微积分 I（第一层次）期中试题参考答案 2018.11.17

一、简答题（每小题 5 分，8 小题，共 40 分）：

1. 用极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$. ε-δ语言

证明： $\forall\varepsilon>0$，要证明 $\left|\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}\right|=\dfrac{|x+2|\cdot|x-2|}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}}<\dfrac{|x+2|\cdot|x-2|}{\sqrt{3}}$，

限定 $|x-2|<1$，所以 $\left|\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}\right|<\dfrac{5\cdot|x-2|}{\sqrt{3}}<\varepsilon$，故取 $\delta=\min\{1,\dfrac{\sqrt{3}}{5}\varepsilon\}$，

当 $0<|x-2|<\delta$，有 $\left|\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}\right|<\dfrac{5\cdot|x-2|}{\sqrt{3}}<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$.

2. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}$. 夹逼准则

解： $4<\sqrt[n]{n^4+4^n}\le 4\sqrt[n]{2}\ (n\ge 5)$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty}4\sqrt[n]{2}=4$，$\lim\limits_{n\to\infty}4=4$. 所以由夹逼定理，得原式$=4$.

3. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{2/x}$. 第二基本极限

解： 原式$=\exp(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x}2x)=e^4$.

4. 设 $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$，求 dy. 利用微分与导数的关系

解： $y'=\sqrt{1-x^2}+x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{1-x^2}$，所以 $dy=2\sqrt{1-x^2}dx$.

5. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[(1+\dfrac{1}{n})^n-e\right]$. 指数结构转成底数为e的，常数e提出后利用等价无穷小替换

解： 考察 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[(1+\dfrac{1}{x})^x-e\right]$，令 $\dfrac{1}{x}=t$，

$$I=\lim_{t\to+0}\frac{(1+t)^{1/t}-e}{t}=e\lim_{t\to+0}\frac{e^{\ln(1+t)/t-1}-1}{t}=e\lim_{t\to+0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=e\lim_{t\to+0}\frac{1/(1+t)-1}{2t}=-\frac{e}{2}$$

所以，由海涅定理，原式$=-\dfrac{e}{2}$.

6. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}$. 熟知等价无穷小替换，会主动变形构造。

解： 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

7.求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}[(1+\ln(1+x))^{2x}-1]$. 构造无穷小替换的基本结构

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}[e^{2x\ln(1+\ln(1+x))}-1]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\ln(1+\ln(1+x))}{x^2}$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\ln(1+x))}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=2.$$

8.设 x 为基准无穷小，求 $\ln(1+x)-\arctan x$ 的无穷小主部. 以下过程学习记忆

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\arctan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{kx^{k-1}(1+x)(1+x^2)}=-\frac{1}{2}(k=2).$$

所以 $\ln(1+x)-\arctan x$ 的无穷小主部为 $-\dfrac{1}{2}x^2$.

二、（7 分）设 $f(x)=\dfrac{5x-1}{2x^2+x-1}$，求 $f^{(n)}(x)$. 不盲目使用莱布尼兹公式，优先把乘积结构化成线性结构。

解： 因为 $f(x)=\dfrac{4x-2+x+1}{(2x-1)(x+1)}=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{2x-1}$,

所以，$f^{(n)}(x)=2\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(n)}+\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)^{(n)}=2(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}+\dfrac{2^{n-1}}{(2x-1)^{n+1}}\right].$

三、（7 分）证明方程 $\cos x-1/x=0$ 有无穷多个正根. 零点存在定理，+三角函数的周期性

证明：令 $g(x)=x\cos x-1, x\in R^+, g(x)\in C_{[0,+\infty)}$，

注意到 $g((2k-1)\pi)=-(2k-1)\pi-1<0, g(2k\pi)=2k\pi>0, k\in N\setminus\{0\}$，所以由零点定理，$g(x)$ 在 $((2k-1)\pi,2k\pi)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $g(\xi)=0, k\in N\setminus\{0\}$. 由于 $k\in N\setminus\{0\}$，故 $g(x)$ 有无穷多个正根，也即方程 $\cos x-1/x=0$ 有无穷多个正根.

四、（7 分）设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ 2y-ty^2+e^t=5a\end{cases}$ 所确定（其中 a 为常数），求 $\dfrac{dy}{dx}$. 由参数方程确定的函数求导

解：$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t^2}$，由 $2y-ty^2+e^t=5a$ 两边对 t 求导，得 $2y'-y^2-2tyy'+e^t=0$，

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y^2-e^t}{2(1-ty)}$， 所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}$.

五、（8 分）设 $f(x)=\arctan x-\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$，其中 $x>-1$.（1）证明 $f(x)$ 是常数函数；

化简即可

✿ 利用小结论 $\arctan(2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

（2）求 $\arctan(2-\sqrt{3})$ 的值. $= \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{-\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$

解：（1） $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = 0$. 由 Lagrange 定理的推论知，

$f(x) =$ 常数 $(x > -1)$.令 $x = 1$， $f(1) = \pi/4$. 所以 $f(x) = \arctan x - \arctan\frac{x-1}{x+1} = \frac{\pi}{4}$.

（2） $\arctan(2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{2-\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}+1} = \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$.

六、（8 分）设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + \ln(1+x^2), x > 0; \\ ax\sin x, \qquad x \le 0. \end{cases}$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导.试求 a 的值以及 $f''(0)$.

解： $f'(x) = \begin{cases} 2x + \frac{2x}{1+x^2}, \qquad x > 0; \\ a[\sin x + x\cos x], x \le 0. \end{cases}$

分段函数
间断点、处导数用定义求

$f''_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{2x + \frac{2x}{1+x^2}}{x} = 4,$

$f''_-(0) = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{a(\sin x + x\cos x)}{x} = a\lim\limits_{x\to 0-}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x\right) = 2a.$

由题意，当 $a=2$ 时， $f''_-(0) = f''_+(0)$， 所以 $f''(0) = 4$.

考虑定义域

七、（8 分）设 $f(x) = \frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$， 试确定 $f(x)$ 的间断点及其类型.

考虑左右极限的存在性与关系

解： $x=0, x=1$ 为间断点. 因为 $f(1^+) = 0, f(1^-) = 1$， 所以 1 为跳跃间断点.

又因为 $f(0^+) = +\infty, f(0^-) = -\infty$， 所以 0 为无穷型间断点.

利用拉格朗日中值定理

八、（8 分）（1）对任意正整数 n， 证明： $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$;

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) < 0$

（2）令 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$， 证明： $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

① 单调有界原理

证明：（1）由书上例题，当 $x > 0$ 时，有 $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$; 令 $x = \frac{1}{n}$，就有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$;

（2） $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{1+(n-1)} - \ln(1+\frac{1}{n-1}) < 0$， 所以 $\{a_n\}$ 单调下降.

② 求下界 将 $\ln n$ 拆成和的形式
用放缩法

由（1）有 $\frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{1}$;

$\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$;

$\frac{1}{4} < \ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3}$;

……………………

$\frac{1}{n} < \ln n - \ln(n-1) < \frac{1}{n-1}$;

把上述不等式相加，得 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < \ln n < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$

而 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\ln n+\frac{1}{n} > 0$，所以 $\{a_n\}$ 下方有界. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

九、（7 分）设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，$f(0)=1, f(1)+2f(2)=3$. 试证明：

$\exists \xi \in (0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

由零点存在定理可知

罗尔中值定理

证明：因为 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，由书上例题，取 $t_1 = 1/3, t_2 = 2/3, t_1+t_2=1, t_1, t_2 > 0$，

$f(\eta)=1$

$\eta \in [1,2]$

而 $t_1 f(1) + t_2 f(2) = 1$. 存在 $\eta \in (1,2)$，使得 $f(\eta)=1$. 又 $f(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，

在 $(0,\eta)$ 内可导，$f(0)=f(\eta)=1$. 由 Rolle 定理，存在 $\xi \in (0,\eta) \subset (0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证毕.