Nome: Edson

Disciplina: Álgebra Linear

email: edson.santos@uffs.edu.br

Sala: 330

1) Matrizes e determinantes;

2) Sistemas Lineares;

3) Espaços vetoriais e subespaços vetoriais;

4) Transformações Lineares;

5) [illegible] e autovetores;

6) Diagonalização de matrizes;

Livro: Álgebra Linear
Autor: Alfredo StenBruch
Paulo Winterle

Avaliações:

Será feito duas avaliações A_1 e A_2 sendo que A_1 vai até 3 (no máx. metade de 4) e A_2 o restante do conteúdo.

Se $3 \leq A_1 < 6$ ou $3 \leq A_2 < 6$

O aluno poderá fazer uma recuperação R que será feita da seguinte forma:

<u>I caso</u>: $A_1 \geqslant 6$ e $3 \leq A_2 < 6$

então

Média final: $MF = \dfrac{A_1 + \text{máx}\{A_2, R\}}{2}$

<u>II</u> caso: Se $3 \leq A_1 < 6$ e $A_2 \geqslant 6$ então

$$MF = \frac{\text{máx}\{A_1, R\} + A_2}{2}$$

A recuperação R será feita no final do semestre.

Horário de atendimento: Segunda e quarta
das 18:00 até as 19:00

Matrizes

Def: Uma matriz é uma tabela de números com $\underline{\underline{m}}$ Linhas e $\underline{\underline{n}}$ colunas. Cada entrada da matriz é representada por $a_{ij} \in \mathbb{R}$ em que i representa a posição da linha e j a posição da coluna do elemento na matriz.

obs: As n
por d

Notação: .

obs: As matrizes são representadas por Letras maiúsculas A, B, C, ...

Notação: $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{\underset{\text{linhas}}{n} \times \overset{\text{colunas}}{m}}$$

Ex. 1) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ 2) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

2) $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

Tipos de matrizes

1) Matriz Linha É uma matriz com uma linha e $\underline{\underline{m}}$ colunas

Ex. 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 3}$

2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{1\times 5}$

2) Matriz coluna: É uma matriz com $\underline{\underline{n}}$ Linhas e uma coluna

Ex 1) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$

3) Matriz quadrada. É uma matriz em que o número de Linhas e de colunas são iguais.

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

4) Matriz triangular superior:

É uma matriz quadrada em que $a_{ij} = 0$ sempre que $j < i$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Analogamente definimos matriz triangular inferior

5) Matriz identidade: É uma matriz quadrada em que $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ se $i = j$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 0 & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} = I$$

6) Transposta de uma matriz: Dada uma matriz A de ordem $n \times m$ definimos como a transposta da matriz A como sendo uma matriz B tal que os elementos de B são dados por:

$$b_{ij} = a_{ji}$$

Notação: $B = A^T$

Ex. 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Scanné avec CamScanner

7) Matriz inversa.

Dada uma matriz quadrada A de ordem $\underline{n}$ a matriz inversa de A, quando existir, é uma matriz B de mesma ordem que A tal que

$$AB = I = BA$$

Operações de matrizes

1) Soma. Sejam A e B duas matriz de mesma ordem.

Definimos: $C = A + B$ tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Ex 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

ii) Multiplicação de matriz por escalar.

Sejam A uma matriz e $k \in \mathbb{R}$

Definimos $C = k.A$ tal que

$c_{ij} = k a_{ij}$

Ex. 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $k = 3$

$$C = 3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 0 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

$$\vec{u} = (1, 2, 3) \text{ ou}$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = (-1, 0, 2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2, 3) \cdot (-1, 0, 2) = -1 + 0 + 6 = 5$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} //$$

Generalizando o produto escalar

$\vec{u} = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m})$

$\vec{v} = (y_{11}, y_{21}, y_{31}, \ldots, y_{m1})$

$\vec{u}\,\vec{v} =$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{bmatrix} =$$

$x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} + x_{13}y_{31} + \ldots + x_{1m}y_{m1}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{k=1}^{m} x_{1k}\, y_{k1}$$

iii) Multiplicação de matrizes

Sejam as matrizes $A_{n \times m}$ e $B_{m \times n}$. Definimos $C = AB$ tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

obs: $\begin{cases} c_{11} = \sum_{k=1}^{m} a_{1k} b_{k1} \\ c_{21} = \sum_{k=1}^{m} a_{2k} b_{k1} \\ \vdots \end{cases}$

Ex. 1) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

2×3

Ex. 1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\|$$

$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$$AB = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2.1+1.0+1.1 & 2.(-1)+1.1+1.0 \\ -3.1+4.0+1.1 & (-3)(-1)+4.1+1.0 \end{bmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Geralmente

$AB \neq BA$

Prop

i

ii

iii

iv)

e

v) A(

vi) A. I

vii) (AB)C

Propriedades das operações de matrizes

i) $A+B=B+A$

ii) $(A+B)+C = A+(B+C)$

iii) $A+O=O+A=A$ $\left(O=[0]\right)$

iv) Dada uma matriz A existe uma matriz B tal que.
$A+B=O=B+A$, a saber $B=-A$

v) $A(B+C)=AB+AC$ e $(B+C)A=BA+CA$

vi) $A.I=I.A=A$ (A é quadrada de ordem n)

vii) $(AB)C=A(BC)$

viii) $(k_1+k_2)A = k_1 A + k_2 A$

ix) $k(A+B) = kA + kB$

x) $1.\ A = A$

Determinantes

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. O determinante de uma matriz A é uma função que associa cada matriz quadrada de ordem n um número real $\det(A)$

$$\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto \det(A)$$

sendo que a função det satisfaz:

i) Se A uma linha (coluna) multiplo de outra então $\det(A)=0$

ii) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

iii) ?!?

No caso em que $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ então $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\det(A) := ad - bc$$

Se $n \geq 3$ então $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Daí,
definimos, fixando a i-ésima linha da matriz A, o determinante por:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} D_{ik}$$

em que D_{ik} é o determinante da matriz resultante eliminando de A a i-ésima linha e k-ésima coluna.

Ou ainda, fixando j-ésima coluna, temos

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}$$

Ex. 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ fixar primeira linha $i=1$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{1+k} a_{1k} D_{1k}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} D_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} D_{12} = a_{11} D_{11} - a_{12} D_{12}$$

$$= D_{11} - 2D_{12}$$

D_{11}

D_{12}

Scanné avec CamScanner

$D_{11} = \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right) = 5.4 - 1(-1) = 21$

$D_{12} = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = 4.4 - 2(-1) = 18$

$D_{13} = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4 - 2.5 = -6$

$\det(A) = D_{11} - 2D_{12} + 3D_{13}$

$= 21 - 2.18 + 3(-6) = -33$

fixar $j = 3$

$\det(A) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+3} a_{k3} D_{k3}$

$= (-1)^4 a_{13} D_{13} + (-1)^{2+3} a_{23} D_{23} + (-1)^{3+3} a_{33} D_{33}$

$= a_{13} D_{13} - a_{23} D_{23} + a_{33} D_{33}$

$= 3 D_{13} + D_{23} + 4 D_{33}$

$D_{13} = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = -6 \qquad D_{23} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = -3$

$D_{33} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right) = -3$

$\det(A) = 3.(-6) - 3 + 4(-3)$

$= -18 - 3 - 12$

$= -33$

Determinantes

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ então.

i) fixando a linha i.

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} D_{ik}$$

ii) fixando a coluna j:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}$$

Exemplos: 1) Calcule o determinante das matrizes abaixo:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solução:

a) fixar a linha $i = 1$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{1+k} a_{1k} D_{1k}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} D_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} D_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} D_{13}$$

$$= 1 . D_{11} - (-1) D_{12} + 0 D_{13}$$

$$= D_{11} + D_{12}$$

$D_{11} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 1.1 = 0$

$D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 1.0 = 1$

Logo, $\det(A) = D_{11} + D_{12} = 0 + 1 = 1$

b) fixar a coluna $j = 4$

$$\det(A) = \sum_{K=1}^{4} (-1)^{K+4} a_{K4} D_{K4} = (-1)^{1+4} a_{14} D_{14} + (-1)^{2+4} a_{24} D_{24} + (-1)^{3+4} a_{34} D_{34} + (-1)^{4+4} a_{44} D_{44}$$

$$= -3 D_{14} - D_{24} + D_{34} - D_{44}$$

$D_{14} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ fixar coluna $j = 3$

$$\det(D_{14}) = \sum_{K=1}^{3} (-1)^{K+3} b_{K3} E_{K3}$$

$$= (-1)^{1+3} b_{13} E_{13} + (-1)^{2+3} b_{23} E_{23} + (-1)^{3+3} b_{33} E_{33}$$

$$= 3E_{13} - E_{23} + 2E_{33}$$

$$E_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\,3 - 3.1 = 3$$

$$E_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$E_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_{14} = 3E_{13} - E_{23} + 2E_{33}$$
$$= 3.3 - 5 + 2.4 \Rightarrow$$

$$D_{14} = 12$$

$$D_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

fixar a $j = 1$

$$D_{24} = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} C_{k1} F_{k1}$$

$$= (-1)^{1+1} C_{11} F_{11} + (-1)^{2+1} C_{21}. F_{21} + (-1)^{3+1} C_{31}. F_{31}$$

$$= F_{11} - 2F_{21} + F_{31}$$

$$F_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \; ; \; F_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$F_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$D_{24} = 3 - 2.7 + 5$$

$$\boxed{D_{24} = -6}$$

$$D_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$ fixar coluna $j = 1$

$$D_{34} = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} d_{k1} G_{k1} = (-1)^{1+1} d_{11} G_{11} + (-1)^{2+1} d_{21} G_{21} + (-1)^{3+1} d_{31} G_{31}$$

$$D_{34} = G_{11} - 2G_{21} + G_{31}$$

$$G_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 - 3.3 = -7$$

$$G_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$G_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$D_{34} = -7 - 2.7 + 7 = -14$$

$$D_{34} = -14$$

Scanné avec CamScanner

$$= -3D_{14} - D_{24} + D_{34} - D_{44}$$

$$D_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$ Sarrus

$$1.1.1 + 2.3.2 + (-1).2.3 - [2.1.(-1) + 3.3.1 + 1.2.2]$$

$$D_{44} = 1 + 12 - 6 - [-2 + 9 + 4] \Rightarrow D_{44} = 7 - 11 \Rightarrow D_{44} = -4$$

Logo, $\det(A) = -3D_{14} - D_{24} + D_{34} - D_{44}$

$$= -3.12 - (-6) - 14 - (-4) \Rightarrow \det(A) = -40$$

Scanné avec CamScanner

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Fixar a linha $i = 1$ pois é a linha com maior quantidade de zeros.

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{1+k} a_{1k} D_{1k}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} D_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} D_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} D_{13} + (-1)^{1+4} a_{14} D_{14}$$

$$\det(A) = 0\,D_{11} - D_{12} + 0\,D_{13} - D_{14}$$

$$\det(A) = -D_{12} - D_{14}$$

$$D_{12} = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= 1.1.1 + 2.1.1 + 1.0.1 - [1.1.1 + 1.1.1 + 1.0.2]$$

$$D_{12} = 1 + 2 - 2 \Rightarrow D_{12} = 1$$

$$D_{14} = \left|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$= 1.1.1 + (-1).1.1 + 2.0.0 - [1.1.2 + 0.1.1 + 1.0.(-1)]$$

$$= 1 - 1 - 2 \Rightarrow D_{14} = -2$$

Logo, $\det(A) = -D_{12} - D_{14}$

$$= -1 - (-2)$$

$$= 1$$

Sistemas Lineares

Equação Linear: Uma eq. Linear é uma equação do tipo:

$$(*)\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

em que $a_{1j} \in \mathbb{R}\ \forall j \in \{1, \dots, n\}$; $b_1 \in \mathbb{R}$ e x_j são as incógnitas $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Uma solução da equação (*), se houver, será um vetor $v = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ em que as coordenadas de v satisfazem a igualdade:

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \dots + a_{1n}k_n = b_1$$

Sistema de equações Lineares:

Um sistema de equações Lineares é um conjunto de $\underline{\underline{n}}$ equações Lineares com $\underline{\underline{m}}$ incógnitas, a saber:

$$(**)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_m = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_m = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_m = b_n \end{cases}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$; $b_i \in \mathbb{R}$

x_j são incógnitas.

Uma solução do sistema linear (* *) é um vetor $v=(k_1,k_2,\dots,k_m)\in\mathbb{R}^m$ em que as coordenadas de v satisfazem todas as eq. Lineares do sistema.

Se $n=m=2$ então o sistema linear será da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$$

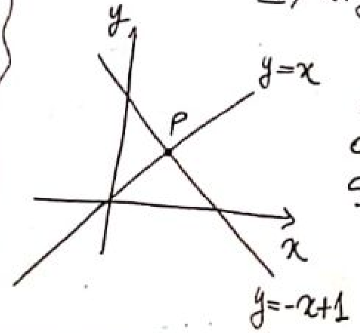
Solução, se houver, será $v=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

Por ex:

1) $\begin{cases} x+y=1 \rightarrow \text{reta} \\ x-y=0 \rightarrow \text{reta} \end{cases}$

Notem que: I) $x-y=0 \Rightarrow y=x$

II) $x+y=1 \Rightarrow y=-x+1$

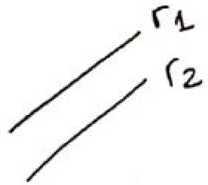


A solução do sistema será: $v=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Neste caso, dizemos que o sistema é possível e determinado

2) $\begin{cases} x-2y=1 \rightarrow \text{reta } r_1 \\ x-2y=3 \rightarrow \text{reta } r_2 \end{cases}$

$r_1: y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ $\quad r_2: y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$



Como $r_1 // r_2$ temos que o sistema é impossív

3) $$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

A solução desse sistema
São todos os pontos que
pertencem à reta $r: 3x - y = 1$
Neste caso, dizemos que o sistema
é possível e indeterminado.

Resumindo: Um sistema pode ser:
i) possível e determinado;
ii) possível e indeterminado;
iii) impossível.

Notem que o sistema (**) pode
Ser escrito da seguinte forma:

$$(**)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

obs: Quando $\vec{b} = \vec{0}$ dizemo que o sistema linear é homogêneo.

Resolução de Sistemas Lineares

Método do escalonamento:

Primeiro passo: Vamos escrever o sistema Linear da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Segundo Passo: Montada a matriz ☆

Vamos aplicar operações elementares em ☆ de tal forma que a solução do sistema original não se altere.

Operações elementares:

i) Somar ou subtrair duas linhas gerando uma nova linha;

ii) Multiplicar uma linha por um número não nulo gerando uma nova linha;

iii) Fazer uma combinação de i) e ii).

Ex. 1) Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] L_2 = L_2 - 3L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] L_3 = L_3 - L_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x+y-z=1 \Rightarrow x=1 \\ -y-2z=-3 \Rightarrow y=1 \\ 2z=2 \Rightarrow z=1 \end{cases}$$

Solução do sistema será $v=(1,1,1)$

b) $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ -x+2y+3z=5 \\ x-y-z=2 \end{cases}$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] L_3 \leftrightarrow L_1 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] L_2 = L_2 + L_1 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] L_3 = L_3 - 2L_1 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{array}\right] L_3 = L_3 - 3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -25 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x-y-z=2 \Rightarrow x=4 \\ y+2z=7 \Rightarrow y=-3 \\ -5z=-25 \Rightarrow z=5 \end{cases}$$

$v=(4,-3,5)$

síve

Scanné avec CamScanner

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + y + z = 1 \\ 0x \; 3y + 4z = 1 \end{cases}$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 + L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3y + 4z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

$3y + 4z = 1$

$y = -\frac{4}{3}z + \frac{1}{3}$

Se $z = t \in \mathbb{R}$ temos

$y = -\frac{4}{3}t + \frac{1}{3}$

$x = -2y - 3z$

$= -2\left[-\frac{4}{3}t + \frac{1}{3}\right] - 3t$

$x = \frac{8}{3}t - 3t - \frac{2}{3}$

$x = -\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}$

Solução do sistema será:

$V = \left(-\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}t + \frac{1}{3}, t\right); t \in \mathbb{R}$

Logo, o sistema é possível e indeterminado.

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] L_3 \leftrightarrow L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] L_2 = L_2 + L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] L_3 = L_3 - 2L_1$$

Sistemas Lineares

Ex. 1) Resolva, se possível, os sistemas Lineares abaixo:

a) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] L_2 = L_2 - 2L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] L_3 = L_3 - 3L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right] L_2 = -L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right] L_3 = L_3 +$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \Rightarrow x=1 \\ y-3z=-1 \Rightarrow y=-1 \\ -8z=0 \Rightarrow z=0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

O vetor solução do sistema será:
$\vec{v} = (1, -1, 0)$. Logo, o sistema é possível e determinado.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ -x + y - z = -1 \\ 2x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right] \underset{L_2 \longleftrightarrow L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right] \underset{L_1 = -L_1}{\sim}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - 3L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - 2L_1}{\sim}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_2}{\sim}$$

Scanné avec CamScanner

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 5y - 4z = 1 \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{1+4z}{5}} \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

$$x - y + z = 1 \Rightarrow x = 1 + y - z$$

$$\Rightarrow x = 1 + \frac{1+4z}{5} - z$$

$$\Rightarrow x = \frac{5+1+4z-5z}{5} \Rightarrow \boxed{x = \frac{6-z}{5}}$$

Se $z = t \in \mathbb{R}$ então:

$$x = \frac{6-t}{5} \quad e \quad y = \frac{1+4t}{5}$$

O vetor solução será:

$$v = \left(\frac{6-t}{5}, \frac{1+4t}{5}, t\right); \; t \in \mathbb{R}$$

O sistema é possível e indeterminado.

Notem que: $v = \left(\frac{6}{5} - \frac{t}{5}, \frac{1}{5} + \frac{4t}{5}, t\right)$

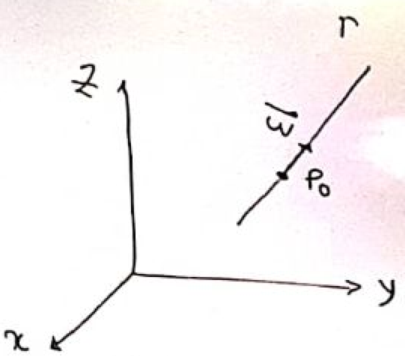
$$= \left(\frac{6}{5}, \frac{1}{5}, 0\right) + \left(\frac{-t}{5}, \frac{4t}{5}, t\right)$$

$$= \left(\frac{6}{5}, \frac{1}{5}, 0\right) + t\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$$

$$= P_0 + t.\vec{w}$$

em que: $\begin{cases} P_0 = \left(\frac{6}{5}, \frac{1}{5}, 0\right) \\ \vec{w} = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 1\right) \end{cases}$

Logo, $\vec{v} = \underbrace{P_0 + t\vec{w}}_{\text{eq. vetorial de uma reta } r}; \; t \in \mathbb{R}$



c) $\begin{cases} -3x + y + z = 1 \\ 5x - y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 \longleftrightarrow L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_1 = \frac{1}{2} L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_2 = L_2 - 5L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 = L_3 + 3L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \quad L_2 = \frac{1}{4} L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \quad L_3 = L_3 + 2L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ \underbrace{0x + 0y + 0z}_{0} = 1 \end{cases}$$

Como $0x + 0y + 0z \neq 1$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ segue que o sistema é impossível.

<u>Lembrar</u>: Genéricamente um sistema linear pode ser escrito da seguinte forma: $A\vec{x} = \vec{b}$ em que A é uma matriz, $\vec{x}$ é o vetor incógnita e $\vec{b}$ é um vetor dado. Quando $\vec{b} = \vec{0}$, ou seja, $A\vec{x} = \vec{0}$ dizemos que sistema é homogêneo.

Além disso, é claro que $\vec{x} = \vec{0}$ é uma solução do sistema homogêneo.

Pergunta: Como saber se a única solução do sistema homogêneo é a solução $\vec{x} = \vec{0}$.

Para responder essa pergunta vamos estudar o que é matriz inversa.

Matriz inversa.

Definição: Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Dizemo que a matriz $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é a inversa de A se, e somente se, $AB = I = BA$ em que I é a matriz identidade de ordem $\underline{\underline{n}}$.

Neste caso dizemos que A é inversível

Nota

Como
é

Se

B

A

Scanné avec CamScanner

ue

se, e somente se

de de ordem $\underline{\underline{n}}$.

Notação: $B = A^{-1}$

Como descobrir se uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é inversível?

Se A é inversível existe uma matriz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que:

$$AB = I \Rightarrow \det(AB) = \det(I) = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\det(A)}_{\text{número}}\ \underbrace{\det(B)}_{\text{número}} = 1$$

$$\Rightarrow \det(A) \neq 0$$

Scanné avec CamScanner

Conclusão: Se A é inversível então $\det(A) \neq 0$.

Sendo A inversível como encontramos sua inversa A^{-1}?

Para isso devemos aplicar o método do escalonamento como segue.

Ex. 1) Encontre a inversa das matrizes abaixo:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

I $\qquad$ B

$L_3 = L_3 - 2L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{}{\sim} \quad L_2 = \frac{1}{2} L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \quad L_3 = L_3 - 2L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \quad L_3 = -L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \quad L_1 = L_1 - L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \quad L_1 = L_1 + L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Logo, $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -2 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_1 = -\frac{1}{2} L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 = L_2 - 3L_1 \\ L_3 = L_3 + 4L_1 \\ L_4 = L_4 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 1 & 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 3/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_2 = -2L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_3 = L_3 - L_2 \\ L_4 = L_4 + \frac{1}{2} L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_3 = -\frac{1}{2} L_3 \quad \sim$$

$_3 = L_3 - L_2$

$_4 = L_4 + \frac{1}{2} L_2$

$\frac{1}{2} L_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_4 = L_4 - L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \quad L_4 = 2L_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad L_1 = L_1 + L_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad L_2 = L_2 - 4L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_1 = L_1 - \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 = L_3 + \frac{1}{2} L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{-1}}$$

Quando o sistema homogêneo
$A\vec{x} = \vec{0}$ admite solução não trivial?
Notem que se A é inversível então existe A^{-1} ($\det(A) \neq 0$). Daí,

$$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}.\vec{0}$$
$$\Rightarrow (A^{-1}.A)\vec{x} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow I.\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

Em outras palavras $A\vec{x} = \vec{0}$ tem solução não trivial quando $\det(A) = 0$.

Nota: Se A é inversível e $A\vec{x} = \vec{b}$ $\Rightarrow$

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}b \Rightarrow$$
$$(A^{-1}A)\vec{x} = A^{-1}b \Rightarrow$$
$$I.\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow \boxed{\vec{x} = A^{-1}b}$$

Solução do Sistema.

Espaços Vetoriais

Definição Seja V um conjunto não vazio munido de duas operações

$+ : V \times V \to V$ e $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

$(u, v) \mapsto u + v$ e $(k, u) \mapsto k.u$

Tais que:

i) $u + v = v + u$ (comutativa);

ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associativa);

iii) Existe $0_v \in V$ tal que
$u + 0_v = 0_v + u = u$ (elemento neutro)

iv) Dado $u \in V$ existe $v \in V$ tal que $u + v = 0_v$ $(v = -u)$; (oposto)

v) $(k_1 + k_2)u = k_1 u + k_2 u$;

vi) $k_1(u + v) = k_1 u + k_1 v$;

vii) $(k_1 k_2)u = k_1(k_2 u)$;

viii) $1.u = u$

$\forall u, v, w \in V$

$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplos:

1) $V=\mathbb{R}$ é um E.V

2) $V=\mathbb{R}^2$

Se $u, v \in \mathbb{R}^2$ então: $\begin{cases} u=(x_0, y_0) \\ v=(x_1, y_1) \end{cases}$

Definimos:

$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(u,v) \longmapsto u+v = (x_0, y_0)+(x_1, y_1) = (x_0+x_1, y_0+y_1)$

$\cdot \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(k, u) \longmapsto ku = k(x_0, y_0) = (kx_0, ky_0)$

Vamos mostrar agora as 8 propriedades:

Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Então: $\begin{cases} u=(x_0, y_0) \\ v=(x_1, y_1) \\ w=(x_2, y_2) \end{cases}$

Daí,

i) $u+v = (x_0, y_0)+(x_1, y_1)$

$= (x_0+x_1, y_0+y_1)$

$= (x_1+x_0, y_1+y_0)$

$= (x_1, y_1)+(x_0, y_0)$

$= v+u$

ii) $(u+v)+w = \left((x_0, y_0)+(x_1, y_1)\right)+(x_2, y_2)$

$= (x_0+x_1,\ y_0+y_1)+(x_2, y_2)$

$= \left((x_0+x_1)+x_2,\ (y_0+y_1)+y_2\right)$

$= \left(x_0+(x_1+x_2),\ y_0+(y_1+y_2)\right)$

$= (x_0, y_0)+(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$

$= (x_0, y_0)+\left((x_1, y_1)+(x_2, y_2)\right)$

$= u+(v+w)$

iii) $0_V = (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Daí,

$u+0_V = (x_0, y_0)+(0,0)$

$= (x_0+0,\ y_0+0)$

$= (x_0, y_0)$

$= u$

Analogamente, $0_V+u = u$.

iv) Dado $u=(x_0,y_0)$ escolha $v=(-x_0,-y_0)$ e com isso:

$u+v = (x_0,y_0)+(-x_0,-y_0) = (x_0-x_0,\ y_0-y_0) = (0,0) = 0_V$

v) $(k_1+k_2)u =$

$(k_1+k_2)(x_0,y_0) = \big((k_1+k_2)x_0, (k_1+k_2)y_0\big)$

$= (k_1x_0+k_2x_0, k_1y_0+k_2y_0)$

$= (k_1x_0, k_1y_0)+(k_2x_0, k_2y_0)$

$= k_1(x_0,y_0)+k_2(x_0,y_0)$

$= k_1u + k_2u$

vi) $k_1(u+v) = k_1\big((x_0,y_0)+(x_1,y_1)\big)$

$= k_1(x_0+x_1, y_0+y_1)$

$= \big(k_1(x_0+x_1), k_1(y_0+y_1)\big)$

$= (k_1x_0+k_1x_1, k_1y_0+k_1y_1)$

$= (k_1x_0, k_1y_0)+(k_1x_1, k_1y_1)$

$= k_1(x_0,y_0)+k_1(x_1,y_1)$

$= k_1u + k_1v$

vii) $(k_1k_2)u = (k_1k_2)(x_0,y_0)$

$= \big((k_1k_2)x_0, (k_1k_2)y_0\big)$

$= \big(k_1(k_2x_0), k_1(k_2y_0)\big)$

$= k$

$=$

$= k$

vii

Log

obs

$= (k_1x_0 + k_1x_1, k_1y_0 + k_1y_1)$

$= (k_1x_0, k_1y_0) + (k_1x_1, k_1y_1)$

$= k_1(x_0, y_0) + k_1(x_1, y_1)$

$= k_1u + k_1v$

vii) $(k_1k_2)u = (k_1k_2)(x_0, y_0)$

$= ((k_1k_2)x_0, (k_1k_2)y_0)$

$= (k_1(k_2x_0), k_1(k_2y_0))$

$= k_1(k_2x_0, k_2y_0)$

$= k_1(k_2(x_0, y_0))$

$= k_1(k_2u)$

viii) $1.u = u$

Logo, $V = \mathbb{R}^2$ é um E.V.

Obs: $\mathbb{R}^n$; $n \in \mathbb{N}$ é um E.V

2) $V = M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

Se $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ então $\begin{cases} A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \end{cases}$

$$+ : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$
$$(A, B) \longmapsto A+B = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$
$$(k, A) \longmapsto kA = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix}$$

Sejam A, B e $C \in M_2(\mathbb{R})$ então $\begin{cases} A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \end{cases}$

e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

$$i)\ A+B = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_2+a_1 & b_2+b_1 \\ c_2+c_1 & d_2+d_1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = B+A$$

ii) $(A+B)+C = A(B+C)$

FAÇAM.

iii) $O_V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A + O_V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1+0 & b_1+0 \\ c_1+0 & d_1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = A$$

iv) Dada $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ escolha $B = \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_1 \end{bmatrix}$ e com isso $A+B = O_V$

Façam.

v) $(k_1+k_2)A = (k_1+k_2)\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (k_1+k_2)a_1 & (k_1+k_2)b_1 \\ (k_1+k_2)c_1 & (k_1+k_2)d_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k_1a_1+k_2a_1 & k_1b_1+k_2b_1 \\ k_1c_1+k_2c_1 & k_1d_1+k_2d_1 \end{bmatrix}$$

e com isso $A+B=0_V$

Façam.

$v)\ (k_1+k_2)A = (k_1+k_2)\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (k_1+k_2)a_1 & (k_1+k_2)b_1 \\ (k_1+k_2)c_1 & (k_1+k_2)d_1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} k_1a_1+k_2a_1 & k_1b_1+k_2b_1 \\ k_1c_1+k_2c_1 & k_1d_1+k_2d_1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} k_1a_1 & k_1b_1 \\ k_1c_1 & k_1d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2a_1 & k_2b_1 \\ k_2c_1 & k_2d_1 \end{bmatrix} =$

$k_1\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} =$

$k_1A + k_2A$.

$vi)$; $vii)$ e $viii)$ Façam!

Logo, $V = M_2(\mathbb{R})$ é um <u>E.V</u>.

Scanné avec CamScanner

obs: $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é um E.V.

3) $V = \mathcal{F} = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} ;\ f \text{ é função} \}$

$+ : V \times V \longrightarrow V$

$(f, g) \longmapsto f+g$ em que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

$(k, f) \longmapsto k.f$ em que $(kf)(x) = kf(x)$

Vamos mostrar que V é um EV

Sejam $f, g, h \in V$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

i) $(f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g(x)}_{\in \mathbb{R}}$

$= g(x) + f(x)$

$= (g+f)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

logo, $f+g = g+f$

$\varphi = \psi$

$\Longleftrightarrow$

$D\varphi = D\psi$ e

$\varphi(x) = \psi(x)$

$\forall x \in D\varphi$

ii) $\big(((f+g)+h)(x)\big) =$

$(f+g)(x) + h(x) =$

$\big(f(x) + g(x)\big) + h(x) =$

$f(x) + \big(g(x) + h(x)\big) =$

$f(x) + (g+h)(x) =$

$\big(f + (g+h)\big)(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $(f+g)+h = f+(g+h)$

iii)

$(f +$

$f + 0_V$

iv) Da

e co

$(f+g)(x$

iii) $0_V = 0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$(f + 0_V)(x) = f(x) + 0(x)$$
$$= f(x) + 0$$
$$= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f + 0_V = f$

iv) Dada $f \in V$ escolha $g \in V$; $g(x) = -f(x)$
e com isso:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) - f(x) = 0 = 0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Logo, $f + g = 0_V$

v) $((k_1+k_2)f)(x) =$

$(k_1+k_2)f(x) =$

$k_1 f(x) + k_2 f(x) =$

$(k_1 f)(x) + (k_2 f)(x) =$

$(k_1 f + k_2 f)(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

Logo, $(k_1+k_2)f = k_1 f + k_2 f$

vi) e vii) façam.

viii) $(1.f)(x) = 1.f(x) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $1.f = f$.

$\forall$

$\subseteq$

i)

(

logo

4) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ definimos o traço de A por

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$V = \{A \in M_n(\mathbb{R}); \ tr(A) = 0\}$$

é um EV?

i) Sejam $A, B, C \in V$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

então $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$; $tr(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 0$

$$tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = 0$$

i) $tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii})$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$$

$$= tr(A) + tr(B)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

Por outro lado, $tr(B+A) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} + a_{ii}$

$$= tr(A) + tr(B) = 0$$

Ou seja,

$$tr(A+B) = tr(B+A)$$

ii)

$tr((A+B)+C) = tr(A+(B+C))$ Façam!

iii) $0_V = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$

$$tr(A + 0_V) = tr(A)$$

Scanné avec CamScanner

iv) Se $A \in V$ escolha $B = -A$

$$tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + b_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} - a_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 0 = tr(O_V)$$

v) $$tr((k_1+k_2)A) = \sum_{i=1}^{n} (k_1+k_2) a_{ii}$$

$$= (k_1+k_2) \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = (k_1+k_2) tr(A)$$

$$= (k_1+k_2) 0 = 0$$

Por outro lado,

$$tr(k_1 A + k_2 A) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_1 a_{ii} + k_2 a_{ii} =$$

$$k_1 \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + k_2 \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$= k_1 tr(A) + k_2 tr(A)$$

$$k_1 \cdot 0 + k_2 0 = 0$$

vi) e vii) Façam.

viii)

$$tr(1.A) = \sum_{i=1}^{n} 1.a_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$= tr(A) = 0$$

Logo, V é um E.V.

Scanné avec CamScanner

Subespaços vetoriais

Def.: Sejam V um EV e $\emptyset \neq S \subset V$. Dizemos que S é um subespaço vetorial se S é fechado com as operações de soma e multiplicação por escalar de V e além disso S também é um EV.

obs: fechado pelas operações: $\begin{cases} u, v \in S \Rightarrow u+v \in S \\ k \in \mathbb{R}, u \in S \Rightarrow k.u \in S \end{cases}$

Proposição: Sejam V um EV e $S \subset V$. Então: S é um subespaço vetorial de V se, e somente se:

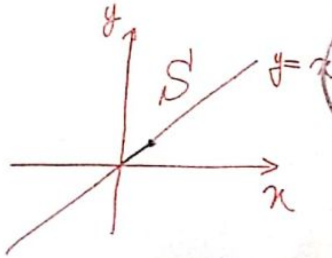
i) $0_V \in S$;

ii) $u, v \in S \Rightarrow u+v \in S$;

iii) $k \in \mathbb{R}, u \in S \Rightarrow ku \in S$.

Exemplos:

1) $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}; y = x\}$



i) $0_V = (0,0) \in S$

$0 = 0 \quad (y = x)$

ii) Sejam $u, v \in S$ então

$$\begin{cases} u = (x_1, y_1) \text{ e } y_1 = x_1 \\ v = (x_2, y_2) \text{ e } y_2 = x_2 \end{cases}$$

Logo, $u+v = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ e

$y_1+y_2 = x_1+x_2$. Portanto, $u+v \in S$

...

iii) $k \in \mathbb{R}$ e $u \in S$ então $u = (x_1, y_1)$ e $y_1 = x_1$

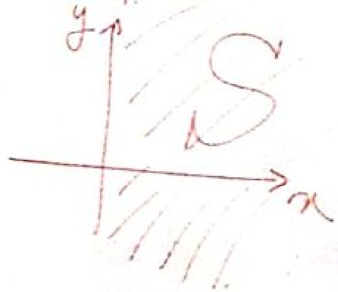
Logo, $k.u = k(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$ e

$ky_1 = kx_1$. Portanto, $ku \in S$

Com isso, S é um subesp. vetorial.

2) $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0\}$.

S é um subesp. vet. de $V = \mathbb{R}^2$?



i) $0_V = (0,0) \in S$ pois $0 \geq 0$

...

ii) Sejam $u, v \in S$ então
$u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ e
$x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

Daí, $u+v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$
$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ temos que $x_1 + x_2 \geq 0$.
Logo, $u+v \in S$

iii) Sejam $k \in \mathbb{R}$ e $u \in S$ então $u = (x_1, y_1)$ e x_1

Daí,
$$ku = k(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$$

Sabemos que $x_1 \geq 0 \Rightarrow kx_1 \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{R}$?
Isso não é verdade. Se $k < 0$ então $kx_1 < 0$
Logo, não necessariamente, $ku \in S$.

Portanto, S não é um subesp. vetorial.

3) $V = \mathbb{R}^3$

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x + y + z = 0\}$

S é um subesp. vet. de $\mathbb{R}^3$?

i) $0_V = (0,0,0) \in S$ $\quad 0+0+0=0$

ii) Sejam $u, v \in S \Rightarrow \begin{cases} u = (x_1, y_1, z_1) \text{ e } x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ v = (x_2, y_2, z_2) \text{ e } x_2 + y_2 + z_2 = 0 \end{cases}$

...

Daí,

$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ e

$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) =$

$(x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2)$

$0 \quad + 0 \quad = 0$

Logo, $u + v \in S$

iii) Sejam $k \in \mathbb{R}$ e $u \in S$ então $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $x_1 + y_1 + z_1 = 0$

Daí, $ku = k(x_1, y_1, z_1) = (kx_1, ky_1, kz_1)$

e $kx_1 + ky_1 + kz_1 = k(x_1 + y_1 + z_1) = k0 = 0$. Portanto, $ku \in S$

Subespaços Vetoriais

V é um EV e $\phi \neq W \subset V$.

Prop W é um subesp vet. se, e somente se

i) $0_V \in W$;

ii) $u, v \in W \Rightarrow u+v \in W$;

iii) $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W \Rightarrow \alpha u \in W$.

Exemplos.

1) $V = \mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f$ é funções $\}$

$W = \{ f \in \mathcal{F} ;\ f(0) = 0 \}$

W é um subesp vet ?

i) $0_V \Rightarrow 0_V(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. $\left((f + 0_V)(x) = f(x) + 0_V(x) = f(x) + 0 = f(x) \right)$

Como $0_V(0) = 0$ temos que $0_V \in W$.

$f + 0_V = f$

ii) Sejam $f, g \in W$ então:

$$f(0) = 0 = g(0)$$

Daí,

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$$

Logo, $f+g \in W$.

iii) Sejam $k \in \mathbb{R}$ e $f \in W$ então $f(0) = 0$

Daí, $(k.f)(0) = k.f(0) = k.0 = 0$

Logo, $kf \in W$.

Portanto, W é um subesp. vet. de F.

2) Considere o sistema homogêneo:

$$* \begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

Mostre que o conjunto $S = \{ v = (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ v \text{ é solução do sistema } * \}$

é um subesp. vetorial de $V=\mathbb{R}^2$.

Solução.

i) $0_V \in S$

Temos $0_V=(0,0)\in\mathbb{R}^2$. Neste caso, $x=y=0$ e com isso $0_V\in S$

ii) Sejam $v_1, v_2 \in S$ então $v_1=(x_1,y_1)$ e $v_2=(x_2,y_2)$. Além disso,

$$\begin{cases} ax_1+by_1=0 \\ cx_1+dy_1=0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} ax_2+by_2=0 \\ cx_2+dy_2=0 \end{cases}$$

Queremos mostrar que $v_1+v_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)\in S$

De fato,

$$\begin{cases} a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2) = ax_1+ax_2+by_1+by_2 = (ax_1+by_1)+(ax_2+by_2) \\ \qquad = 0+0 = 0 \\ c(x_1+x_2)+d(y_1+y_2) = (cx_1+dy_1)+(cx_2+dy_2) = 0+0=0 \end{cases}$$

Logo, $v_1+v_2\in S$.

iii) Sejam $k\in\mathbb{R}$ e $v_1\in S$. Então, $v_1=(x_1,y_1)$ e $\begin{cases} ax_1+by_1=0 \\ cx_1+dy_1=0 \end{cases}$

Queremos mostrar que $kv_1 = (kx_1, ky_1) \in S$.

De fato,

$$\begin{cases} a(kx_1) + b(ky_1) = k(ax_1 + by_1) = k.0 = 0 \\ c(kx_1) + d(ky_1) = k(cx_1 + dy_1) = k.0 = 0 \end{cases}$$

Logo, $kv_1 \in S$.

Portanto, S é um subesp. vet. de $\mathbb{R}^2 = V$.

Conjuntos L.I e L.D

Def: Seja V um E.V e $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$.

Dizemos que β é Linearmente dependente (L.D) se existir $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0.$$

Caso contrário, ou seja $a_i = 0 \ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, β é Linearmente independente. (L.I)

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$

Caso contrário, ou seja $a_i = 0$

$\forall i \in \{1, 2, \dots n\}$, β é

Linearmente ~~ld~~ independente (L.I)

Obs.:

1- Porque β é chamado de L.D ?

Vamos supor que exista $a_j \neq 0$

então:

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_j v_j + \dots a_n v_n = 0 \Rightarrow$

$a_j v_j = -a_1 v_1 - a_2 v_2 + \dots + (-a_n v_n) \Rightarrow$

$v_j = -\dfrac{a_1}{a_j} v_1 - \dfrac{a_2}{a_j} v_2 + \dots + \left(-\dfrac{a_n}{a_j}\right)$

v_n

Neste caso, v_j depende dos outros vetores, por isso o nome linearmente dependente.

2) A soma $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ é

chamado de combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \dots v_n$.

Scanné avec CamScanner

3)} é $\mathcal{L}I$?

$\Rightarrow$

2) A soma $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$ é chamado de combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

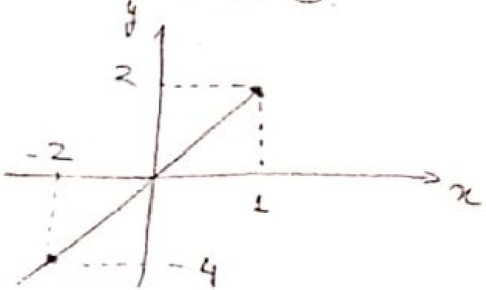
Exemplos:

1) $V = \mathbb{R}^2$

$\beta = \{(1,2), (-2,-4)\} \subset \mathbb{R}^2$ β é $\mathcal{L}I$?

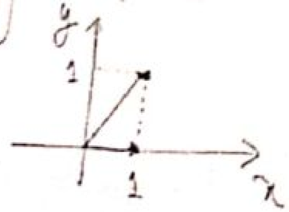
Não é $\mathcal{L}I$, pois $\underbrace{2}_{a_1}(1,2) + \underbrace{1}_{a_2}(-2,-4) = (2,4) + (-2,-4) = (0,0) = \vec{0}$

Como $a_1 \neq 0$ $(a_2 \neq 0)$ então β é L.D



2) $V = \mathbb{R}^2$

$\beta = \{(1,0),(1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ é L.I?



$$a_1(1,0) + a_2(1,1) = (0,0) \Longrightarrow$$

$$(a_1, 0) + (a_2, a_2) = (0,0) \Longrightarrow$$

$$(a_1 + a_2, a_2) = (0,0) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \Longrightarrow a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Como $a_1 = a_2 = 0$ temos $\beta = \{(1,0),(1,1)\}$ é L.I.

3) $V = \mathbb{R}^2$; $\beta = \{(1,2);(-1,3)\}$ é LI?

$a_1(1,2) + a_2(-1,3) = (0,0) \Rightarrow$

$(a_1 - a_2, 2a_1 + 3a_2) = (0,0)$

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = a_1} \\ 2a_1 + 3a_2 = 0 \end{cases}$$

$2a_1 + 3a_1 = 0 \Rightarrow 5a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$

$\Rightarrow \boxed{a_1 = a_2 = 0}$

Logo, β é LI.

4) $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1,1,1);(1,-1,1);(-1,1,1)\}$ é LI?

$a_1(1,1,1) + a_2(1,-1,1) + a_3(-1,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow$

$(a_1 + a_2 - a_3, a_1 - a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 = L_2 - L_1 \\ \sim \\ L_3 = L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ -2a_2 + 2a_3 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \\ 2a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \end{cases}$$

Logo, β é L.I.

5) $V = \mathbb{R}^3$; $\beta = \{(1,2,-1); (1,-1,1); (2,1,0)\}$ é L.I?

$$a_1(1,2,-1) + a_2(1,-1,1) + a_3(2,1,0) = (0,0,0)$$

$$(a_1 + a_2 + 2a_3,\ 2a_1 - a_2 + a_3,\ -a_1 + a_2) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ 2a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ -a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 = L_2 - 2L_1 \\ \sim \\ L_3 = L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad L_2 = -\frac{1}{3} L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad L_3 = L_3 - 2L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema é possível e indeterminado

Ou seja, existem infinitas soluções.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = -a_2} \end{cases}$$

$$a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 - 2a_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = a_2}$$

As soluções do sistema serão dadas por:

$\vec{v} = (a_1, a_1, -a_1), a_1 \in \mathbb{R}$.

Dessa forma encontramos a_1, a_2, a_3 não todos nulos que são solução do sistema * Logo, β é L.D.

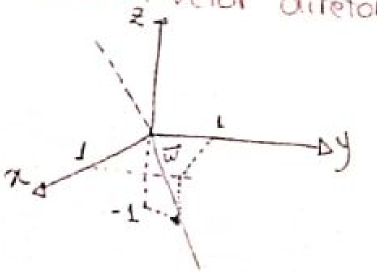
obs Se $a_1 = t \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\vec{v} = (t, t, -t)$

$= (0,0,0) + t(1,1,-1)$

$= \underbrace{P_0 + t\,\vec{w}}_{\text{eq. vet de uma reta}}$

que passa pelo ponto $P_0 = (0,0,0)$
e tem vetor diretor $\vec{w} = (1,1,-1)$



6) $V = P_2(\mathbb{R}) = \{ax^2 + bx + c \; ; \; a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$\beta = \{1 + x, \; 1 - x, \; x^2 + 2x + 1\} \subset P_2(\mathbb{R})$ é L.I?

$a_1(1+x) + a_2(1-x) + a_3(x^2+2x+1) = 0$

$a_3 x^2 + (a_1 - a_2 + 2a_3)x + (a_1 + a_2 + a_3) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \boxed{a_3 = 0} \\ a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

Logo, β é L.I.

Base de um EV

Def. Sejam V um EV e

$\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$

Dizemos que β gera V se dado $w \in V$ existem $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$

Em outras palavras, dizemos que β gera V se qualquer elemento de V pode ser expresso como uma combinação linear dos elementos de β.

Notação. β gera V escrevemos da seguinte forma

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n] = V$$

Definição. Sejam V um EV e $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Dizemos que β é uma base de V se:

i) β é L.I;

ii) β gera V.

obs.

1) $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,0)\}$

- β é L.I

$a_1(1,0) = (0,0) \Rightarrow (a_1, 0) = (0,0)$

$\Rightarrow a_1 = 0.$

- β não gera V.

Pois, $w = (1,1)$ não pode ser expresso como combinação linear dos vetores de β.

Ou seja, não existe $a_1 \in \mathbb{R}$; $a_1(1,0) = (1,1)$

2) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1,0); (0,1); (1,1)\}$

- β não é L.I

$\underset{a_1}{1} \cdot (1,0) + \underset{a_2}{1} \cdot (0,1) - \underset{a_3}{1}(1,1) = (0,0)$

Logo, β é L.D.

- β gera V.

Dado $w \in \mathbb{R}^2$ então $w = (x,y)$.

Daí, $w = (x,y) = x(1,0) + y(0,1) + 0(1,1)$. Logo, β gera V.

Scanné avec CamScanner

Ex 1) Verifique quais dos conjuntos abaixo formam uma base p/ o EV dado

a) $V=\mathbb{R}^2$, $\beta=\{(-1,1),(1,2)\}$

i) β é L.I?

$a_1(-1,1)+a_2(1,2)=(0,0) \Rightarrow$

$(-a_1+a_2, a_1+2a_2)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases}-a_1+a_2=0\\ a_1+2a_2=0\end{cases} \Rightarrow a_1=a_2=0$

Logo, β é L.I.

ii) β gera V?

$a_1(-1,1)+a_2(1,2)=w=(x,y)$

$(-a_1+a_2, a_1+2a_2)=(x,y)$

$\begin{cases}-a_1+a_2=x\\ a_1+2a_2=y\end{cases}$ +

$3a_2=x+y$

$\boxed{a_2=\frac{x+y}{3}}$

$a_1=a_2-x \Rightarrow a_1=\frac{x+y}{3}-x \Rightarrow \boxed{a_1=\frac{-2x+y}{3}}$

Scanné avec CamScanner

$(x,y) = \frac{-2x+y}{3}(-1,1) + \frac{x+y}{3}(1,2)$

Logo, $[(-1,1);(1,2)] = \mathbb{R}^2$

Portanto, β é base.

b) $V = \mathbb{R}^3$ $\quad \beta = \{(1,1,-1);(1,-1,1);(-1,1,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$?

i) β é L.I? $\quad a_1(1,1,-1) + a_2(1,-1,1) + a_3(-1,1,1) = (0,0,0)$

$(a_1 + a_2 - a_3,\ a_1 - a_2 + a_3,\ -a_1 + a_2 + a_3) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ -a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 + L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ -2a_2 + 2a_3 = 0 \\ 2a_2 = 0 \end{cases}$$

$a_2 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

Logo, β é L.I.

4) β gén $V = \mathbb{R}^3$

$a_1(1,1,-1) + a_2(1,-1,1) + a_3(-1,1,1) = w = (x,y,z)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = x \\ a_1 - a_2 + a_3 = y \\ -a_1 + a_2 + a_3 = z \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 1 & -1 & 1 & y \\ -1 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + L_1}{\overset{L_2 = L_2 - L_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & -2 & 2 & y-x \\ 0 & 2 & 0 & x+z \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = x \\ -2a_2 + 2a_3 = y - x \\ 2a_2 = x + z \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{x+z}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + \frac{x+z}{2} - a_3 = x \\ -(x+z) + 2a_3 = y - x \Rightarrow 2a_3 = y - x + x + z \end{cases}$$

$2a_3 = y + z \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{y+z}{2}}$

$a_1 = x + a_3 - \frac{x+z}{2} \Rightarrow a_1 = x + \frac{y+z}{2} - \frac{x+z}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{2x + y + z - (x+z)}{2}$

$$\boxed{a_1 = \frac{x+y}{2}}$$

Logo, β gera $V = \mathbb{R}^3$.

Portanto,

$$[(1,1,-1);(1,-1,1);(-1,1,1)] = \mathbb{R}^3.$$

Ou seja, β é base.

Base de um EV

Sejam V um EV e $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$

Dizemos que β é base se:

i) β é L.I ;

ii) β gera V.

Ex.

1) $V = P_3(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 ;\ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

$\beta = \{1 + x ;\ 1 - x + x^2 - x^3 ;\ x + x^2 + x^3 ;\ 1 + 2x^2\}$

i) β é L.I ?

$$a_0(1+x) + a_1(1 - x + x^2 - x^3) + a_2(x + x^2 + x^3) + a_3(1 + 2x^2) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

$$(a_0 + a_1 + a_3) + (a_0 - a_1 + a_2)x + (a_1 + a_2 + 2a_3)x^2 + (-a_1 + a_2)x^3 = 0$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + 0a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 + 0a_3 = 0 \\ 0a_0 + a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ 0a_0 - a_1 + a_2 + 0a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_2 = L_2 - L_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 \longleftrightarrow L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_3 = L_3 + 2L_2 \\ \sim \\ L_4 = L_4 + L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 = \frac{1}{3} L_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_4 = \\ \sim \\ L_4 - 2L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como o sistema equivalente tem uma linha toda nula segue que o sistema original tem infinitas soluções. Ou seja, o sistema é possível e indeterminado. Portanto, β não é L.I e isso nos diz que β não é base.

Transformações Lineares

Definição: Sejam V, W esp. vet. Uma aplicação $T: V \to W$ é uma transformação linear se:

i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

ii) $T(ku) = kT(u)$.

$\forall u, v \in V$ e $\forall k \in \mathbb{R}$.

Ex.

1) $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$T(x) = ax \quad ; \quad a \in \mathbb{R}.$

i) $T(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2)$

$= ax_1 + ax_2$

$= T(x_1) + T(x_2)$

ii) $T(kx_1) = a(kx_1) = k(ax_1) = kT(x_1)$

2) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$T(x,y) = ax + by \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}$

i) $T(v_1 + v_2) = T\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big)$

$= T(\underbrace{x_1 + x_2}_{x}, \underbrace{y_1 + y_2}_{y})$ $\qquad T(v_1) + T(v_2)$

$= a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2)$ $\qquad ||$

$= (ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$

Scanné avec CamScanner

ii) $T(kv_1) = T(k(x_1, y_1))$

$= T(kx_1, ky_1)$

$= a(kx_1) + b(ky_1)$

$= k\,(ax_1 + by_1)$

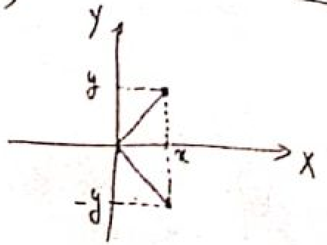
$= kT(x_1, y_1)$

$= kT(v_1)$

Logo, T é um <u>TL</u>

3) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x,-y)$



i) $T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$

$= T(\underbrace{x_1 + x_2}_{x}, \underbrace{y_1 + y_2}_{y})$

$= (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2))$

$= (x_1 + x_2, -y_1 - y_2)$

$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2)$

$= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$

$= T(v_1) + T(v_2)$

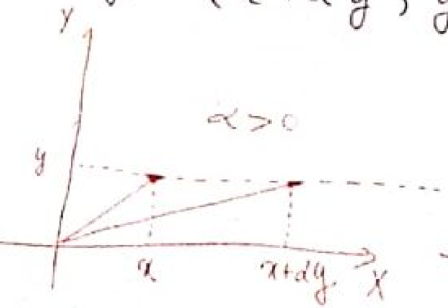
ii) $T(kv_1) = T(k(x_1, y_1))$
$= T(kx_1, ky_1)$
$= (kx_1, -ky_1)$
$= k(x_1, -y_1)$
$= kT(x_1, y_1)$
$= kT(v_1)$

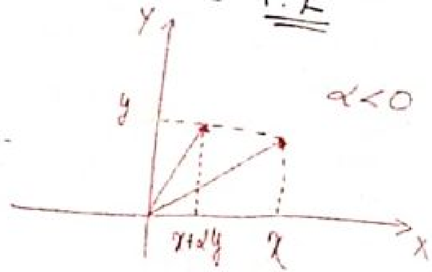
Logo, T é uma T.L.

4) $\alpha \in \mathbb{R}^*$ Fixado.

$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(x, y) = (x + \alpha y, y)$ é uma T.L

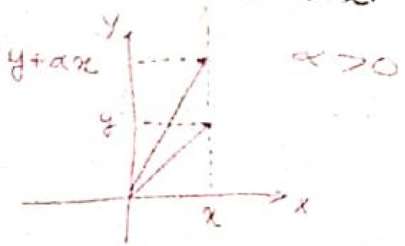




5) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}^*$

$$T(x,y) = (x,\ y + \alpha x)$$

é uma T.L.



As transformações lineares de 4) e 5) São chamadas de cisalhamento.

obs:

1) $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,0);(0,1)\} = \{e_1, e_2\}$

é uma base de $\mathbb{R}^2$ chamada de base canônica.

2) $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\} = \{e_1, e_2, e_3\}$

base canônica de $\mathbb{R}^3$.

3) $V = \mathbb{R}^n$ e $\beta = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

5) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}^*$

$T(x,y) = (x, \; y + \alpha x)$

é uma T.L.

As transformações lineares de 4) e 5) são chamadas de cisalhamento.

obs:

1) $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,0);(0,1)\} = \{e_1, e_2\}$

é uma base de $\mathbb{R}^2$ chamada de base canônica

2) $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\} = \{e_1, e_2, e_3\}$

base canônica de $\mathbb{R}^3$.

3) $V = \mathbb{R}^n$ e $\beta = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

4) Se $V=\mathbb{R}^2$ e $\beta=\{e_1, e_2\}$ temos que.

$\forall v \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow v=(x,y)$

$= x(1,0)+y(0,1)$

$= x e_1 + y e_2$

5) $V=\mathbb{R}^3$ e $\beta=\{e_1, e_2, e_3\}$

$v=(x,y,z) = x e_1 + y e_2 + z e_3$

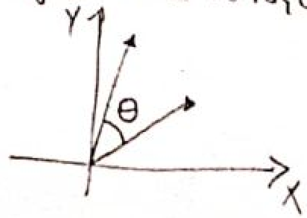
6) $V=\mathbb{R}^n$ e $\beta=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \Rightarrow v=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + \cdots + x_n e_n$

$= \sum_{k=1}^{n} x_i e_i$

Voltando aos exemplos.

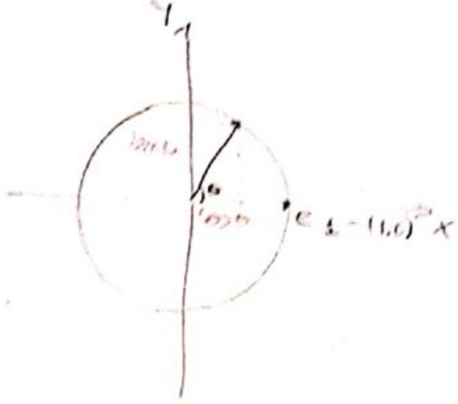
<u>objetivo</u>: Construir uma T.L $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que faz uma rotação de θ graus em um Vetor.

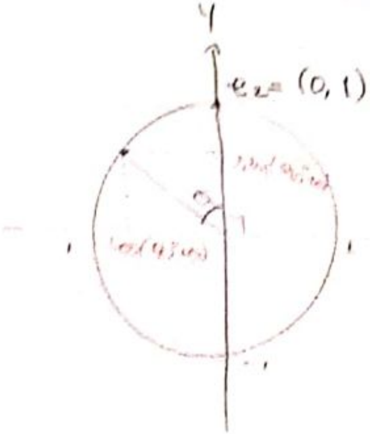


Se $v \in \mathbb{R}^2$ então $v = (x, y)$
$= x e_1 + y e_2$

Logo, $T(v) = T(x e_1 + y e_2)$
$= T(x e_1) + T(y e_2)$
$= x T(e_1) + y T(e_2)$

Queremos descobrir $T(e_1)$ e $T(e_2)$

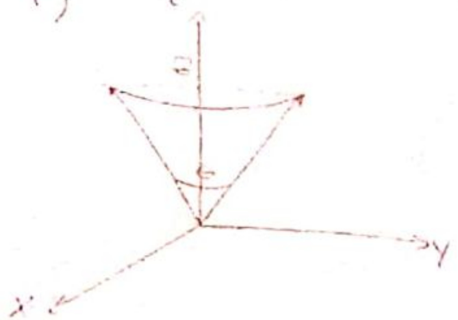




<u>Para e_1</u>: $T(e_1) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

Para e_2: $T(e_2) = (\cos(90°+\theta), \operatorname{sen}(90°+\theta)) = (\cos 90° \cos\theta - \operatorname{sen} 90° \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen} 90° \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos 90°) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

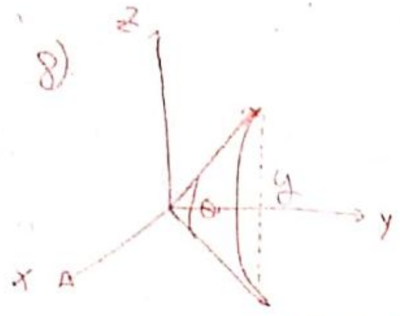
7)



$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y, z) = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta,\ z)$$

8)



$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y, z) = (x\cos\theta - z\sin\theta,\ y,\ x\sin\theta + z\cos\theta)$$

9) $T: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b) + (c+d)x + (a+b+c)x^2$$

i) $$T(A_1 + A_2) = T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}\right) = \left((a_1+a_2)+(b_1+b_2)\right) + \left((c_1+c_2)+(d_1+d_2)\right)x + \left((a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)\right)x^2 =$$

$$= \left[(a_1+b_1)+(c_1+d_1)x+(a_1+b_1+c_1)x^2\right]+\left[(a_2+b_2)+(c_2+d_2)x+(a_2+b_2+c_2)x^2\right] =$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= T(A_1)+T(A_2)$$

ii) $T(kA_1) = T\left(k\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right)$

$$= T\left(\begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix}\right) = (ka_1+kb_1)+(kc_1+kd_1)x+(ka_1+kb_1+kc_1)x^2 = k\left[(a_1+b_1)+(c_1+d_1)x+(a_1+b_1+c_1)x^2\right] = kT\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) = kT(A_1)$$

10) $C^1(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ;\ f$ é derivável $\}$

$T : C^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$T(f) = f'(x_0)$

i) $T(f+g) = (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

$= T(f) + T(g)$

ii) $T(kf) = (kf)'(x_0)$

$= k f'(x_0)$

$= k T(f)$

Logo, T é Linear.

ii) $C^0([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ é contínua} \}$

$T : C^0([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$

$T(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

i) $T(f+g) = \int_a^b (f+g)(x)\,dx$

$= \int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = T(f)+T(g)$

ii) $T(kf) = \int_a^b (kf)(x)\,dx$

$= \int_a^b k\,f(x)\,dx$

$= k\int_a^b f(x)\,dx$

$= kT(f)$

Scanné avec CamScanner

1) Encontre o núcleo das transformações abaixo:

a) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(x,y) = (x+y, 0)$$

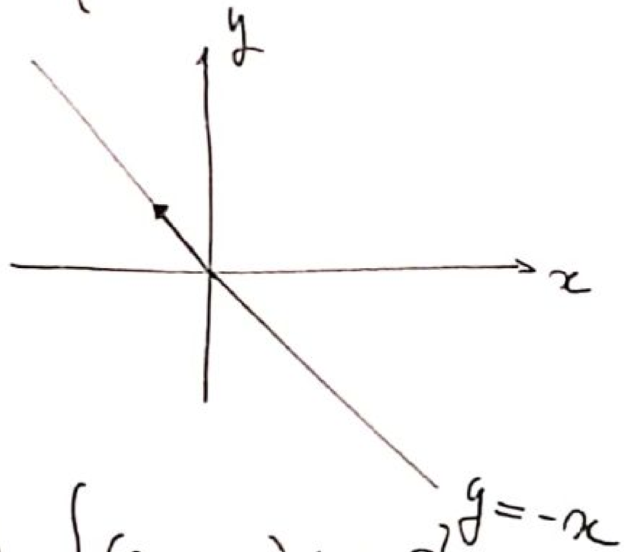
$$N(T) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 ;\ T(v) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ T(x,y) = (0,0) \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ (x+y, 0) = (0,0) \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x+y = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y = -x \right\}$$



$$N(T) = \left\{ (x, -x) ;\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x(1,-1) ;\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N(T) = \left[(1,-1) \right]$$

b) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(x,y,z) = (z - x + y,\ x - y)$

$N(T) = \{ v \in V ;\ T(v) = 0 \}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ T(x,y,z) = (0,0) \}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ (z - x + y,\ x - y) = (0,0) \}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ z - x + y = 0 \text{ e } x - y = 0 \}$

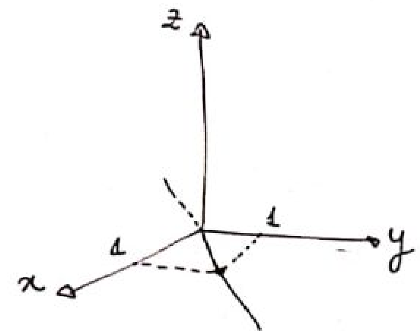
$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ z = x - y \text{ e } y = x \}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ z = 0 \text{ e } y = x \}$

$= \{ (x, x, 0) ;\ x \in \mathbb{R} \}$

$= \{ x(1,1,0) ;\ x \in \mathbb{R} \}$

$N(T) = [(1,1,0)]$



c) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z) = (x-y,\ x+y,\ z)$

$N(T) = \{v \in V;\ T(v) = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ T(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x-y,\ x+y,\ z) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y=0,\ x+y=0\ e\ z=0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x=y=z=0\} = \{(0,0,0)\} = \{\vec{0}\}$

d) $T: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$

$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b) + (c-d)x + (a+b+c)x^2$

$N(T) = \{v \in V;\ T(v) = 0\}$

$= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0 + 0x + 0x^2\right\}$

$= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ (a+b) + (c-d)x + (a+b+c)x^2 = 0 + 0x + 0x^2\right\}$

Scanné avec CamScanner

$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ a+b=0,\ c-d=0 \text{ e } a+b+c=0 \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ b=-a,\ d=c \text{ e } c=0 \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ b=-a,\ d=c=0 \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ a \in \mathbb{R} \right\}$

$N(T) = \left[\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]$

e) $T: C^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R})$

$T(f) = f'$

$N(T) = \{ v \in V;\ T(v) = 0 \}$

$= \{ f \in C^1(\mathbb{R});\ T(f) = 0 \} = \{ f \in C^1(\mathbb{R});\ f' = 0 \} = \{ f \in C^1(\mathbb{R});\ f'(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R} \}$

$$= \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}) \; ; \; f(x) = C \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}) \; ; \; f(x) = C \cdot 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N(T) = [\; 1 \;]$$

4) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(x,y,z) = (-x - 2y + z, 0, 0)$$

$$N(T) = \left\{ v \in V \; ; \; T(v) = 0 \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; T(x,y,z) = (0,0,0) \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; (-x - 2y + z, 0, 0) = (0,0,0) \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; -x - 2y + z = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z = x + 2y \right\}$$

$$= \left\{ (x, y, x+2y) \; ; \; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

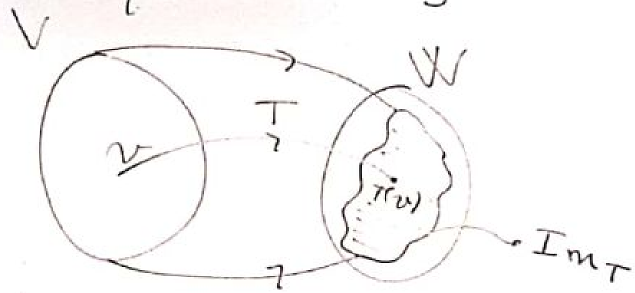
$$= \left\{ x(1,0,1) + y(0,1,2) \; ; \; x, y \in \mathbb{R} \right\} \Longrightarrow N(T) = [(1,0,1) ; (0,1,2)]$$

Def: Seja $T: V \to W$ uma T.L.
Dizemos que T é injetora se dados $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = T(v_2)$ então $v_1 = v_2$.

Proposição: Seja $T: V \to W$ uma T.L.
T é injetora se, e somente, $N(T) = 0$.

Def: Seja $T: V \to W$ uma T.L.
O conjunto imagem de T é definido por:

$$Im_T = \{ w \in W ;\ T(v) = w \}$$



2) Encontre a imagem das T.Ls abaixo:

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$T(x,y) = (x+y, 0)$

$$Im_T = \{ w \in W ;\ T(v) = w \}$$
$$= \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 ;\ T(x,y) = (a,b) \}$$

$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 ; (x+y,0) = (a,b)\}$

$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 ; x+y = a \text{ e } b=0\}$

$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 ; b=0\}$

$= \{(a,0) ; a \in \mathbb{R}\}$

$= \{a(1,0) ; a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow Im_T = [(1,0)]$

b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

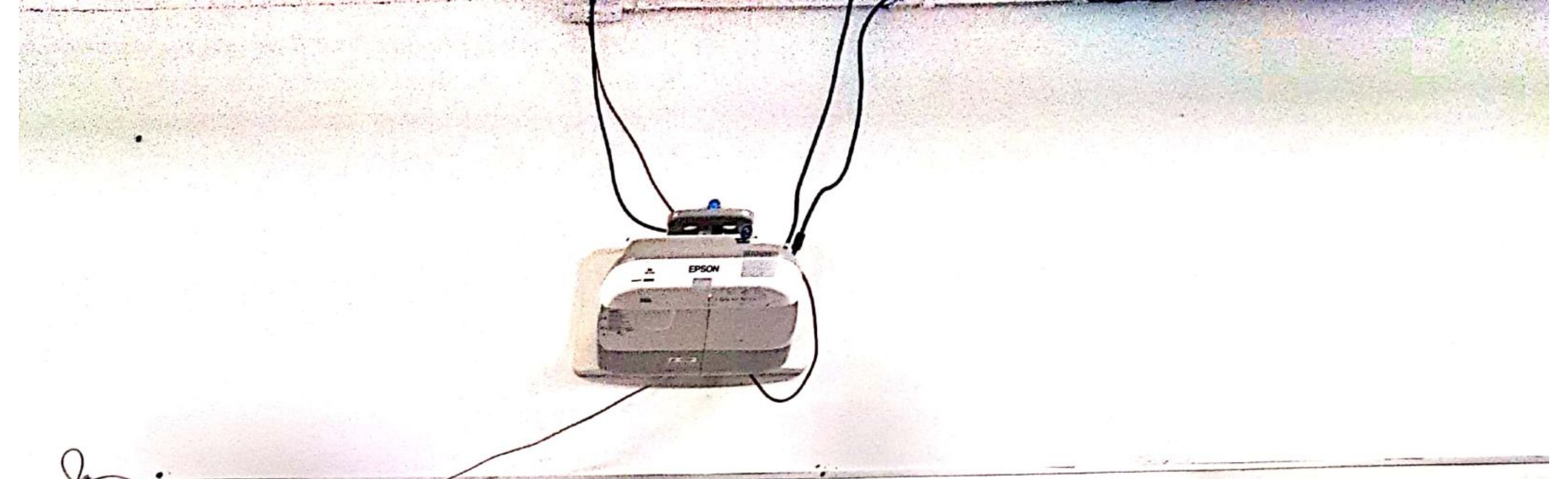
$T(x,y,z) = (z - x + y, x - y)$

$Im_T = \{w \in W ; T(v) = w\}$

$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 ; T(x,y,z) = (a,b)\}$

$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 ; (z-x+y, x-y) = (a,b)\}$

$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 ; z-x+y = a \text{ e } x-y = b\} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 ; z-(x-y) = a \text{ e } x-y = b\}$



$$= \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 ;\ z - b = a \ \text{e} \ x - y = b \right\}$$

$$= \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 ;\ z = a + b \ \text{e} \ x - y = b \right\} = \mathbb{R}^2$$

$T(b, 0, a+b) = (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$T(0, -b, a+b) = (a,b) \in \mathbb{R}^2$

Não temos restrições p/ a e b.

c) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z) = (x-y,\ x+y,\ z)$

$Im_T = \left\{ w \in W ;\ T(v) = w \right\}$

$$Im_T = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ T(x,y,z) = (a,b,c) \right\}$$

$$= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ (x-y,\ x+y,\ z) = (a,b,c) \right\}$$

$$= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ x - y = a,\ x + y = b \ \text{e} \ z = c \right\} = \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + y = b \end{cases} \quad x = \frac{a+b}{2}$$

$$y = \frac{b-a}{2}$$

$$T\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}, c\right) = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

d) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z) = (-x-2y+z, 0, 0)$

$Im_T = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ T(x,y,z) = (a,b,c) \right\}$

$= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ (-x-2y+z, 0, 0) = (a,b,c) \right\}$

$= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ -x-2y+z = a,\ b=0 \text{ e } c=0 \right\}$

$= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ b = c = 0 \right\} = \left\{ (a,0,0),\ a \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow Im_T = \left[(1,0,0) \right]$

e) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$T(x,y,z) = (x+y-z,\ x+y,\ x,\ 0)$

$Im_T = \left\{ w \in W ;\ T(v) = w \right\}$

$= \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 ;\ T(x,y,z) = (a,b,c,d) \right\} = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 ;\ (x+y-z,\ x+y,\ x,\ 0) = (a,b,c,d) \right\}$

$$= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 ;\ x+y-z=a ;\ x+y=b ,\ x=c \text{ e } d=0\}$$

$$= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 ;\ b-z=a ,\ y=b-c ,\ x=c ,\ d=0\}$$

$$= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 ;\ z=b-a ,\ y=b-c ,\ x=c ,\ d=0\}$$

$$= \{(a,b,c,0) ;\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{a(1,0,0,0)+b(0,1,0,0)+c(0,0,1,0) ;\ a,b,c \in \mathbb{R}\} = [e_1, e_2, e_3]$$

f) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(x,y,z) = (x, y, x+y)$$

$$Im_T = \{w \in W ;\ T(v) = w\}$$

$$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ T(x,y,z) = (a,b,c)\}$$

$$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ (x,y,x+y) = (a,b,c)\}$$

$$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ x=a ,\ y=b \text{ e } x+y=c\} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ c=a+b\}$$

$$= \{ (a, b, a+b) ; a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) ; a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$Im_T = [(1,0,1) ; (0,1,1)]$$

g) $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b) + (c-d)x + (a+b+c)x^2$$

$$Im_T = \{ w \in W ; T(v) = w \}$$

$$= \left\{ w_0 + w_1 x + w_2 x^2 \in P_2(\mathbb{R}) ; T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 \right\}$$

$$= \{ w_0 + w_1 x + w_2 x^2 \in P_2(\mathbb{R}) ; (a+b) + (c-d)x + (a+b+c)x^2 = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 \}$$

$$= \{ w_0 + w_1 x + w_2 x^2 \in P_2(\mathbb{R}) ; a+b = w_0 , c-d = w_1 \text{ e } a+b+c = w_2 \}$$

$$= \{ w_0 + w_1 x + w_2 x^2 \in P_2(\mathbb{R}) ; a+b = w_0 , \underbrace{c-d = w_1}_{d = c - w_1} \text{ e } c = w_2 - w_0 \}$$

h) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$T(x,y,z) = (x+y,\ x-z,\ x+y+z,\ x-2z)$

$Im_T = \{ w \in W;\ T(v) = w \}$

$= \{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ T(x,y,z) = (a,b,c,d) \}$

$= \{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ (x+y,\ x-z,\ x+y+z,\ x-2z) = (a,b,c,d) \}$

$= \{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ x+y=a,\ x-z=b,\ x+y+z=c,\ x-2z=d \}$

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x+y = a \\ x-z = b \\ x+y+z = c \\ x-2z = d \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 0 & -2 & d \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1 \end{array}$$

$b\,,\; x+y+z=c\,,\; x-2z=d\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots\, a \\ 0 & -1 & -1 & \vdots\, b-a \\ 0 & 0 & 1 & \vdots\, c-a \\ 0 & -1 & -2 & \vdots\, d-a \end{bmatrix} \quad L_2 = -L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots\, a \\ 0 & 1 & 1 & \vdots\, a-b \\ 0 & 0 & 1 & \vdots\, c-a \\ 0 & -1 & -2 & \vdots\, d-a \end{bmatrix} \quad L_4 = L_4 + L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots\, a \\ 0 & 1 & 1 & \vdots\, a-b \\ 0 & 0 & 1 & \vdots\, c-a \\ 0 & 0 & -1 & \vdots\, d-b \end{bmatrix} \quad L_4 = L_4 + L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots\, a \\ 0 & 1 & 1 & \vdots\, a-b \\ 0 & 0 & 1 & \vdots\, c-a \\ 0 & 0 & 0 & \vdots\, -a-b+c+d \end{bmatrix} \Rightarrow -a-b+c+d=0$$

$$Im_T = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 ; -a-b+c+d=0\}$$
$$= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 ; d = a+b-c\}$$
$$= \{(a,b,c,a+b-c) ; a,b,c \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{a(1,0,0,1) + b(0,1,0,1) + c(0,0,1,-1) ; a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

$$Im_T = [(1,0,0,1);(0,1,0,1);(0,0,1,-1)]$$

Definição: Sejam V um E.V. e β uma base de V. A dimensão de V é a quantidade de vetores da base β.
Ou seja, se $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ então $\dim V = \underline{\underline{n}}$.

obs: Duas bases de um mesmo E.V $\underline{\underline{V}}$ tem o mesmo número de vetores

Por ex. 1) $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{e_1, e_2\}$ base canônica
então $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

2) $V = \mathbb{R}^n$ e $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base canônica
$\dim(\mathbb{R}^n) = n$

3) $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ base canônica de $M_2(\mathbb{R})$

$\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$

3) $V = P_2(\mathbb{R})$

$\beta = \{1, x, x^2\}$ base canônica de $P_2(\mathbb{R})$

$\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$

4) $V = \mathcal{F} = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{ é função}\}$

$\beta = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{tg} x, e^x, \ln(x), \ldots$

β tem uma quantidade infinita de elementos

$\dim(\mathcal{F}) = +\infty$

Teorema do núcleo e imagem

Seja $T: V \to W$ um T.L. Então:

$$\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T))$$

Proposição: Seja $T: V \to W$ uma T.L.

Então:

a) $N(T)$ é um subesp. vet. de V;

b) $Im(T)$ " " " " " W.

Dem: a) Mostrar que $N(T)$ é um subesp. vet.

i) $0_V \in N(T)$?

Devemos mostrar que $T(0_V) = 0_W$

De fato,

$T(\cancel{0_V}) = T(0_V + 0_V) = T(\cancel{0_V}) + T(0_V) \Rightarrow T(0_V) = 0_W$

Donde, $0_V \in N(T)$

ii) Se $u, v \in N(T) \Rightarrow u+v \in N(T)$

De fato, como $u, v \in N(T) \Rightarrow T(u) = 0 = T(v)$

Daí, $T(u+v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u+v \in N(T)$.

iii) $\alpha \in \mathbb{R}, u \in N(T) \Rightarrow \alpha u \in N(T)$

Se $u \in N(T)$ então $T(u) = 0$

Daí, $T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha . 0 = 0 \Rightarrow$

$\alpha u \in N(T)$ ∎