一、线性运算

家斗

1、加法 → 必须是同型矩阵

2、数乘

⇒ 满足一般代数运算的运算律

二、矩阵乘法（变换）

1、定义：$A=(a_{ij})_{m\times l}$ $B=(b_{ij})_{l\times n}$ 则 $A\cdot B=C=(c_{ij})_{m\times n}$

其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$ （用A中的行乘上B中的列）

2、性质：

① 满足结合律与分配律，不满足交换律与消去律

E 与 "1"，O 与 "0" 地位等同

② 矩阵多项式（用方阵定义）

③ $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$ （可推广到 n 个）

$|cA|=c^n|A|$ （行列式的公因子是一行行提的）

三、转置矩阵

1、$(A^T)^T=A$；$|A^T|=|A|$

2、$(A+B)^T = A^T + B^T$

3、$(kA)^T = kA^T$

4、$(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$（可推广到 n 个）

四、分块矩阵

分块矩阵基本性质与不分块类似

- 若作乘法 $A\cdot B$，则 A 的列分块与 B 的行分块相同
- $$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{pmatrix}$$

五、初等变换

1、初等变换 $\longleftrightarrow$ 初等矩阵

- 对调 $E(i,j)$ · 倍乘 $E(i(k))$ · 倍加 $E(i,j(k))$
- 左乘为行变换，右乘为列变换，变换方式同步

2、初等变换 $\longrightarrow$ 等价关系

- 初等变换 $\rightarrow$ 秩不变 则 等价关系也可用秩相等来看

六、矩阵的化简

1. 行简化梯形矩阵 ← 一定可以通过有限次初等行变换得到
   - 零行在下
   - 前零递增
   - 主"1"独霸

2. 列简化梯形矩阵（其他"1"）

3. 标准形矩阵 $\begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}$ ← 一定可通过有限次初等变换得到

七、矩阵的秩

1. 定义： $r(A) = r$（r 为 A 非零子式的最高阶）

2. 性质：

   ① $r(A^T) = r(A)$

   ② 方阵 $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$（满秩）

   ③ 初等变换不改变矩阵的秩

   $\Rightarrow$ 求法：化为行梯形矩阵，$r(A) =$ 非零行行数

④ $r(A+B) \le r(A) + r(B)$

$r(A \cdot B) \le \min\{r(A), r(B)\}$

$A \cdot B$ 均为 n 阶方阵：$r(A \cdot B) \ge r(A) + r(B) - n$.

八、逆矩阵（针对方阵）

1. 定义：$A \cdot B = B \cdot A = E$ （逆矩阵唯一）

2. 性质：

① $(A^{-1})^{-1} = A$ 且 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

② $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

③ $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

④ $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

九、伴随矩阵（针对方阵）

1. 定义：$A = (a_{ij})$，A_{ij} 为 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式

则 $A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & & A_{nn} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

2、性质：① $A\cdot A^* = A^*\cdot A = |A|\cdot E$

$\Rightarrow$ 求法：$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot A$

② $r(A^*) = \begin{cases} n, & 若\ r(A)=n \\ 1, & 若\ r(A)=n-1 \\ 0, & 若\ r(A)\le n-2 \end{cases}$

[题型] 求逆矩阵：

① 伴随矩阵法 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot A^*$

② 初等变换法 $(A \vdots E) \xrightarrow[r\cdots]{r\cdots} (E \vdots A^{-1})$

$\downarrow$

解方程 $AX = B$

$(A \vdots B) \xrightarrow[r\cdots]{r\cdots} (E, \underbrace{A^{-1}B}_{X})$

③ 定义法 如对角阵 $A = diag(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的逆矩阵

$A^{-1} = diag(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n})$.