南京大学数学系2012/2013高等数学(一, A)试卷参考解答

一. 填空(本题满分$10\times 3=30$分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{x^2}^{x}\sin(xt)\mathrm{d}t}{x^3}=\underline{\dfrac{1}{2}}$;

2. 设$f(x)=x-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, 则$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\dfrac{2}{3}}$;

3. $\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2+x\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\underline{2-\dfrac{\pi}{2}}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)=\underline{\dfrac{\pi}{4}}$;

5. 过点$A=(1,0,4)$且与平面$\Pi: x-2y+2z=5$平行的平面方程为$\underline{x-2y+2z=9}$;

6. $\int x\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$.

7. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x=\underline{\dfrac{1}{2}}$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\underline{-2}$.

9. 函数$y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$的单调上升区间为$\underline{(-\infty,-1),\quad(3,+\infty)}$.

10. $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$, 则$\mathrm{d}y=\underline{\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x}$.

二. 计算下列各题($8\times 5=40$分)

1. 求曲线$y=\ln(1+\mathrm{e}^x)$的所有渐近线.

函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$, 且为连续函数, 故无铅直渐近线.

又因为$x\to+\infty$ 时y没有有限极限, $x\to-\infty$ 时$y\to 0$, 故有水平渐近线$y=0$.

又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+\mathrm{e}^x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=\ln 1=0.$$

故曲线还有斜渐近线$y=x$.

2. 计算积分$\displaystyle\int\frac{1}{1+3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^2 x+4\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(2\tan x)}{1+4\tan^2 x}=$

$\frac{1}{2}\arctan 2\tan x+c$;

3.求不定积分 $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\mathrm{d}x=\int\frac{u}{\cos^2 u}\mathrm{d}u=u\tan u-\int\tan u\mathrm{d}u=u\tan u+\ln\cos u+C=\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}+C.$

4. 计算积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}}=\int_0^{\pi/4}\cos u\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

5.设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\int_{-\infty}^c te^{2t}\,\mathrm{d}t$, 求 c 的值.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=e^{2c}$. $\int_{-\infty}^c te^{2t}\,\mathrm{d}t=(\frac{c}{2}-\frac{1}{4})e^{2c}$. $c=\frac{5}{2}$.

6. 设 $y=x\ln x$, 求 $y^{(n)}$.

$$y'=1+\ln x;y^{(n)}=(1+\ln x)^{(n-1)}=(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}.$$

7. 设空间中的四个点为 $A(1,\ 2,\ 1)$, $B(-1,\ 3,\ 4)$, $C(-1,\ -2,\ -3)$, $D(0,\ -1,\ 3)$, 求由以此四点为顶点的四面体的体积.

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix}-2&1&3\\-2&-4&-4\\-1&-3&2\end{vmatrix}\right\|=9,$$

8. 设直线 L 的方程为: $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{5}$, 平面 Π 的方程为: $3x+y+2z+20=0$, 求直线 L 与平面 Π 的夹角和交点 M.

直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(4,\ -1,\ 5)$, 平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,\ 1,\ 2)$, 则

$$\sin\varphi=\frac{|4\cdot3+(-1)\cdot1+5\cdot2|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+5^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+2^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\Longrightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

将直线 L 的方程改写为参数式 $x=-1+4t$, $y=2-t$, $z=1+5t$ 代人平面 Π 的方程中, 得

$$3\cdot(-1+4t)+(2-t)+2\cdot(1+5t)+20=0,$$

解得 $t=-1$, 故交点 M 的坐标为 $(-5,\ 3,\ -4)$.

三.

（本题满分10分）(1). 设$f(x),g(x)$ 在$[-a,a]$上连续，$g(x)$是偶函数，$f(x)+f(-x)\equiv A$（A 为常数），证明：$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_{0}^{a}g(x)\mathrm{d}x.$

(2)求$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\arctan(e^x)\mathrm{d}x.$

(1) $\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}f(-t)g(-t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}[f(-x)+f(x)]g(x)\mathrm{d}x=A\int_{0}^{a}g(x)\mathrm{d}x.$

(2) $\cos x$ 是偶函数, $f(x)=\arctan(e^x)$,

$(f(x)+f(-x))'=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}+\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}=0.$ $f(0)=\frac{\pi}{4}$, $f(x)+f(-x)\equiv\frac{\pi}{2}$.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\arctan(e^x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi/2}\cos x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

四.（本题满分8分）设抛物线$y=ax^2+bx+c$满足下面两个条件：

(1),通过$A(0,0)$ 和 $B(1,2)$ 两点，并且$a<0$;

(2),与抛物线$y=-x^2+2x$围成的图形面积最小.

求出该抛物线的方程.

将A,B 两点的坐标代人抛物线的方程得$c=0,a+b=2$.

由$a<0$ 知抛物线的开口向下. 又抛物线$y=-x^2+2x$ 通过点$(0,0),(2,0)$，开口向下, 顶点为$(1,1)$.

因此, 当$0\le x\le 1$时, 抛物线$y=ax^2+bx+c$ 在抛物线$y=-x^2+2x$ 的上方.

两抛物线的另一交点C 的横坐标为$\frac{a}{1+a}$.

因此，两抛物线围成的图形面积为

$$S=\int_{0}^{\frac{a}{1+a}}[ax^2+(2-a)x+x^2-2x]\mathrm{d}x=\frac{a^3}{6(1+a)^2},$$

$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a}=\dfrac{a^2(3+a)}{6(1+a)^3}=0.$ 得$a=-3$. 经讨论知$a=-3$ 为极小值点。因此$a=-3,b=5,c=0$ 该抛物线的方程$y=-3x^2+5x$.

五.（本题满分6分）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_{0}^{x}|\sin((t-[t])\pi)|\mathrm{d}t$, 这里$[x]$ 是不超过x的最大整数.

$$\int_{n}^{n+1}|\sin((x-[x])\pi)|\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

设$n=[x]$,则

$$\frac{1}{x}\int_0^x|\sin((t-[t])\pi)|\mathrm{d}t\le\frac{1}{n}\int_0^{n+1}|\sin(\pi(t-[t]))|\mathrm{d}t=\frac{n+1}{n}\frac{2}{\pi}\le\frac{x+1}{x-1}\frac{2}{\pi}.$$

$$\frac{1}{x}\int_0^x|\sin((t-[t])\pi)|\mathrm{d}t\ge\frac{1}{n+1}\int_0^{n}|\sin(\pi(t-[t]))|\mathrm{d}t=\frac{n}{n+1}\frac{2}{\pi}\ge\frac{x-1}{x+1}\frac{2}{\pi}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}\frac{2}{\pi}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin((t-[t])\pi)|\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}.$$

六. (本题非商学院的考生做，满分6分) 设连续函数$f(x)$的定义域和值域都是区间$[0,1]$. 并且函数$f(x)$具有连续的一阶导数,$f'(x)$是单调减函数, $f(0)=f(1)=0$. 证明: 由方程$y=f(x),(0\le x\le 1)$所确定的曲线弧的长度不超过3.

证明:由罗尔中值定理知，存在$c\in(0,1)$使得$f'(c)=0$,

因为$f'(x)$是单调减函数，所以，当$x\in[0,c)$时，$f'(x)\ge 0$. 当$x\in(c,1]$时，$f'(x)\le 0$.

$$L_{[0,c]}=\int_0^c\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x\le\int_0^c[1+f'(x)]\mathrm{d}x=c+f(c).$$

$$L_{[c,1]}=\int_c^1\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x\le\int_c^1[1-f'(x)]\mathrm{d}x=1-c+f(c).$$

$$L_{[0,1]}=L_{[0,c]}+L_{[c,1]}\le c+f(c)+1-c+f(c)\le 3.$$

七. (本题商学院的考生做，满分6分) 设$f(x)$在区间$[0,2]$上连续，在区间$(0,2)$可导. 并且$f(2)=\frac{1}{4}\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x$. 证明：存在一点$\zeta\in(0,2)$使得下面的等式成立$2f(\zeta)+\zeta f'(\zeta)=0$.

证明: 设$g(x)=x^2f(x)$, 则$g(x)$在区间$[0,2]$上连续，在区间$(0,2)$可导.

由积分中值定理, 有,$g(2)=4f(2)=\int_0^1x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1g(x)\mathrm{d}x=g(a),(0<a<1)$.

由微分中值定理知，存在$\zeta\in(a,2)\subset(0,2)$, 使得$g'(\zeta)=0$.

即$2f(\zeta)+\zeta f'(\zeta)=0$.