微积分 I（第一层次）期中试题参考答案 2013.11.16

一、（8 分）用极限定义（$\varepsilon - N$ 语言）证明数列的极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$.

指数结构利用二项式定理放缩

证明： $\forall\varepsilon>0$，要证 $\left|\frac{n^2}{2^n}-0\right|=\frac{n^2}{2^n}=\frac{n^2}{(1+1)^n}<\frac{n^2}{n(n-1)(n-2)/6}(n>2)$

$$=\frac{6n}{(n-1)(n-2)}<\frac{6n}{(n-n/2)(n-n/2)}(n>4)=\frac{24}{n}<\varepsilon,\quad n>\frac{24}{\varepsilon},$$

所以取 $N=[24/\varepsilon]+1$，当 $n>N$ 时，就要 $\left|\frac{n^2}{2^n}-0\right|<\frac{24}{n}<\varepsilon$，即有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$.

定义域

看极限

二、（8 分）讨论函数 $f(x)=\frac{\ln|x|}{x^2+x-2}$ 的间断点，并指出其类型（说明理由）.

解： $0,1,-2$ 是 $f(x)$ 的间断点. 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln|x|}{x^2+x-2}=\infty$，所以 0 是 $f(x)$ 的无穷型间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(1+x-1)}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{3}$，所以 1 是 $f(x)$ 的可去间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\frac{\ln 2}{(x+2)(x-1)}=\infty$，所以 -2 是 $f(x)$ 的无穷型间断点.

三、（8 分）在 $x\to0$ 时，求函数 $\arcsin x-x$ 关于 x 的无穷小的阶以及无穷小主部. → 用定义

解： $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x-x}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-x^2)^{-1/2}-1}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1/2(-x^2)}{kx^{k-1}}=\frac{1}{2k}\lim\limits_{x\to0}x^{3-k}=\frac{1}{6}(k=3)$，

所以 $\arcsin x-x$ 关于 x 的无穷小的阶是 3，无穷小主部为 $x^3/6$.

四、（35 分，每小题 7 分）计算下列各题：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\arcsin\frac{2013}{n}-\arcsin\frac{2013}{n+1})$； → 同型函数的差值考虑拉格朗日中值公式

解： 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\frac{2013}{n}-\frac{2013}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{2013n^2}{n(n+1)}=2013.\left(\frac{2013}{n}<\xi<\frac{2013}{n+1}\right)$.

（2） $\lim\limits_{x\to\infty}[(2+x)e^{3/x}-x]$； ← 极限的四则运算 + 等价无穷小替换

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}2e^{3/x}+\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{3/x}-1)=2+\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{3}{x}=5$.

（3） 设 $y=2^{\arctan\frac{1}{x}}$，求 dy； 复合求导

解：$dy = 2^{\arctan\frac{1}{x}} \ln 2 \, d(\arctan\frac{1}{x}) = 2^{\arctan\frac{1}{x}} \ln 2 \frac{1}{1+1/x^2}(\frac{-1}{x^2})dx$

$$= -\frac{\ln 2}{1+x^2} 2^{\arctan\frac{1}{x}} dx.$$

(4) 设 $y = \dfrac{1}{x^2+8x+7}$，求 $y^{(n)}$； ← 裂项后求导；$(\frac{1}{x})^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

解：$y = \dfrac{1}{(x+7)(x+1)} = \dfrac{1}{6}(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+7})$, $\therefore y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{6}(\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+7)^{n+1}})$.

(5) 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 且 $g(0) = g'(0) = 0, g''(0) = 8$，求 $f'(0)$. 利用定义与洛必达法则

解：$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)}{2x} = \boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(0)}{2x}} = \dfrac{g''(0)}{2} = 4$.

此处不能洛，因为没有 $g''(x)$ 连续的条件

五、（10 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sin\dfrac{1}{n})^{5\csc^2\frac{1}{n}}$.

对数化 + 等价无穷小 + 洛必达

解：原式 $= \exp(\lim\limits_{n\to\infty} 5\csc^2\dfrac{1}{n}(n\sin\dfrac{1}{n}-1)) = \exp(5\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t/t - 1}{\sin^2 t}) = \exp(5\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t - t}{t^3})$

$$= \exp(5\lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{3t^2}) = \exp(5\lim_{t\to 0}\frac{-t^2/2}{3t^2}) = \exp(-5/6) = e^{-5/6}.$$

六、（10 分）设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = 1 - \sqrt{1-x_n}, n = 1, 2, \cdots$. 论证数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 单调有界准则

证明：$x_{n+1} - x_n = 1 - \sqrt{1-x_n} - (1 - \sqrt{1-x_{n-1}}) = \sqrt{1-x_{n-1}} - \sqrt{1-x_n} = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{1-x_{n-1}} + \sqrt{1-x_n}}$，

所以 $x_{n+1} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ 的符号相同，以此类推，$x_{n+1} - x_n$ 与 $x_2 - x_1$ 同号，又

$x_2 - x_1 = 1 - \sqrt{1-x_1} - x_1 = \dfrac{x_1}{1+\sqrt{1-x_1}} - x_1 = \dfrac{-x_1\sqrt{1-x_1}}{1+\sqrt{1-x_1}} < 0$，故 $\{x_n\}$ 单调下降.

因为 $0 < x_1 < 1$，由 $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1-x_n}$ 我们可以推得 $0 < x_n < 1$，所以由单调有界准则知数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，对 $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1-x_n}$ 两边关于 $n\to\infty$ 取极限，得 $A = 1 - \sqrt{1-A}$，解得 $A = 0, A = 1$（舍去），所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

注：如果先求得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，则

$$0 \le |x_n - 0| = |x_n| = |1-\sqrt{1-x_{n-1}}| = \frac{|x_{n-1}-0|}{1+\sqrt{1-x_{n-1}}} < \frac{1}{1+\sqrt{1-x_1}}|x_{n-1}-0| < \left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x_1}}\right)^{n-1} x_1$$

由于$\frac{1}{1+\sqrt{1-x_1}}<1$，所以$\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x_1}}\right)^{n-1} \to 0$，所以由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

七、（13 分）设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\frac{1}{x^2}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

求导 → 公式法
→ 定义法
（分段函数分段处）
+ 连续定义

（1）求 $f'(x)$ ，（2）讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解：（1） $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x^2}=\frac{\pi}{2}$，

所以 $f'(x)=\begin{cases} \arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}, & x\neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x=0. \end{cases}$

（2） $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4})=\frac{\pi}{2}=f'(0)$，所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

八、（8 分）设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上可导且 $f'(x)\neq 0$，又 $f(a)=1, f(b)=0$，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)(\xi\neq\eta)$，使得$1/f'(\xi)+2/f'(\eta)=3(a-b)$.

证明：即证：$\frac{1/3}{f'(\xi)}+\frac{2/3}{f'(\eta)}=a-b$.因为 $f(a)=1, f(b)=0$，又 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，

所以由介值定理，存在一个 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=2/3$.

省略了第小问的铺垫，
可由自己待定系数补出

在$[a,c]$上对 $f(x)$ 使用 Lagrange 定理，存在一个 $\xi\in(a,c)$ 使得

$f(c)-f(a)=f'(\xi)(c-a)$，也即$1/3=f'(\xi)(a-c)$，也即$\frac{1/3}{f'(\xi)}=(a-c)$（i）.

在$[c,b]$上对 $f(x)$ 使用 Lagrange 定理，存在一个 $\eta\in(c,b),\xi\neq\eta$ 使得

$f(b)-f(c)=f'(\eta)(b-c)$，也即$-2/3=f'(\eta)(b-c)$.也即$\frac{2/3}{f'(\eta)}=(c-b)$（ii）

将(i)、(ii)两式相加，即得 $\frac{1/3}{f'(\xi)}+\frac{2/3}{f'(\eta)}=a-b$，也即$1/f'(\xi)+2/f'(\eta)=3(a-b)$.