微积分 I（第一层次）期中试题参考答案 2012.11.24

一、（7 分）用极限定义（$\varepsilon-\delta$ 语言）证明函数的极限：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{4}$.

证明：$\forall\varepsilon>0$，先限定 $|x-2|<1$，即 $1<x<3$．取 $\delta=\min\{1,\varepsilon/5\}$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有 $|\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{4}|=\dfrac{|x-2||x+2|}{4x^2}<5|x-2|<\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{4}$.

定义＋放缩（取点）

定义域

定义 → 看左右极限

二、（8 分）指出函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{x|x^2-1|}$ 的间断点，并讨论其类型．

解：$f(x)$ 的间断点为 0，± 1 ．因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\sin x}{x|x^2-1|}=1$，所以 0 为可去间断点．

因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)\sin x}{x|x^2-1|}=\infty$，所以 1 为无穷间断点或第二类间断点．

因为 $\lim\limits_{x\to -1-}\dfrac{(x+1)\sin x}{x|x^2-1|}=-\dfrac{\sin 1}{2}$，$\lim\limits_{x\to -1+}\dfrac{(x+1)\sin x}{x|x^2-1|}=\dfrac{\sin 1}{2}$，所以 -1 为跳跃间断点．

$f''(0)$ 可作为已知条件使用

三、（8 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{x^2}}$.

$\Rightarrow f(0)=f'(0)=0$

解： 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，以及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，可得 $f(0)=0$，且

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0\ .\quad \text{于是}\ \lim_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{x^2}}=\exp(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2})=\exp(\frac{f''(0)}{2})\ .$$

洛必达

四、（21 分，每小题 7 分）计算下列各题：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{x}{e^{x^2}-1}\right]$；

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x\ln(1+x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)-1-x(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{2}\ .$$

泰勒展开式

(2) 设 $y=\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}+2^{\sin x}$，求 dy 以及 $dy|_{x=2}$； 算！

解： $dy=\left(\frac{1}{1+x^2}+2^{\sin x}\ln 2\cos x\right)dx$， $dy|_{x=2}=(\frac{1}{5}+2^{\sin 2}\ln 2\cos 2)dx$.

设切点，解切点

(3) 过 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，求该切线方程以及对应的法线方程 .

解：设切点为 (x_0,y_0)，则切线的斜率为：$k=\frac{y_0-0}{x_0-1}=\frac{\sqrt{x_0-2}}{x_0-1}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}$，解得 $x_0=3, y_0=1$，所以切线方程为：$x-2y-1=0.$，对应的法线方程为：$2x+y-7=0$.

另解：不动点法＋夹逼准则

五、（10 分）设 $x_1=2, x_{n+1}=\frac{2x_n+1}{x_n+2}$. 论证数列 $\{x_n\}$ 极限的存在性并求之.

解：$x_1=2>1$，设 $x_n>1$，则 $x_{n+1}=2-\frac{3}{x_n+2}>2-\frac{3}{1+2}=1$，所以 $\{x_n\}$ 有下界 1 .

又 $x_{n+1}-x_n=\frac{1-x_n^2}{x_n+2}<0$，所以 $\{x_n\}$ 单调减少 . 据单调有界准则 $\{x_n\}$ 收敛 . 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则我们对 $x_{n+1}=\frac{2x_n+1}{x_n+2}$ 等式两边关于 $n\to\infty$ 取极限，得 $A=\frac{2A+1}{A+2}$，解得 $A=1\,(-1$ 舍去$)$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

六、（10 分）设 $f(x)=e^x\ln(1+x)+\sin x+ax^2+bx+c$，$f(x)=o(x^2)$，求 a,b,c，并求 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的无穷小阶数，指出其无穷小主部 .

于

用泰勒展开式展开至 $o(x^3)$

解：用 $e^x,\ln(1+x),\sin x$ 的泰勒公式代人 $f(x)$ 的表达式中可得

$$f(x)=(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3))(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3))+(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))+ax^2+bx+c$$

$$=c+(2+b)x+(a+\frac{1}{2})x^2+\frac{x^3}{6}+o(x^3)，因为\ f(x)=o(x^2)，所以$$

$c=0, b=-2, a=-1/2$. 且 $f(x)$ 的无穷小阶数为 3，无穷小主部为 $\frac{x^3}{6}$.

七、(12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上二阶可导，$f(0)=0, f(1)=2, f(\frac{\pi}{2})=1$.

（1）求证：$\exists\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(\xi)=0$. ←利用拉格朗日找点，+零点存在定理

（2）求证：$\exists\eta\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(\eta)+f''(\eta)\tan\eta=0$. ←构造原函数，利用罗尔中值定理。

证明：（1） 由题意，对 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上使用 Lagrange 定理，存在 $\xi_1\in(0,1)$，使得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=2>0$，在 $[1,\frac{\pi}{2}]$ 上使用 Lagrange 定理，存在 $\xi_2\in(1,\frac{\pi}{2})$，使得

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(1)}{\frac{\pi}{2}-1}=\frac{-2}{\pi-2}<0.$$

又 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，所以由零点定理，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(\xi)=0$

（2）令 $F(x)=\sin x f'(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,\xi]$ 上连续，在 $(0,\xi)$ 内可导，且 $F(0)=0$，$F(\xi)=0$，由 Rolle 定理 $\exists\eta\in(0,\xi)\subset(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $F'(\eta)=0$，而 $F'(x)=\cos xf'(x)+\sin xf''(x)$，所以有 $\cos\xi f'(\xi)+\sin\xi f''(\xi)=0$，因为 $\cos\xi\neq0$，所以 $f'(\eta)+f''(\eta)\tan\eta=0$. 证毕.

八、(10 分) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x<0;\\ x^2, & x\geq0.\end{cases}$，求 $f'(x)$，讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解：$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0-}x\sin\frac{1}{x}=0$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x^2-0}{x}=\lim\limits_{x\to0-}x=0$，所以 $f'(0)=0$. 在 $x\neq0$ 时

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x<0,\\ 2x, & x>0.\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0+}2x=0$, $\boxed{\lim\limits_{x\to0-}f'(x)=\lim\limits_{x\to0-}(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})\text{不存在}}$. 所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，左不连续（或 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续）.

九、(14 分) 讨论函数 $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点以及渐近线，绘制函数的简图.

解：函数的定义域为 $x\neq0$，由于 $f(0+)=+\infty$，所以 $x=0$ 为函数的垂直渐近线，

$f(0-)=0$.

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=(1+\frac{2}{x})e^{\frac{1}{x}}=1, b=\lim_{x\to\infty}((x+2)e^{\frac{1}{x}}-x)=\lim_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)+2\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=3.$$

所以函数有斜渐近线： $y=x+3$.

$y'=e^{\frac{1}{x}}\dfrac{x^2-x-2}{x^2}$，令 $y'=0$，解得驻点 $x=-1,2$. 函数的增区间为：$x<-1, x>0$，函数的减区间为：$(-1,0),(0,2)$，在 $x=-1$ 处取得极大值 $y(-1)=1/e$，在 $x=2$ 处函数取得极小值 $y(2)=4\sqrt{e}$.

$y''=e^{\frac{1}{x}}\dfrac{5x+2}{x^4}$,令 $y''=0$，解得 $x=-2/5$. 函数的上凹区间为 $(-\frac{2}{5},0),(0,+\infty)$，函数的下凹区间为 $(-\infty,-2/5)$，拐点为 $(-\frac{2}{5},\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$.

图省略 .