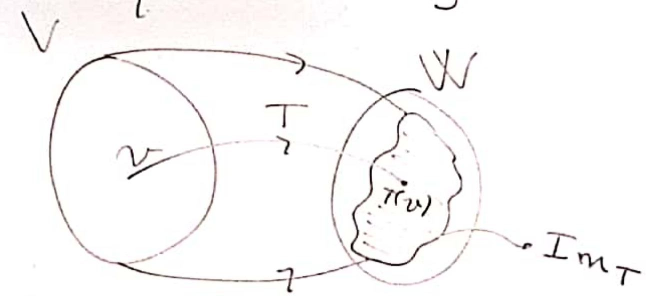
$$= \{ x(1,0,1) + y(0,1,2) \; ; \; x, y \in \mathbb{R} \} \Longrightarrow N(T) = [(1,0,1) ; (0,1,2)]$$

Def: Seja $T: V \to W$ uma T.L.
Dizemos que T é injetora se dados $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = T(v_2)$ então $v_1 = v_2$.

Proposição: Seja $T: V \to W$ uma T.L.
T é injetora se, e somente, $N(T) = 0$.

Def: Seja $T: V \to W$ uma T.L.
O conjunto imagem de T é definido por:

$$Im_T = \{ w \in W ; T(v) = w \}$$



2) Encontre a imagem das T.Ls abaixo:

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$T(x,y) = (x+y, 0)$

$$Im_T = \{ w \in W ; T(v) = w \}$$
$$= \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 ; T(x,y) = (a,b) \}$$

$$= \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 ; (x+y, 0) = (a, b) \}$$

$$= \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 ; x+y = a \text{ e } b = 0 \}$$

$$= \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 ; b = 0 \}$$

$$= \{ (a, 0) ; a \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ a(1,0) ; a \in \mathbb{R} \} \Rightarrow Im_T = [(1,0)]$$

b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(x, y, z) = (z - x + y , x - y)$$

$$Im_T = \{ w \in W ; T(v) = w \}$$

$$= \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 ; T(x, y, z) = (a, b) \}$$

$$= \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 ; (z - x + y , x - y) = (a, b) \}$$

$$= \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 ; z - x + y = a \text{ e } x - y = b \} = \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 ; z - (x-y) = a \text{ e } x - y = b \}$$

$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 ;\ z - b = a \text{ e } x - y = b\}$

$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 ;\ z = a + b \text{ e } x - y = b\} = \mathbb{R}^2$

$T(b, 0, a+b) = (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$T(0, -b, a+b) = (a,b) \in \mathbb{R}^2$

Não temos restrições p/ a e b.

c) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z) = (x-y, x+y, z)$

$Im_T = \{w \in W ;\ T(v) = w\}$

$Im_T = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ T(x,y,z) = (a,b,c)\}$

$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ (x-y, x+y, z) = (a,b,c)\}$

$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ x - y = a,\ x + y = b \text{ e } z = c\} = \mathbb{R}^3$

$\begin{cases} x - y = a \\ x + y = b \end{cases} \quad x = \frac{a+b}{2}$

$y = \frac{b-a}{2}$

$T\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}, c\right) = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

d) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z) = (-x-2y+z, 0, 0)$

$Im_T = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ; T(x,y,z) = (a,b,c)\}$

$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ; (-x-2y+z, 0, 0) = (a,b,c)\}$

$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ; -x-2y+z = a, \ b=0 \ e \ c=0\}$

$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ; b = c = 0\} = \{(a,0,0), a \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow Im_T = [(1,0,0)]$

e) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$T(x,y,z) = (x+y-z, x+y, x, 0)$

$Im_T = \{w \in W ; T(v) = w\}$

$= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 ; T(x,y,z) = (a,b,c,d)\} = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 ; (x+y-z, x+y, x, 0) = (a,b,c,d)\}$

Scanné avec CamScanner

$$= \{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 ;\ x+y-z=a ;\ x+y=b ,\ x=c \text{ e } d=0 \}$$

$$= \{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 ;\ b-z=a ,\ y=b-c ,\ x=c ,\ d=0 \}$$

$$= \{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 ;\ z=b-a ,\ y=b-c ,\ x=c ,\ d=0 \}$$

$$= \{ (a,b,c,0) ;\ a,b,c \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ a(1,0,0,0)+b(0,1,0,0)+c(0,0,1,0) ;\ a,b,c \in \mathbb{R} \} = [e_1, e_2, e_3]$$

f) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(x,y,z) = (x, y, x+y)$$

$$Im_T = \{ w \in W ;\ T(v) = w \}$$

$$= \{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ T(x,y,z) = (a,b,c) \}$$

$$= \{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ (x,y,x+y) = (a,b,c) \}$$

$$= \{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ x=a,\ y=b \text{ e } x+y=c \} = \{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ c=a+b \}$$

$= \{(a, b, a+b) ; a, b \in \mathbb{R}\}$

$= \{a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) ; a, b \in \mathbb{R}\}$

$Im_T = [(1,0,1);(0,1,1)]$

g) $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$

$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b) + (c-d)x + (a+b+c)x^2$

$Im_T = \{w \in W ; T(v) = w\}$

$= \{w_0 + w_1 x + w_2 x^2 \in P_2(\mathbb{R}); T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2\}$

$= \{w_0 + w_1 x + w_2 x^2 \in P_2(\mathbb{R}) ; (a+b) + (c-d)x + (a+b+c)x^2 = w_0 + w_1 x + w_2 x^2\}$

$= \{w_0 + w_1 x + w_2 x^2 \in P_2(\mathbb{R}) ; a+b = w_0 , c-d = w_1 \text{ e } a+b+c = w_2\}$

$= \{w_0 + w_1 x + w_2 x^2 \in P_2(\mathbb{R}) ; a+b = w_0 , \underbrace{c-d = w_1}_{d = c - w_1} \text{ e } c = w_2 - w_0\}$

Scanné avec CamScanner

h) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$T(x,y,z) = (x+y,\ x-z,\ x+y+z,\ x-2z)$

$Im_T = \{ w \in W;\ T(v) = w \}$

$= \{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ T(x,y,z) = (a,b,c,d) \}$

$= \{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ (x+y,\ x-z,\ x+y+z,\ x-2z) = (a,b,c,d) \}$

$= \{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ x+y=a,\ x-z=b,\ x+y+z=c,\ x-2z=d \}$

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x+y = a \\ x-z = b \\ x+y+z = c \\ x-2z = d \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 0 & -2 & d \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1 \end{array}$$

Scanné avec CamScanner

$b,\ x+y+z=c,\ x-2z=d\}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & c-a \\ 0 & -1 & -2 & d-a \end{array}\right] \quad L_2 = -L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & c-a \\ 0 & -1 & -2 & d-a \end{array}\right] \quad L_4 = L_4 + L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & c-a \\ 0 & 0 & -1 & d-b \end{array}\right] \quad L_4 = L_4 + L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & -a-b+c+d \end{array}\right] \Rightarrow -a-b+c+d=0$$

$$Im_T = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ -a-b+c+d=0\}$$

$$= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ d = a+b-c\}$$

$$= \{(a,b,c,\ a+b-c);\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{a(1,0,0,1) + b(0,1,0,1) + c(0,0,1,-1);\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

$$Im_T = [(1,0,0,1);(0,1,0,1);(0,0,1,-1)]$$

Definição: Sejam V um EV e β uma base de V. A dimensão de V é a quantidade de vetores da base β.
Ou seja, se $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ então $\dim V = \underline{\underline{n}}$.

obs: Duas bases de um mesmo EV $\underline{\underline{V}}$ tem o mesmo número de vetores

Por ex. 1) $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{e_1, e_2\}$ base canônica
então $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

2) $V = \mathbb{R}^n$ e $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base canônica

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$

3) $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ base canônica de $M_2(\mathbb{R})$

$\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$

3) $V = P_2(\mathbb{R})$

$\beta = \{1, x, x^2\}$ base canônica de $P_2(\mathbb{R})$

$\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$

4) $V = \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; f \text{ é função}\}$

$\beta = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{tg} x, e^x, \ln(x), \dots$

β tem uma quantidade infinita de elementos

$\dim(\mathcal{F}) = +\infty$

Teorema do núcleo e imagem

Seja $T : V \to W$ um T.L. Então:

$$\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T))$$

Proposição: Seja $T : V \to W$ uma T.L. Então:

a) $N(T)$ é um subesp. vet. de V;

b) $Im(T)$ " " " " " W.

Dem: a) Mostrar que $N(T)$ é um subesp. vet.

i) $0_V \in N(T)$?

Devemos mostrar que $T(0_V) = 0_W$

De fato,

$$\cancel{T(0_V)} = T(0_V + 0_V) = T(\cancel{0_V}) + T(0_V) \Rightarrow T(0_V) = 0_W$$

Donde, $0_V \in N(T)$

ii) Se $u, v \in N(T) \Rightarrow u+v \in N(T)$

De fato, como $u, v \in N(T) \Rightarrow T(u) = 0 = T(v)$

Daí, $T(u+v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u+v \in N(T)$.

iii) $\alpha \in \mathbb{R},\ u \in N(T) \Rightarrow \alpha u \in N(T)$

Se $u \in N(T)$ então $T(u) = 0$

Daí, $T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha . 0 = 0 \Rightarrow$

$\alpha u \in N(T)$ ∎

Coordenadas de um vetor

$V = \mathbb{R}^2$

$\beta_1 = \{(1,0);\ (0,1)\}$

$\beta_2 = \{(1,1);\ (-1,1)\}$

$\beta_3 = \{(1,1);\ (1,0)\}$

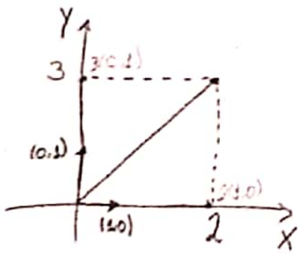
objetivo: Escrever o vetor $v=(2,3)$ como combinação linear de cada uma das bases.

Para β_1:

$v = (2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$

As coordenadas de v na base canônica são 2 e 3.

$(v)_{\beta_1} = (2,3)$



Para β_2:

$v = (2,3) = a(1,1) + b(-1,1)$

$= (a-b,\ a+b)$

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 3 \end{cases} \Longrightarrow 2a = 5$$

$a = \frac{5}{2}$

$b = 3 - \frac{5}{2} \Longrightarrow b = \frac{1}{2}$

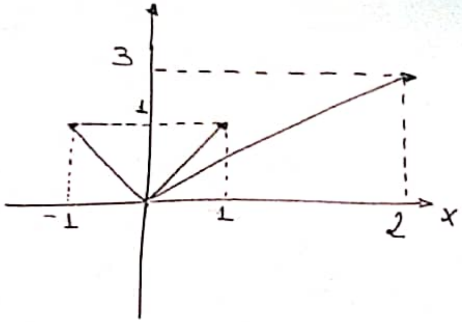
Daí,

$v = \frac{5}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(-1,1)$

As coordenadas do vetor $v=(2,3)$ na base β_2 são $\frac{5}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

Scanné avec CamScanner

$(v)_{\beta_2} = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$



Para β_3:

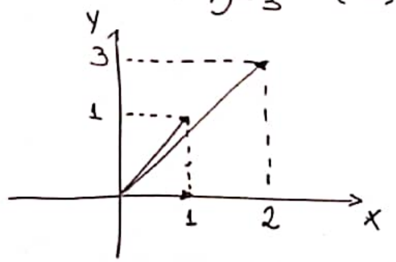
$v = (2,3) = a(1,1) + b(1,0)$

$= (a+b, a) \Longrightarrow \begin{cases} a+b=2 \Rightarrow b=-1 \\ a=3 \end{cases}$

Daí,

$v = (2,3) = 3(1,1) - 1(1,0)$

Logo, $(v)_{\beta_3} = (3,-1)$



Genéricamente: Sejam V um E.V e $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V. Então dado $w \in V$, como β é base, existem $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que: $w = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$

Logo,

$$(w)_\beta = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

Matriz de uma T.L.

Sejam V e W E.V, $\beta_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V, $\beta_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ uma base de W e $T: V \to W$ uma T.L.

Assim, dado $v \in V$ temos $T(v) \in W$

I) Como β_1 é base de V, existem $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(*)\; v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

II) Como β_2 é base de W, existem $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(**)\; T(v) = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m$$

Notem que:

$$T(v) = T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n)$$

$$= a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \dots + a_n T(v_n)$$

Como $T(v_i) \in W$ $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ então podemos escrever cada $T(v_i)$ como uma combinação linear dos elementos de β_2.

$$\begin{aligned}
T(v_1) &= c_{11} w_1 + c_{21} w_2 + c_{31} w_3 + \dots + c_{m1} w_m \\
T(v_2) &= c_{12} w_1 + c_{22} w_2 + c_{32} w_3 + \dots + c_{m2} w_m \\
T(v_3) &= c_{13} w_1 + c_{23} w_2 + c_{33} w_3 + \dots + c_{m3} w_m \\
&\vdots \\
T(v_n) &= c_{1n} w_1 + c_{2n} w_2 + c_{3n} w_3 + \dots + c_{mn} w_m
\end{aligned}$$

Daí,

$$T(v) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + a_3 T(v_3) + \dots + a_n T(v_n)$$

$\frac{1}{2}$

$$= a_1(c_{11}w_1 + c_{21}w_2 + c_{31}w_3 + \dots + c_{m1}w_m) +$$
$$a_2(c_{12}w_1 + c_{22}w_2 + c_{32}w_3 + \dots + c_{m2}w_m) +$$
$$a_3(c_{13}w_1 + c_{23}w_2 + c_{33}w_3 + \dots + c_{m3}w_m) +$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_n(c_{1n}w_1 + c_{2n}w_2 + c_{3n}w_3 + \dots + c_{mn}w_m) =$$

$$[a_1c_{11} + a_2c_{12} + a_3c_{13} + \dots + a_nc_{1n}]w_1 + [a_1c_{21} + a_2c_{22} + a_3c_{23} + \dots + a_nc_{2n}]w_2 +$$
$$+ [a_1c_{31} + a_2c_{32} + a_3c_{33} + \dots + a_nc_{3n}]w_3 + \dots + [a_1c_{m1} + a_2c_{m2} + a_3c_{m3} + \dots + a_nc_{mn}]w_m$$

$$= T(v) = b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_mw_m$$

Como β_2 é base então

$$b_1 = c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + c_{13}a_3 + \dots + c_{1n}a_n$$
$$b_2 = c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + c_{23}a_3 + \dots + c_{2n}a_n$$
$$b_3 = c_{31}a_1 + c_{32}a_2 + c_{33}a_3 + \dots + c_{3n}a_n$$
$$\vdots$$
$$b_m = c_{m1}a_1 + c_{m2}a_2 + c_{m3}a_3 + \dots + c_{mn}a_n$$

Scanné avec CamScanner

Forma matriciel

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$(T(v))_{\beta_2} = [T]^{\beta_2}_{\beta_1} \cdot (v)_{\beta_1}$$

Quando β_1 e β_2 são bases canônicas

$$T(v) = [T] \cdot v$$

Exemplos:

1) Encontre a matriz que representa T nas bases dadas:

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x+2y, x-y)$

na base canônica.

Solução: $\beta = \{(1,0);(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} T(1,0) = (1,1) \\ T(0,1) = (2,-1) \end{cases}$$

$T(1,0) = (1,1) = 1.(1,0) + 1.(0,1)$

$\boxed{(T(1,0))_\beta = (1,1)}$

$T(0,1) = (2,-1) = 2(1,0) - 1(0,1)$

$\boxed{(T(0,1))_\beta = (2,-1)}$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = (x+2y,\ x-y)$$
$$= T(x,y)$$

b) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x+2y,\ x-y)$

de $\beta_1 = \{(1,1);(1,0)\}$ p/ $\beta_2 = \{(-1,0);(1,-2)\}$

Solução:

$$\begin{cases} T(1,1) = (3,0) = a(-1,0) + b(1,-2) \\ T(1,0) = (1,1) = c(-1,0) + d(1,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b = 3 \\ 2b = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} -c+d = 1 \\ 2d = 1 \end{cases}$$

$\therefore\ b = 0$ e $a = -3 \Rightarrow \boxed{(T(1,1))_{\beta_2} = (-3,0)}$

$d = \frac{1}{2}$ e $c = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{(T(1,0))_{\beta_2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

$$[T]^{\beta_2}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

c) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(x,y,z) = (x+y+z,\ x-y)$

$\beta_1 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$

$\beta_2 = \{(2,-1),(-1,3)\}$

Solução:

$$\begin{cases} T(1,1,1) = (3,0) = a(2,-1)+b(-1,3) \\ T(1,1,0) = (2,0) = c(2,-1)+d(-1,3) \\ T(1,0,0) = (1,1) = e(2,-1)+f(-1,3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a-b=3 \Rightarrow 6b-b=3 \Rightarrow \boxed{b=\frac{3}{5}} \\ -a+3b=0 \Rightarrow a=3b \Rightarrow \boxed{a=\frac{9}{5}} \end{cases} \Rightarrow (T(1,1,1))_{\beta_2} = \left(\frac{9}{5},\right.$$

$$\begin{cases} 2c-d=2 \Rightarrow 6d-d=2 \Rightarrow \boxed{d=\frac{2}{5}} \\ -c+3d=0 \Rightarrow c=3d \Rightarrow \boxed{c=\frac{6}{5}} \end{cases} \Rightarrow (T(1,1,0))_{\beta_2} = \left(\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

$$\begin{cases} 2e-f=1 \\ -e+3f=1 \ .(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2e-f=1 \\ -2e+6f=2 \end{cases} + \quad 5f=3 \Rightarrow \boxed{f=\frac{3}{5}}$$

$$e=3f-1 \Rightarrow e=\frac{9}{5}-1 \Rightarrow \boxed{e=\frac{4}{5}}$$

$(T(1,0,0))_{\beta_2} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

$$[T]_{\beta_1}^{\beta_2} = \begin{bmatrix} 9/5 & 6/5 & 4/5 \\ 3/5 & 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Notem que a ordem da matriz é $\dim(\mathbb{R}^2) \times \dim(\mathbb{R}^3)$

Genéricamente. $T: V \to W$ uma T.L. Então.

$$[T]_{\dim(W) \times \dim(V)}$$

obs: dimensão de um espaço é a quantidade de vetores da base.

d)

$T: \mathbb{R}^2 \to P_3(\mathbb{R})$

$T(x,y) = (x+y) + (x-y)t + xt^2 + yt^3$

$\beta_1 = \{(1,0);(0,1)\}$

$\beta_2 = \{2,\ 1-t,\ t^2+1,\ t^3\}$

Notem que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ e $\dim(P_3(\mathbb{R})) = 4$

Então a matriz que representa é uma de ordem 4×2

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} T(1,0) = 1+t+t^2 = a(2)+b(1-t)+c(1+t^2)+dt^3 \\ T(0,1) = 1-t+t^3 = e(2)+f(1-t)+g(1+t^2)+ht^3 \end{cases}$$

$$1+t+t^2 = (2a+b+c)+(-b)t+ct^2+dt^3$$

$$\begin{cases} 2a-b+c = 1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ -b = 1 \Rightarrow b = -1 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\left(T(1,0)\right)_{\beta_2} = \left(\frac{1}{2}, -1, 1, 0\right)}$$

$$\begin{cases} 2e+f+g = 1 \Rightarrow 2e+1 = 1 \Rightarrow e = 0 \\ -f = -1 \Rightarrow f = 1 \\ g = 0 \\ h = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\left(T(0,1)\right)_{\beta_2} = (0, 1, 0, 1)}$$

$$[T]_{\beta_1}^{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

$$\left(T(1,1,1)\right)_{\beta_2} = \left(\frac{9}{5} \right.$$

$$c = \frac{7}{5} - 1 \Rightarrow \boxed{e = \frac{4}{5}}$$

2) Encontre $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sabendo que:

$$[T]_{\beta_1}^{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ em que

$\beta_1 = \{(1,-1); (0,1)\}$ e $\beta_2 = \{(2,-1); (-1,1)\}$

Solução:

$(T(1,-1))_{\beta_2} = (1,1) \Rightarrow T(1,-1) = 1(2,-1) + 1(-1,1)$

$(T(0,1))_{\beta_2} = (-1,2) \Rightarrow T(0,1) = -1(2,-1) + 2(-1,1)$

$\Rightarrow \begin{cases} T(1,-1) = (1,0) \\ T(0,1) = (-4,3) \end{cases}$

Além disso,

$(x,y) = a(1,-1) + b(0,1)$

$(x,y) = (a, -a+b)$

$\begin{cases} a = x \\ -a+b = y \Rightarrow b = x+y \end{cases}$

Logo,

$(x,y) = x(1,-1) + (x+y)(0,1) \Rightarrow$

$T(x,y) = T\big(x(1,-1) + (x+y)(0,1)\big)$

$= xT(1,-1) + (x+y)T(0,1) = x(1,0) + (x+y)(-4,3)$

$$T(x,y) = (-3x-4y,\ 3x+3y)$$

Avaliação:

1) Esp. vet.

2) Subesp. vet.

3) L.I. L.D.

4) Conjunto Gerador

5) base de um E.V.

6) T.L.

7) Núcle e imagem de T.L.

2)