线性代数期中试卷 答案 (2018.11.17)

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&1&-\lambda\end{pmatrix}$ 经过多次初等行变换和列变换得到 $B=\begin{pmatrix}-5&17&6\\-7&0&5\\13&9&-8\end{pmatrix}$，求参数 λ .

解：做初等行变换，$A\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1-\lambda\end{pmatrix}, B\to\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&7&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,秩相等得 $\lambda=1$.

解法二：$|B|=0\Rightarrow|A|=\lambda-1=0$，$\therefore\ \lambda=1$.

解法三：$B\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&7&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&0\\2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$，$\therefore\ \lambda=1$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&n-1\\n&&&&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$，其中 $n\geq 2$，求 C^{-1}.

解：$(A,E)\to\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&&&&&0&&&&1/n\\&1&&&&1&0&&&\\&&1&&&&1/2&0&&\\&&&\ddots&&&&\ddots&\ddots&\\&&&&1&&&&1/(n-1)&0\end{array}\right)$,$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}0&&&&1/n\\1&0&&&\\&1/2&0&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1/(n-1)&0\end{pmatrix}$,

$B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$，$C^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&\\&B^{-1}\end{pmatrix}$.

3. 设 $A\in\mathrm{R}^{3\times3}, |A|\neq0$，且有 $A_{ij}=2a_{ij}, i,j=1,2,3$，其中 A_{ij} 为矩阵元素 a_{ij} 的代数余子式，求 $|A^*|$.

解：$A^*=2A^{\mathrm{T}}, 2A^{\mathrm{T}}A=A^*A=|A|E$，取行列式，$2^3|A|^2=|2A^{\mathrm{T}}A|=|A|^3$.

因为 $|A|\neq0$，故$|A|=8$，于是有 $|A^*|=|2A^{\mathrm{T}}|=8|A|=64$.

解法二：$|A|\neq0$，则$|A^*|=||A|A^{-1}|=|A|^2$，又有$|A^*|=|2A^{\mathrm{T}}|=8|A|$，故$|A|=8$，且$|A^*|=8|A|=64$.

4. 设矩阵 $A=MN^{\mathrm{T}}$，其中 $M,N\in\mathrm{R}^{n\times r}\ (r\leq n), |N^{\mathrm{T}}M|\neq0$. 证明：$\mathrm{r}(A^2)=\mathrm{r}(A)$.

证：$|N^{\mathrm{T}}M|\neq0, (N^{\mathrm{T}}M)^3$可逆，

故 $r=r((N^{\mathrm{T}}M)^3)=r(N^{\mathrm{T}}A^2M)\leq r(A^2M)\leq r(A^2)\leq r(A)\leq r(M)\leq r$，从而 $\mathrm{r}(A^2)=\mathrm{r}(A)$.

证法二：$|N^{\mathrm{T}}M|\neq0\Rightarrow r=\mathrm{r}(N^{\mathrm{T}}M)\leq\mathrm{r}(N^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(N)\leq r$，$\therefore\ \mathrm{r}(N)=r, \mathrm{r}(M)=r$.

M,N 列满秩，有 $M=P\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}, N=Q\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}$，其中 P,Q 可逆.

于是有 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(P\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}(E_r,O)Q^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(P\begin{pmatrix}E_r&\\&O\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}E_r&\\&O\end{pmatrix}=r$.

$A^2=MN^{\mathrm{T}}MN^{\mathrm{T}}=(M)((N^{\mathrm{T}}M)N^{\mathrm{T}})=M\tilde{N}^{\mathrm{T}}$，$|N^{\mathrm{T}}M|\neq0\Rightarrow(N^{\mathrm{T}}M)$ 可逆，

故 $\mathrm{r}(\tilde{N}^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}((N^{\mathrm{T}}M)N^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(N^{\mathrm{T}})=r$，且 $\tilde{N}^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{r\times n}$，于是也有 $\mathrm{r}(A^2)=\mathrm{r}(M\tilde{N}^{\mathrm{T}})=r$，

从而 $\mathrm{r}(A^2)=\mathrm{r}(A)$.

5. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&3&4&\cdots&n-1\\3&4&5&\cdots&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n-1&n-2&\cdots&1\end{vmatrix}$. ($D$的元素$a_{ij}=\begin{cases}i+j-1, & \text{当}i+j\leq n+1,\\2n+1-i-j, & \text{当}i+j>n+1.\end{cases}$)

解：$D\overset{\substack{r_{i+1}-r_i\\i=n-1,\cdots,2}}{=}\begin{vmatrix}1&2&\cdots&n-1&n\\1&1&\cdots&1&-1\\1&1&\cdots&-1&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&-1&\cdots&-1&-1\end{vmatrix}\overset{\substack{c_i+c_1\\i=2,\cdots,n}}{=}\begin{vmatrix}1&3&\cdots&n&n+1\\1&2&\cdots&2&0\\1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$,

依次按最后一行展开：$D=(-1)^{(n+1)+n+\cdots+3}2^{n-2}(n+1)=(-1)^{n(n-1)/2}2^{n-2}(n+1)$.

二.(10分) 设有向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-4\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\7\end{pmatrix}.$$

(1)求一个极大无关组，并用极大无关组表示其余向量；

(2) 在4维列向量组 e_1,e_2,e_3,e_4 中找出所有不能被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性表示的向量，其中 $e_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},e_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}},e_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},e_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5|e_1,e_2,e_3,e_4)\to\left(\begin{array}{ccccc|cccc}1&0&-1&0&1&2/3&1/3&-1/3&0\\0&1&3&0&-1.5&-2/3&-5/6&1/3&0\\0&0&0&1&1.5&1/3&1/6&1/3&0\\0&0&0&0&0&-3&-1&0&1\end{array}\right)$.

(1) 一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，且 $\alpha_3=-\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_5=\alpha_1-1.5\alpha_2+1.5\alpha_4$，

(2) 第4行分量非零的向量不能表示，即向量 e_1,e_2,e_4.

解法二：(1) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&1\\0&1&3&0&-1.5\\0&0&0&1&1.5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，且 $\alpha_3=-\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_5=\alpha_1-1.5\alpha_2+1.5\alpha_4$，

(2) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4|e_1,e_2,e_3,e_4)\to\left(\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&2/3&1/3&-1/3&0\\0&1&0&-2/3&-5/6&1/3&0\\0&0&1&1/3&1/6&1/3&0\\0&0&0&-3&-1&0&1\end{array}\right)$.

第4行分量非零的向量不能表示，即向量 e_1,e_2,e_4.

三.(10分) 设 $A\in\mathrm{R}^{3\times3}$，$A$ 的第一列为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$，且 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ 和 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

是齐次线性方程组 $(A-2E)x=\theta$ 的非零解，求 A.

解：$Ae_1=\alpha_1,A\xi_1=2\xi_1,A\xi_2=2\xi_2$，故 $A(e_1,\xi_1,\xi_2)=(\alpha_1,2\xi_1,2\xi_2)$，

$$A=(\alpha_1,2\xi_1,2\xi_2)(e_1,\xi_1,\xi_2)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&6&-9\\-1&4&-7\end{pmatrix}.$$

解法二：设 $A=\begin{pmatrix}2&a_{12}&a_{13}\\-1&a_{22}&a_{23}\\-1&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，由 $(A-2E)\xi_i=\theta,i=1,2$，

得 $\begin{cases}3a_{12}+a_{13}=0,\\3a_{22}+a_{23}=9,\\3a_{32}+a_{33}=5,\\-2a_{12}-a_{13}=0,\\-2a_{22}-a_{23}=-3,\\-2a_{32}-a_{33}=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_{12}=a_{13}=0,\\a_{22}=6,\ a_{23}=-9,\\a_{32}=4,\ a_{33}=-7.\end{cases}$ 故 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&6&-9\\-1&4&-7\end{pmatrix}$.

解法三：$(A-2E)(\xi_1,\xi_2)=O$，故 $\begin{pmatrix}\xi_1^{\mathrm{T}}\\\xi_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(A-2E)^{\mathrm{T}}=O$，即 $(A-2E)^{\mathrm{T}}$ 的列为方程组 $\begin{pmatrix}\xi_1^{\mathrm{T}}\\\xi_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}x=\theta$ 的解.

$\begin{pmatrix}\xi_1^{\mathrm{T}}\\\xi_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1/9\\0&1&4/9\end{pmatrix}$，通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\-4\\9\end{pmatrix}$. 易知 $(A-2E)^{\mathrm{T}}$ 的第一行为 $(0,-1,-1)$，

故 $(A-2E)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&4&4\\0&-9&-9\end{pmatrix}$，最后有 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&6&-9\\-1&4&-7\end{pmatrix}$.

四. (15分) 设下列非齐次线性方程组有3个线性无关的解向量：

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-x_4&=1,\\\lambda x_1+x_2+2x_3+7\mu x_4&=-2,\\4x_1+9x_2-5x_3-6x_4&=5.\end{cases}$$

(1) 求出该方程组系数矩阵的秩；(2) 求出参数 λ,μ 的值以及方程组的通解.

解：(1) $(A,b) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 7\mu+2-3\lambda & \lambda-3 \end{array}\right)$，无关解向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

易知 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$ 是 $Ax=\theta$ 的两个无关解，故 $r(A)=2$.

(2) 由 $r(A)=2$ 知 $\lambda=3,\mu=1$. 令 $x_3=x_4=0$得一个特解$\eta=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，

对应齐次方程组的基础解系为 $\beta_1=(-1,1,1,0)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-3,2,0,1)^{\mathrm{T}}$，通解为 $\eta+k_1\beta_1+k_2\beta_2$.

五.(15**分**) 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix}$.

(1) 计算矩阵 A 的特征值和特征向量；(2) 计算矩阵 $(A^2+A^*+2E)^{-1}$ 的特征值和特征向量.

解：(1) $|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda+4)^2$，故特征值 $\lambda=2,-4$(二重).

$\lambda=2$，特征向量为 $k_1\xi_1,\xi_1=(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$，

$\lambda=-4$，特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3,\xi_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\xi_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) $|A|=32$，令 $B=A^2+A^*+2E=A^2+32A^{-1}+2E$，$B\xi_1=(2^2+32*(1/2)+2)\xi_1=22\xi_1$,

$B\xi_2=10\xi_2,B\xi_3=10\xi_3$，故 $B^{-1}\xi_1=(1/22)\xi_1,B^{-1}\xi_2=(1/10)\xi_2,B^{-1}\xi_3=(1/10)\xi_3$.

于是 $(A^2+A^*+2E)^{-1}$ 的特征值为 $1/22,1/10,1/10$，对应特征向量为 ξ_1,ξ_2,ξ_3.

六.(10**分**) 设矩阵 $A\in \mathrm{R}^{m\times n},\mathrm{r}(A)<n$，列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 的基础解系，矩阵 $N=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\in \mathrm{R}^{n\times s}$. 证明：$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},N)=n$.

证：只要证明$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A \\ N^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=n$ 或 $\begin{pmatrix} A \\ N^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}x=\theta$ 只有零解.

x是$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$的线性组合

因为解满足 $Ax=\theta$，故x为基础解系的组合，从而存在s维向量 y 使得 $\boxed{x=Ny}$.

又 x 满足$N^{\mathrm{T}}x=\theta$，即 $N^{\mathrm{T}}Ny=\theta$，故 $x^Tx=y^TN^TNy=0$，于是 $x=\theta$ 为零解，结论得证.

证法二：易知 $\mathrm{r}(A)=n-s$，取 A^{T} 列的极大无关组 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-s}$，令 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_{n-s})$，则有 $B^{\mathrm{T}}N=O$.

考虑 $k_1\beta_1+\cdots+k_{n-s}\beta_{n-s}+t_1\alpha_1+\cdots+t_s\alpha_s=\beta+\alpha=\theta$，

其中 $\beta=k_1\beta_1+\cdots+k_{n-s}\beta_{n-s}=Bx$, $\alpha=t_1\alpha_1+\cdots+t_s\alpha_s=Ny$, $x=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-s} \end{pmatrix},y=\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_s \end{pmatrix}$.

则有 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha=x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Ny=0$，故 $0=\beta^{\mathrm{T}}\theta=\beta^{\mathrm{T}}(\beta+\alpha)=\beta^{\mathrm{T}}\beta$，故 $\beta=\theta$，于是 $\alpha=\theta$.

从而 $k_1=\cdots=k_{n-s}=0$, $t_1=\cdots=t_s=0$，即 $(B,N)=(\beta_1,\cdots,\beta_{n-s},\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 的列线性无关，

故有 $\mathrm{r}(B,N)=n$，最后可得 $n=\mathrm{r}(B,N)\le \mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},N)\le n$，即 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},N)=n$.