南京大学大学数学试卷

考试时间____2020.8____ 任课教师__________ 考试成绩____________

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&6\\0&2\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$，计算行列式 $D=\begin{vmatrix}A^{\mathrm{T}}A & A^{\mathrm{T}}\gamma\\ \gamma^{\mathrm{T}}A & \gamma^{\mathrm{T}}\gamma+1\end{vmatrix}$.

解：设 $B=\begin{pmatrix}A&\gamma\\0&1\end{pmatrix}$，则 $D=|B^{\mathrm{T}}B|=|B^{\mathrm{T}}|\cdot|B|=|B|^2=\begin{vmatrix}1&6&7\\0&2&-3\\0&0&1\end{vmatrix}^2=2^2=4.$

解法二：$A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}1&6\\6&40\end{pmatrix},A^{\mathrm{T}}\gamma=\begin{pmatrix}7\\36\end{pmatrix},\gamma^{\mathrm{T}}\gamma+1=59$，故 $D=\begin{vmatrix}1&6&7\\6&40&36\\7&36&59\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&6&7\\0&4&-6\\0&-6&10\end{vmatrix}=4.$

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-2&-1&1\\6&3&-3\end{pmatrix}$，计算 A^n.

解：因为$A=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}(2,1,-1)=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，故有$A^n=\alpha\beta^{\mathrm{T}}\cdots\alpha\beta^{\mathrm{T}}=\alpha(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\cdots(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\beta^{\mathrm{T}}=(-2)^{n-1}\begin{pmatrix}2&1&-1\\-2&-1&1\\6&3&-3\end{pmatrix}$.

解法二：将 A 对角化，可得 $P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&0&-1\\0&2&3\end{pmatrix},P^{-1}AP=\mathrm{diag}(0,0,-2)$，

故有 $A=P\ \mathrm{diag}(0,0,-2)P^{-1},A^n=P\ \mathrm{diag}(0,0,-2)^nP^{-1}=(-2)^{n-1}P\ \mathrm{diag}(0,0,-2)P^{-1}=(-2)^{n-1}A.$

3. 已知矩阵 $A\in\mathbf{R}^{3\times3}$ 有特征值 -1、2、4，矩阵 $B=A+4A^{-1}$，计算矩阵 B 的所有特征值.

解：设 A 的属于特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=4$ 的特征向量为 ξ_1,ξ_2,ξ_3，

则有 $B\xi_i=(A+4A^{-1})\xi_i=A\xi_i+4A^{-1}\xi_i=(\lambda_i+4\lambda_i^{-1})\xi_i$，故 B 的特征值为 -1-4,2+2,4+1，即 -5,4,5.

4. 设有二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_1x_3+3x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$，求该二次型的正负惯性指数.

解：f的二次型矩阵为$A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&3&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，因为$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&1\\0&\lambda-3&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda-4)$，

故 A 的特征值为 3、1、4，均为正，故二次型正惯性指数为3，负惯性指数为0.

解法二：$f(x_1,x_2,x_3)=3(x_1-\frac{1}{3}x_3)^2+3(x_2-\frac{1}{3}x_3)^2+\frac{4}{3}x_3^2=3y_1^2+3y_2^2+\frac{4}{3}y_3^2$，

故二次型正惯性指数为3，负惯性指数为0.

解法三：f的二次型矩阵为$A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&3&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，合同变换 $A\xrightarrow{\text{合同}}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&4/3\end{pmatrix}$，

由对角元可知二次型正惯性指数为3，负惯性指数为0.

二、 (本题12分) 已知 $\alpha_1=(3,0,4,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(6,0,8,-2)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(2,-5,11,6)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(-1,-5,7,7)^{\mathrm{T}}$，

求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的所有极大无关组.

解：初等变换：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}3&6&2&-1\\0&0&-5&-5\\4&8&11&7\\-1&-2&6&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为2，显然 $\alpha_2=2\alpha_1$，故 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 线性相关.

考虑 A 的前两行的 1,3 列，2,3 列，1,4 列，2,4 列，3,4 列构成的2阶子式

$\begin{vmatrix}3&2\\0&-5\end{vmatrix}\neq0,\begin{vmatrix}6&2\\0&-5\end{vmatrix}\neq0,\begin{vmatrix}3&-1\\0&-5\end{vmatrix}\neq0,\begin{vmatrix}6&-1\\0&-5\end{vmatrix}\neq0,\begin{vmatrix}2&-1\\-5&-5\end{vmatrix}\neq0$，

故 $\{\alpha_1,\alpha_3\}$ 线性无关，$\{\alpha_2,\alpha_3\}$、$\{\alpha_1,\alpha_4\}$、$\{\alpha_2,\alpha_4\}$、$\{\alpha_3,\alpha_4\}$ 也线性无关.

故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的所有极大无关组有：$\{\alpha_1,\alpha_3\}$、$\{\alpha_2,\alpha_3\}$、$\{\alpha_1,\alpha_4\}$、$\{\alpha_2,\alpha_4\}$、$\{\alpha_3,\alpha_4\}$.

解法二：初等变换：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}3&6&2&-1\\0&0&-5&-5\\4&8&11&7\\-1&-2&6&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为2，从而极大无关组向量个数为2.

因为两个向量线性相关的充要条件是两个向量成比例，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中只有 α_1,α_2 成比例，故所有极大无关组有：$\{\alpha_1,\alpha_3\}$、$\{\alpha_2,\alpha_3\}$、$\{\alpha_1,\alpha_4\}$、$\{\alpha_2,\alpha_4\}$、$\{\alpha_3,\alpha_4\}$.

三. (**本题12分**) 已知向量 $\alpha_1=(0,3,3)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,1,5)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(4,5,13)^{\mathrm{T}},\gamma_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\gamma_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\gamma_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，3 阶矩阵 B 满足$B\gamma_1=\alpha_2+\alpha_3,B\gamma_2=\alpha_3+\alpha_1,B\gamma_3=\alpha_1+\alpha_2$，解方程组 $Bx=0$.

解：由条件可得：

$$B(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=(\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&4&2\\6&8&4\\18&16&8\end{pmatrix}=C.$$

$$B=C(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)^{-1}=\begin{pmatrix}6&4&2\\6&8&4\\18&16&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&4&-2\\4&2&2\\8&10&-2\end{pmatrix}.$$

初等变换解方程组 $Bx=0$，$B=\begin{pmatrix}2&4&-2\\4&2&2\\8&10&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

故 $Bx=0$ 的基础解系为：$\alpha=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，通解为：$x=k\alpha,k\in\mathbf{R}$.

四. (**本题12分**) 设 $A\in\mathbf{R}^{m\times n},b\in\mathbf{R}^m$，证明 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A,A^{\mathrm{T}}b)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)$.

证：显然 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)\le\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A,A^{\mathrm{T}}b)$. 进一步有 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A,A^{\mathrm{T}}b)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}(A,b))\le\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A)$.

下面只要证明：$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)$ 即可.

显然 $Ax=0$ 的解满足 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$.

现在设 x 满足 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$，令 $y=Ax$，则有 $y^{\mathrm{T}}y=x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax=0$，故 $y=0$ 即 $Ax=0$.

从上可知 $Ax=0$ 与 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 同解，故有 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)$，得证.

五. (**本题12分**) 已知 n 阶实方阵 A 可逆，证明存在正交矩阵 Q 和上三角矩阵 C 使得 $A=QC$.

证：设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbf{R}^n$，因为 A 可逆，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

由施密特正交化定理，存在正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，使得 $\beta_i=\alpha_i-c_{1i}\beta_1-\cdots-c_{i-1,i}\beta_{i-1}$, $i=1,2,\cdots,n$. 于是有 $\alpha_i=c_{1i}\beta_1+c_{2i}\beta_2+\cdots+c_{i-1,i}\beta_{i-1}+\beta_i,i=1,2,\cdots,n$.

进一步单位化得标准正交向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdot,\gamma_n$，其中 $\gamma_i=\dfrac{1}{\|\beta_i\|}\beta_i,i=1,2,\cdots,n$,

于是有 $\alpha_i=d_{1i}\gamma_1+d_{2i}\gamma_2+\cdots+d_{i-1,i}\gamma_{i-1}+d_{ii}\gamma_i,i=1,2,\cdots,n$，即

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)\begin{pmatrix}d_{11}&d_{12}&\cdots&d_{1n}\\&d_{22}&\cdots&d_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&d_{nn}\end{pmatrix}=QC,$$

其中 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$ 为正交矩阵，C 为上三角矩阵.

证法二：用归纳法. 当 $n=1$ 时结论显然，假设当 $n=m$ 时结论成立，讨论 $n=m+1$ 时的情况.

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m+1})$，因为 A 可逆，故 $\alpha_1\ne\theta$，设 $k_1=\|\alpha_1\|$，则 $k_1\ne0$，再设 $\beta_1=\dfrac{1}{k_1}\alpha_1$,

将 β_1 扩展成由 $m+1$ 个向量构成的标准正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m+1}$,

则矩阵 $P_1=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m+1})$ 为正交矩阵，于是

$$P_1^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\\beta_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\beta_{m+1}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(k_1\beta_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m+1})=\begin{pmatrix}k_1&*&\cdots&*\\0&*&\cdots&*\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&*&\cdots&*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1&*\\0&B\end{pmatrix}.$$

由于 $\begin{vmatrix} k_1 & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = k_1|B| = |P_1^{\mathrm{T}}A| \neq 0$，故 B 可逆，由归纳假设可得正交矩阵 Q_2 和上三角矩阵 C_2 使得 $B = Q_2C_2$，令 $Q = P_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$，则易知 Q 为正交阵，且有

$$Q^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} P_1^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & * \\ 0 & Q_2^{\mathrm{T}}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & * \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} = C,$$

其中C为上三角矩阵，故有 $A = QC$.

六. (本题12分) 已知 A 为3阶实对称矩阵，$\lambda = 1$ 为 A 的二重特征值，$x = (1, 2, -2)^{\mathrm{T}}$ 满足 $Ax = 0$，求 A.

解：由 $Ax = 0$ 知 x 为 A 的属于特征值0的特征向量.

由 $\lambda = 1$ 为 A 的二重特征值，A 又为实对称矩阵，知 A 有属于1的两个无关特征向量，设为 ξ_1 和 ξ_2. A 为实对称矩阵，不同特征值的特征向量正交，故 $x^{\mathrm{T}}\xi_1 = x^{\mathrm{T}}\xi_2 = 0$，解方程组 $(1, 2, -2)y = 0$ 可得基础解系，即 $\xi_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \xi_2 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，得到 $A(x, \xi_1, \xi_2) = (0, \xi_1, \xi_2)$，则

$$A = (0, \xi_1, \xi_2)(x, \xi_1, \xi_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

七. (本题12分) 已知四维线性空间 V 有两组基：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$，其中 $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$.

(1) 求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的过渡矩阵；

(2) 若向量 γ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标是 $x = (4, 3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$，求 γ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 下的坐标.

解：(1) 易知，$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)P$，

故从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的过渡矩阵为 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) 向量 γ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标是 $x = (4, 3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$，故 γ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 下的坐标为

$$y = P^{-1}x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$