1. 方阵 A,B 满足 $AB=BA$，则必有 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$。(　　　)
2. 若方阵 A 有 $A^k=0$（$k>0$ 为整数），则必有 $|A|=0$。　(　　　)
3. A,B 为同型矩阵，且秩(A)＝秩(B)，则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 是同解方程组。　(　　　)

1. n 阶实对称矩阵的特征根必为实数.　(　　　)
2. 若矩阵 A,B 具有相同的秩,则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 是同解方程组.　(　　　)
3. 非齐次线性方程组 $AX=\beta(\beta\neq 0)$ 的全部解构成线性空间 R^n 的一个子空间.　(　　　)

1. 若矩阵 A 与 B 相似，则 A 等价于 B.　(　　　)
2. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$m<n$，且秩 $R(A)=m$，则齐次方程组 $AX=O$ 只有零解.　(　　　)
3. 在欧氏空间中只有零向量的模长为 0.　(　　　)

1. 若两个 n 维非零列向量 α 与 β 正交，则它们线性无关。　(　　　)
2. n 阶矩阵 A 满足 $A^2-3A-2E=O$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，则 A 不可逆。　(　　　)
3. 若 T 为线性空间 V 中的正交变换，$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$（$m>1$）为 V 中一个正交向量组，则 $T\alpha_1,T\alpha_2\cdots,T\alpha_m$ 一定是一个正交向量组。　(　　　)

1. 所有 n（$n>2$）阶反对称矩阵关于矩阵的线性运算构成的线性空间的维数为 $n(n+1)/2$。　(　　　)
2. 若 n 阶矩阵 A 可逆，则其伴随矩阵 A^* 也可逆。　(　　　)
3. 设 R^n 中向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$k_1,k_2\cdots,k_s$ 为不全为零的实数，则线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq O$　。　(　　　)

1. 若 n 阶矩阵 A 可逆，则其伴随矩阵 A^* 满足 $\left(A^*\right)^{-1}=|A|^{-1}A$。　(　　　)
2. 若非齐次线性方程组 $AX=b(b\neq 0)$ 有解，则它的解集合构成一个线性空间。　(　　　)
3. 若 T 是欧氏空间 V 中的一个正交变换，V 中向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则必有 $T\alpha_1,T\alpha_2,T\alpha_3$ 线性相关。　(　　　)

1. 对于任意 n 阶矩阵 A，B，有 $|A+B|=|A|+|B|$。　(　　　)
2. n 阶实对称矩阵的特征根必为实数。　(　　　)
3. 同一线性变换在不同基底下的矩阵是合同的。　(　　　)

1. 设矩阵 A 与 B 相似，则必有 A,B 同时可逆或不可逆。 ( )

2. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$中，如果$\alpha_1$与$\alpha_m$对应的分量成比例，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$中线性相关。( )

3. n阶矩阵 A 是正交矩阵，它的行向量组可作 R^n 空间的一组标准正交基。 ( )

1. 所有 n 阶实对角阵按照矩阵的线性运算规则构成 $R^{n\times n}$（所有 n 阶方阵构成的线性空间）的一个子空间。 ( )

2. 设$\lambda=0$ 是 n 阶方阵 A 的特征值，则方程组 $AX=O$ 有非零解。 ( )

3. 设 A 为 $s\times n$ 阶矩阵，$r(A)=s$，则 $s>n$。 ( )

1. A 是 $m\times n$ 矩阵，$R(A)=m$，则非齐次线性方程组 $Ax=b\ (b\neq 0)$ 有解。 ( )

2. 若 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$ 为 n 维欧式空间 V 的一个基底，T 为 V 中一个正交变换，则对于任意的 $i,j=1,2,\cdots,n$ 有

$\left\langle \mathrm{T}\varepsilon_i,\mathrm{T}\varepsilon_j\right\rangle=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$。 ( )

3. 在五阶行列式中，项 $\alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{45}\alpha_{14}\alpha_{53}$ 的符号为-1。 ( )

1. 对应于 $n(n>3)$阶实矩阵的相异特征值的实特征向量必是正交的。 ( )

2. 欧式空间V 中的向量α,β满足$|\alpha|=|\beta|$，则$\alpha+\beta$与$\alpha-\beta$ 正交。 ( )

3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是R^n中一个正交向量组，则它们作为列向量组构成的矩阵的秩必为 m。 ( )

1. 若矩阵等式 $AX=BX$ 成立，则 $A=B$。 ( )

2. 在线性空间 $P[x]$ 中，定义变换 $T: f(x)\mapsto f(x_0)$，其中 $f(x)$ 是 $P[x]$ 中的多项式，x_0 是一固定实数，则T 是线性变换。 ( )

3. n维（$n\geq 3$）欧几里得空间中，存在两个不同的单位向量，它们的内积是 1。 ( )

7. 下列说法不正确的是（　　　）

(A) 相似矩阵有完全相同的特征多项式。

(B) 若T是欧式空间V中的一个正交变换，则T在V的任意一个基底下的矩阵为正交矩阵。

(C) 若V是一个n维线性空间，则V中向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m(m>n)$的所有线性组合构成$V$的一个子空间。

(D) 二次型X^TAX与二次型Y^TBY等价，二次型Y^TBY与二次型Z^TCZ等价，则矩阵A与C等价。

8. A与B均为n阶方阵，则下列结论中成立的是（　　　）

(A) $|AB|=0$，则$A=0$或$B=0$。

(B) $|AB|=0$，则$|A|=0$或$|B|=0$。

(C) $AB=0$，则$A=0$或$B=0$。

(D) $AB\neq 0$，则$|A|\neq 0$或$|B|\neq 0$。

5. n阶方阵A具有n个不同的特征值是A与对角阵相似的（　　　）

（A）充分必要条件　　（B）充分而非必要条件

（C）必要而非充分条件　　（D）既非充分也非必要条件

8. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\3&0&0\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$B=AP$，则$|B|$ =（　　　）

（A） −1　　（B） 6　　（C） −6　　（D） 1

8. 设齐次线性方程组$AX=0$的通解为$X=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，则系数矩阵$A$为（　　　）

（A）$\begin{pmatrix}-2&1&1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$　　（C）$\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}-2&-1&1\end{pmatrix}$

7. 矩阵A,B满足：$P^TAP=B$，其中矩阵P是可逆矩阵。则下列命题正确的有：（　　　）

（1）矩阵A与B是合同关系　　（2）矩阵A与B是等价关系

（3）矩阵A与B的秩相同　　（4）矩阵A与B可能是相似关系

（A）1个　　（B）2个　　（C）3个　　（D）4个

8. 设 A，B 是 $n(n>2)$ 阶方阵，$AB=O$ 且 $B\neq O$，则必有 ( )

（A）$(A+B)^2=A^2+B^2$ （B）$|B|\neq 0$ （C）$|B^*|\neq 0$ （D）$|A^*|=0$

8. 线性空间 R^5 中前 3 个分量和为 0 的全体向量构成的子空间的维数是: ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

6. 对于方阵 A 与 A^{T}，下面说法错误的是： ( )

(A) 它们有相同的特征根 (B) 它们有相同的特征向量

(C) 它们有相同的特征多项式 (D) 它们的行列式值相同

5. 在线性空间 R^3 中定义如下变换，其中为线性变换的为 ( )

(A) $\sigma_1(x_1,x_2,x_3)=(|x_1|,x_2,x_3)$ (B) $\sigma_2(x_1,x_2,x_3)=(x_1+1,x_2,x_3)$

(C) $\sigma_3(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2^2,x_3^2)$ (D) $\sigma_4(x_1,x_2,x_3)=(x_2,x_3,0)$

$$
\textbf{2.}\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix},\quad x \neq 0
$$

2. 原式$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (n-1)/x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}$

——3 分 ——3 分

$= \dfrac{n-1}{x}(-x)^{n-1} = (n-1)(-1)^{n-1}x^{n-2}$ ——2 分

四、 线性方程组$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$，问：（本题 13 分）

（1）当λ取何值时，方程组无解，有解？

（2）当方程组有无穷多组解时，求方程组的通解。

解：方程组的增广矩阵为：

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+2 & 3 \\ 1 & \lambda & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(\lambda-2)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & (\lambda-3)(\lambda+1) & \lambda-3 \end{pmatrix} \qquad \text{（5 分）}$$

则当$\lambda=-1$时，**R(A)＝2，　R(B)=3,** 方程组无解。　　（**2** 分）

当$\lambda\neq-1$时，**R(A)=R(B),** 方程组有解。　　　　　　（**1** 分）

当$\lambda=3$时，**R(A)=R(B)＝2**，方程组有无穷多解。此时，

$$B \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{（1 分）}$$

取 $\mathbf{x_3}$ 为自由未知量，则当 $\mathbf{x_3=0}$ 时，$\mathbf{x_1=3,\ x_2=-1}$,

即方程组有一个特解 $\eta^{*}=(3,\ -1,0)^{T}$　　　　　　（**1** 分）

取 $\mathbf{x_3=1}$，方程组导出组的基础解系为$\xi=(-7,3,1)^{T}$　（**2** 分）

则方程组的通解为：$\eta=k\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，（$k\in R$）　　　（**1** 分）

1．计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

解：根据行列式的性质，原行列式等于：

$$\text{原式} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$ 2分

$$= -\begin{vmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 10 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$ 2分

$$= -\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \times 5 = -(-3 \times 2 + 3) \times 5 = 15$$ 2分

1. 计算行列式 $|D_n|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$**，其中** $n>2$**。**

1. 法一、$i(i=2,3,\cdots,n)$ 各行减去第一行，然后所有行再加到首行

$$|D_n|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -(n-1) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -(n-1) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \end{vmatrix}$$

(2 分) (2 分)

$=(-1)^{n-1}(n-1)n!$ (2 分)

法二、各列提出公因子

$$|D_n|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 0 \end{vmatrix}=n!\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$ (2 分)

$$=n!\begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}=n!(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$ (2 分)

$$=n!(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)n!$$ (2 分)

2. 计算n阶行列式 $|D_n|=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_1+x \end{vmatrix}$**，其中$n>2$。**

2. 法一、第 i 行 x^{i-1} 加到第一行$i=2,3,\cdots,n$

$$|D_n|=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_1+x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n+\sum_{i=1}^{n-2}a_{n-i}x^i+(a_1+x)x^{n-1} \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_1+x \end{vmatrix}$$ (3 分)

$$=(x^n+\sum_{i=1}^n a_i x^{n-i})(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}=(x^n+\sum_{i=1}^n a_i x^{n-i})(-1)^{1+n}(-1)^{n-1}=x^n+\sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}$$

(3 分) (2 分)

法二、 按照第一行展开

$$|D_n|=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_1+x \end{vmatrix}=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & x & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=xD_{n-1}+a_n$$

(2 分) (2 分)

而 $D_2=\begin{vmatrix} x & a_2 \\ -1 & a_1+x \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$ (1 分)

从而推得 $D_3=x(x^2+a_1x+a_2)+a_3=x^3+\sum_{i=1}^{3}a_i x^{3-i}$ $,...,|D_n|=x^n+\sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}$ (3 分)