南京大学数学系2014/2015高等数学(一, A)试卷参考解答

一. 填空(本题满分$7\times 3=21$分)

1.已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} t\arctan(at)\mathrm{d}t}{x^6}=2$, 则$a=\underline{6}$;

2.设$f(x)=\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, 则$\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\underline{e^{-1}-1}$;

3.$\displaystyle\int\frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x=\underline{-\frac{1}{2}\frac{x}{\sin^2 x}-\frac{1}{2}\cot x+C}$

4.设一平面过原点及$M(6,-3,2)$且与$4x-y+2z=8$垂直. 则该平面的方程为$\underline{2x+2y-3z=0}$.

5.已知三点$A(1,0,2),B(2,1,-1),C(0,2,1)$则三角形$ABC$的面积$S_{ABC}=\underline{\frac{1}{2}\sqrt{50}}$;

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-7x+5}\right)=\underline{-5}$.

7.已知广义积分$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^x}$收敛，则,$k$的最大取值范围的为$\underline{(0,+\infty)}$.

二. 计算下列各题($8\times 5=40$分)

1. 求$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)+\cdots(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\exp[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln(1+\frac{k}{n})]=\exp\left(\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x\right)=$
$\displaystyle exp\left(x\ln(1+x)|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x\right)=\frac{4}{e}.$

2.设直线L的方程为: $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{5}$, 平面$\Pi$的方程为: $3x+y+2z+20=0$, 求直线L与平面Π的夹角和交点M.

直线L的方向向量为$\boldsymbol{s}=(4,\,-1,\,5)$, 平面$\Pi$的法向量为$\boldsymbol{n}=(3,\,1,\,2)$, 则

$$\sin\varphi=\frac{|4\cdot 3+(-1)\cdot 1+5\cdot 2|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+5^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+2^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\implies\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

将直线L的方程改写为参数式$x=-1+4t,\,y=2-t,\,z=1+5t$代人平面Π的方程中, 得

$$3\cdot(-1+4t)+(2-t)+2\cdot(1+5t)+20=0,$$

解得$t=-1$, 故交点M的坐标为$(-5,\,3,\,-4)$.

3.设连续函数$f(x)$满足$f(x)=x+x^2\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+x^3\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ 求$f(x)$.

$$f(x)=x+\frac{3}{8}x^2-x^3.$$

4. 计算积分 $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(1+x)e^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\mathrm{d}x + \int_0^1 e^x \mathrm{d}(\frac{1}{1+x}) = \frac{e^x}{1+x}\Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1.$

5.求曲线$y = x(1-x^2)$ 与x轴所围平面图形的面积.

$S = \int_{-1}^1 |y|\mathrm{d}x = -\int_{-1}^0 x(1-x^2)\mathrm{d}x + \int_0^1 x(1-x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$

6. 设 $y = \frac{x}{1-x}$,求 $y^{(n)}$.

$$y = -1 + \frac{1}{1-x};\ y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

7. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为非零向量, $|\boldsymbol{b}| = 1, <\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}> = \frac{\pi}{3}$, 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}| - |\boldsymbol{a}|}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}| - |\mathrm{a}|}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|^2 - |\mathrm{a}|^2}{(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}| + |\mathrm{a}|)x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}| + |\mathrm{a}|}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + x^2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}{x} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\mathrm{a}|} = \frac{1}{2}.$

8. 计算积分 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x = (u = \sqrt{1+e^x})\int \frac{1}{u^2-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C;$

三. (本题满分15分) 讨论函数$f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点，渐近线，并作出草图.

定义域:$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. $f'(x) = \frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}$, 增加区间:$(-1,1)$ 减少区间:$(-\infty,-1),(1,+\infty)$.

极小值: $f(-1) = 0$.

$f''(x) = \frac{16(x+1)^2(x+4)}{(1-x)^6}$. 凸: $(-\infty,-4)$, 凹:$(-4,1),(1,+\infty)$, 拐点:$(-4,\frac{81}{625})$.

垂直渐近线$x = 1$, 水平渐近线$y = 1$.

四. (本题满分10分) 求曲线 $y = \ln x$ 的一条切线，使得这条切线与原曲线，以及直线$x = 1, x = e^2$，所围成的图形面积最小.

曲线在点$(a,\ln a)$ 的切线方程为$y = \ln a + \frac{1}{a}(x-a)$,

切线与原曲线，以及直线$x = 1, x = e^2$所围面积为

$$S(a) = \int_1^{e^2}[\ln a + \frac{1}{a}(x-a) - \ln x]\mathrm{d}x = (e^2-1)\left(\ln a + \frac{e^2+1}{2a} - e^2 - 1\right).$$

$S'(a) = (e^2-1)\left(\frac{1}{a} - \frac{e^2+1}{2a}\right)$, 由$S'(a) = 0$,得唯一的驻点$a_0 = \frac{1}{2}(e^2+1)$. 由

于$S''(a_0)=4\frac{e^2-1}{(1+e^2)^2}>0$. 所以$S(a)$在点$a_0$处取倒唯一的极小值，即最大值。所求切线方程为$y=\frac{2}{e^2+1}x+\ln\frac{e^2+1}{2}-1$.

五. (本题满分8分）设$f(x)$ 在区间$[0,1]$上具有二阶的连续偏导数，并且$f(0)=f(1)=0$, 当$x\in[0,1]$ 时, $|f''(x)|\le M$. 证明, 当$x\in[0,1]$ 时, 有$|f'(x)|\le\dfrac{M}{2}$.

设$x_0\in[0,1]$，由泰勒公式有$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\zeta)}{2!}(x-x_0)^2$.

$$0=f(0)=f(x_0)-x_0f'(x_0)+\frac{f''(\zeta_1)}{2!}x_0^2,(1)$$

$$0=f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\zeta_2)}{2!}(1-x_0)^2,(2).$$

$(2)-(1)$ 得$f'(x_0)=\dfrac{f''(\zeta_1)}{2!}x_0^2-\dfrac{f''(\zeta_2)}{2!}(1-x_0)^2$, $|f'(x_0)|\le\dfrac{1}{2}M[(1-x_0)^2+x_0^2]\le\dfrac{M}{2}$.

六. (本题满分6分) 设函数$f(x)$ 是$[0,+\infty)$ 上的可微函数, 并且满足$f(1)=1$, $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f(x)^2}$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在并且满足$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<1+\dfrac{\pi}{4}$.

$f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f(x)^2}>0$, $f(x)$ 在$[1,+\infty)$上为严格单调增加函数当$x>1$时, $f(x)>f(1)=1$. $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f(x)^2}<\dfrac{1}{x^2+1}$. $f(x)=f(1)+\displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t<1+\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t<1+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=1+\frac{\pi}{4}$. $f(x)$为单调增加有界函数，所以$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，并且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(1)+\displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t]=1+\int_1^{+\infty}f'(t)\mathrm{d}t<1+\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=1+\frac{\pi}{4}$.