概率论与数理统计期末通关手册

201220014 崔家才

1 随机事件与概率

1.1 随机事件概率的运算

1.2 古典概型与几何概型

1.3 条件概率

1.4 独立性

2 随机变量及其分布

2.1 分布律

2.2 分布函数

2.3 密度函数

2.4 一元积分计算

2.5 随机变量函数的分布

2.6 常用分布及其均值与方差

3 二维随机变量及其分布

3.1 分布函数

3.2 联合分布律

3.3 联合密度函数

3.4 二重积分计算

3.5 二维随机变量函数的分布

4 随机变量的数字特征

4.1 数学期望

4.2 方差

4.3 协方差与相关系数

5 极限理论

5.1 大数定律

5.2 中心极限定理

6 样本及抽样分布

6.1 抽样分布

6.2 正态总体样本均值与方差的分布

7 参数估计

7.1 矩估计

7.2 极大似然估计

7.3 估计量的评选标准

7.4 区间估计

8 假设检验

8.1 单正态总体假设检验

8.2 双正态总体假设检验

1 随机事件与概率

1.1 随机事件概率的运算

规范性：$P(A) \geq 0, P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$

互斥事件：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

差集：

$$P(A - B) = P(A) - P(B)$$

对立事件：

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

容斥原理：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC)$$

德摩根律：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

1.2 古典概型与几何概型

古典概型：

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

几何概型：

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

1.3 条件概率

定义：

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

规范性：

$$P(A|B) \geq 0, P(\Omega|B) = 1$$

可列可加性：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i|B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)$$

Ω 中的公式在 Ω_B 中仍然成立。

乘法公式：

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

推广：

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

全概率公式：

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

贝叶斯公式：

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{P(B)} = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

1.4 独立性

定义：

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

- A 和 B 独立，当且仅当 $\overline{A} \cdot B$ 、 $A \cdot \overline{B}$ 、 $\overline{A} \cdot \overline{B}$ 都独立。
- 多个事件独立，当且仅当其中两两独立、三三独立、……
- 分组独立性：多个事件相互独立，分组计算后组间也独立

2 随机变量及其分布

2.1 分布律

$$P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

2.2 分布函数

$$F(x) = P(X \le x) \Rightarrow P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

- 离散型：阶梯函数
- 连续型：连续函数（分段）

分布函数的性质：

- 单调性：$F(x)$ 单调不减
- 规范性： $F(x) \in [0,1], F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$
- 右连续性：$F(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

2.3 密度函数

规范性：

$$p(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1$$

分布函数：

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\, dx, \quad p(x) = F'(x)$$

求概率：

$$P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} p(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

2.4 一元积分计算

$$\int x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c, \quad \int e^{x}\, dx = e^{x} + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c, \quad \int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c, \quad \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c$$

换元积分：

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt, a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$$

分部积分：

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

2.5 随机变量函数的分布

$$Y = G(X)$$

离散型：

$$P(Y = y_i) = \sum_{y_i = g(x_i)} P(X = x_i)$$

连续型：

1. 分布函数法
   (a) 先求

   $$F_Y(y) = P(g(x) \leq y) = \int\limits_{g(x) \leq y} p(x)\, dx$$

   (b) 再求

   $$p_Y(y) = F_Y'(y)$$

2. 公式法：

$$p_x(x)=\begin{cases}>0, & a<x<b\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$g(x)$ 在 (a,b) 处处可导且 $g'(x)$ 恒正或恒负号，则

$$p_Y(y)=\begin{cases}p_x[g^{-1}(y)]|[g^{-1}(y)]'|, & \alpha<y<\beta\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\alpha=\min\{g(a),g(b)\},\beta=\max\{g(a),g(b)\}$$

2.6 常用分布及其均值与方差

分布名称	符号表示	分布律/密度函数/分布函数	均值	方差
0-1分布	$X\sim B(1,p)$	$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix}$	$EX=P$	$DX=p(1-p)$
二项分布	$X\sim B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n$	$EX=np$	$DX=np(1-p)$
泊松分布	$X\sim P(\lambda)$	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda},k=0,1,\cdots$	$EX=\lambda$	$DX=\lambda$
均匀分布	$X\sim U[a,b]$	$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$	$EX=\frac{a+b}{2}$	$DX=\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$X\sim E(\lambda)$	$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}, F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$	$EX=\frac{1}{\lambda}$	$DX=\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$X\sim N(\mu,\sigma^2)$	$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in\mathbb{R}$	$EX=\mu$	$DX=\sigma^2$
标准正态分布	$X\sim N(0,1)$	$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},x\in\mathbb{R}$	$EX=0$	$DX=1$
几何分布	$X\sim g(p)$	$P(X=k)=(1-p)^k\cdot p,k=1,2,\cdots$	$EX=\frac{1}{p}$	$DX=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}$

3 二维随机变量及其分布

3.1 分布函数

$$F(x,y)=P(X\leq x,Y\leq y),\quad F_X(x)=F(x,+\infty),\quad F_Y(y)=F(+\infty,y)$$

X,Y 独立等价于：

$$\forall x,\forall y,F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

3.2 联合分布律

$$P(X=x_i,Y=y_i)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

边缘分布：

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{n}P(X=x_i,Y=y_j)$$

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{n}P(X=x_i,Y=y_j)$$

3.3 联合密度函数

规范性:

$$p(x,y) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx\,dy = 1$$

求概率:

$$P((x,y) \in D) = \iint_D p(x,y)\,dx\,dy$$

边缘密度:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dy$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx$$

独立性: X,Y 独立等价于

$$\forall x, \forall y, p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

联合密度的分布函数:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(x,y)\,dx\,dy$$

画图按区域分类讨论

3.4 二重积分计算

累次积分法:

$$D_1 = \{(x,y)|a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$
$$\Rightarrow \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$
$$D_2 = \{(x,y)|\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), a \leq y \leq b\}$$
$$\Rightarrow \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

换元积分法:

$$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta$$

利用标准正态分布求积分:

$$\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}[\Phi(b) - \Phi(a)]$$

其中 Φ 查表即可, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ 。

3.5 二维随机变量函数的分布

离散型：枚举法

- 泊松分布的可加性： $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且 $X_k \sim P(\lambda_k)$ ，则
$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim P(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$$
- 二项分布的可加性： $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim B(k_i, p)$ ，则
$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim B(k_1 + k_2 + \cdots + k_n, p)$$
-

连续型：

1. 分布函数法： $Z = g(X, Y)$
$$F_Z(z) = P(g(x,y) \le z) = \iint_{g(x,y)\le z} p(x,y)\,dx\,dy, \quad P_Z(z) = F_Z'(z)$$
2. 公式法

   (a) 和的分布： $Z = X + Y$
$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z-y, y)\,dy$$
   若 x, y 独立的话：
$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\cdot p_Y(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(z-y)\cdot p_Y(y)\,dy$$
   (b) 差的分布： $Z = X - Y$
$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, x-z)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(y+z, y)\,dy$$
   (c) 积的分布： $Z = XY$
$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \frac{z}{x})\frac{1}{|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\frac{z}{y}, y)\frac{1}{|y|}\,dy$$
   (d) 商的分布： $Z = X/Y$
$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(yz, y)|y|\,dy$$
   (e) 极大极小分布： X, Y 独立
$$M = \max(X,Y) \Rightarrow F_M(z) = F_X(Z)\cdot F_Y(Z)$$
$$N = \min(X,Y) \Rightarrow F_N(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$
   当 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 独立同分布时，
$$F_M(z) = [F(z)]^n, \quad F_N(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

离散型 + 连续型：全概率公式。

4 随机变量的数字特征

4.1 数学期望

离散型：$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots$

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$$

连续型：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\,dx$$

线性特征：

$$E(aX+bY+c)=aEX+bEY+c$$

> 常用指示器随机变量，能够极大简化计算。

独立性：若 X,Y 相互独立，则：

$$E(XY)=EX\cdot EY$$

> 反之不亦然。

连续型随机变量函数的期望

$$Y=g(X)\Rightarrow E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\cdot p(x)\,dx$$

$$Z=g(X,Y)\Rightarrow E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)\cdot p(x,y)\,dx\,dy$$

> 离散型随机变量函数的期望也是类似的。

4.2 方差

定义：

$$DX=E(X-EX)^2=EX^2-(EX)^2$$

性质：

- $D(c)=0$，c 是常数；
- $D(cx)=c^2DX, D(-X)=DX, D(X+c)=DX$
- $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2cov(X,Y)$
  - 若 X,Y 独立，则 $D(X\pm Y)=DX+DY$。

切比雪夫不等式：EX,DX 均存在，对任意 $\varepsilon>0$，有

$$P(|X-EX|\geq\varepsilon)\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}\quad or\quad P(|X-EX|<\varepsilon)>\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

4.3 协方差与相关系数

定义：

$$cov(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)=EXY-EX\cdot EY$$

性质：

$$cov(X,k)=0,\quad cov(X,Y)=cov(Y,X),\quad cov(aX,bY)=ab\cdot cov(X,Y)$$
$$cov(X_1+X_2,Y)=cov(X_1,Y)+cov(X_2,Y)$$

独立性：如果 X,Y 独立，则

$$cov(X,Y)=0$$

协方差与方差：

$$D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2cov(X,Y)$$

柯西不等式：

$$[cov(X,Y)]^2\le DX\cdot DY$$

相关系数：

$$\rho_{XY}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}},\quad |\rho_{XY}|\le 1$$
$$|\rho_{XY}|=1\Leftrightarrow \exists a,b,P(Y=aX+b)=1$$

5 极限理论

5.1 大数定律

定义： 随机变量序列 $\{X_n\}$ 服从大数定律，等价于对于任意 $\varepsilon>0$ ，

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}EX_k\right|\ge\varepsilon\right)=0$$

或者

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}EX_k\right|<\varepsilon\right)=1$$

即

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}EX_k$$

切比雪夫大数定律： $\{X_n\}$ 相互独立，且方差一致有界：$\exists C,\forall k,DX_k<C$ ，则 $\{X_n\}$ 服从大数定律。

更重要的是证明过程，其实不需要方差一致有界，只需要和式方差低阶于 n^2 即可：

$$\frac{1}{n^2}D(\sum_{k=1}^{n}X_k) \to 0$$

之后用切比雪夫不等式进行放缩即可。

独立同分布大数定律：$\{X_n\}$ 独立同分布，$EX_n = \mu$ ，则 $\{X_n\}$ 服从大数定律：$\overline{X} \xrightarrow{P} \mu$ 。

伯努利大数定律：n 重伯努利实验中概率为 p 的事件 A 发生 n_A 次，则 $n_A/n \xrightarrow{P} p$ 。

独立同分布大数定律和伯努利大数定律都说明了频率的稳定性。

5.2 中心极限定理

独立同分布中心极限定理：$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，则

$$\sum_{i=1}^{n}X_i \overset{近似}{\sim} N\left[E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right), D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right]$$

拉普拉斯中心极限定理：$X \sim B(n,p)$ ，当 n 充分大时，

$$X \overset{近似}{\sim} N(np, np(1-p))$$

6 样本及抽样分布

样本的函数称为统计量，统计量的分布称为抽样分布。

6.1 抽样分布

正太总体样本的线性函数的分布：$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ，$X_1, X_2, \cdots X_n$ 是简单随机样本，
$U = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$ 也服从正态分布。

$$U \sim N(\mu\sum_{i=1}^{n}a_i, \sigma^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2)$$

- 分位点：$\Phi(u_\alpha) = 1-\alpha$ ，具有对称性。

χ^2 分布（标准正态平方和）：$X_1, X_2, \cdots X_n$ 是标准正态分布 $N(0,1)$ 的简单随机样本，则

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

- 可加性：$X_1 \sim \chi^2(n_1), X_2 \sim \chi^2(n_2)$ 且 X_1, X_2 独立，则 $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$ 。
- $X \sim \chi^2(n)$ ，则 $EX = n, DX = 2n$ 。
- 分位点：$n \le 45$ 时，$\chi^2_\alpha(n)$ 查表；$n > 45$ 时，$\chi^2_\alpha(n) = \frac{1}{2}(u_\alpha + \sqrt{2n-1})^2$ ；不具有对称性。

t 分布（标准正态分布比上标准化的卡方分布）：$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$ 且 X, Y 独立，则

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

- 分位点：$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$ （对称性）。

F 分布（正规化的卡方分布之比）： $U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$ 且 U, V 独立，则

$$F = \frac{U/n_1}{V/n_2} \sim F(n_1, n_2)$$

- 倒数性质： $F \sim F(n_1, n_2)$ ，则 $1/F \sim F(n_2, n_1)$ 。
- 分位点：$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = 1/F_\alpha(n_2, n_1)$ （不是对称性，只是结构性质）。

6.2 正态总体样本均值与方差的分布

单正态总体样本均值的分布：正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，有

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}), \quad U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

单正态总体样本方差的分布：

$$\chi^2 = \frac{nS_n^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$\overline{X}$ 与 S_n^2 独立。

单正态总体样本均值与样本方差的分布：

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S_n/\sqrt{n-1}} = \frac{\overline{X} - \mu}{S_{n-1}/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

双正态总体样本均值差的分布（已知方差）：

$$U = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

双正态总体样本方差比的分布：

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

S_1^2, S_2^2 是修正过的样本方差。

双正态总体样本均值差的分布（未知方差，但两组样本的方差相同）：

$$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

7 参数估计

7.1 矩估计

用样本矩代替总体矩进行估计。

以两个参数 θ_1,θ_2 为例：

$$\begin{cases}EX=\mu_1(\theta_1,\theta_2)\\EX^2=\mu_2(\theta_1,\theta_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=f_1(EX,EX^2)\\\theta_2=f_2(EX,EX^2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{\theta}_1=f_1(\overline{X},\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2)\\\hat{\theta}_2=f_2(\overline{X},\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2)\end{cases}$$

7.2 极大似然估计

一次实验就出现的事件具有极大概率。

以一个参数 θ 为例（多个参数求导改成求偏导即可）：

1. 样本似然函数：

$$L(\theta)=L(X_1,X_2,\cdots,X_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(X_i,\theta)$$

   离散型 $p(X_i,\theta)$ 为分布律，连续型则为密度函数。

2. 极大似然估计量：

$$L(\hat{\theta})=\max_{\theta}L(\theta)\Rightarrow\frac{dL(\theta)}{d\theta}=0\vee\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0\rightarrow\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

   代入具体样本值得到的 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为极大似然估计值。

极大似然估计的不变性：如果 $\hat{\theta}$ 是 θ 的极大似然估计， $u(\theta)$ 是 θ 的函数，且具有单值反函数，则 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的极大似然估计。

7.3 估计量的评选标准

无偏性：

$$E\hat{\theta}=\theta$$

- 样本矩是总体矩的无偏估计量。
- 样本方差 S_n^2 不是总体方差的无偏估计量，需要修正为 S_{n-1}^2 ，因为 $ES_n^2=((n-1)/n)\sigma^2$ 。

有效性：$D\hat{\theta}$ 越小越有效。

- 算数均值比加权均值更有效。

一致性：

$$\hat{\theta}_n\xrightarrow{P}\theta$$

用大数定律类似的方法证明。

- 样本矩是总体矩的一致估计量（大数定律）。
- $$\begin{cases} E(\hat{\theta}_n) = \theta \\ \lim\limits_{n \to \infty} D(\hat{\theta}_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$$
- 矩估计量一般为一致估计量。

7.4 区间估计

$$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$$

$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 是置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。

单正态总体均值 μ 的区间估计（已知方差 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ ）：

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

置信区间为

$$\left(\overline{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

单正态总体均值 μ 的区间估计（未知方差）：

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S_n/\sqrt{n-1}} \sim t(n-1)$$

置信区间为

$$\left(\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n-1}}, \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n-1}}\right)$$

单正态总体方差 σ^2 的区间估计：

$$\chi^2 = \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

置信区间为

$$\left(\frac{nS_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{nS_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

双正态总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计（已知方差 σ_1^2, σ_2^2）：

$$U = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

置信区间为

$$\left((\overline{X}-\overline{Y})-u_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},(\overline{X}-\overline{Y})+u_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

双正态总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的区间估计：

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

S_1,S_2 是修正过的样本方差。

置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\right)$$

8 假设检验

观察值与期望值差距不显著即可接受假设，差距的显著水平记为 α。

8.1 单正态总体假设检验

单正态总体均值的假设检验（σ^2 已知）：u 检验

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

双边检验：$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$

拒绝域：

$$W=\{|U|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\}$$

单边检验（以不超过为例，后续不再重复单边检验的拒绝域）：$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu>\mu_0$

拒绝域：

$$W=\{U\geq u_\alpha\}$$

单正态总体均值的假设检验（σ^2 未知）：t 检验

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S_{n-1}/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

双边检验拒绝域：

$$W=\{|T|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$$

单正态总体方差的假设检验：χ^2 检验

$$\chi^2=\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

双边检验拒绝域：

$$W=\{\chi^2\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}\cup\{\chi^2\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$$

8.2 双正态总体假设检验

双正态总体均值差的假设检验（ σ_1^2,σ_2^2 已知）： u 检验， $H_0:\mu_1=\mu_2$

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

双边检验拒绝域:

$$W=\{|U|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\}$$

双正态总体均值差的假设检验（$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知）： t 检验， $H_0:\mu_1=\mu_2$

$$T=\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

双边检验拒绝域:

$$W=\{|T|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\}$$

双正态总体方差比的假设检验： F 检验， $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

双边检验拒绝域:

$$W=\{F\leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\}\cup\{F\geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\}$$