考试科目名称 离散数学期中测验（参考答案）

2017—2018 学年第 二 学期　　教师________考试方式：闭 卷

系（专业） 计算机科学与技术系　　年级________　　班级________

学号________________　　姓名______________　　成绩__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
分数									

得分	

一、（本题满分 12 分）

试符号化以下各命题，并根据前提推证结论是否有效.

前提：(1) “如果下午气温超过 30℃，则小余去游泳。”

(2) “如果小余去游泳，则她就不去看电影了。”

结论：“若小余没去看电影，则下午气温必超过 30℃。”

参考解答：

先将前提和结论的各命题符号化。

设P: 下午气温超过 30°C。Q:小余去游泳。R:小余去看电影。**(2 分)**

前提：(1) $P \to Q$，(2) $Q \to \neg R$；**（各 1 分）**

结论：$\neg R \to P$。**(1 分)** 语意蕴含可转化为判断命题永真性

要判断推理是否正确，即判断： $\varphi_1 \models \varphi_2$ iff. $\varphi_1 \to \varphi_2$ 永真

$(P \to Q) \wedge (Q \to \neg R) \Rightarrow \neg R \to P$ 是否成立 **（1 分）**，即$(P \to Q) \wedge (Q \to \neg R) \to (\neg R \to P)$是否永真 **（1 分）**。

通过真值表（看表格是否正确）或主析取范式（看主范式$\Sigma_{1,3,4,5,6,7}$是否正确）判定上式非永真式，因此推理无效。**(5 分)**

否定永真性也可举反例

得分	

二、（本题满分 10 分）

设A,B,C为集合，其满足$A\cap B=A\cap C=\emptyset$ 且 $B\approx C$，试证明：$A\cup B\approx A\cup C$.

参考解答：集合等势 $\Leftrightarrow$ 存在双射

由于$B\approx C$，故存在双射：$f:B\to C$（1 分）；构造$g:A\cup B\to A\cup C$：

函数就是映射

$$g(x)=\begin{cases}x & x\in A\\ f(x) & x\in B\end{cases}\quad (1\text{ 分}) \leftarrow \text{分段函数}$$

判断映射g的存在性

由于$A\cap B=\emptyset$，故不存在一多映射，所以g是函数（1 分）。下面证明g是单射函数：

假设$g(x_1)=g(x_2)$，若$g(x_1)\in C$则由于$A\cap C=\emptyset$，$g(x_1)\notin A$，则$g(x)=f(x)$，$f(x_1)=g(x_1)=g(x_2)=f(x_2)$，由于$f$是单射，因此$x_1=x_2$；若$g(x_1)\in A$，则由于$A\cap C=\emptyset$，则$g(x)=x$，故$x_1=g(x_1)=g(x_2)=x_2$ 故而$x_1=x_2$因此g是单射函数。（3 分）

只有双射才有反函数

对于任意$y\in A\cup C$，则$y\in A$或者$y\in C$；若$y\in A$，则$y\in A\cup B$且$g(y)=y$；若$y\in C$，则$\exists x\in B$，$f^{-1}(y)=x$，则$x\in A\cup B$且$g(x)=g(f^{-1}(y))=f(f^{-1}(y))=y$。因此，$g$是满射函数。（3 分）

综上，g是$A\cup B\to A\cup C$上的双射函数，因此$A\cup B\approx A\cup C$。（1 分）

□

$\Updownarrow$

单射 + 满射

$\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$

$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ $\qquad$ $\forall y\in B,\ \exists x\in A,\ f(x)=y$

即 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ $\qquad$ 即 $f(A)=B$

元素分析法

得分	

三、（本题满分 12 分）

$(x,y)R(u,v)$

$\Updownarrow$

$(u,v)R(x,y)$

$(x,y)R(u,v)$,

$(u,v)R(m,n)$

$\Rightarrow (x,y)R(m,n)$

$\forall (x,y), (x,y)R(x,y)$

定义在$\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$上的二元关系$\boxed{R:\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle} \Leftrightarrow x\cdot v = y\cdot u$（“·”为普通乘法运算）.

记号含义为 $((x,y),(u,v))\in R$

(1) 试证明R是$\boxed{\text{等价关系}}$; $\Leftarrow$ 自反性 + 对称性 + 传递性

(2) 试说明R在$\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$上诱导出的等价类的集合（商集）$\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+/R$可表示以下哪个数集：

$\mathbb{N}^+,\mathbb{Z}^+,\mathbb{R}^+,\mathbb{Q}^+,\mathbb{C}^+$?

参考解答:

(1) 二元关系R即为：

$$\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{u}{v}\ \textbf{（2 分）}$$

①对任意$\langle x,y\rangle\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$，因为$\frac{x}{y}=\frac{x}{y}$，所以$\langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$即 R 是自反关系；**（2 分）**

②设$\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$，则$\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{u}{v} \Leftrightarrow \langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle$，即 R 是对称的；**（2 分）**

③设任意$\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle,\langle w,s\rangle\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$，则$\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle\wedge\langle u,v\rangle R\langle w,s\rangle \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{u}{v}\wedge\frac{u}{v}=\frac{w}{s} \overset{\Rightarrow}{\cancel{\Leftrightarrow}} \frac{x}{y}=\frac{w}{s} \Leftrightarrow \langle x,y\rangle R\langle w,s\rangle$，故$R$是传递关系。综上，$R$是$\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$上的等价关系。**（2 分）**

(2) $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+/R$ 包含的正整数序偶集合$\{(x,y)|(x,y)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\}$可表示

$\boxed{\left\{\frac{x}{y}\middle| x,y\in\mathbb{Z}^+\right\}=\mathbb{Q}^+}$ **（4 分）**

描述法点出 $\mathbb{Q}^+$ 的含义

集合X的划分 $\Pi=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$，$\forall i$，$A_i \subseteq X$，$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = X$

$\forall i,j$ $A_i \cap A_j = \phi$

得分	

四、（本题满分 10 分）

定义（划分的加细）：对集合X的任意 2 个划分Π_1,Π_2，若$(\forall A \in \Pi_1, \exists B \in \Pi_2)(A \subseteq B)$，称划分$\Pi_1$是划分$\Pi_2$的一个加细（refinement），记为$\Pi_1 \preccurlyeq \Pi_2$.

R反对称 $\Leftrightarrow (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x=y$

试证明：集合A的所有划分的集合Π与关系$\preccurlyeq$构成偏序格$(\Pi, \preccurlyeq)$.

$\forall x,y \in \preccurlyeq$，$x,y$有上确界与下确界

参考解答：

先证明$(\Pi, \preccurlyeq)$是偏序集：

自反性 + 反对称性 + 传递性

1、$\forall P \in \Pi, P \preccurlyeq P$，因此$\preccurlyeq$自反；**(2 分)**

$\forall A \in P_1$

2、若$P_1 \preccurlyeq P_2 \wedge P_2 \preccurlyeq P_1$设$A_1 \in P_1$，由$P_1 \preccurlyeq P_2, \exists A_2 \in P_2, A_1 \subseteq A_2$，同样由$P_2 \preccurlyeq P_1, \exists A' \in P_1, A_2 \subseteq A'$，得到$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A'$，$\because$ P_1为划分，$\therefore A_1 = A', A_1 = A_2, P_1 \subseteq P_2$。同理 $P_2 \subseteq P_1$ $\therefore P_1=P_2$ 因此$\preccurlyeq$反对称；**(2 分)**

两两不相交

3、若$P_1 \preccurlyeq P_2 \wedge P_2 \preccurlyeq P_3$设$A_1 \in P_1$，由$P_1 \preccurlyeq P_2, \exists A_2 \in P_2, A_1 \subseteq A_2$，同样由$P_2 \preccurlyeq P_3, \exists A_3 \in P_3, A_2 \subseteq A_3$，得到$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$，即$P_1 \preccurlyeq P_3$。因此$\preccurlyeq$传递；

(2 分)

下证任意 2 个划分P_1, P_2均存在下确界（记为$P_\wedge$）与上确界（记为$P_\vee$）。

下确界构造

$P_\wedge$中的集合均为形如$A_1 \cap A_2$的非空集合，其中$A_1 \in P_1, A_2 \in P_2$。划分P_1与P_2的上确界为划分$P_\vee$，把集合A中的元素进行如下划分：$\forall x,y \in A, x \sim y \Leftrightarrow x$和$y$同属于$P_\vee$中某一个集合$S$，当且仅当从元素$x$出发，$\exists n \in \mathbb{N}$，存在路径$x = x_0, x_1 = x_2, \cdots, x_n = y$，其中$x_{i-1}$与$x_i$同属于划分$P_1$或$P_2$中的同一个集合里。**(3 分)**

综上，偏序集$(\Pi, \preccurlyeq)$构成偏序格。**(1 分)** □

得分	

五、（本题满分 12 分）

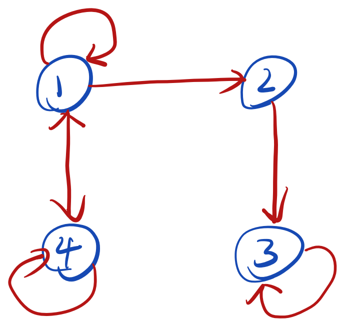
设S为定义在$\{1,2,3,4\}$上的二元关系，其关系矩阵为：

$$M_S=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix},$$

(1) 试用集合和关系图的方式表述关系S；

(2) 试判断S是否为等价关系并简述原因；

(3) 请给出关系S的"等价闭包"$S^*=\boldsymbol{t}\Big(\boldsymbol{s}\big(\boldsymbol{r}(S)\big)\Big)$的关系矩阵，其中$\boldsymbol{t}$、$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{r}$分别表示传递闭包、对称闭包和自反闭包.



关系图

参考解答：

1、 集合表示：关系 $S=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,3),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$ **（3 分）** 关系图表示（略，**3 分**）。

2、 因为等价关系必须是自反的，但显然$(2,2)\notin S$，因此S $\boxed{\text{不为等价}}$ 关系。**（3 分）**

证伪只需举反例

3、 根据构造自反、$\boxed{\text{传递}}$、对称闭包的算法（注意顺序）依次构造闭包即可，构造后的结果为：

Warshall 算法

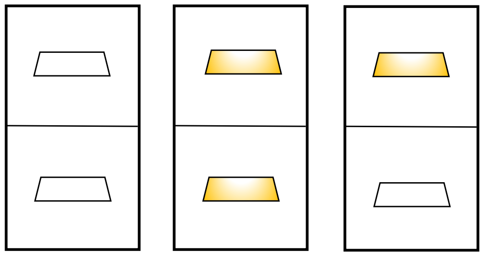
$$M_{S^*}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

即E_A。**（3 分，若未使用关系矩阵描述，扣 1 分）**

得分	

六、（本题满分 10 分）

有三个外观完全相同的箱子，每个箱子内都有一个不透明的挡板将箱子分为两个格子. 第一个箱子里为 2 块金条，第二个箱子里为 2 块银条，第三个箱子里为 1 块金条和 1 块银条（如图所示）. 现随机抽取一个箱子，然后随机打开它的一个格子，看到里面是金条. 试求这个箱子内另一个格子中也是金条的概率.



（第六题图）

参考解答:

确定基本事件

令事件$A=${抽取的箱子中的一个格子中是金条}，事件$B=${抽取的箱子中的另一个格子中是金条}**（2 分）**. 问题的解对应于求条件概率$P(B|A)$. 由条件概率公式：$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ **（2 分）**，事件$A\cap B=${抽取的箱子两个格子中都是金条}，故$P(A\cap B)=\frac{1}{3}$，$P(A)=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，**（3 分）** 因此所求条件概率$P(B|A)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$. **（3 分）**

注：用其它方式正确计算或分析得到概率也可以。

得分 | 　 七、（本题满分 10 分）

试证明：若$p \geq 7$为质数，则$240|(p^4-1)$.

参考解答：

$\because p \geq 7$为质数，$\therefore p$为奇数 **（1 分）**。又$\because p^4-1=(p-1)(p+1)(p^2+1)$ **（1 分）**，且$p-1$ 与$p+1$为相邻偶数，p^2+1亦为偶数 **（2 分）**，故

模分析

$\boxed{2\cdot 2\cdot 4|(p-1)(p+1)(p^2+1)\ \textbf{(2 分)}}$。由费马小定理，$(3,p)=(5,p)=$

费马小定理

1，$\therefore$ $\boxed{3|(p^2-1), 5|(p^4-1)\ \textbf{(2 分)}}$，又$\because 2\cdot 2\cdot 4=16$ 与 3，5两两互质，

整除性质

$\therefore$ $\boxed{16\cdot 3\cdot 5|p^4-1,}$ 即$240|(p^4-1)$。**（2 分）**

注：用其它数论方法证明也可以。

费马小定理：$p|n^p-n$

若$(p,n)=1$，则 $p|n^{p-1}-1$

得分	

八、（本题满分 12 分）

考虑一种$\boxed{\text{单次掷骰子}}$游戏：掷出奇数点得 1 分，掷出六点得 5 分，掷出二点或四点则扣 3 分.

令随机变量X为游戏的得分.

(1) 求$P(X \geq 1)$；

(2) 求X的期望值与方差；

(3) 令$Y = 2X - 1$，求Y的期望值与方差.

参考解答：

(1) $p(X \geq 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **（3 分）**

(2) $E(X) = 5 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + (-3) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ **（2 分）**；$E(X^2) = 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-3)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{23}{3}$

方差计算公式

$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2} = \frac{23}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{68}{9}$ **（2 分）**

(3) 由$\boxed{\text{期望的线性特征}}$：$E(Y) = 2E(X) - 1 = -\frac{1}{3}$ **（2分）**；$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 4E(X^2) - 4E(X) + 1 - (2E(X) - 1)^2 = 4E(X^2) - 4E(X)^2 = 4V(X) = \frac{272}{9}$ **（3 分）**

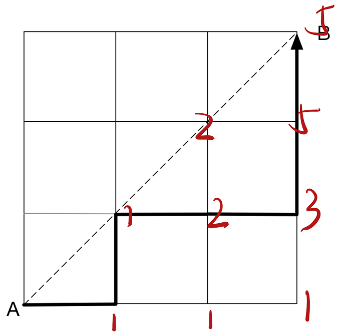
$V(kX+b) = k^2 V(X)$ 方差性质

得分	

九、（本题满分 12 分）

在$n\times n$个方格阵列中的左下角（A点）到右上角（B点）之间连一条对角线，若从点A到点B的“非降路线”不会穿越对角线AB，则称其为“Perfect 路线”，其计数记为p_n. 试证明：$p_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

【注】一条非降路线是指每一步都向右或者向上移动一格且仅移动一格的路线；对于下图所示的例子（$n=3$），从点A到点B的“Perfect 路线”共有 5 条，即$p_3=5$，图中的粗线即为一例.



（第九题图）

参考解答：

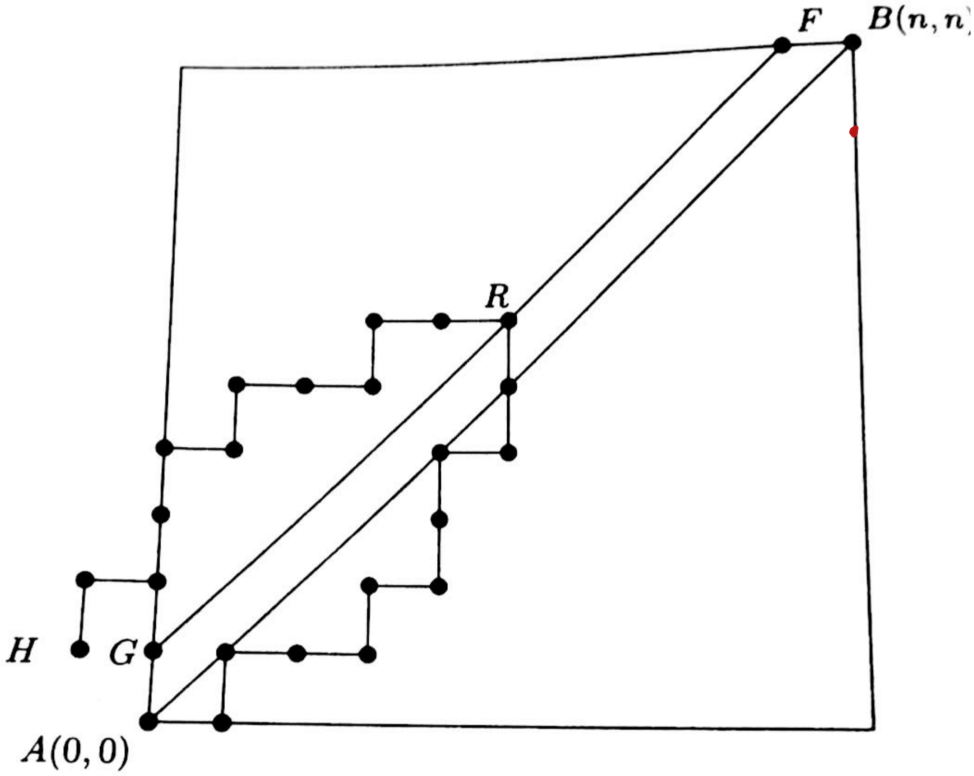
考虑从点A到点B的“Perfect 路线”的计数即为从点A到点B的“非降路线”的计数减去点A到点B的“全部穿过对角线 AB”的非降路线(称为“Bad 路线”）的计数（1 分），前者的计数为$\boxed{\binom{2n}{n}}$（2 分）；

非降路线共需2n步，其中选n步向右，其余n步向上，共C_{2n}^{n}种

考虑任何一条“Bad 路线”，其第一个点必须在对角线 AB 上方，假设此点为$R(m,m+1)$，则可以替换路径中从点 A 到点 R 的部分为其自身的“镜像”GF（如图所示）（2 分）。这样即可得到一条从点$H(-1,1)$到点$B(n,n)$的非降路径（1 分）。很明显，任意一条从点 H 到点 B 的非降路径必须穿过 GF 某处$\boxed{\text{并且恰好对应于一条从 A 到 B 的“Bad 路线”}}$（1 分）。因此“Bad 路线”的计数即为从点$(-1,1)$到点$(n,n)$的非降路线，其计数为：$\binom{n+1+n-1}{n+1}=\binom{2n}{n+1}$。（3 分）

构造对应来计数

因此，所求“Perfect 路线”的计数即为$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}=\binom{2n}{n}-\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$。（2 分）



注：本题有很多种可能的解法，只要有道理均可给分。但对于直接用现成结论，如“Catalan 数”等计数公式但没有任何说明和证明的，建议酌情扣分。