

一、高斯消元法

家习

对增广矩阵实施初等行变换得到简单的同解方程组
(系数矩阵; 右端向量) 未知向量

二、可解性

$$\text{有解} \Leftrightarrow r(\text{系数矩阵}) = r(\text{增广矩阵})$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $= n \quad < n$
唯一解 无数解

$$\text{无解} \Leftrightarrow r(\text{系数矩阵}) + 1 = r(\text{增广矩阵})$$

三、解的结构

齐次与非齐次之间的关系:

$A\eta_0 = b$ (η_0 称为 $Ax = b$ 的特解), y 是 $Ax = b$ 的解

$$\Leftrightarrow y = \eta_0 + \eta \text{ 且 } A\eta = 0$$

1. 齐次: $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = \text{null}(A) \Rightarrow A$ 的零空间

性质: ① $Ax = 0$ 某子解系的线性组合仍是 $Ax = 0$ 的解。

- ② 解系的极大线性无关组称为基础解系
- ③ 自由未知量中令每一个为“1”，其余为0，得到 $n-r$ 组特解，形成的解系即为基础解系

2. 非齐次:

同齐次，化为行简化梯形阵，令自由变量为0，则可有一组特解；则其通解则为该特解加上对应齐次线性方程组的通解