线性代数期中试卷 (2019.11.16)

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. 降阶法

分块对角矩阵 $\Downarrow$ $|A|$与A^{-1}易求

(因式分解意识) → 与A^*只相差部分符号，而根据$|A|$与A^{-1}易求A^*

2. 设矩阵 $A = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$，求矩阵 $B = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} & M_{31} \\ M_{12} & M_{22} & M_{32} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{pmatrix}$，其中 M_{ij}为行列式$|A|$的ij元素的余子式.

往条件靠 $= (A(A^{-1}+E))^{-1} = (A^{-1}+E)^{-1}A^{-1}$

3. 已知 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$，求 $\underline{(E+A)^{-1}}$.

$(A^{-1}+E, A^{-1}) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, (A^{-1}+E)^{-1}A^{-1})$

4. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (-3\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, -2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3), |B| = 16$，求 $|A+B|$.

熟悉结论：$r(AA^T) = r(A)$

$\leftarrow B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = AC$ (因式分解)

5. 设矩阵 $A, B \in \mathrm{R}^{m\times n}$，证明 $\mathrm{r}(AA^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(A, B)$.

因式分解意识 $\leftarrow = r((A,B)(A,B)^T)$

二.(15分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & -7 & 9 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ s \\ 2.4 \end{pmatrix}$，其中 s 为参数.

高斯消元法

(1) 解方程组 $Ax = \beta$；　(2) 令 $B = \begin{pmatrix} A & \beta \\ \gamma^{\mathrm{T}} & 3 \end{pmatrix}$，解方程组 $By = \theta$.

$|A||A^*| = |A|^n$

$|A^*||A^{**}| = |A^*|^n$

利用伴随矩阵的性质

三. (10分) 设 n 阶矩阵 A 满足 $(A^*)^* = O$，其中 $(A^*)^*$ 是 A 的伴随矩阵 A^* 的伴随矩阵，证明 $|A| = 0$.

四.(15分) 设两个向量组 $A: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $B: \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

(1) 分别求向量组 A 的一个极大无关组和向量组 B 的一个极大无关组；→ 利用行简化阶梯矩阵

(2) 找一个向量 γ 使得向量组 $\boxed{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma \text{ 与向量组 } \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma}$ 等价，给出理由.

使它们都等价于 $A \cup B$ ← 第小问

整体考虑(A,B)与(B,A)

五.(10分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值和特征向量；　(2) 计算行列式 $|3E + A^*|$.

六.(10分) 设 n 阶实矩阵 $A \sim D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}, d_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n, f(\lambda) = |\lambda E - A|$.

(1) 证明 $f(d_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, n$；　(2) 证明 $f(A) = O$. 代入