微积分 I（第一层次）期中试题参考答案 2014.11.22

一、（12 分，每小题 6 分）用极限定义证明下列极限：放缩

1、 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+1}{3n^2-n+6}=1$（$\varepsilon-N$ 语言）；　　2、 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$（$\varepsilon-\delta$ 语言）.

证明： 1、 $\forall\varepsilon>0$，要证明 $\left|\dfrac{3n^2+5n+1}{3n^2-n+6}-1\right|=\dfrac{6n-5}{3n^2-n+6}<\dfrac{6n-2}{3n^2-n}=\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{3n^2+5n+1}{3n^2-n+6}-1\right|<\dfrac{6n-2}{3n^2-n}=\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+1}{3n^2-n+6}=1$.

2、 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-1|<\delta$，有

$$\left|\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}-2\right|=\left|\sqrt{x}+1-2\right|=\left|\sqrt{x}-1\right|=\left|\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\right|<|x-1|<\varepsilon,\text{因此 }\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2.$$

二、（12 分，每小题 6 分）计算下列各题：

1、 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x(5^x-1)\ln(1-3x)}{\arcsin x(\cos x-1)\arctan x}$； 等价无穷小替换

2、设 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)$，求 $f'(0)$　$(-1)^{n-1}(n-1)!$.

解： 1、原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2x\ln5(-3x)}{x(-\frac{x^2}{2})x}=6\ln5$. F1：利用定义　F2：利用求导法则

F3：利用公式

2、 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^x-1)(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$

$$=\lim_{x\to0}(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)=(-1)(-2)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

或者先求 $f'(x)$，

$$f'(x)=e^x(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)[(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)]'$$

将 $x=0$ 代人，得 $f'(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$.

三、（16 分，每小题 8 分）计算下列极限：

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$；　　2、$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$.

解： 1、原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2-2\cos x}(e^{x^2-2+2\cos x}-1)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$ 等价无穷小+洛必达法则

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{12}.$$

2、原式$=\exp\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\dfrac{\tan x-1}{\cos x-\sin x})\right)=\exp\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos x(\cos x-\sin x)})\right)=e^{-\sqrt{2}}$. 对数化+等价无穷小

定义域

（8 分）设 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x^2-3x+2)}$，求 $f(x)$ 的间断点，并指出间断点的类型.

看左右极限

解：0，1，2 为函数的间断点.

因为，$f(0+)=-\sin 2/2,\ f(0-)=\sin 2/2$，所以 0 为跳跃间断点；

因为，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$，所以 1 为无穷间断点；

因为，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-2)(x-1)}=1$，所以 2 为可去间断点.

四、（8 分）设 $y=y(x)$ 由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 所确定，求 dy.

解： 对方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 两边关于微分，得 一元函数微分的

$\dfrac{1}{2}\dfrac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{1+(y/x)^2}\dfrac{xdy-ydx}{x^2}$，化简，得 $dy=\dfrac{x+y}{x-y}dx$. 形式不变性

五、（12 分）设 $x_1>0,\ x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}$ $(c>1)$，$n=1,2,3,\cdots$，讨论该数列 $\{x_n\}$ 的收敛性.

如果数列收敛，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 单调有界准则 / 夹逼准则

解： $x_{n+1}-x_n=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}-\dfrac{c(1+x_{n-1})}{c+x_{n-1}}=\dfrac{c(c-1)(x_n-x_{n-1})}{(c+x_n)(c+x_{n-1})}$，由于 $c>1$，所以 $c-1>0$，

所以 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号，依次类推，$x_{n+1}-x_n$ 与 x_2-x_1 同号. 如果 $x_2-x_1>0$，则数列 $\{x_n\}$ 单调上升，且 $x_n<c$，故由单调有界准则知 $\{x_n\}$ 收敛；如果 $x_2-x_1<0$，则数列 $\{x_n\}$

单调下降，且 $x_n > 0$，故由单调有界准则知 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，对

$x_{n+1} = \dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}$ 两边关于 $n\to\infty$ 取极限，得 $A = \dfrac{c(1+A)}{c+A}$，解得 $A = \pm\sqrt{c}$（舍去负数），所以得 $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{c}$.

六、（10 分）求极限：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$. 夹逼准则

解：设 $x_n = \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$，则 $1 < x_n < \sqrt[n]{n}$，因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$，所以由夹逼定理，得 原式=1 .

利用必要条件+定义 或 洛必达法则

八、（10 分） 设 $f(x) = e^x\ln(1+x) + \sin x + ax^2 + bx + c, f(x) = o(x^2)$,求 a,b,c, 并求 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的无穷小阶数和无穷小主部.

解：由题意 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} = 0$,$\because \lim_{x\to 0} x^2 = 0$,$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ，即有 $c = 0$；使用一次洛毕达法则，有 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{e^x\ln(1+x) + e^x/(1+x) + \cos x + 2ax + b}{2x} = 0$，此时，分子也必须趋于零，又可得 $b = -2$. 再使用洛毕达法则得，

$\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{e^x\ln(1+x) + 2e^x/(1+x) - \mathrm{e}^x/(1+x)^2 - \sin x + 2a}{2} = 0$，得 $a = -1/2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\ln(1+x) + \sin x - 0.5x^2 - 2x}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x\ln(1+x) + e^x/(1+x) + \cos x - x - 2}{kx^{k-1}}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x\ln(1+x) + 2e^x/(1+x) - e^x/(1+x)^2 - \sin x - 1}{k(k-1)x^{k-2}}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x\ln(1+x) + 3e^x/(1+x) - 3e^x/(1+x)^2 + 2e^x/(1+x)^3 - \cos x}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}} = \frac{1}{6}(k=3)$$

所以，$x\to 0$ 时 $f(x)$ 的无穷小阶数为 3，无穷小主部为 $x^3/6$.

注：此题如果学生用泰勒公式将函数 $f(x)$ 写为：

$$f(x)=(1+x+x^2/2+o(x^2))(x-x^2/2+x^3/3+o(x^3))+x-x^3/6+o(x^4)+ax^2+bx+c$$
$$=2x+x^2/2+x^3/6+o(x^3)+ax^2+bx+c$$
$$=c+(2+b)x+(1/2+a)x^2+x^3/6+o(x^3)$$

由 $f(x)=o(x^2)$，要求 $c=0,2+b=0,1/2+a=0\Rightarrow a=-1/2,b=-2,c=0$.

故 $f(x)=x^3/6+o(x^3)$，所以，$x\to 0$ 时 $f(x)$ 的无穷小阶数为 3，无穷小主部为 $x^3/6$.

两边同时求导

九、（12 分）证明：（1）可导的奇函数的导数为偶函数，可导的偶函数的导数为奇函数；

（2）设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，$f(1)=1$. 证明：

拉格朗日中值　　构造函数应用罗尔中值定理

① 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=1$. ②存在 $\eta\in(-1,1)$ 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

$F(x)=e^x(f'(x)-1)$

$F(-\xi)=F(\xi)=0$ … ✓

证明：（1）设 $f(x)$ 为奇函数，则有 $f(-x)=-f(x)$，两边关于 x 求导，得

$-f'(-x)=-f'(x)$，即 $f'(-x)=f'(x)$，故可导的奇函数的导数为偶函数；

设 $f(x)$ 为偶函数，则有 $f(-x)=f(x)$，两边关于 x 求导，得

$-f'(-x)=f'(x)$，即 $f'(-x)=-f'(x)$，故可导的偶函数的导数为奇函数.

（2）由于 $f(x)$ 为奇函数，所以可以推出 $f(0)=0$.

① 构造函数 $F(x)=f(x)-x,x\in[0,1]$，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=f(0)-0=0,F(1)=f(1)-1=0$，所以由洛尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$，由于 $F'(x)=f'(x)-1$，所以有 $f'(\xi)=1$.

② 构造函数 $G(x)=e^x[f'(x)-1],x\in[-1,1]$，$G(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，在 $(-1,1)$ 内可导，由①我们知道 $F'(x)$ 为偶函数，所以有 $f'(-\xi)=1$. 在 $[-\xi,\xi]$ 上，$G(x)$ 在 $[-\xi,\xi]$ 上连续，在 $(-\xi,\xi)$ 内可导，且 $G(-\xi)=G(\xi)=0$，所以由洛尔定理，存在 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$，使得 $G'(\eta)=0$，而 $G(x)=e^x(f''(x)+f'(x)-1)$，所以有 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.