期中试题

第 1 题

a) 请证明调和级数满足：$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\Theta(\log n)$。

b) 请证明：$\log n!=\Theta(\mathrm{n}\log n)$。
（注：不可以使用 Stirling 公式。）

第 2 题

如果一个数组A[1..2n+1]，满足A[1] < A[2] > A[3] < A[4] > … < A[2n] > A[2n+1]，我们称之为“蛇形”的。给定数组B[1..2n+1]，其中元素各不相同，现在需要将它变成蛇形的。你只能通过元素间的大小比较来调整数组的形态。
1) 请设计一个O(n log n)的算法。
2) 请设计一个O(n)的算法。
(注：你需要阐述算法的正确性，并分析其代价)

第 3 题

考虑课上讲过的最坏情况O(n)的选择算法，记为SELECT5算法。你可能会有这样的疑惑：为什么元素应该分为5个一组，其它个数的分组是否可行。现在我们来分析一下3个元素一组的选择算法为什么不行。
现在假设我们按3个元素一组来进行选择，算法的其它设计与SELECT5算法一样。这一新的算法记为SELECT3算法。
a) 请分析并证明：对 SELECT3 算法而言，在任何情况下总是比 m*（median-of-median）小的元素的个数不超过 $\frac{n}{3}+3$。（注：请不要忽略 n 不是 3 的倍数等边界情况。）
b) 请分析并证明算法的最坏情况时间复杂度 T(n)可以用下面的递归方程来刻画：

$$\mathrm{T(n)} \geq \mathrm{T}\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil\right)+\mathrm{T}\left(\frac{2n}{3}-3\right)+\Omega(\mathrm{n}) \quad 。$$

c) 请用“prove by substitution”的方法证明$\mathrm{T(n)}=\Omega(n\log n)$。

第 4 题

给定n个各不相同的两两可比的元素$x_1, x_2, \ldots, x_n$，每个元素有正的权重值$w_1, w_2, \ldots, w_n$。记所有元素权重之和为W。定义这组元素中的1/3-median为满足下面条件的元素x_k：

$$\sum_{x_i<x_k} w_i<\frac{W}{3}，\sum_{x_i>x_k} w_i \leq \frac{2W}{3}$$

a) 请设计一个O(nlogn)的算法，找出给定元素中的1/3-median。
b) 请设计一个O(n)的算法，找出给定元素中的1/3-median。

第 5 题

你在一个有 n 个代表的政治会议会场内，每个代表都隶属于一个政党，但是并不知道他们属于哪个政党。假设你直接询问一个代表，他会拒绝回答，但是你可以通过介绍两个代表认识来分辨他们是否属于同一个政党（因为同一政党的代表会礼貌地握手并给予对方微笑；不同政党的代表会怒视对方）。

a) 假设代表中的大多数（一半以上）来自同一政党（称之为主要政党）。请设计一个算法来判定每个代表是否属于这个主要政党。

b) 假设代表们来自 k 个政党，一个政党占多数当且仅当属于它的代表的数目比其他任何政党的代表都多。请设计一个算法找出一个来自占多数的政党的代表，或者返回不存在占多数的政党。

第 6 题

给定一个二维比特数组，它有n行k列，存放了所有可能的k比特串，仅仅有某一个k比特串被剔除，所以我们有$n=2^k-1$。例如图中k=3，n=7，唯一缺失的比特串是101。现在我们需要计算出缺失的那个k比特串，所能做的关键操作是“检查数组的某一位是0还是1”。

1	1	0
1	1	1
0	0	1
0	1	0
0	0	0
0	1	1
1	0	0

1) 请设计一个O(nk)的算法，找出缺失的比特串。
2) 请设计一个O(n)的算法，找出缺失的比特串。

(注：你需要阐述算法的正确性，并分析其代价)