微积分 I (第一层次)期末试卷 2016.12.28

一、填空(3分× 8=24分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\Big)=$ ________;

2. 设参数方程为$\begin{cases} x=te^t, \\ y=2t+t^2, \end{cases}$ 则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=$ ________;

3. 函数$f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$的单调增加区间为____________;

4. 设当$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$较 $x\cdot\sin x^n$ 为高阶无穷小，而 $x\cdot\sin x^n$ 较 $e^{x^2}-1$ 为高阶无穷小，则正整数$n=$ __________;

5. 已知曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\displaystyle\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同, 则 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的法线方程为___________________;

6. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x+2}{x-3}}-1}$, 则 $x=3$ 是 $f(x)$ 的___________ 间断点;

7. 设向量 $\boldsymbol{a}$=2$\boldsymbol{i}$+3$\boldsymbol{j}$+$\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}$=7$\boldsymbol{i}$-4$\boldsymbol{j}$-2$\boldsymbol{k}$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=$ _______;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2(e^x-1)}=$ ______.

二、计算下列各题(6分×6=36分)

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}$.

2. 求 $I=\displaystyle\int_0^{\pi}x\cos^6 x\sin x\mathrm{d}x$.

3. 求过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $x=-t+2, y=3t-4, z=t-1$ 垂直的平面方程.

4. 计算 $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$.

5. 计算 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{x+1}+e^{3-x}}\mathrm{d}x$.

6. 计算 $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)=\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

三、设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ (A 为常数), 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

四、(12分) 讨论函数 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点, 渐近线, 并绘出函数图像.

五、(10分) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数且 $f''(x)<0$, 直线 L_t 是曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $(t,f(t))$ 处的切线 ($t\in[0,1]$). 记直线 L_t 与曲线 $y=f(x)$ 以及直线 $x=0, x=1$ 所围成的图形的面积为 $A(t)$. 证明 $A(t)$ 的最小值 $\min\limits_{0\le t\le 1}A(t)=f\Big(\dfrac{1}{2}\Big)-\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

六、(8分，本题非商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且非负，(1) 试证明：存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积，等于 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$为曲边的曲边梯形面积；(2) 又

设 $f(x)$ 在 $(0,1)$内可导，且 $f'(x) > -\dfrac{2f(x)}{x}$, 证明(1)中的 x_0 是唯一的.

七、(8分, 本题商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1-\xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$, 使得$f'(\eta_1)\cdot f'(\eta_2) = 1$.

微积分 I (第一层次)期末试卷 2018.1.10

一、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1+xt)\mathrm{d}t}{x^2}$.

2. 求不定积分 $I_1 = \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$.　　3. 求不定积分 $I_2 = \int \dfrac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

二、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求定积分 $I_3 = \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ \ (a>0)$.

2. 求抛物线 $y^2 = 2px$ 及其在点 $\left(\dfrac{p}{2}, p\right)$ 处的法线所围成的图形的面积.

3. 求曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\le x\le \dfrac{1}{2}$ 的一段弧的弧长.

三、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求广义积分 $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+9}$.

2. 设 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 γ.

3. 求点 $P(1,2,3)$ 到直线 $L:\begin{cases} x-y+z+5=0, \\ 5x-8y+4z+36=0 \end{cases}$ 的距离.

四、(10分) 设 $x_0>0, x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{1}{x_n^2}\right)$, $n=0,1,2,\cdots$, 求证：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

五、(10分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

六、(10分) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ 的定义域，单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并绘出草图.

七、(10分) 设直线 $L:\begin{cases} 2x-y-2z+1=0 \\ x+y+4z-2=0 \end{cases}$, 平面 Π 的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, a,b,c 均不等于0, 且 $b=c$, 平面 Π 过直线 L, 求平面 Π 的方程.

八、(6分，本题非商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，$f(0)=0, f(1)=0$, 且 $\forall x\in(0,1)$, 有 $f(x)\neq 0$. 求证：$\displaystyle\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>4$.

九、(6分, 本题商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x)>0$, 求证：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geq (b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$$

微积分 I (第一层次)期末试卷 2019.1.2

一、计算下列各题(6分× 4=24分)

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\Big(x^3\ln\frac{x+1}{x-1}-2x^2\Big)$. 2. $y=x^2\mathrm{e}^{3x}$, 求 $y^{(10)}$. 3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sin(xt)\mathrm{d}t}{x^3}$.

4. 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点 $(-3,2,5)$ 的直线方程.

二、计算下列各题(6分× 4=24分)

1. 求积分 $\displaystyle\int x\ln(2+x)\mathrm{d}x$. 2. 计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{x^5+x^3+x^2+x+\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

3. 计算广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

4. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leq x<1,\\ 1, & 1\leq x\leq 2,\end{cases}$ 设 $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\ (0\leq x\leq 2)$, 求 $F(x)$.

三、(10分) 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{n+1}+\frac{\ln\frac{n+2}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\ln\frac{2n}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

四、(10分) 求曲线 $y=\ln x$ 的一条切线，使得这条切线与原曲线以及直线 $x=1, x=\mathrm{e}^2$ 所围成的图形面积最小.

五、(12分) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$ 的定义域，单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并绘出草图.

六、(12分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上具有二阶连续导数.

(1) 如果 $f''(x)>0$ $(x\in[-a,a])$, 证明：$\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x\geq 2af(0)$;

(2) 如果 $f(0)=0$, 证明：在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 ζ, 使得 $a^3f''(\zeta)=3\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$.

七、(8分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$, 满足 $f^2(x)\leq 1+2\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $x\in[0,1]$. 证明：$f(x)\leq 1+x$, $x\in[0,1]$.

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案2016.12.28

一、 1. 1; 2. 2; 3. $[0, \frac{2}{5}]$; 4. 2; 5. $y=-x$; 6. 第一类(跳跃); 7. $\frac{\pi}{2}$ 8. $\frac{1}{2}$;

二、 1. $\frac{\pi}{6}$. 2. $\frac{\pi}{7}$. 3. $x-3y-z+4=0$. 4. $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{1+\ln x}+C$ 5. $\frac{\pi}{4e^2}$. 6. $\frac{1}{3e}-\frac{1}{6}$.

三、$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ $\varphi'(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x\neq 0,\\ \frac{A}{2}, & x=0.\end{cases}$ $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

四、 定义域 $x\neq 0$; 单调减区间$(-\infty,0)$, $(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$, 单调增区间$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty)$; 极小值$f(\frac{1}{\sqrt[3]{2}})=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, 下凹区间$(-1,0)$, 上凹区间$(-\infty,-1),(0,+\infty)$; 拐点$(-1,0)$; $x=0$是铅直渐近线; 没有水平渐近线，没有斜渐近线.

五、证明：切线方程为$y=f(t)+f'(t)(x-t)$, 因此

$$A(t)=\int_0^1\Big(f(t)+f'(t)(x-t)-f(x)\Big)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f'(t)-tf'(t)+f(t)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$A'(t)=\Big(\frac{1}{2}-t\Big)f''(t)=0 \text{ 得唯一驻点 } t=\frac{1}{2}, \text{所以 } \min_{0\le t\le 1}A(t)=A\Big(\frac{1}{2}\Big)=f\Big(\frac{1}{2}\Big)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

六、证明: (1) 由题意，即证存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $x_0f(x_0)=\int_{x_0}^1 f(x)\mathrm{d}x$, 即 $x_0f(x_0)+\int_1^{x_0} f(x)\mathrm{d}x=0$. 构造函数 $F(x)=x\int_1^x f(x)\mathrm{d}x$, 则 $F'(x)=xf(x)+\int_1^x f(x)\mathrm{d}x$, $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足洛尔定理的条件，从而存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $F'(x_0)=x_0f(x_0)+\int_1^{x_0} f(x)\mathrm{d}x=0$.

(2) 由题意，即证 $F'(x)=xf(x)+\int_1^x f(x)\mathrm{d}x$ 在 $(0,1)$ 内只有一个零点. $F''(x)=2f(x)+xf'(x)$, $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$可得 $F''(x)>0$, 故 $F'(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调增加，从而在 $(0,1)$ 内只有一个零点.

七、(1) 对函数 $F(x)=f(x)-1+x$ 在 $[0,1]$ 上用零点定理即得；

(2) 对函数 $f(x)$ 分别在 $[0,\xi]$、$[\xi,1]$ 上分别用拉格朗日中值定理即得.

微积分 I(第一层次)期末试卷参考答案2018.1.10

一、 1. 1; 2. $I_1=\frac{x}{2}(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C$. 3. $I_2=\arctan(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}+C$.

二、 1. $\frac{\pi a^4}{16}$. 2. $\frac{16}{3}p^2$. 3. $\ln 3-\frac{1}{2}$. 三、 1. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 2. $\frac{\pi}{3}$. 3. $\sqrt{\frac{223}{13}}$. 四、1. 五、$\frac{2}{\pi}$.

六、 定义域 $x\neq 1$; 单调减区间$(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$, 单调增区间$(-1,1)$; 极小值$f(-1)=-\frac{1}{4}$, 下凹区间$(-\infty,-2)$, 上凹区间$(-2,1),(1,+\infty)$; 拐点$(-2,-\frac{2}{9})$; $x=1$是铅直渐近线;$y=0$是水平渐近线.

七、$7x-2y-2z+1=0$.

八、证明：因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，且 $f(x)\neq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内不变号，不妨设 $f(x)>0$. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由最值定理，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有最大值 M. 设 $f(x_0)=M>0, x_0\in(0,1)$. 由拉格朗日中值定理，$\exists\,\alpha\in(0,x_0),\beta\in(x_0,1)$, 使得

$$f(1)-f(x_0)=f'(\beta)(1-x_0),\ \text{即}\ f'(\beta)=-\frac{M}{1-x_0};\quad f(x_0)-f(0)=f'(\alpha)(x_0-0),\ \text{即}\ f'(\alpha)=\frac{M}{x_0}$$

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{1}{M}\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x\geq\frac{1}{M}\int_\alpha^\beta|f''(x)|\,\mathrm{d}x\geq\frac{1}{M}\left|\int_\alpha^\beta f''(x)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{M}|f'(\beta)-f'(\alpha)|$$

$$=\frac{1}{M}\left|-\frac{M}{1-x_0}-\frac{M}{x_0}\right|=\frac{1}{x_0(1-x_0)}=\frac{1}{\frac14-(\frac12-x_0)^2}\geq 4.$$

九、证明：函数 $f(x)$ 在 $\dfrac{a+b}{2}$ 展开成泰勒公式

$$f(x)=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac12 f''(\xi)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2>f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big),$$

两边积分得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>\int_a^b\Big(f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)\Big)\mathrm{d}x$

$$=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\cdot\frac12\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2\Big|_a^b=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a).$$

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案2019.1.2

一、 1. $\dfrac{2}{3}$; 2. $y^{(10)}=3^8\mathrm{e}^{3x}(9x^2+60x+90)$; 3. $\dfrac12$; 4. $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$.

二、1. $\dfrac12x^2\ln(2+x)-\dfrac14x^2+x-2\ln(x+2)+C$; 2. $2-\dfrac{\pi}{2}$; 3. $\dfrac{\ln 2}{4}$; 4. $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-\frac13, & 0\leq x<1;\\ x-1, & 1\leq x\leq 2.\end{cases}$

三、$2\ln2-1$. 四、切线方程为 $y-\ln\dfrac{1+e^2}{2}=\dfrac{2}{1+e^2}x-1$.

五、单调增区间 $(-\infty,-4),(0,+\infty)$, 单调减区间 $(-4,-1),(-1,0)$; 极大值 $f(-4)=-\dfrac{256}{27}$, 极小值 $f(0)=0$; 下凹区间 $(-\infty,-1)$, 上凹区间 $(-1,+\infty)$; 没有拐点; 铅直渐近线 $x=-1$; 斜渐近线 $y=x-3$.

六、(1) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2\geq f(0)+f'(0)x\Longrightarrow\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x\geq\int_{-a}^a(f(0)+f'(0)x)\mathrm{d}x=2af(0)$.

(2) $f(x)=f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2\Longrightarrow\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^a f'(0)x\mathrm{d}x+\int_{-a}^a\frac{f''(\xi)}{2}x^2\mathrm{d}x=\frac12\int_{-a}^a f''(\xi)x^2\mathrm{d}x$,

设 $M=\max\limits_{x\in[-a,a]}f''(x)$, $m=\min\limits_{x\in[-a,a]}f''(x)$, 则 $m\leq\dfrac{3}{a^3}\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x\leq M$. 由介值定理,$\exists\,\zeta\in[-a,a]$, $s.t.\ a^3f''(\zeta)=3\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$.

七、证明：设 $u(x)=1+2\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $u(0)=1, u'(x)=2f(x)\leq 2\sqrt{u(x)}$, 而 $\sqrt{u(x)}-1=\displaystyle\int_0^x\frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}\mathrm{d}t\leq\int_0^x\mathrm{d}t=x$, 所以 $f(x)\leq\sqrt{u(x)}\leq 1+x$.