大学数学试卷　答案　2019.12.30

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为三维列向量，记三阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，
$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，若 $|A|=-3$，计算 $|B|$.

解：由 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$，所以，$|B|=|A|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=(-3)\times 2=-6.$

解法二：$|B|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_2+8\alpha_3|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_3|=2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=-6.$

2. 设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，三维列向量 $\alpha=(\lambda,1,1)^{\mathrm{T}}$，若 $A\alpha$ 与 α 线性相关，求常数 λ.

解：$A\alpha=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\2\lambda+3\\3\lambda+4\end{pmatrix}$，由$A\alpha$与$\alpha$线性相关，得$\dfrac{\lambda}{\lambda}=\dfrac{2\lambda+3}{1}=\dfrac{3\lambda+4}{1}$,解得:$\lambda=-1.$

解法二：$(A\alpha,\alpha)=\begin{pmatrix}\lambda&\lambda\\2\lambda+3&1\\3\lambda+4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&\lambda+1\\0&0\end{pmatrix}$，由 $A\alpha$ 与 α 线性相关，得 $\lambda+1=0$，即 $\lambda=-1$.

3. λ 取何值时，实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的.

解：二次型 f 对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1\\\lambda&1&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$，二次型正定的充要条件是 A 的所有顺序主子式：

$$\Delta_1=\det(1)=1>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}1&\lambda\\\lambda&1\end{vmatrix}=1-\lambda^2>0,\Delta_3=\begin{vmatrix}1&\lambda&-1\\\lambda&1&2\\-1&2&5\end{vmatrix}=-5\lambda^2-4\lambda>0,$$

解得：$-\dfrac{4}{5}<\lambda<0.$

解法二：合同变换：$A\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1-\lambda^2&\lambda+2\\0&\lambda+2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-(5\lambda^2+4\lambda)/4&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$

A 正定，则合同对角阵对角元均为正：$-(5\lambda^2+4\lambda)/4>0$，解得：$-\dfrac{4}{5}<\lambda<0.$

4. 设 A 为二阶方阵，α_1,α_2 是线性无关的二维列向量，且 $A\alpha_1=0,A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，求 A 的所有特征值.

解：由 α_1,α_2 线性无关，所以 $\alpha_1\neq 0,2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$.　由 $A\alpha_1=0=0\alpha_1$，则 $\lambda_1=0$ 是一个特征值；
又有 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=0+A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，故 $\lambda_2=1$ 是另一个特征值，则 A 的所有特征值为 $0,1$.

解法二：易知 $A(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2)B$，由 α_1,α_2 线性无关，

得 $P=(\alpha_1,\alpha_2)$ 可逆，于是 $P^{-1}AP=B$，即 $A\sim B$，故 A 与 $B=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$ 有相同的特征值：$0,1$.

二、 (本题12分) 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=0\\3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1\end{cases}$，

若 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是该方程组的一个解，求：(1) 方程组的通解；(2) 方程组满足 $x_2=x_3$ 的全部解.

解：将 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 代入方程组，得 $\lambda=\mu$.

已知 $\gamma=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组的一个特解. 对齐次方程组 $Ax=0$ 进行行初等变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&\lambda&\lambda&1\\2&1&1&2\\3&2+\lambda&4+\lambda&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\lambda&1-\lambda\\0&1&3&1\\0&0&2(2\lambda-1)&2\lambda-1\end{pmatrix}.$$

(1) 当 $\lambda\neq 1/2$ 时，$A\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1/2\\0&0&1&1/2\end{pmatrix}$，$Ax=0$ 的基础解系的秩为 1，

故可求得方程组的通解为：$\xi=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}+k(-1,1/2,-1/2,1)^{\mathrm{T}},k\in\mathbf{R}$;

当 $\lambda=1/2$ 时，$A\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1/2\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$Ax=0$ 的基础解系的秩为 2，

故可求得方程组的通解为：$\xi=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1/2,-1,0,1)^{\mathrm{T}},k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

(2) 若 $x_2=x_3$，当 $\lambda\neq 1/2$ 时，由 $-1+k/2=1-k/2$，解得 $k=2$，

此时方程组的通解为：$\xi=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}+2(-1,1/2,-1/2,1)^{\mathrm{T}}=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda=1/2$ 时，由 $-1-3k_1-k_2=1+k_1$，解得 $k_2=-2-4k_1$，

此时方程组的通解为：$\xi=(2,1,1,-3)^{\mathrm{T}}+k(3,1,1,-4)^{\mathrm{T}}$.

解法二：将 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 代入方程组，得 $\lambda=\mu$.

对方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵进行行初等变换：

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&\lambda&\lambda&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2+\lambda&4+\lambda&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\lambda&1-\lambda&-\lambda\\0&1&3&1&1\\0&0&2(2\lambda-1)&2\lambda-1&2\lambda-1\end{pmatrix}.$$

(1) 当 $\lambda\neq 1/2$ 时，$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&-1/2&-1/2\\0&0&1&1/2&1/2\end{pmatrix}$，

$\mathrm{r}(A,b)=\mathrm{r}(A)=3<4,4-3=1$，故方程组由无穷多组解，且其基础解系的秩为 1，

故可求得方程组的通解为：$\xi=(0,-1/2,1/2,0)^{\mathrm{T}}+k(-2,1,-1,2)^{\mathrm{T}},k\in\mathbf{R}$;

当 $\lambda=1/2$ 时，$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1/2&-1/2\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

$\mathrm{r}(A,b)=\mathrm{r}(A)=2<4,4-2=2$，故方程组由无穷多组解，且其基础解系的秩为 2，

故可求得方程组的通解为：$\xi=(-1/2,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,-2,0,2)^{\mathrm{T}},k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

(2) 若 $x_2=x_3$，当 $\lambda\neq 1/2$ 时，由 $-1/2+k=1/2-k$，解得 $k=1/2$，

此时方程组的通解为：$\xi=(0,-1/2,1/2,0)^{\mathrm{T}}+0.5(-2,1,-1,2)^{\mathrm{T}}=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda=1/2$ 时，由 $1-3k_1-2k_2=k_1$，解得 $k_1=1/4-k_2/2$，

此时方程组的通解为：$\xi=(-1/4,1/4,1/4,0)^{\mathrm{T}}+k(-3/2,-1/2,-1/2,2)^{\mathrm{T}}$.

三. (本题12分) 确定常数 k，使得向量组 $\alpha_1=(1,1,k)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,k,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(k,1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\beta_1=(1,1,k)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-2,k,4)^{\mathrm{T}},\beta_3=(-2,k,k)^{\mathrm{T}}$ 线性表出，但向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

解：令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，若 $\mathrm{r}(A)=3$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 就是一个极大无关组，

与题意不合，故 $\mathrm{r}(A)<3$，则 $\begin{vmatrix}1&1&k\\1&k&1\\k&1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow k=1或k=-2$.

当 $k=1$ 时，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，即 $\mathrm{r}(A)=1$，

$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\1&1&1\\1&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，即 $\mathrm{r}(B)=3$，

故 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

当 $k=-2$ 时，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}$，即 $\mathrm{r}(A)=2$，

$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\1&-2&-2\\-2&4&-2\end{pmatrix}$，即 $\mathrm{r}(B)=2$，此时，$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=-2\alpha_1$，

对于 $C=(\beta_1,\alpha_2,\beta_3)$，由于 $|C|=\begin{vmatrix}1&1&-2\\1&-2&-2\\-2&1&-2\end{vmatrix}=18\neq 0$，即 α_2 不能被 β_1,β_2,β_3 线性表出，

故符合题意的解是 $k=1$.

解法二：行列初等变换：

$$
\begin{aligned}
A &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 & -2 & -2 \\ 1 & k & 1 & 1 & k & k \\ k & 1 & 1 & k & 4 & k \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & 1-k & 0 & k+2 & k+2 \\ k & 1-k & 1-k^2 & 0 & 2k+4 & 3k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

秩为 3，故 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 的极大无关组的向量个数为 3.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表出，则 β_1,β_2,β_3 为极大无关组，

于是 $|\beta_1,\beta_2,\beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & k & k \\ k & 4 & k \end{vmatrix} = (k+2)(k-4) \neq 0.$

β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不是极大无关组，线性相关，

于是 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(k+2)(k-1)^2 = 0$，解得 $k=1$.

解法三：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & k & 1 & -2 & -2 \\ 1 & k & 1 & 1 & k & k \\ k & 1 & 1 & k & 4 & k \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & k & 1 & -2 & -2 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 & k+2 & k+2 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 0 & 2k+4 & 3k \end{array}\right)$

$$
\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & k & 1 & -2 & -2 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 & k+2 & k+2 \\ 0 & 0 & (1-k)(2+k) & 0 & 3(1-k) & -(1-k)^2 \end{array}\right),
$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能表示$\beta_1,\beta_2,\beta_3$，故行梯形前3列有零行而后3列对应有非零行，即必须$k=1$或$k=-2$.

又有：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & k \\ 0 & k+2 & k+2 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & k-4 & 0 & 3(1-k) & -(1-k)^3 \end{array}\right)$，

因为 β_1,β_2,β_3 可以表示 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，故行梯形不能出现前3列有零行而后3列对应有非零行，

即必须 $k \neq 4$ 或 $k \neq -2$. 综合起来有 $k=1$.

四. (**本题12分**) 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，向量 β 不是解，即 $A\beta \neq 0$，

证明：向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_n$ 线性无关.

证明：设有一组数 $k,k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得 $k\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+\cdots+k_n(\beta+\alpha_n)=0$，

即 $(k+\sum\limits_{i=1}^{n}k_i)\beta = -\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\alpha_i$，两边同乘矩阵 A，由 $A\alpha_i=0,(i=1,2,\cdots,n)$

得：$(k+\sum\limits_{i=1}^{n}k_i)A\beta = -\sum\limits_{i=1}^{n}k_iA\alpha_i=0$，因 $A\beta\neq 0$，故$k+\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=0$，由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是基础解系，

故线性无关，即 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，则推得 $k=0$，所以向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_n$ 线性无关.

五. (**本题12分**) 设 A,C 为 n 阶正定矩阵，若 B 是关于 Z 的矩阵方程 $AZ+ZA=C$ 的唯一解，

证明：B 是正定矩阵.

证明：由题意，$AB+BA=C$，因 A,C 为正定矩阵，故对称，则两边转置得，

$C=C^{\mathrm{T}}=(AB+BA)^{\mathrm{T}}=(AB)^{\mathrm{T}}+(BA)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A+AB^{\mathrm{T}}=AB^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}A$，

即 B^{T} 也是矩阵方程 $AZ+ZA=C$ 的解，由题设(解的唯一性)，得 $B^{\mathrm{T}}=B$，故 B 是对称矩阵.

设 λ 是 B 的任一特征值，x 是属于 λ 的一个特征向量，则：

$x^{\mathrm{T}}Cx=x^{\mathrm{T}}(AB+BA)x=x^{\mathrm{T}}ABx+x^{\mathrm{T}}BAx=x^{\mathrm{T}}A\lambda x+(Bx)^{\mathrm{T}}Ax=\lambda x^{\mathrm{T}}Ax+\lambda x^{\mathrm{T}}Ax=2\lambda x^{\mathrm{T}}Ax.$

由于 A,C 都为正定矩阵，故 $x^{\mathrm{T}}Cx>0,x^{\mathrm{T}}Ax>0$，于是 $\lambda>0$，即 B 的任意特征值都大于 0，

所以 B 为正定矩阵.

六. (**本题12分**) 设线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

(1) 求 T 在基 $\beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=3\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$ 下的矩阵；

(2) 若向量 $x=\alpha_1+6\alpha_2-\alpha_3, y=\beta_1-\beta_2+\beta_3$，求 Tx,Ty 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

解：设从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 下的过渡矩阵为 P，由题意，

$P=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，可求得 $P^{-1}=\begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 设 T 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵为 B，则

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-6&5&-2\\4&-3&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix};$$

(2) 设 Tx,Ty 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标分别为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，因 x 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}$，

故 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-56\\-78\\-40\end{pmatrix}$，由于 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}$，

所以 $y=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$，

于是 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$.

(2)的解法二：(2) 设 Tx,Ty 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标分别为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，

因 x 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}$，故 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-56\\-78\\-40\end{pmatrix}$.

因 y 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，故 Ty 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$，

故 Ty 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$.

七. (本题12分) 设 A 为三阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，
且 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$.
(1) 求矩阵 B，使得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$；
(2) 求矩阵 A 的特征值；
(3) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解：(1) 由题设，

$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$，即 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$；

(2) 因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故矩阵 $C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，则 $C^{-1}AC=B$，即 A 与 B 相似，

于是它们有相同的特征值. $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0.$

解得：B (即 A) 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$；

(3) 当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，由 $(E-B)x=0$ 解得基础解系为：$\xi_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\xi_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$，

当 $\lambda_3=4$ 时，由 $(4E-B)x=0$ 解得基础解系为：$\xi_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，即 $Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，由 $Q^{-1}BQ=Q^{-1}C^{-1}ACQ$，

记矩阵$P=CQ=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=(-\alpha_1+\alpha_2,-2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3)$,$P$即为所求的可逆矩阵.