2018.1.10.

一、1. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \frac{\ln(1+t)}{t} dt}{x^2}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot 2x}{2x} = 1$

洛必达法则 + 等价无穷小

2、令 $t=\ln x$, $x=e^t$ 换元

$I_1 = \int \cos t \, de^t = \cos t \, e^t - \int e^t \, d\cos t$

$= \cos t \, e^t + \int \sin t \, de^t$ 多次分部积分 ↓ 反解

$= (\cos t + \sin t)e^t - \int e^t \, d\sin t$

$= (\cos t + \sin t)e^t - \int \cos t \, de^t = (\cos t + \sin t)e^t - I_1$

$\therefore I_1 = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)e^t + C = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$

3、$I_2 = \int \dfrac{1}{x^2+2x+2} dx - \int \dfrac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} dx$

观察 ⇒ 凑微分法

$= \int \dfrac{1}{(x+1)^2+1} d(x+1) - \int \dfrac{d(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$

$= \arctan(x+1) + \dfrac{1}{x^2+2x+2} + C$

二、1. $I_3 = \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\, dx$ 令 $x = a\sin t$, $t\in(0, \frac{\pi}{2})$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t \, a\cos t \, d\, a\sin t$

$= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t \, dt$ 根式 ⇒ 三角换元

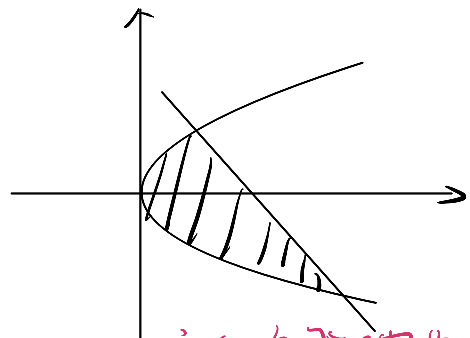
$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \, dt$$

$$= \frac{a^4}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2} \, d4t$$

$$= \frac{a^4}{32}(4t-\sin 4t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4}{16}\pi$$

2、法线 $y=-x+\frac{3p}{2}$ 即 $x=\frac{3}{2}p-y$

交点 $(\frac{p}{2}, p)$、$(\frac{9}{2}p, -3p)$



$$S=\int_{-3p}^{p}\left(\frac{3}{2}p-y-\frac{1}{2p}y^2\right)dy$$

$$=\frac{3}{2}py-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6p}y^3\Big|_{-3p}^{p}=\frac{16}{3}p^2$$

定积分求曲边梯形面积

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\,dx$$

3、$y=\ln(1-x^2)$，$y'=\frac{2x}{x^2-1}$

$$l=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{1-x^2}-1\right)dx$$

$$=\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\ln 3-\frac{1}{2}$$

定积分求弧长

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

三、1. $I_4=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+5}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\pi$$

广义积分

2、$(\vec{a}+3\vec{b})(7\vec{a}-5\vec{b})=7\vec{a}^2+16\vec{a}\vec{b}-15\vec{b}^2=0$

$(\vec{a}-4\vec{b})(7\vec{a}-2\vec{b})=7\vec{a}^2-30\vec{a}\vec{b}+8\vec{b}^2=0$

则 $46\vec{a}\vec{b}=23\vec{b}^2$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{b}^2$ 回代有 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$

$\therefore \cos\gamma = \dfrac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|} = \dfrac{\frac{1}{2}\vec b^2}{\vec b^2} = \dfrac{1}{2}$，又 $\gamma\in(0,\pi)$

$\therefore \gamma = \dfrac{\pi}{3}$　　　利用 向量内积求夹角

3. $\vec n_1 = (2,-1,1)$，$\vec n_2 = (5,-6,4)$

$\therefore$ L的方向向量 $\vec n = \vec n_1\times\vec n_2 = (4,1,-3)$

验证有点 $A(-\frac{4}{3},\frac{11}{3},0)$ 在直线L上

$\therefore \vec{PA} = (-\frac{7}{3},\frac{5}{3},-3)$　　　点到直线距离 $d=\dfrac{|\vec{PA}\times\vec n|}{|\vec n|}$

则距离 $d=\dfrac{|\vec{PA}\times\vec n|}{|\vec n|} = \dfrac{|(2,19,9)|}{|(4,1,-3)|} = \sqrt{\dfrac{223}{13}}$

四、证明：$x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n + x_n + \frac{1}{x_n^2}) \geq \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt[3]{x_n\cdot x_n\cdot\frac{1}{x_n^2}} = 1$

而 $x_{n+1}-x_n = \frac{1}{3}(\frac{1}{x_n^2}-x_n) = \dfrac{1-x_n^3}{3x_n^2}\leq 0$

$\therefore \{x_n\}$ 单调减　　　单调数列极限 $\to$ 单调有界 / $\to$ 夹逼

由单调有界准则可知 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\{x_n\}$ 极限为 A 则 $A=\frac{1}{3}(2A+\frac{1}{A^2})$，解得 $A=1$

$\therefore \{x_n\}$ 极限为 1

五、解：记 $I = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$　　　放缩 构造定积分定义形式

则 $I < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$　　　$\Rightarrow$ 夹逼准则

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n} = \int_0^1 \sin\pi x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin\pi x\,d\pi x$

$$= \frac{1}{\pi}(-\cos\pi x)\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

$I > \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\sin\frac{k\pi}{n}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\sin\frac{k\pi}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{2}{\pi}$$

由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty} I = \frac{2}{\pi}$

六、解：$f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$ 定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$f'(x)=\frac{-(x+1)}{(x-1)^3}$，$f''(x)=\frac{2(x+2)}{(x-1)^4}$

利用导数研究函数性质

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单减

$x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单增

$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单减

∴ $x=-1$ 为极小值点，$f(-1)=-\frac{1}{4}$，$f(x)$ 无极大值

当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$f''(x)<0$，$f(x)$ 下凹，

$x\in(-2,1),(1,+\infty)$ 时，$f''(x)>0$，$f(x)$ 上凹。

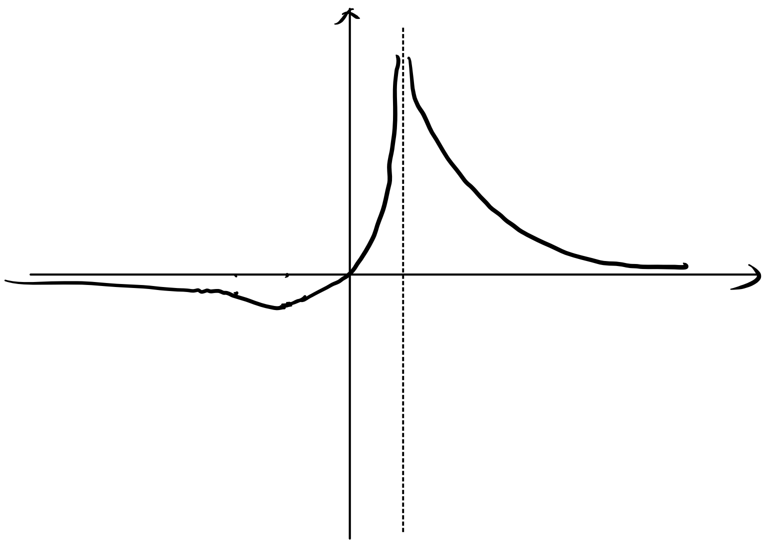
拐点为 $(-2,-\frac{2}{9})$

$x=1$ 是 $f(x)$ 的铅直渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，$y=0$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，则 $f(x)$ 无斜渐近线

作图：



七、直线标准方程为：$L: \frac{x-\frac{1}{3}}{2}=\frac{y-\frac{5}{3}}{10}=\frac{z}{-3}$

则其参数方程为：$L: x=\frac{1}{3}+2t,\ y=\frac{5}{3}+10t,\ z=-3t$

$\because L\subset$ 面 π 则 $\frac{\frac{1}{3}+2t}{a}+\frac{\frac{5}{3}+10t}{b}+\frac{-3t}{b}=1$ 恒

$\Leftrightarrow\ (\frac{2}{a}+\frac{7}{b})t+\frac{1}{3a}+\frac{5}{3b}-1=0$ 恒

$\Leftrightarrow\ \frac{2}{a}+\frac{7}{b}=\frac{1}{3a}+\frac{5}{3b}-1=0$

$\therefore\ a=-\frac{1}{7},\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \pi:\ 7x-2y-2z+1=0$

八、证明：不妨 $f(x)>0$ 恒，由 $f(x)$ 连续可知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有最大值 M 在 x_0 处取到，$f'(x_0)=0$ 最值定理

由$\boxed{\text{拉格朗日中值}}$定理，$\exists\, \alpha \in (0, x_0)$，$f'(\alpha) = \dfrac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \dfrac{M}{x_0}$

$\exists\, \beta \in (x_0, 1)$，$f'(\beta) = \dfrac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \dfrac{M}{x_0 - 1}$

而 $\underbrace{\int_0^1 \left| \dfrac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > \dfrac{1}{M}}_{\text{放缩掉 } f(x)} \int_0^1 |f''(x)| dx$ ← $f(x)$ 积分只需研究 $f''(x)$ 即可

放缩

$$\geq \frac{1}{M} \int_\alpha^\beta |f''(x)| dx$$

绝对值不等式

$$\geq \frac{1}{M} \left| \int_\alpha^\beta f''(x)\, dx \right|$$

$$= \frac{1}{M} \left| f'(\beta) - f'(\alpha) \right| = \frac{1}{x_0(1-x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{4} - (x_0 - \frac{1}{2})^2}$$

$$\geq \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

基本不等式

九. 证明：函数$f(x)$在$\frac{a+b}{2}$处的泰勒展式为：

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

ξ是与x相关的量，不是常量

$$\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

两边积分有 $\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right) dx$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$