一、三角级数

1. 定义：$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(kx+\varphi_k)$

 是 $\frac{a_0}{2} = A_0 \sin\varphi_0$，$a_n = A_n \sin\varphi_n$，$b_n = A_n \cos\varphi_n$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$b_k = 0 \Rightarrow$ 余弦级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$

$a_k = 0 \Rightarrow$ 正弦级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$

二、三角函数系的正交性

1. 基本的三角函数系：

1，$\cos x$，$\sin x$，$\cos 2x$，$\sin 2x$，……，$\cos nx$，$\sin nx$，……

$\Rightarrow$ 任两个不同的函数乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上为 0

任两个相同的函数乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上为 π

（除了 1 以外） 单位正交系

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos x$，$\sin x$，$\cos 2x$，$\sin 2x$，……，$\cos nx$，$\sin nx$，……

线性空间．定义 $(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx}$$

三、函数展开成傅里叶级数

1. 定义：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

傅里叶级数

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$ ← 两边同乘 $\cos nx$ 积分

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$ ← 两边同乘 $\sin nx$ 积分

2. 狄利克莱收敛定理

$f(x)$ 周期 2π，$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点；$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上至多只有有限个平稳极值点，即 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段单调，则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases}f(x), & x\text{为连续点}\\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{为间断点}\end{cases}$$

四、任意周期的周期函数的傅里叶级数

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足狄利克莱收敛定理的条件，则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$=\begin{cases} f(x), & x\text{为}f(x)\text{的连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{为}f(x)\text{的间断点} \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$