线性代数期中试卷　　(2018.11.17)

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&1&-\lambda\end{pmatrix}$ 经过多次初等行变换和列变换得到 $B=\begin{pmatrix}-5&17&6\\-7&0&5\\13&9&-8\end{pmatrix}$，求参数 λ .

将A与B化成梯形矩阵，利用秩相等

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&n-1\\n&&&&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$, $\boxed{C=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}}$，其中 $n\geq 2$，求 C^{-1}.

初等变换法

公式法

块对角 ⇒ $C^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&B^{-1}\end{pmatrix}$

公式：$|A^*|=|A|^{n-1}$

3. 设 $A\in\mathrm{R}^{3\times 3}$, $|A|\neq 0$，且有 $\boxed{A_{ij}=2a_{ij}}$, $i,j=1,2,3$，其中 A_{ij} 为矩阵元素 a_{ij} 的代数余子式，求 $|A^*|$.

$\Leftrightarrow$ $A^*=2A^T$（局部→整体 转化条件）

4. 设矩阵 $A=MN^{\mathrm T}$，其中 $M,N\in\mathrm{R}^{n\times r}$ $(r\leq n)$, $\boxed{|N^{\mathrm T}M|\neq 0.}$ 证明：$\mathrm{r}(A^2)=\mathrm{r}(A)$.

$\Leftrightarrow$ $r(N^TM)=r$ ⇒ $r(N)=r(M)=r$ 　秩的性质

$r=r((N^TM)^2)=r(N^TA^2M)\le r(A^2M)\le r(A^2)\le r(A)\le r(M)=r$

5. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&3&4&\cdots&n-1\\3&4&5&\cdots&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n-1&n-2&\cdots&1\end{vmatrix}$. ($D$的元素$a_{ij}=\begin{cases}i+j-1,&当i+j\leq n+1,\\2n+1-i-j&当i+j>n+1.\end{cases}$)

⇒化为三角阵处理

二.(10分) 设有向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-4\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\7\end{pmatrix}.$$

(1)求一个极大无关组，并用极大无关组表示其余向量；⇒化成行简化梯形阵

(2) 在4维列向量组 e_1,e_2,e_3,e_4 中找出所有不能被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性表示的向量，其中 $e_1=(1,0,0,0)^{\mathrm T}$, $e_2=(0,1,0,0)^{\mathrm T}$, $e_3=(0,0,1,0)^{\mathrm T}$, $e_4=(0,0,0,1)^{\mathrm T}$

组合 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\,|\,e_1,e_2,e_3,e_4)$，将左边化成行简化梯形阵，系数矩阵与每一个增广矩阵是否等秩

三.(10分) 设 $A\in\mathrm{R}^{3\times 3}$，$A$ 的第一列为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$，且 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ 和 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组 $(A-2E)x=\theta$ 的非零解，求 A.

$\Leftrightarrow$ $A(e_1,\xi_1,\xi_2)=(\alpha_1,2\xi_1,2\xi_2)$ 　分块矩阵 局部→整体（转化）

四. (15分) 设下列非齐次线性方程组有3个线性无关的解向量：

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-x_4&=1,\\\lambda x_1+x_2+2x_3+7\mu x_4&=-2,\\4x_1+9x_2-5x_3-6x_4&=5.\end{cases}$$

(1) 求出该方程组系数矩阵的秩；(2) 求出参数 λ,μ 的值以及$\boxed{方程组的通解}$.

= 特解 + 齐次的通解

$\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_1-\alpha_3$ 是 $Ax=\theta$ 的两个无关解 ⇒ $r(A)\le 4-2=2$ ⇒ $r(A)=2$

$(A\,\vdots\,b)$ → 行简化梯形阵 ⇒ $r(A)\geq 2$

⇓ λ,μ

五.(15分) 设 $A=\begin{pmatrix}2&6&6\\3&-1&3\\-3&-3&-7\end{pmatrix}$.

(1) 计算矩阵 A 的特征值和特征向量；(2) 计算矩阵 $(A^2+A^*+2E)^{-1}$ 的特征值和特征向量.

六.(10分) 设矩阵 $A\in\mathrm{R}^{m\times n}$, $\mathrm{r}(A)<n$，列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 的基础解系，矩阵 $N=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\in\mathrm{R}^{n\times s}$. 证明：$\boxed{\mathrm{r}(A^{\mathrm T},N)=n.}$

→ 利用线性方程组解的情况求秩

$\Leftrightarrow$ $r\begin{pmatrix}A\\N^T\end{pmatrix}=n$

（保持n为维数）

证明：考虑方程组 $\begin{pmatrix}A\\N^T\end{pmatrix}x=\theta$ 的解

∵ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 $Ax=\theta$ 的基础解系，

∴ x 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合

即 $x=Ny$

而 $A^Tx=\theta$，则 $A^TAy=\theta$

∴ $x^Tx = y^TA^TAy=\theta$ 则 $x=\theta$

即方程组 $\begin{pmatrix}A\\A^TA\end{pmatrix}x=\theta$ 只有零解

∴ $r\begin{pmatrix}A\\A^TA\end{pmatrix}=n$，即 $r(A^TA)=n$