## 一、费马引理

$f(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 内有定义且在 $x_0$ 处可导，

若 $\forall x \in N_\delta(x_0)$，有 $f(x) \le f(x_0)$（或 $f(x) \ge f(x_0)$）

则 $f'(x_0) = 0$.　（极值点导数为零）

证明：$f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \le 0$

$f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ge 0$

又 $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$　则 $f'(x_0) = 0$

## 二、罗尔中值定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 上可导，且 $f(a) = f(b)$

则 $\exists \xi \in (a,b)$，s.t $f'(\xi) = 0$

证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 $M$，最小值 $m$.

(1) 若 $M = m$，则 $f'(x) = 0$ 恒　$\therefore \forall \xi \in (a,b)$，$f'(\xi) = 0$

(2) 若 $M > m$，又 $f(a) = f(b)$，则 $m$ 和 $M$ 至少有一个不在端点处取到，不妨设 $f(\xi) = M > f(a)$，

则由费马引理可知，$f'(\xi) = 0$。

用法：罗尔中值定理拥有很强的构造空间（注意单变量）

（以目标为导函数或导函数全部构造原函数）

## 三、拉格朗日中值定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 上可导，

则 $\exists\, \xi \in (a,b)$，s.t. $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

证明：令 $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ ← 构造法具有创新性

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 上可导，$F(a)=F(b)=0$

由罗尔中值定理可知：

$\exists\, \xi \in (a,b)$，s.t. $F'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

拉格朗日中值公式：$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$\xi \in (a,b)$

推论：$f(x)$ 在 $(a,b)$ 上可导，则 $f(x)$ 恒常 $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ 恒得 0.

用法：构造辅助函数证明不等式

→ 出现两同型函数差值时可用.

# 四、柯西中值定理

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 上可导，

且 $(a,b)$ 上 $g'(x)$ 恒不为0，则 $\exists \xi \in (a,b)$，

s.t.
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

证明：令 $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x)-g(a))$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 上可导，且 $F(a)=F(b)=0$

由罗尔中值定理，$\exists \xi \in (a,b)$，

s.t. $F'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(\xi) = 0$

即
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

用法：出现不同型函数时考虑

（有时，另一个函数需要自己提取）

## 五、洛必达法则

适用情况：$\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$（其它两未定型可向此转化）

$f(x)$ 与 $g(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0/\infty$ 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathring{U}_\delta(a)$ 内可导（$g'(x)\neq 0$），若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k.$$

☆ 只在一点可导不能用洛必达法则

用法：① 附近可导用洛必达，一点处可导用定义

② 注意极限四则运算、等价无穷小等方法的配合使用

③ 可以多次洛必达

## 六、泰勒展开式

1. 泰勒公式：$f(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 内 $n$ 阶可导，则 $x\to x_0$ 时

有 $$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right)$$

称 $R_n=o\left((x-x_0)^n\right)$ 为皮亚诺余项，→ 拉格朗日余项

则 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 在 $x$ 与 $x_0$ 之间

## 2. 麦克劳林展式（令$x_0=0$）

(1) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$

(2) $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1} + o(x^{2m})$

(3) $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m})$

(4) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n)$

(5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n \cdot x^n + o(x^n)$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + (-1)^n \cdot x^n + o(x^n)$

⇒ 补充一些等价无穷小：

$e^x - 1 - x \sim \frac{1}{2}x^2$

$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$

$\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 \sim \frac{1}{24}x^4$

$\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 \sim \frac{1}{3}x^3$

题型：

(1) 求某些复杂函数到某一项的麦克劳林展开式

→ 看成是由基本的复合而成，然后逐部代入

（注意一些代数变形，避免出现无穷项的系数）

(2) 求极限 ⇒ 直接代入、控制好展开到哪一阶较为合适

(3) 求无穷小的阶、主部 ⇒ …

(4) 利用区间内任一点在区间端点处展开证不等式