微积分 I (第一层次)期中试卷 (2019.11.16)

一、计算下列各题（每题 6 分，共 48 分）

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-\sin^3 x}=1$.

2. 用 $\varepsilon-N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}=1$.

利用定义，注意放缩

3. 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+5}}\sin x+(\arctan x)^{\tan x}$ 的一阶导数和微分。→ ①分块求导 ②对数化

$\left(\dfrac{a^n+b^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

类比幂平均值的证法

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$，其中 $a\geq 0$, $b\geq 0$. → ①注意分类讨论端点情形 $(ab=0$ 或 $ab\neq 0)$ ②利用基本极限

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可微性. → 间断点处性质用定义讨论

6. 设 $x_1>0$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. → 单调有界准则

7. 设 $f(x)=x\ln(1+x)+\cos x+ax^2+bx+c=o(x^2)$，求 a, b, c 的值. 若以 x 为基准无穷小，求 $f(x)$ 关于 x 的无穷小阶数和无穷小主部。→ 熟悉无穷小阶数与主部的定义

8. 设函数 $y(x)$ 由如下参数方程定义: $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\operatorname{arccot} t+\ln(1+t^2).\end{cases}$ 试求 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. → 算~

二、（10分）确定函数 $f(x)$ 的间断点，并说明是哪种类型的间断点。→ 看该点处的左右极限

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}, & x\neq 0, x\neq 1,\\ 0, & x=0,\\ \sin 1, & x=1.\end{cases}$$

三、（10分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且导函数 $f'(x)$ 严格单调递增. 若 $f(a)=f(b)$，证明对一切 $x\in(a,b)$，有 $f(x)<f(a)=f(b)$. → 利用反证法＋拉格朗日中值定理

四、(10分) 求由方程 $e^{x+y}-xy-e=0$ 确定的曲线在点 $(0,1)$ 处的切线和法线方程。→ 偏导数

五、(12分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\neq 0$，又 $f(a)=1$, $f(b)=0$，证明

(1) 存在 $\xi_1\in(a,b)$，使得 $f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}$; → 零点存在定理

(2) 存在 $\xi_2,\xi_3\in(a,b)$ $(\xi_2\neq\xi_3)$，使得 $\dfrac{1}{f'(\xi_2)}+\dfrac{4}{f'(\xi_3)}=5(a-b)$. → 两次拉格朗日中值定理

六、(10分) 设 $f(x)=|x|^n g(x)$，其中 n 为奇数，$g(x)$ 有 n 阶导数. 在什么条件下 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有 n 阶导数？

① 乘积形式的n阶导数 → 莱布尼兹公式

② $|x|^n = x^n\cdot sgn(x)$ ← 使用符号函数避免对绝对值的分类讨论

③ 利用①展开到n-1阶后应用导数存在的必要条件

三、证明：令 $f(x)=\cos x-\dfrac{1}{x}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(2n\pi)=1-\dfrac{1}{2n\pi}>0$, $f((2n+1)\pi)=-1-\dfrac{1}{(2n+1)\pi}<0$, 由零点定理可知，存在 $\xi\in(2n\pi,(2n+1)\pi)$, 使得 $f(\xi)=0$. n 取所有正整数，所以 $f(x)=0$ 有无穷多个正根.

四、 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}$.

五、(1) $f'(x)\equiv 0$, 所以 $f(x)$ 是常值函数 $(x>-1)$. 令 $x=1$ 得 $f(1)=\dfrac{\pi}{4}$, 所以 $\arctan x-\arctan\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{\pi}{4}$.

(2) 由 (1) 知 $\arctan(2-\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{4}+\arctan\dfrac{2-\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}+1}=\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\pi}{12}$.

六、$f'(x)=\begin{cases}2x+\frac{2x}{1+x^2}, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ a\sin x+ax\cos x, & x<0,\end{cases}$

$f''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x+\frac{2x}{1+x^2}}{x}=4;$

$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{a\sin x+ax\cos x}{x}=2a;$

所以 $a=2$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，$f''(0)=4$.

七、0 是第二类间断点（无穷间断点），1 是第一类间断点（跳跃间断点）.

八、 提示：(1) 用函数的单调性证明当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, 取 $x=\dfrac{1}{n}$ 即得；

(2) 由(1)可得 $a_n-a_{n-1}<0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 单调减；　又由(1)可得

$\ln(1+\dfrac{1}{1})=\ln2-\ln1<1,\quad \ln(1+\dfrac{1}{2})=\ln3-\ln2<\dfrac{1}{2},\quad\cdots,\quad \ln(1+\dfrac{1}{n-1})=\ln n-\ln(n-1)<\dfrac{1}{n-1},$

各式相加得 $\ln n<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}$, 即 $a_n>0$. 数列 $\{a_n\}$ 单调减有下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 极限存在.

九、 提示：用介值定理证明 $\exists\eta\in[1,2]$, 使得 $f(\eta)=1$, 由拉格朗日中值定理可得 $\exists\xi\in(0,\eta)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

微积分 I（第一层次）期中试卷参考答案 19.11.16

一、 1. $\forall\varepsilon>0$, 由 $|\sqrt{1-\sin^3x}-1|=\dfrac{|\sin^3x|}{1+\sqrt{1-\sin^3x}}\le|x|^3<\varepsilon$, 取 $\delta=\varepsilon^{1/3}$, 当 $0<|x-0|<\delta$ 时有 $|\sqrt{1-\sin^3x}-1|<\varepsilon$.

2. $\forall\varepsilon>0$, 由 $\left|\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}-1\right|=\dfrac{|\sqrt{1+n^2}-n|}{\sqrt{1+n^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}(n+\sqrt{1+n^2})}\le\dfrac{1}{n}$, 取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$, 当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}-1\right|<\varepsilon$.

3. 令 $y_1=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+5}\sin x}$, $y_2=(\arctan x)^{\tan x}$, 则 $y'=y_1'+y_2'$, $\mathrm{d}y=(y'+y')\mathrm{d}x$, 其中

$$y_1'=y_1(\ln y_1)'=\frac{y_1}{2}\left[\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}+\frac{\cos x}{\sin x}\right],$$

$$y_2'=y_2(\ln y_2)'=y_2\left[\sec^2 x\ln\arctan x+\frac{\tan x}{(1+x^2)\arctan x}\right].$$

4. 当 $ab=0$ 时，易见原式为 0. 当 $ab\neq 0$ 时，

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}-1\right)\right)^{\frac{1}{\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}-1}n\cdot\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}-1\right)}$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{1/n}-1}{1/n}+\frac{b^{1/n}-1}{1/n}\right)\right\}=\sqrt{ab}.$$

5. 由于

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{x}{1+e^{1/x}}}{x}=0,$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{\frac{x}{1+e^{1/x}}}{x}=1.$$

则 $f_-'(0)\neq f_+'(0)$, 故 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导，从而不可微。

6. 首先由归纳法可有 $x_n>0$, 又由于 $0<x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n$,故数列 x_n 单调递减有下界，故收敛，设极限是 A，则 $\ln(1+A)=A$，从而有$A=0$.

7. 由 $f(x)=o(x^2)$ 可得 (1) $\boxed{\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,}$ 即 $1+c=0$, 从而 $c=-1$;

(2) $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0,}$ 即

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)+\cos x+ax^2+bx-1}{x}=\lim_{x\to0}\left(\ln(1+x)+\frac{\cos x-1}{x}+ax+b\right)=b=0;$$

(3) $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0,}$即

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)+\cos x+ax^2-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}-\sin x+2ax}{2x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x+2a}{2}=\frac{1}{2}+a=0\Longrightarrow a=-\frac{1}{2}.$$

(4)

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)+\cos x-\frac{1}{2}x^2-1}{x^k}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}-\sin x-x}{kx^{k-1}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x-1}{k(k-1)x^{k-2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{2}{(1+x)^3}+\sin x}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

从而取 $k=3$, 得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=-\dfrac{1}{2}$. 则 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 的无穷小阶数为3, 无穷小主部为 $-\dfrac{1}{2}x^3$.

8. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{-\frac{1}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t-1,\quad \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{(2t-1)'}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=2(1+t^2).$

二、函数在 $x\neq 0, x\neq 1$ 的地方显然连续；由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}\frac{1-x}{x}x\sin\frac{1}{x}=-\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x},$$

不存在，所以 $x=0$ 是第二类间断点，且为振荡间断点。由于

$$\lim_{x\to 1+}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=\sin 1,\qquad \lim_{x\to 1-}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=0,$$

所以 $x=1$ 是第一类间断点，且为跳跃间断点。

三、任给 $x\in(a,b)$, 由中值定理，存在 $\xi_1\in(a,x)$, $\xi_2\in(x,b)$，$\xi_1<\xi_2$ 且

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

可推出 $f(x)<f(a)$.

四、对方程两边关于 x 求导得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y-\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^{x+y}-x}$. 将 $x=0, y=1$ 代入得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0,y=1}=\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$, 于是曲线在 $(0,1)$ 处切线方程为 $y=\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}x+1$, 法线方程为 $y=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}x+1$.

五、**证明**：(1) 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，从而在 $[a,b]$ 连续。又 $f(b)=0<\frac{4}{5}<1=f(a)$, 由介值定理，存在 $\xi_1\in(a,b)$, 使得 $f(\xi_1)=\frac{4}{5}$.

(2) 由Lagrange中值定理，分别考虑区间 $[a,\xi_1],[\xi_1,b]$, 可得

$$f(\xi_1)-f(a)=f'(\xi_2)(\xi_1-a),\qquad f(b)-f(\xi_1)=f'(\xi_3)(b-\xi_1)$$

注意到 $f(a)=1, f(b)=0, f(\xi_1)=\frac{4}{5}, f'(x)\neq 0$, 整理可得

$$-\frac{1}{5}\frac{1}{f'(\xi_2)}=\xi_1-a,\qquad -\frac{4}{5}\frac{1}{f'(\xi_3)}=b-\xi_1$$

两式相加得证。

六、解：由莱布尼兹公式可直接求出 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处的 k $(0<k\leq n-1)$ 阶导数为

$$f^{(k)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}g(x)\mathrm{sgn}(x)+\sum_{i=0}^{k-1}F_{n-i}(x)g^{(k-i)}(x)\mathrm{sgn}(x)$$

其中 $F_{n-i}(x)$ 为 x 的 $n-i$ 次单项式。由导数的定义可有对任意 $0<k\leq n-1$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 k 阶导数为零. 则 $f^{(n-1)}(x)$ 当 $g(0)=0$ 时可导，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 n 阶可导.