一、利用定义：观察出极限的值，然后用 $\varepsilon-N$ 或 $\varepsilon-\delta$ 语言证明

- 注意：会经常用到放缩，放缩的原则有两个
  - 形式简单，易解方程
  - 极限为 0（保证能 $<\varepsilon$）
- 常用的代数变形公式：
  - 二项式定理（指数化幂）
  - 三角不等式

二、利用无穷小量：无穷小量 × 有界变量 = 无穷小量

有限个无穷小之和/积 = 无穷小

$\frac{k}{\text{无穷大}}$ = 无穷小

- 注意：$\lim x = A \Leftrightarrow x = A + \alpha$，其中 $\lim \alpha = 0$

（该定理可用于极限的运算，转化极限条件的形式）

三、利用极限的四则运算法则：将整体的极限转化成几个部分求

- 注意：
  - 极限的四则运算法则只适用于有限次运算
  - 将整体的极限分成几个部分的时候必须保证每个部分的极限是存在的.

四、利用极限的存在准则：

1、夹逼准则：　$Y \le Y \le Z$ 且 $\lim X = \lim Z = A$，则 $\lim Y = A$

- 常用技巧：放缩
  - 放缩求和
  - 裂项放缩
  - 等比放缩（结合不动点法）
  - $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$ ……（利用一些常用不等式）

2、单调有界准则 → 多用于递推式求极限

- 基本思路：
  - 证单调性 + 有界性 → 极限存在
  - 等式两边同时取极限，解方程得到最终的极限值

五、利用两个基本极限及其变形：

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

↓ 处理三角结构

$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

↓ 处理指数结构

← 注意整体代换的思想

推论：$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$；$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$；$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$；$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}=\frac{1}{e}$

$(1+\frac{1}{n})^{n}<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

$\Rightarrow \frac{k}{n+k}<\ln(1+\frac{k}{n})<\frac{k}{n}$

六、利用等价无穷小因子替换：只有在乘除关系中才能使用

· 常用的替换（计算不定型的极限）：

$\sin x\sim x$ $\tan x\sim x$ $\arcsin x\sim x$ $\arctan x\sim x$

$\ln(1+x)\sim x$ $e^{x}-1\sim x$ $1-\cos x\sim \frac{x^2}{2}$ $(1+x)^{\alpha}-1\sim \alpha x$

· 当整体不是乘除关系时，我们可以先应用极限的四则运算法则，在某一个乘除关系的部分里使用等价无穷小替换。

七、利用闭区间连续函数的性质

$\lim\limits_{x\to k} f(x) = f(k)$

八、罗必达法则

· 注意适用范围 · 注意转化

九、其它

1. 利用函数极限与数列极限的关系
2. 利用微分中值定理
3. 利用换元与代数变形进行转化
4. 利用导数定义
5. 利用 Stolz 定理

设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足：(1) $\{b_n\}\uparrow$ (严格)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty / 0$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} = A$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = A$

当 $\{a_n\}$ 或者 $\{b_n\}$ 为求和形式时用会较方便

例：设 $0<x_1<1$，$x_{n+1} = x_n(1-x_n)$

证明：(1) $\lim x_n = 0$ ← 单调有界准则

(2) $x_n \sim \frac{1}{n}$ ← Stolz 定理

$$\lim \frac{x_n}{\frac{1}{n}} = \lim x_n n = \lim \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim \frac{1}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}$$

$$= \lim \frac{1}{\frac{1}{1-x_{n-1}}}$$

$$= \lim (1-x_n) = 1$$

$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \cdots + \frac{1}{1-x_n}$（和的形式）

补2：设 $x_1 = \sin x_0 > 0$，$x_{n+1} = \sin x_n$

证明：(1) $\lim x_n = 0$

(2) $\lim x_n \sqrt{\frac{n}{3}} = 1$

$\Leftrightarrow \lim x_n^2 \cdot n = 3$