一、二次型的化简

1. 定义

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n$$
$$+\cdots$$
$$+a_{nn}x_n^2$$

二次型

实二次型　复二次型

令 $a_{ij}=a_{ji}$， $\Rightarrow$ $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n$
$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n$
$+\cdots$
$+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2$

记 $\mathbb{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

二次型 f 的矩阵

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ $\Rightarrow$ $f(x)=x^T\mathbb{A}x$ （其中 $\mathbb{A}^T=\mathbb{A}$）

$r(\mathbb{A})$ 称为二次型 f 的秩

2、性质

(1) $f(cx)=c^kf(x)$　f 为 k 次的齐次函数

(2) $\mathbb{B}$ 为任意方阵，$\mathbb{A}$ 实对称，若 $x^T\mathbb{B}x=x^T\mathbb{A}x$

考虑 x_ix_j 系数有 $b_{ij}+b_{ji}=2a_{ij}$，则 $\mathbb{A}=\frac{1}{2}(\mathbb{B}+\mathbb{B}^T)$

(补：$\mathbb{B}=\underbrace{\frac{1}{2}(\mathbb{B}+\mathbb{B}^T)}_{\text{对称部分}}+\underbrace{\frac{1}{2}(\mathbb{B}-\mathbb{B}^T)}_{\text{反对称部分}}$）　$\mathbb{A}$ 为 $\mathbb{B}$ 的对称部分

3. 标准形

(1) 定义：

① $f(x)=x^TAx$（A对称），若A为对角阵（即A中仅有平方项），则称二次型$f(x)=x^TAx$为标准形，其中，$A=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$，记其中有$p$个正数，$q$个负数，则称$p$为二次型的正惯性指数，$q$为二次型的负惯性指数，且$p+q=r$（二次型的秩）

② $\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases}$ 为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$到$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$的一个线性变换

即$x=Cy$，若$|C|\neq 0$，则称该变换称为非异/非退化线性变换，若$|C|=0$，则称该变换称为奇异/退化线性变换。

③ $B=P^TAP$ → A合同于B，B为A的合同矩阵，P为合同变换矩阵（等价关系：自反性、对称性、传递性）

(2) 性质：

① 存在非退化的线性变换将实二次型化为标准形，且平方项系数可以任意次序排列；存在可逆矩阵将实对称矩阵

合同变换为实对角矩阵，且对角元素可任意次序排列。

② 二次型标准形不唯一，但它们之间的正负惯性指数是相同的。

(3) 标准化步骤： $f(x) = x^T A x$

I 正交变换法：

① 求 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$

② 求 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 的基础解系（S_i 个）$\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots \xi_{is_i}$

并标准正交化为 $\eta_{i1}, \cdots \eta_{is_i}$；

③ 将标准正交化的特征向量作为列构成正交矩阵

$P = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$

则 $x = Py$ 将实二次型 $f(x)$ 化为标准形 $f(x) = g(y) = y^T \Lambda y$

其中 $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_2, \cdots \lambda_r, \cdots, \lambda_r)$

II 配方法

① 主元法配方（有非零平方项）

② 双曲换元（无非零平方项时用此法凑出平方项）

Ⅲ 合同变换法

设二次型的系数矩阵A，对 $B=\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$ 做一次初等列变换之后做一次相应的初等行变换，直到得到 $\begin{pmatrix}\Lambda\\P\end{pmatrix}$ 其中 Λ 为对角阵，由 $\begin{pmatrix}P^T & \\ & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}P^TAP\\P\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda\\P\end{pmatrix}$

可知我们能用非退化线性变换 $x=Py$ 标准化该二次型。

二、正定二次型

1、定义：

$\underbrace{f(x)}_{\text{正定二次型}}=x^T\underbrace{A}_{\text{正定矩阵}}x$ 为实二次型满足 $\forall x\neq\theta$，$x^TAx>0$

（<0：负定，≥ 0：半正定，≤ 0 半负定，… 不定）

$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii}\end{vmatrix}$ $(1\leq i\leq n)$ A的i阶顺序主子式

$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k}\end{vmatrix}$ $(1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_k\leq n)$ A的k阶主子式

2、性质：

(1) A正定 $\Leftrightarrow$ A的特征值均为正 $\Leftrightarrow$ A的正惯性指数为n

$\Leftrightarrow$ A的各阶顺序主子式均为正

(2) A 半正定 $\Leftrightarrow$ A 的特征值均非负 $\Leftrightarrow$ A 的正惯性指数为 $r(A)$

$\Leftrightarrow$ A 的各阶主子式非负

(3) A 正定 $\Leftrightarrow$ $A = D^T D$ (D 可逆)

$\Leftrightarrow$ $A = B^2$ (B 正定)

(4) A 正定 $\Rightarrow$ $(\alpha^T A \beta)^2 \le (\alpha^T A \alpha)(\beta^T A \beta)$

三、二次型的规范形

1. 定义：$z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$, $r \le n$ (实规范形)

p：正惯性指数　r：二次型的秩

2. 性质：

(1) 惯性定理：存在非退化的实线性变换将实二次形规范化.(即存在实可逆矩阵将实对称矩阵合同变换为 $\mathrm{diag}(E_p, -E_{n-p}, O_{n-r})$)