一、线性相关与线性无关

家子

1、概念

线性组合 ← $\boxed{\boxed{x_1\vec{\alpha_1}+x_2\vec{\alpha_2}+\cdots+x_m\vec{\alpha_m}}=\vec{\beta}}$

↓

线性表示 $\Leftrightarrow$ $A\vec{x}=\vec{\beta}$ 有解

↑ 系数矩阵

2、定义

$$k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}+\cdots+k_m\vec{\alpha_m}=\vec{0}$$

$\exists\ (k_1,k_2,\cdots,k_m)\neq\vec{0}$ 满足上式，$(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\alpha_m})$ 线性相关

只有当 $(k_1,k_2,\cdots,k_m)=\vec{0}$ 时上式才成立，$(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\alpha_m})$ 线性无关

3、性质：

① 包含 $\vec{0}$ 的向量组必线性相关

② 部分线性相关 $\Rightarrow$ 整体线性相关

③ 整体线性无关 $\Rightarrow$ 部分线性无关

④ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 线性表示

⑤ $(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\alpha_r})$ 线性无关，$(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\alpha_r},\vec{\beta})$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ $\vec{\beta}$ 由 $(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\alpha_r})$ 唯一线性表出

向量组的线性相关性与矩阵秩的关系

⑥ $A=(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\alpha_r})$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(A)=r$

线性相关 $\Leftrightarrow r(A)<r$

推论：1) $n<r$ 时，$r(A)\le n<r \Rightarrow$ 线性相关

2) $n=r$ 时，线性无关 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

$\Rightarrow$ 通过矩阵的初等变换，利用矩阵的秩来判定向量组的线性相关性与线性无关性（一般化为行简化梯形矩阵）

二、极大线性无关组

1. 定义：$S=\{\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\alpha_n}\}$ m维，$T\subseteq S$

(1) T 线性无关　(2) $\forall \vec{\alpha_j}\in S\setminus T$，有 $T\cup\{\vec{\alpha_j}\}$ 线性相关

$\Rightarrow$ T 为 S 的极大线性无关组

2. 性质：① S 中任意向量都可由 T 唯一线性表出

② $R(S)=R(T)$，即 $span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=span(\alpha_1,\cdots\alpha_r)$

③ $S \Leftrightarrow T_1 \Leftrightarrow T_2 \Leftrightarrow \cdots$

$\Rightarrow$ $(S_1\Leftrightarrow S_2)\Leftrightarrow(T_1\Leftrightarrow T_2)$

④ $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 的一个极大线性无关组中向量的个数

即为 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$

3、求法：将列向量组通过初等行变换化成行简化梯形矩阵，主一所在的列向量构成一个极大线性无关组

三、向量组等价

1. 定义：相互线性表出

2、判定方式：① $A\vec{x}=B$ 则 $A \Leftrightarrow B$

② 利用极大线性无关组过渡