一、1. 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}-2x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-2}{3x^2}$

倒变换 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{3x^2(1-x^2)} = \dfrac{2}{3}$

洛必达

2. $y^{(10)} = (x^2e^{3x})^{(10)} = \sum\limits_{i=0}^{10}(e^{3x})^{(10-i)}(x^2)^{(i)}$

牛顿-莱布尼兹公式 $= \sum\limits_{i=0}^{2} C_{10}^{i}(e^{3x})^{(10-i)}(x^2)^{(i)}$

注意不要漏了组合数系数 $= (e^{3x})^{(10)}x^2 + C_{10}^{1}(e^{3x})^{(9)}(x^2)' + C_{10}^{2}(e^{3x})^{(8)}(x^2)''$

$= e^{3x}(3^{10}x^2+3^9\cdot20x+3^8\cdot90)$

$= 3^8\cdot e^{3x}(9x^2+60x+90)$

换元　　洛必达

3. 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t\,dt}{x^4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2\cdot2x}{4x^3} = \dfrac{1}{2}$

4. $\left.\begin{array}{l}\vec{n}_1=(1,0,-4)\\ \vec{n}_2=(2,-1,-5)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-4,-3,-1)$　点向式

$\therefore L:\ \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=z-5$

二、1. 原式 $= \dfrac{1}{2}\int\ln(x+2)\,dx^2$　分部积分

$= \dfrac{1}{2}\ln(x+2)x^2-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{x^2}{x+2}dx$

$= \dfrac{1}{2}x^2\ln(x+2)-\dfrac{1}{2}\int\left(x-2+\dfrac{4}{x+2}\right)dx$

$= \dfrac{1}{2}x^2\ln(x+2)-\dfrac{1}{4}x^2+x-2\ln(x+2)+C$

2. 原式 $= \int_{-1}^{1}\dfrac{x^5+x^3+x+\sin x}{1+x^2}dx+\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2}{1+x^2}dx$　利用奇偶性

$= 2\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx = 2(x-\arctan x)\Big|_0^1 = 2-\dfrac{\pi}{2}$

3. 原式 $= -\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \ln x \, d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ 第一换元+分部积分

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2}\ln x \Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{d(x^2+1)}{1+x^2}$$ 广义积分定义

$$= \frac{1}{2}\ln x\Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2)\Big|_1^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{4}\ln 2$$

4. 当 $x \in [0,1)$ 时，$F(x) = \int_1^x t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_1^x = \frac{x^2-1}{3}$

当 $x \in (1,2]$ 时，$F(x) = \int_1^x 1\,dt = x-1$ 分段积分

$$\therefore F(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{3} & 0 \le x < 1; \\ x-1 & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

三、设 $I = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\frac{n+k}{n}}{n+\frac{1}{k}}$ 放缩 → 构造定积分定义形式

→ 夹逼准则

$$I < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

而 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = (\ln(1+x)-1)(x+1)\Big|_0^1$

$$= 2\ln 2 - 1$$

$$I > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

而 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$= 2\ln 2 - 1$

由夹逼准则，有 $\lim\limits_{n\to\infty} I = 2\ln 2 - 1$

四、设切点为 x_0，则切线 $y = \frac{1}{x_0}(x - x_0) + \ln x_0 = \frac{1}{x_0}x + \ln x_0 - 1$

$\therefore S(x_0) = \int_1^{e^2} \left(\frac{1}{x_0}x + \ln x_0 - 1 - \ln x\right) dx$

利用定积分求曲边梯形的面积

$= \left[\frac{1}{2x_0}x^2 + (\ln x_0 - 1)x - (\ln x - 1)x\right]\Big|_1^{e^2}$

$= \frac{1}{2x_0}(e^4 - 1) + (\ln x_0 - 1)(e^2 - 1) - (\ln x - 1)x\Big|_1^{e^2}$

$S'(x_0) = \frac{e^2-1}{x} - \frac{e^4-1}{2x_0^2} = \frac{(e^2-1)(2x_0 - (e^2+1))}{2x_0^2}$ 令 $S'(x)=0$，$x = \frac{e^2+1}{2}$

$\therefore$ 切线 $y = \frac{2}{e^2+1}x + \ln\frac{e^2+1}{2} - 1$

五、$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$ 的定义域为 $(-\infty, -1), (-1, +\infty)$

$f'(x) = \frac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$，$f''(x) = \frac{12x^2}{(x+1)^5}$

利用导数研究函数性质

$f(x)$ 单调增区间 $(-\infty, -4), (0, +\infty)$

单调减区间 $(-4, -1), (-1, 0)$

极大值为 $f(-4) = -\frac{256}{27}$，极小值为 $f(0) = 0$

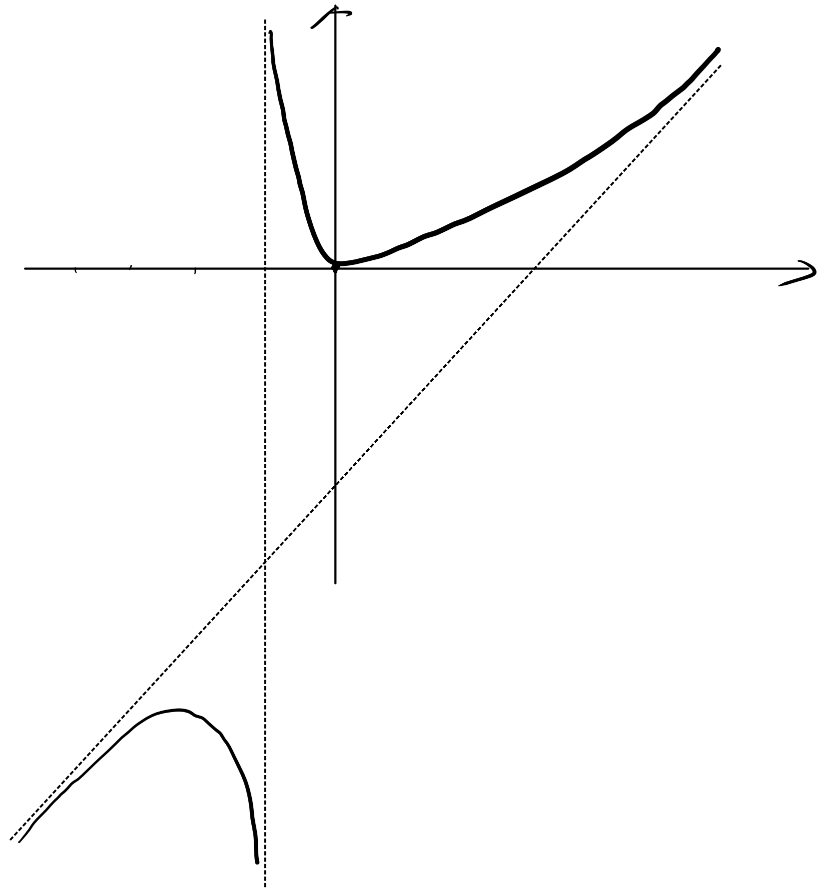
下凹区间为 $(-\infty, -1)$，上凹区间为 $(-1, +\infty)$，没有拐点，

铅直渐近线 $x = -1$，

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x+1)^3} = 1$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - x = \frac{-3x^3 - 3x^2 - x}{(x+1)^3} = -3$

∴ $f(x)$ 斜渐近线为 $y=x-3$

作图：



六、证明：(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展式为

泰勒展示

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-0)^2>f(0)+f'(0)x$$

两边同时积分有 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx>\int_{-a}^{a}(f(0)+f'(0)x)\,dx$

$=2af(0)$；

ξ不是常量，无法提出，放缩掉 $f''(\xi)$ 便可以积分了

(2) 由(1)，有 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}\boxed{f''(\xi)}x^2\,dx$

由 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，记 $f''(x)_{max}=M$，$f''(x)_{min}=m$

则 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx\leq\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}Mx^2\,dx=M\int_{0}^{a}x^2\,dx=\frac{M}{3}a^3$

$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx\geq\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}mx^2\,dx=m\int_{0}^{a}x^2\,dx=\frac{m}{3}a^3$

则 $m \le \frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \le M$

证明存在性

由介值定理，存在 $\xi \in [-a,a]$，使得 $f''(\xi) = \frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)dx$

即 $a^3 f''(\xi) = 3\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$

七、证明：设 $u(x) = 1+2\int_0^x f(t)\,dt$，则 $u(0)=1$，$u'(x) = 2f(x) \le 2\sqrt{u(x)}$

逆用定积分定义

而 $\boxed{\sqrt{u(x)} - \sqrt{u(0)} = \int_0^x d\sqrt{u(t)}} = \int_0^x \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}\,dt$

$\le \int_0^x dt = x$

$d\sqrt{u(t)} = \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}\,dt$

$\therefore f(x) \le \sqrt{u(x)} \le x+1$