线性代数期中试卷 (2019.4.27)

一. 简答与计算(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 计算 $A=\begin{pmatrix}2&3&4&5\\-1&0&0&0\\2&-2&0&0\\0&3&-3&0\end{pmatrix}$ 的第一行所有元素的代数余子式之和。

$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&0&0&0\\2&-2&0&0\\0&3&-3&0\end{vmatrix}$ 逆用行列式定义

$AXA=B \Rightarrow X=A^{-1}BA^{-1}$ (算!)

2. 计算 $X=(X_{ij})_{3\times3}$ 使之满足矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&2&2\end{pmatrix}$。

3. 已知4阶方阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}0&0&3&2\\0&0&0&3\\2&1&0&0\\1&2&0&0\end{pmatrix}$，求 A。

$A=|A|\cdot(A^*)^{-1}$

$|A^*|=|A|^3=27$ $\quad (A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}0&A_2^{-1}\\A_1^{-1}&0\end{pmatrix}$

4. 给定向量组 $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{100}\}$ 与 $B=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{20}\}$，已知 $r(A)=7$，某同学计算出 $r(A\cup B)=31$，请问对吗？说明理由。

$r(A\cup B)\le r(A)+r(B)\le 7+20=27<31$

5. 已知线性方程组 $Ax=b$ 的三个特解为 $\alpha_1=(1,-2,3)^T,\alpha_2=(0,-1,-2)^T,\alpha_3=(-4,2,1)^T$, $r(A)=1$，试写出 $Ax=b$ 的通解。

$Ax=\theta$ 基本解组中含有 $n-r=2$ 个向量 ← 找出基本解组

$\beta_1=\alpha_1-\alpha_3$

$\beta_2=\alpha_2-\alpha_3$

二.(10分) 假定矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为3阶可逆矩阵：$A^{-1}=\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\beta_3^T\end{pmatrix}$，令 $P=\alpha_2\beta_2^T+\alpha_3\beta_3^T$。

利用 $A^{-1}A=E$ 得到向量间关系，直接验证结果即可

(1) 证明 $P^2=P$ (即 P 是投影矩阵);

(2) $\boxed{P\text{ 的秩}}$是多少？

$PA=(0,\alpha_2,\alpha_3)$ ← 秩性质的应用

A可逆 $\Rightarrow r(P)=r(PA)=2$

(3) 给定3维向量 x，Px 可否由 α_2 与 α_3 线性表出？如果可以，写出一个表出方式。

$Px=\alpha_2\beta_2^Tx+\alpha_3\beta_3^Tx$ $\quad (k_1=\beta_2^Tx,\ k_2=\beta_3^Tx)$

三.(10分) 计算 $(A^*)^*$，此处 A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵，$A=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{pmatrix}$。

$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\Rightarrow r(A)\le 1$ 则 A 的所有2阶子式均为0 $\Rightarrow A^*=0$

(因式分解意识)

四. (10分) 计算 $f(\pi)$ 与 $f'(\pi)$，此处：

$$f(x)=\begin{vmatrix}a_1&b_1&a_1x^2+b_1x+c_1\\a_2&b_2&a_2x^2+b_2x+c_2\\a_3&b_3&a_3x^2+b_3x+c_3\end{vmatrix}.$$

(考虑行列式的性质)

$=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ 为常数

五.(12分) 给定矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-3&-2&-3\\1&3&8&-3&9\\3&1&2&-7&3\end{pmatrix}$，

(1) 计算 $r(A)$;

(2) 计算线性方程组 $Ax=0$ 的基本解组;

$\Rightarrow$ 把 A 化成行简化梯形矩阵

(3) 假定 $\eta=(1,-1,0,0,2)^T$ 是 $Ax=b$ 的解，确定 b 并计算 $\boxed{Ax=b}$ 的通解。

$Ax=b$ 的1个特解 + $Ax=\theta$ 的通解

$\Leftrightarrow Ax=\beta$ 有解 → 把增广阵化为行简化梯形阵来看

六.(10分) 写出向量组 $\alpha_1=(1+a,1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1+a,1,1)^T,\alpha_3=(1,1,1+a,1)^T$ 的极大线性无关组；$\boxed{\beta=(1,1,1,b)^T\text{ 能否由 }\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{ 线性表出？如果可以，表出方式唯一吗？}}$

七.(8分) $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为实矩阵，b 为 m 维实向量，证明 $\boxed{A^TAx=A^Tb\text{ 有解}}$。
(提示：先证明 $\boxed{r(A^TA)=r(A)}$)

$\Leftrightarrow r(\text{系数阵})=r(\text{增广阵})$

$Ax=\theta\Rightarrow A^TAx=\theta$

$A^TAx=\theta\Rightarrow x^TA^TAx=\theta$

$\Leftrightarrow (Ax)^T(Ax)=\|Ax\|^2=0$

$\Leftrightarrow Ax=\theta$

$\Rightarrow \mathbb{A}^T\mathbb{A}x=0$ 与 $\mathbb{A}x=0$ 同解 $\Rightarrow r(\mathbb{A}^T\mathbb{A})=r(\mathbb{A})$

$$r(\mathbb{A}^T\mathbb{A}) \leq r(\mathbb{A}^T\mathbb{A} \vdots \mathbb{A}^T b) = r(\mathbb{A}^T(\mathbb{A} \vdots b))$$

$$\leq r(\mathbb{A}^T) = r(\mathbb{A}) = r(\mathbb{A}^T\mathbb{A})$$

$$\therefore\ r(\mathbb{A}^T\mathbb{A}) = r(\mathbb{A}^T\mathbb{A} \vdots \mathbb{A}^T b)$$