一、大数定律

1. 收敛：$\exists a, \forall \varepsilon>0, \lim\limits_{n\to\infty} P(|Y_n-a|\geq\varepsilon)=0$

或 $\lim\limits_{n\to\infty} P(|Y_n-a|<\varepsilon)=1$

则称序列 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n \cdots$ 依概率收敛于 a，记为 $Y_n \xrightarrow{P} a$

2. 定义 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} EX_k\right|\geq\varepsilon\right)=0$

或 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} EX_k\right|<\varepsilon\right)=1$

则称 $\{X_n\}$ 服从大数定律

3. 切比雪夫大数定律

$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 两两互不相关，

方差一致有界 $\rightarrow \exists C, \forall k, DX_k < C$

则 $\{X_n\}$ 服从大数定律 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} EX_k$

4. 独立同分布大数定律

$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布，$EX_n=\mu$，则

$\{X_n\}$ 服从大数定律 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$

频率稳定性的严格数学定义

5. 伯努利大数定律

n_A是n重伯努利试验中A发生的次数，

A发生的概率为p，则 $\frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p$

从理论上说明了频率的稳定性

二、中心极限定理

1. 标准化随机变量 $EX=0$，$DY=1$

$\forall X$，$Y=\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}$ 是标准化的随机变量

2. 独立同分布中心极限定理

$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同分布，$EX_k=\mu$，$DX_k=\sigma^2>0$

若 $Z_n=\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$，则

$\sum_{k=1}^{n} X_k$的标准化随机变量

$\forall x$，有 $\lim_{n\to\infty} P\{Z_n \le x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$

Z_n的极限分布是标准正态分布

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{近似}}{\sim} N\left[E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right), D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right]$

3. 拉普拉斯中心极限定理

μ_n是n重伯努利实验中A发生的次数

每次A发生的概率为p，$q=1-p$，则

$$\forall x,\ \lim_{n\to\infty} P\left(\boxed{\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}}} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \Phi(x)$$

标准化

服从二项分布$B(n,p)$的随机变量，

n充分大时近似成正态分布$N(np, npq)$