微积分 I（第一层次）期中试卷 (2017.11.18)

一、用极限定义证明下列极限：(6分×2 = 12 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{2n-5}=0.$ ε-N语言

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}.$ ε-δ语言

二、计算下列极限：(6分×3 = 18 分)

1. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$; → 对数化+等价无穷小因子替换

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\pi-2\arctan x)$; → 洛必达法则

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$. → 等价无穷小因子替换 + 无穷小性质

三、(10分) 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\sin ax}-1, & x\ge0 \\ b\ln(1+x), & x<0 \end{cases}$，其中参数 a,b 都不为0. 如果 $f''(0)$ 存在，求 a,b.

→ ① $f'(0+)=f'(0-)$

② $f''_+(0)=f''_-(0)$

$\sim -\frac{1}{2}x^3$

四、(10分) 当 $x\to0$ 时，以 x 为基准无穷小，求 $(\cos x-1)\ln(1+x)$ 的无穷小主部.

五、(10分) 求方程 $x^3+y^3-3axy=0\ (a>0)$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 的二阶导数 y''.

算！ 人为补足可去间断点

六、(10分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=1$, 证明：$\exists\eta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\eta)}{\eta}$.

构造原函数后用罗尔中值定理

七、(10分) 求参数方程 $\begin{cases} x=4\cos\theta \\ y=1+\sin\theta \end{cases}$ $(0\le\theta<\pi)$ 所确定的曲线在 $x=2$ 处的切线和法线方程.

求导

八、(10分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f'(x)=-xf(x)$, $f(0)=1$, 证明：对任意的正整数 k,

$$\lim_{x\to+\infty}x^kf(x)=0.$$

① 构造原函数 $F(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\cdot f(x)$ 后用拉格朗推论 ② 指数 > 幂

九、(10分) 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 其中 a,b,c,d 为常数且 $a\ne0$. 证明方程 $f(x)=0$ 有三个不相等的实数根的必要条件是 $b^2-3ac>0$.

利用拉格朗日中值易有 $f'(x)$ 有两根 $\Rightarrow b^2-3ac>0$.

微积分I（第一层次）期中试卷参考答案17.11.18

一、 证明：1. $\left|\dfrac{\sqrt{n}+1}{2n-5}-0\right|=\dfrac{\sqrt{n}+1}{2n-5}<\dfrac{2\sqrt{n}}{n}=\dfrac{2}{\sqrt{n}}\ (n>5)$, $\forall\varepsilon>0$, 要使$\left|\dfrac{\sqrt{n}+1}{2n-5}-0\right|<\varepsilon$, 只需要$\dfrac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$, 即$n>\dfrac{4}{\varepsilon^2}$, 取$N=\max\{[\dfrac{4}{\varepsilon^2}]+1,5\}$, 则当$n>N$ 时，总有$\left|\dfrac{2n+1}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon$.

2. $\left|\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{|x-1|}{2(x+1)}\le|x-1|$ （设$0<|x-1|<1$）

$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\min\{1,\varepsilon\}$, 则当$0<|x-1|<\delta$时，总有$\left|\dfrac{x^2-x-1}{x^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$.

二、 1. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}$;

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\pi-2\arctan x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\arctan x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{1+x^2}=2$;

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=2-\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=2.$

三、解：$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\sin ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin ax}{x}=a$;

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{b\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{bx}{x}=b$; 所以 $a=b$;

$$f'(x)=\begin{cases}a\cos(ax)e^{\sin ax}, & x>0;\\ a, & x=0;\\ \frac{a}{1+x}; & x<0.\end{cases}$$

$f''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{a\cos axe^{\sin ax}-a}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-a^2\sin(ax)e^{\sin ax}+a^2\cos^2(ax)e^{\sin ax}}{1}=a^2$;

$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{a}{1+x}-a}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-b}{(1+x)^2}=-a$; 所以 $a^2=-a$, 解得 $a=b=-1$.

四、解：$(\cos x-1)\ln(1+x)\sim-\dfrac{x^2}{2}\cdot x=-\dfrac{x^3}{2}$, 所以无穷小主部是$-\dfrac{x^3}{2}$.

五、解:把y看作x的函数,方程两边对x求导得 $3x^2+3y^2\cdot y'-3ay-3ax\cdot y'=0$ (1), 可得$y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$.
(1)式化简得 $x^2+y^2y'-ay-axy'=0$, 两边继续对x求导得 $2x+2y(y')^2+y^2y''-2ay'-axy''=0$,

解得 $y''=\dfrac{2ay'-2y(y')^2-2x}{y^2-ax}=\dfrac{2a(ay-x^2)(y^2-ax)-2y(ay-x^2)^2-2x(y^2-ax)^2}{(y^2-ax)^3}$.

六、 证明：设$F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & 0<x\le1,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1=F(0)$, 故$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$F(0)=F(1)=1$, 由洛尔定理可得, $\exists\eta\in(0,1)$, 使得 $F'(\eta)=\dfrac{\eta f'(\eta)-f(\eta)}{\eta^2}=0$, 即 $f'(\eta)=\dfrac{f(\eta)}{\eta}$.

七、解：$x=2$ 时 $\theta=\dfrac{\pi}{3}, y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 切线的斜率 $k=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\left.\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\left.\dfrac{\cos\theta}{-4\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{12}$,

切线方程为 $y=\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{12}(x-2)$, 法线方程为 $y=\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+4\sqrt{3}(x-2)$.

八、证明：设 $\boxed{F(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}f(x)}$, 则 $F'(x)=x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}f(x)+\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}f'(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}(f'(x)+xf(x))=0$, 故 $F(x)=C=F(0)=1$, 即 $\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}f(x)=1$, 所以 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^kf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}=0$.

九、证明：方程 $f(x)=0$ 有三个不相等的实数根，设为 x_1,x_2,x_3, 不妨设 $x_1<x_2<x_3$.

$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导，$f(x_1)=f(x_2)=0$, 由洛尔定理，$\exists\xi_1\in(x_1,x_2)$, 使得 $f'(\xi_1)=0$; 同理，$\exists\xi_2\in(x_2,x_3)$, 使得 $f'(\xi_2)=0$; 即 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 有两个不相等的实数根，故 $\Delta=4b^2-12ac>0$, 即 $b^2-3ac>0$.

微积分 I（第一层次）期中试卷参考答案18.11.17

一、 1. 证明：$\left|\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}\right|=\dfrac{|(x-2)(x+2)|}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}}\le 5|x-2|$ （设$0<|x-2|<1$）

$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$, 则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，总有 $\left|\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}\right|<\varepsilon$.

2. 解：$4\le\sqrt[n]{n^4+4^n}\le\sqrt[n]{n^4\cdot 4^n}=4(\sqrt[n]{n})^4$, $\lim\limits_{n\to\infty}4=\lim\limits_{n\to\infty}4(\sqrt[n]{n})^4=4$, 由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}=4$.

3. $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^4=\mathrm{e}^4$.

4. $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left((1+\dfrac{1}{x})^x-\mathrm{e}\right)\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}\left[\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}-1\right]}{t}=\mathrm{e}\cdot\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$,
所以原式 $=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\left((1+\ln(1+x))^{2x}-1\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x\ln(1+\ln(1+x))}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\ln(1+\ln(1+x))}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\ln(1+x)}{x}=2$.

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\arctan x}{cx^k}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x^2}}{ckx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x-1)}{(1+x)(1+x^2)ckx^{k-1}}\overset{k=2}{=\!=}-\dfrac{1}{2c}=1$,

所以 $k=2, c=-\dfrac{1}{2}$, 无穷小主部为 $-\dfrac{x^2}{2}$.

二、$f(x)=\dfrac{5x-1}{(x+1)(2x-1)}=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$, 所以 $f^n(x)=(-1)^n n!\left(\dfrac{2}{(1+x)^{n+1}}+\dfrac{1}{2(x-\frac{1}{2})^{n+1}}\right)$.