南京大学计算机科学与技术系 2016—2017 学年春季学期

“离散数学”期中测验题

答案要点

1.（15 分） 今于我班诸生之中，遴选俊彦若干（不少于二人），排成一列纵队. 试以我班学生全体之集合为个体域，仅通过以下 2 个谓词：

(a) 相等谓词“=”：$x = y$ 表示x与y是同一个学生；

(b) 谓词$F(x,y)$：表示 x，y 均在纵队中，且x 排在 y 之前.

定义下列谓词（前面小题中已定义过的谓词在后面小题中可直接使用）：

在定义谓词时，那些不在谓词中的变元，必须通过量词限定，否则-1 分

使用不规范的符号，例如用“！”表示“¬”，用文字“且”“或”表示“∧”“∨”等情形，只出现在一小问中，该小问-1 分。出现在多个小问中，酌情扣分

(1) 学生 x 在纵队中；（3 分）

$$Q(x) \triangleq \exists y\big(F(x,y) \vee F(y,x)\big)$$

(2) 学生 x 排在队首；（4 分）

$$H(x) \triangleq Q(x) \wedge \forall y\big(\neg F(y,x)\big)$$

$$\forall y((\neg(y = x) \wedge Q(y)) \rightarrow F(x,y))$$

(3) 在队列中学生 x紧随着 y；　（4 分）

$$L(x,y) \triangleq F(y,x) \wedge \neg\exists z\big(F(y,z) \wedge F(z,x)\big)$$

(4) 学生 x 排在第二位.（4 分）

可以使用(2)(3)两题谓词的复合得到，也可以自己再定义

$$S(x) \triangleq \exists y\big(H(y) \wedge L(x,y)\big)$$

$$\exists y((F(y,x) \wedge (\forall z\, F(z,x) \rightarrow\ y = z))$$

2. （12 分）试证明：正整数 n 和 n^5 的最后一位必相同.

证明：

方法一：费马小定理 $n^p \equiv n \pmod p$　若 $(n,p)=1$

5 是质数，根据费马小定理，$n^5 \equiv n \pmod 5$（6 分）则 $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

又易见$n^5 \equiv n \pmod 2$（3 分）

于是 2 和 5 的最小公倍数 10 整除$n^5 - n$，即正整数 n 和 n^5 的最后一位必相同。（3 分）

方法二：罗列 n 的个位

若 n 的个位为 0，假设$n = 10k(k \in N^*)$，又$0^5 = 0$，则n^5的个位一定为 0

若 n 的个位为 1，假设$n = 10k + 1(k \in N)$，又$1^5 = 1$，则n^5的个位一定为 1

若 n 的个位为 2，假设$n = 10k + 2(k \in N)$，又$2^5 = 32$，则n^5的个位一定为 2

若 n 的个位为 3，假设$n = 10k + 3(k \in N)$，又$3^5 = 241$，则n^5的个位一定为 3

若 n 的个位为 4，假设$n = 10k + 4(k \in N)$，又$4^5 = 1024$，则n^5的个位一定为 4

若 n 的个位为 5，假设$n = 10k + 5(k \in N)$，又$5^5 = 3125$，则n^5的个位一定为 5

若 n 的个位为 6，假设$n = 10k + 6(k \in N)$，又$6^5 = 7776$，则n^5的个位一定为 6

若 n 的个位为 7，假设$n = 10k + 7(k \in N)$，又$7^5 = 16897$则n^5的个位一定为 7

若 n 的个位为 8，假设$n = 10k + 8(k \in N)$，又$8^5 = 32768$则n^5的个位一定为 8

若 n 的个位为 9，假设$n = 10k + 9(k \in N)$，又$9^5 = 59049$则n^5的个位一定为 9

综上，正整数 n 和 n^5 的最后一位必相同。（每个数字 1 分，结论两分）

方法三：数学归纳法

1） 基础步骤：当$n = 1$时，命题显然成立（2 分）

2） 归纳步骤：假设当$n = k(k \in N^*)$时，命题成立，即k 和 k^5的个位相同。

　　则当$n = k + 1$时，$n^5 = (k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$，

　　其中$10k^3 + 10k^2$与个位无关，即只需考察$k^5 + 5k^4 + 5k + 1$（2 分）

　　其中$5k^4 + 5k = 5k(k^3 + 1)$，若 k 为奇数，$(k^3 + 1)$为偶数，显然$5k^4 + 5k$可被 10 整除，若 k 为偶数，则$5k^4 + 5k$也可被 10 整除，即$5k^4 + 5k$不影响$(k+1)^5$的个位，所以$(k+1)^5$的个位和$k^5 + 1$的个位相同。（5 分）

又由假设k 和 k^5的个位相同，则$(k+1)^5$的个位和$k+1$相同，即$n = k+1$时命题也成立。（2 分）

根据数学归纳法，正整数 n 和 n^5 的最后一位必相同（1 分）

3. （12 分）令$\{0,1\}^*$为有限长的$0-1$串的集合，$\{0,1\}^\omega$为无限长的$0-1$串的集合，我们知道前者可数而后者不可数．试问：证明可数：构造一个到可数集的单射

(1) $\{0,1\}^\omega$中仅含有限个字符“1”的串的集合是否$\boxed{\text{可数?}}$ 为什么？

(2) $\{0,1\}^\omega$中包含无限个字符“1”的串的集合是否可数？为什么？

答：

(1)． 可数。记$\{0,1\}^\omega$中仅含有限个字符“1”的串的集合为F，可构造一个从F到$\{0,1\}^*$之间的映射：对于每一个含有限个字符“1”的串，忽略掉其最后一个“1”后的无限多的“0”。易见此映射为单射；而$\{0,1\}^*$可数，于是F可数。（8 分）

(2)． 不可数。记$\{0,1\}^\omega$中包含无限个字符“1”的串的集为I，若可数，则$\underline{I \cup F = \{0,1\}^\omega \text{可数}}$，而$\{0,1\}^\omega$不可数，矛盾。故$I$不可数。（4 分）

可数集的并集依旧是可数集

4. （12 分）递归定义双斐波那契数列$D_0, D_1, D_2, \cdots$ 如下：

$$\begin{cases} D_0 = 1 \\ D_1 = 1 \\ D_n = 2D_{n-1} + D_{n-2}\ (n \ge 2) \end{cases}$$

试证明：

(1) 所有双斐波那契数均为奇数；

(2) 任何两个相邻的双斐波那契数均互质.

解：（1） 6 分

a) 归纳基础：$D_0=1$，$D_1=1$. （1 分）

b) 归纳步骤：假设 D_k 为奇数（k 为整数且 k⩾1），则 D_{k+1} 也为奇数。（2 分）（注意 k 的定义域）

证明：已知 $D_{k+1} = 2D_k + D_{k-1}$，由假设得 $2D_k$ 为偶数，D_{k-1} 为奇数，则 D_{k+1}

为奇数。（3 分）

综上，命题得证。

（2）6 分

方法一：数学归纳法(直接证明)

① 归纳基础：D_0 与 D_1 互质，gcd（D_1，D_0）= 1（1 分）

② 归纳步骤：假设 gcd（D_k，D_{k-1}）= 1（k 为整数且 k⩾1），则 gcd（D_{k+1}，D_k）= 1。（1 分）（注意 k 的定义域）

由最大公约数的辗转相除法得：gcd（D_{k+1}，D_k）= gcd（$2D_k+D_{k-1}$，D_k）= gcd（D_k，D_{k-1}）=1。

综上，命题得证。　　另解：也可用裴蜀定理

方法二：数学归纳法(反证)

① 归纳基础：D_0 与 D_1 互质（1 分）

② 归纳步骤：假设 D_{k-1} 与 D_k 互质（k 为整数且 k⩾1），则 D_k 与 D_{k+1} 也互质。（2 分）（注意 k 的定义域）

假设 D_k 与 D_{k+1} 不互质，则 D_{k-1} 与 D_k 也不互质。（1 分）

D_k 与 D_{k+1} 不互质，则两者的最大公约数为 p（p 为整数且 P>1），那么存在正整数 a，b 使得 $D_k=a\times p$，$D_{k+1}=b\times p$。

已知 $D_{k+1}=2D_k+D_{k-1}$，则 $D_{k-1}=(b-2a)\times p>0$，可得 D_{k-1} 与 D_k 存在大于 1 的公因素 p，则两者不互质。（2 分）

综上，命题得证。

5. （12 分）考虑等价关系，

(1) 试求集合{1,2,3,4}上共有多少个等价关系？　　等价关系与集合划分之间有着一一对应的

(2) 试给出n元集合（$n>0$）上等价关系数F_n的递推关系式.

（考虑等价类的个数来进行递推记数）

要点：考虑有多少个不同的划分即可。

（1） 15.

考虑等价类数为 k 时有多少个关系（2 分：找到一个合适的分情况计数的思路）

1 个等价类的方案数是1，2 个等价类方案数是$C(4,3)+\frac{C(4,2)}{2}=7$ ，3 个等价类方案数是$C(4,2)=6$，4 个等价类方案数是1；（1 分：每个情况的计算方式正确；1 分：每个情况的计算结果正确[补充：认为“空关系“也是一种只扣 1 分]）

合计$1+7+6+1=15$。（2 分：最终结果正确）

（补充：错误的计算思路可得 1 分，只写一个正确结果可得 4 分）

（2）$F_n=\sum_{k=0}^{n-1}C(n-1,k)F_k$

F_n是含有n个元素集合的划分的个数，$\boxed{\text{考虑元素}b_n.}$（2 分：选出一个元素分情况讨论的思路）

特殊元素单独考虑

若b_n被单独划分到一类，那么还剩下$n-1$个元素，这种情况下划分个数为$C(n-1,n-1)F_{n-1}$；若b_n与某一个元素划分到一类，那么还剩下$n-2$个元素，这种情况下划分个数为$C(n-1,n-2)F_{n-2}$；依次类推，（2 分：每个情况的计算方式正确）

可得$F_n=\sum_{k=0}^{n-1}C(n-1,k)F_k$。（2 分：最终结果正确）

（补充：指出 F_n是贝尔数 or F_n与第二类斯特灵数的关系 or F_n从容斥的角度出发的计算方法，视为过程正确）

6. **（10 分）**今有赌局如下：你独立地掷 3 次骰子（这里骰子是公平的），看你能掷出几个六点.

- ✧ 若没有一次是六点，你输一块钱；
- ✧ 若仅有一次六点，你赢一块钱；
- ✧ 若恰有两次六点，你赢两块钱；
- ✧ 若三次全是六点，你赢K块钱.

试问：K是多少的情况下，这个赌局是公平的？二项分布：$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

要点：记事件E为“没有一次是六点”，F为“仅有一次是六点”，G为“恰有两次是六点”，H为“三次全是六点”。设随机变量M，

$$M(\omega)=\begin{cases}-1 & \omega\in E\\ 1 & \omega\in F\\ 2 & \omega\in G\\ K & \omega\in H\end{cases}$$

(2 分 不一定要明确列出各个事件，但是要有随机变量求解这题的框架)

而各事件发生概率为

$\Pr[E]=\mathrm{C}(3,0)\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$　　$\Pr[F]=\mathrm{C}(3,1)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{75}{216}$

$\Pr[G]=\mathrm{C}(3,2)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{216}$　　$\Pr[H]=\mathrm{C}(3,3)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$

（6 分，每个概率 1.5 分。如果因为某个共同的小误区导致四个概率都算错，如看错题以为投掷 4 次，可酌情给 1~2 分）

所谓赌局公平，即$\mathrm{EX}[M]=0$

$$\begin{aligned}0&=\mathrm{EX}[M]\\&=M(E)\Pr[E]+M(F)\Pr[F]+M(G)\Pr[G]+M(H)\Pr[H]\\&=-1\cdot\frac{125}{216}+1\cdot\frac{75}{216}+2\cdot\frac{15}{216}+K\cdot\frac{1}{216}\end{aligned}$$

即 $K=20.$

（2 分，列出式子给 1 分，结果给 1 分）

7. （**12 分**）给定一个偏序格$\langle X,\preccurlyeq\rangle$ 和元素 $x_0\in X$，令$X'=\{x\in X|x_0\preccurlyeq x\}$，试证明：$\langle X',\preccurlyeq\rangle$ 也是格. → ①证偏序集 ②证任意两元素有确界

证明要点：首先说明$\preccurlyeq$（限定在X'上）也是X'上的一个偏序；其次说明偏序格$\langle X,\preccurlyeq\rangle$上的最大下界和最小上界运算$\wedge,\vee$在$X'$封闭，且就是$\langle X',\preccurlyeq\rangle$上的最大下界和最小上界运算。

证明偏序集　（4 分）

可分别证明自反，反对称，传递；或直接指出$\boxed{\text{偏序的子集是偏序。}}$

$\boxed{\langle X,\preccurlyeq\rangle\text{的下确界和上确界运算在}\langle X',\preccurlyeq\rangle\text{上同样适用且封闭}}$（各 4 分，没能明确证明封闭性错一个扣 2 分）

格的一部分仍是格

8. （**15 分**）令 $S_{n,k}$ 为不等式 $x_1+x_2+\cdots+x_k\le n$ 的所有非负整数解的集合，即：

$\Leftrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n$

隔板法

构造组合模型

$$\mathcal{S}_{n,k}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in\mathbb{N}^k \mid x_1+x_2+\cdots+x_k\le n\}$$

(1) 试给出 $\mathcal{S}_{n,k}$ 与包含 n 个0和 k 个1的 $0-1$ 串的集合之间的双射; 给出⇒需要构造，而是证存在性

(2) 令 $\mathcal{L}_{n,k}$ 为长度为 k 的弱递增的、最大不超过 n 的非负整数序列，即

$$\mathcal{L}_{n,k}=\{(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\mathbb{N}^k \mid y_1\le y_2\le\cdots\le y_k\le n\}$$

试给出 $\mathcal{L}_{n,k}$ 与 $\mathcal{S}_{n,k}$ 之间的双射;

(3) 试求 $|\mathcal{L}_{n,k}|$.

要点:

(1). （共 6 分）不等式 $x_1+x_2+\cdots+x_k\le n$ 的解一一对应于如下等式方程的解

$$x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n \qquad (x_{k+1}\in\mathbb{N})$$

而此等式方程的每一个解唯一对应于一个包含 n 个0和 k 个1的 $0-1$ 串：k 个1将 n 个0切成 $k+1$ 段，第 i 段包含 x_i 个0 $(i=1,\cdots,k+1)$。(4 分)

说明上述映射是双射：对任意两组不同的非负整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)$，假设他们 x_i 的值不同，则对应串中第 i 个 1 和第 i+1 个 1 之间 0 的数量不同，故为单射。又考虑任意一个 n 个0和 k 个1的 $0-1$ 串，均可以找到这样一组 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 与之对应，故为满射。(2 分)

如果未能将双射描述清楚，酌情扣 1~2 分　单射＋满射⇒双射

(2). （共 6 分）令 $y_k=\sum_{i=1}^{k}x_k \quad (k=1,\cdots,n)$，该映射为单射且为满射。(6 分)

如果能找到其他双射亦可得满分，若找到的映射不为双射，视情况得 1~2 分。

双射 ⇕ 等势 ⇕ 基数相等

(3). （共 3 分）因为存在 $\mathcal{L}_{n,k}$ 与 $\mathcal{S}_{n,k}$ 之间的双射，且存在 $\mathcal{S}_{n,k}$ 与包含 n 个0和 k 个1的 $0-1$ 串的集合之间的双射（1 分），所以

$$|\mathcal{L}_{n,k}|=|\mathcal{S}_{n,k}|=C(n+k,k) \qquad (2\text{ 分})$$

使用其他方法直接求 $|\mathcal{L}_{n,k}|$ 答案正确亦可得满分，若计算过程错误得 1 分。