一、证明可导性

1、利用定义：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处可导

2、等价条件：$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$ $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处可导

→ 分段函数在分段点处的导数必须用定义求

二、应用可导性

1、增量公式：$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$（估算用）

2、利用可导性导出原函数的连续性

三、利用导数研究函数的性质

1、单调性

构造适当的辅助函数并研究其单调性，可以证明某些不等式。

函数单调性 $\longleftrightarrow$ 导数正负性

2、极值 → 局部性质、不考虑端点

$f(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 内有定义且 $\forall x\in N_\delta(x_0)$ 有 $f(x)\le f(x_0)$

则称 x_0 为极大值点，$f(x_0)$ 为极大值（极小值类似定义）

① 极值 + 可导 ⇒ 驻点（导数为 0）〈费马引理〉

② 可疑极值点：驻点、不可导

极值判别法：

Ⅰ：$\begin{cases} (x-x_0)f'(x)>0,\ \forall x\in \mathring{N}_\delta(x_0) \Rightarrow \text{极小值} \\ (x-x_0)f'(x)<0,\ \forall x\in \mathring{N}_\delta(x_0) \Rightarrow \text{极大值} \end{cases}$

Ⅱ：$\begin{cases} f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Rightarrow \text{极小值} \\ f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \Rightarrow \text{极大值} \end{cases}$

3. 最值

$$\max_{a\le x\le b} f(x)=\max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$

$$\min_{a\le x\le b} f(x)=\min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$

其中，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 $f(x)$ 的可疑极值点。

4. 凹向性与拐点

① 凹向性的判别：$\begin{cases} f''(x)<0 \Rightarrow \text{下凹} \\ f''(x)>0 \Rightarrow \text{上凹} \end{cases}$ （个别点 $f''(x)=0$ 也可以）

② 拐点：$\exists\delta>0$，$(x_0-\delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0+\delta)$ 上 $f(x)$ 凹向
（曲线的拐点）

性相反 $\Rightarrow$ $(x_0, f(x_0))$ 为拐点、

可疑拐点：$f''(x)=0$ 或 $f''(x)$ 不存在

拐点判别法：

可疑拐点 + $f''(x)$ 在 x_0 左右邻域内异号 $\Rightarrow$ $(x_0, f(x_0))$ 是拐点

5. 曲线的渐近线

① 铅直渐近线：x 单侧趋近于 x_0 时，$f(x)\to\infty$

② 水平渐近线：$x\to\infty$ 时，$f(x)\to C$

③ 斜渐近线：$y=ax+b$ $\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} \\ b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax) \end{cases}$

另：$f(x)=ax+b+\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)\to 0$

6. 函数作图

步骤：(1) 定义域、奇偶性

(2) 单调性、极值、凹向性、拐点

(3) 渐近线