《微积分 I》（第一层次）期末考试试卷

2013/2014 学年第一学期 考试时间 2014.1.2 考试成绩

一、计算下列各题（本题满分 6 分 × 8 = 48 分）

1. 计算 $I=\int x\sqrt{1+x^2}dx$.

法一. $I=\frac{1}{2}\int\sqrt{1+x^2}\,d(x^2+1)\overset{3'}{=}\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$, $3'$

法二. $I\xlongequal{x=\tan t}\int\tan t\sec^3 t\,dt=\int\sec^2 t\,d(\sec t)$ $3'$

$=\frac{1}{3}\sec^3 t+C$ $2'$ $=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ $1'$

法三. 令 $t=\sqrt{1+x^2}$, $I=\int\sqrt{t^2-1}\cdot t\,d\sqrt{t^2-1}$ $3'$ $=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ $3'$

2. 计算广义积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1-x}{1+x^3}dx$.

法一. $t=\frac{1}{x}$ $I=\int_0^{+\infty}\frac{t-1}{1+t^3}dt=-I$, $\therefore I=0$

法二. $I=\int_0^{+\infty}\frac{\frac{2}{3}}{x+1}-\frac{1}{3}\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$ $3'$ $=\frac{1}{3}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}\Big|_0^{+\infty}$ $1'$ $=0$ $2'$

法三. $I=\int_0^{+\infty}\frac{1-x^3+x^2-x^2}{(1+x)(1-x+x^2)}dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x^2}{1+x^3}\right)dx$ $3'$ $=\frac{1}{3}\ln\frac{(1+x)^3}{1+x^3}\Big|_0^{+\infty}$ $1'$ $=0$ $2'$

3. 计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx$.

法一. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2x-1)\,d\cos x\overset{3'}{=}\left(\frac{1}{3}\cos^3x-\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\overset{2'}{=}\frac{2}{3}$ $1'$

法二. $I=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin x-\sin 3x)\,dx\overset{3'}{=}\left(\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{3}{4}\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\overset{2'}{=}\frac{2}{3}$, $1'$

法三. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,d(-\cos x)=-\sin^2x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x(1-\sin^2x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\,dx-2I$ $3'$. $\therefore I=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\overset{2'}{=}\frac{2}{3}$ $1'$

法四. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2x\sin x\,dx\overset{3'}{=}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2x\,d\cos x=-\frac{2}{3}\cos^3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\overset{2'}{=}\frac{2}{3}$.

法五. 令 $t=\sin x$, $I=-\int_0^1 t^2\,d\sqrt{1-t^2}\overset{3'}{=}-\frac{2}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\overset{2'}{=}\frac{2}{3}$.

4. 求极限 $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\tan x^2}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{e^{xt}-1}{t}dt$.

法一. $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2}\frac{e^s-1}{s}ds$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}2x-\frac{e^{\frac{x^2}{2}}-1}{x^2/2}x}{2x}=\frac{1}{2}$

法二. $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x}dt\right)\left(\frac{e^{x\xi}-1}{\xi}\right)$, $\xi\in(\frac{x}{2},x)$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$

5. 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$.

$I=\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)$ $3'$

$=\exp\left(\int_0^1\ln(1+x)dx\right)$ $2'$

$=e^{2\ln2-1}$ $1'$

其余不正确解法给1-2分

6. 求连续函数 $f(x)$，使得 $f(x)=x\arctan x+\frac{1}{1+x^2}\int_0^1 f(x)dx$.

令 $\int_0^1 f(x)dx=A$ $1'$

$\therefore f(x)=x\arctan x+\frac{A}{1+x^2}$ $1'$

$A=\int_0^1\left(x\arctan x+\frac{A}{1+x^2}\right)dx$ $1'$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}A$ $1'$

$A=\frac{\pi-2}{4-\pi}$ $1'$

$f(x)=x\arctan x+\frac{(\pi-2)}{(4-\pi)(1+x^2)}$ $1'$

7. 求曲线 $\rho = \sqrt{\sin\theta}$ $(0 \le \theta \le \pi)$ 所围图形面积.

$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\cos\theta \Big|_{\pi}^{0} = 1$

8. 已知向量 $\overrightarrow{AB} = (3,4,0)$, $\overrightarrow{AC} = (5,2,-14)$, 求等分 $\angle BAC$ 的单位向量.

$|\overrightarrow{AB}| = 5$ 1' $|\overrightarrow{AC}| = 15$ 1'

$\vec{r} = |\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC} = (70, 70, -70)$ 3' → 加错只减1分

$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$ 1'

二. (本题满分 10 分) 1. 证明: $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ 为 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调上升函数;

2. 证明不等式 $\frac{\pi^2}{9} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} dx < \frac{\pi^2}{6}$.

(1)

$f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$ 2'

$g(x) = \sin x - x\cos x$

$g'(x) = x\sin x > 0$ 2'

$x>0$ 时 $g(x) > g(0) = 0$

$\therefore f'(x) > 0$, 即 $f(x) \uparrow$ 2'

(2) $\frac{2}{3} = f(\frac{\pi}{6}) \le f(x) \le f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

$\therefore \frac{\pi^2}{9} \le \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} dx \le \frac{\pi^2}{6}$

三. (本题满分 10 分) 求旋轮线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 与 x 轴所围曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积.

$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2 dx$ 2'

$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt$ 4'

$= 5\pi^2 a^3$ 4'

注. 6分之后若结果不对时(有过程)得 2'

π. a 的次数不对时 得 3'.

8. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(3,4,0)$, $\overrightarrow{AC}=(5,2,-14)$, 求等分 $\angle BAC$ 的单位向量.

解: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=5$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=15$, 从而等分 $\angle BAC$ 的向量$=\pm(3\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\pm(14,14,-14)$

从而所求单位向量为 $\frac{\pm}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$.□

二.(本题满分 10 分) 1. 证明: $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ 为 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调上升函数;

2. 证明不等式 $\dfrac{\pi^2}{9}<\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}dx<\frac{\pi^2}{6}$.

证明 1: $f'(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$, 令 $g(x)=\sin x-x\cos x$, 则:

$g(0)=0$, $g'(x)=x\sin x>0(x\in(0,\frac{\pi}{2}))$, 故 $g(x)>0(x\in(0,\frac{\pi}{2}))$

由此, $f'(x)>0(x\in(0,\frac{\pi}{2}))$, 从而 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调上升.

证明 2: 由上述证明知, $\frac{\pi}{3}<\frac{x}{\sin x}<\frac{\pi}{2}(x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}))$, 故 $\dfrac{\pi^2}{9}<\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}dx<\frac{\pi^2}{6}$.□

三.(本题满分 10 分) 求旋轮线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴所围曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积.

解: 所求体积$=\displaystyle\int_0^{2\pi}\pi y^2(t)dx(t)=\pi\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3dt=a^3\pi\left(2\pi+3\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt\right)=5a^3\pi^2$.□

四.(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续单调增函数, 求证: $\displaystyle\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

证明: 令 $g(x)=\displaystyle\int_0^x tf(t)dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$, 则 $g(a)=0$, $g'(x)=\dfrac{x-a}{2}f(x)-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

由于 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续单调增函数, 则 $g'(x)\ge\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(x)\int_a^x dx=0$,

从而 $g(x)\ge 0(x\in[a,b])$, 特别地, $g(b)\ge 0$, 即: $\displaystyle\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.□

五.(本题满分 14 分) 讨论函数 $y=x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹向与拐点, 渐近线, 并作出草图.

解: 函数$y=x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}$ 的定义域为 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 且 $f(x)>0$.

$y'(x)=x^{-4}e^{-\frac{1}{x}}(1-2x)$, $y''(x)=x^{-6}e^{-\frac{1}{x}}(6x^2-6x+1)$.

$y'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

$x\in(-\infty,0)\cup(0,\frac{1}{2})$, $y'(x)>0$, 从而 $f(x)$ 单调上升, 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0_-}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0_+}f(x)=0$.

$x\in(\frac{1}{2},+\infty)$, $y'(x)<0$, 从而 $f(x)$ 单调下降, 且 $f(\frac{1}{2})=4e^{-2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

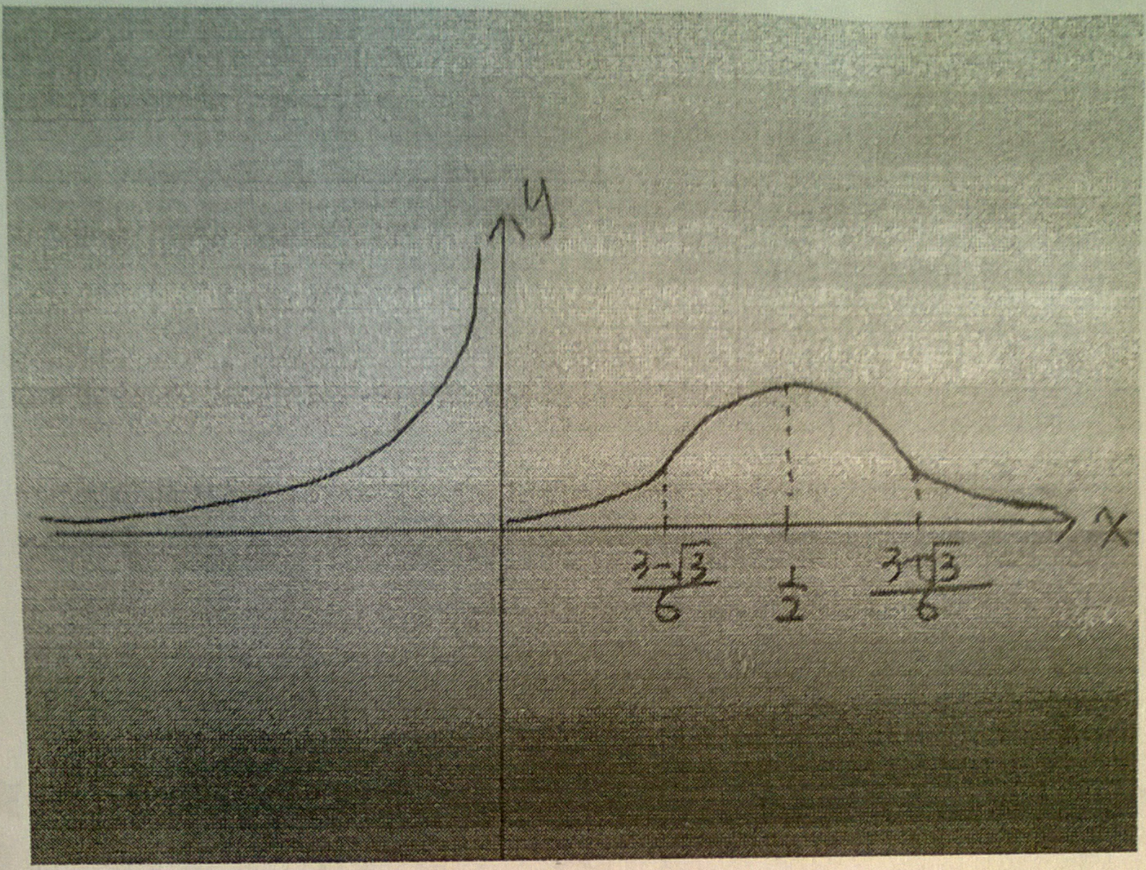
所以, $f(x)$ 单调上升区间为 $(-\infty,0)\cup(0,\frac{1}{2})$; 单调下降区间为 $(\frac{1}{2},+\infty)$;

$f(x)$ 具有如下渐进线: $y=0(x\to\infty)$, $x=0(x\to 0_-)$.

$f''(x)=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$.

$x\in(-\infty,0)\cup(0,\frac{3-\sqrt{3}}{6})\cup(\frac{3+\sqrt{3}}{6},+\infty)$, $f''(x)>0$, 从而函数为下凸函数. $x\in(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6})$, $f''(x)<0$, 从而函数为上凸函数. $\left(\frac{3\pm\sqrt{3}}{6},(3\mp\sqrt{3})^2e^{-(3\mp\sqrt{3})}\right)$ 为 $f(x)$ 的拐点.

函数草图如下:



□

六. (本题为非商学院同学做，满分 8 分) 已知函数 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上一阶连续可微的周期函数，最小正周期为 2π，且 $|f'(x)|\le 1$, 证明:

1. 对任意的连续函数 $g(x)$, 有 $\left|\int_0^1 g(x)f'(2\pi x)dx\right| \le \max\limits_{x\in[0,1]} g(x) - \min\limits_{x\in[0,1]} g(x)$;
2. 若 $g(x)$ 满足对任意的 $x_1,x_2\in[0,1]$, 有 $|g(x_1)-g(x_2)|\le|x_1-x_2|^{\frac{1}{2}}$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)f'(nx)dx = 0.$$

证明 1:

$$\left|\int_0^1 g(x)f'(2\pi x)dx\right| = \left|\int_0^1 (g(x)-\min_{x\in[0,1]} g(x))f'(2\pi x)dx + \min_{x\in[0,1]} g(x))\int_0^1 f'(2\pi x)dx\right|$$
$$\le \int_0^1 \left|(g(x)-\min_{x\in[0,1]} g(x)\right|dx \le \max_{x\in[0,1]} g(x) - \min_{x\in[0,1]} g(x).$$

证明 2:

$$\int_0^1 g(x)f'(nx)dx \xlongequal{t=nx} \frac{1}{n}\int_0^n g(\frac{t}{n})f'(t)dt$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{2\pi[\frac{n}{2\pi}]} g(\frac{t}{n})f'(t)dt + \frac{1}{n}\int_{2\pi[\frac{n}{2\pi}]}^n g(\frac{t}{n})f'(t)dt$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2\pi}]}\int_0^{2\pi} g\left(\frac{2\pi(i-1)+t}{n}\right)f'(t)dt + \frac{1}{n}\int_{2\pi[\frac{n}{2\pi}]}^n g\left(\frac{t}{n}\right)f'(t)dt$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2\pi}]}\int_0^{2\pi}\left[g\left(\frac{2\pi(i-1)+t}{n}\right) - g\left(\frac{2\pi(i-1)}{n}\right)\right]f'(t)dt + \frac{1}{n}\int_{2\pi[\frac{n}{2\pi}]}^n g\left(\frac{t}{n}\right)f'(t)dt$$

从而

$$\left|\int_0^1 g(x)f'(nx)dx\right| \le \frac{1}{n}\cdot[\frac{n}{2\pi}]\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\cdot 2\pi + \frac{1}{n}\cdot 2\pi\cdot\max_{x\in[0,1]}|g(x)|$$

$$\le \sqrt{\frac{2\pi}{n}} + \frac{2\pi\max_{x\in[0,1]}|g(x)|}{n}$$

$$\to 0(n\to\infty).\square$$

七.（本题为商学院同学做，满分 8 分）设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上二阶可微函数，且 $f''(x)\ge 0$，证明:

1. 对任意的 $x,p\in\mathbb{R}$，有 $f(x)\ge f(p)+f'(p)(x-p)$;
2. $\exp\left(\int_0^1(1+f^2(x))dx\right)\le\int_0^1\exp\left(1+f^2(x)\right)dx.$

证明 1: $f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+f''(\xi)(x-p)^2$ (其中 ξ 为介于 x 与 p 之间的某值.

由于 $f''(x)\ge 0$，从而 $f'(x)\ge f(p)+f'(p)(x-p)$，$\forall\, x,p\in\mathbb{R}$.

证明 2: 取 1 中 $f(x)=e^x$，1 中 x 为 $1+f^2(t)$，1 中 p 为 $\int_0^1(1+f^2(x))dx$，从而有

$$\exp(1+f^2(t))\ge\exp(\int_0^1(1+f^2(x))dx)+\exp(\int_0^1(1+f^2(x))dx)(1+f^2(t)-\int_0^1(1+f^2(x))dx)$$

上述表达式关于 t 从 $[0,1]$ 积分得: $\exp\left(\int_0^1(1+f^2(x))dx\right)\le\int_0^1\exp\left(1+f^2(x)\right)dx.\square$