人工智能学院本科生 2019—2020 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业(大类)：____________________ 年级：20 _____ 学号：____________ 姓名：________________ 成绩:

说明：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵, $R(A)$或 $r(A)$表示矩阵 A 的秩 A^{-1} 表示可逆矩阵 A 的逆矩阵, $|A|$表示方阵 A 的行列式,$\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$ 的内积。

草 稿 区

得 分

一 .客观题：1–3 小题为判断题，在对的后面括号中填 “ √ ”，错的后面括号中填“×”，4–8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)。

1. 对应于 $n(n>3)$阶实矩阵的相异特征值的实特征向量必是正交的。 (　　)

2. 欧式空间V 中的向量α,β满足$|\alpha|=|\beta|$，则$\alpha+\beta$与$\alpha-\beta$ 正交。 (　　)

3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是R^n中一个正交向量组，则它们作为列向量组构成的矩阵的秩必为 m。 (　　)

4. 设三阶矩阵 A，满足$|A|=-1$，则$|2A^*|=$ (　　)

   (A) -8　　(B) 8　　(C) -2　　(D) 2

5. 设 A 为 n 阶方阵，满足 $AB=O$，且 $B\neq 0$ 则： (　　)

   (A) A 的列向量组线性无关　　(B) $A=O$

   (C) A 的列向量组线性相关　　(D) A 的行向量组线性无关

6. 对于方阵 A 与 A^{T}，下面说法错误的是： (　　)

   (A) 它们有相同的特征根　　(B) 它们有相同的特征向量

   (C) 它们有相同的特征多项式　　(D) 它们的行列式值相同

7. n元齐次线性方程组$Ax=0$有非零解的充要条件是: (　　)

   (A) $R(A)>n$　　(B) $R(A)<n$　　(C) $R(A)=n$　　(D) $R(A)\le n$

8. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$其中$a>b>0$且$a^2+b^2=1$，则 A 为: (　　)

   (A) 正定矩阵　　(B) 负定矩阵　　(C) 初等矩阵　　(D)正交矩阵

得 分

二 、行列式计算 （第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分，共 14 分）

草 稿 区

1．计算行列式 $|D_n| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$，其中$n > 2$。

2. 计算n阶行列式 $|D_n| = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_1 + x \end{vmatrix}$，其中$n > 2$。

得 分

三、已知$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$，求$|A^4|$及$|A^*|$。（本题 10 分）

草 稿 区

得 分

四、当 a 与 b 取何值时, 下面方程组有唯一解？无解？有无穷解？当有无穷解时，求出全部解。

（本题 **14** 分）

$$\begin{cases} -x_1+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=2b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

草 稿 区

得 分

五、设在线性空间 $P_4[x]$ 中，有序基底(I)为 $\left[x^4, x^3, x^2, x, 1\right]$，有序基底(II)为

$$\left[1,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\ 1+x+x^2+x^3,\ 1+x+x^2+x^3+x^4\right],$$

(1) 求基底(I)到基底(II)的过渡矩阵。

(2) 求多项式 $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$ 在基底(II)下的坐标。 （本题 9 分）

草 稿 区

得 分

六、已知二次型：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$， （本题 14 分）

用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$为标准形，并求出所用正交变换矩阵$\mathbf{Q}$ 及该二次型的符号差。

草 稿 区

得 分

七、已知向量组(I) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 3，向量组(II) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3，向量组(III) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 的秩为 4，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4。（本题 9 分）

草 稿 区

得 分

八、设 $\boldsymbol{A,B,C,D}$ 都是 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵，其中 $|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{6}$ 并且 $\boldsymbol{AC=CA}$ ，

求证：$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{AD-CB}|$。（本题 9 分）

草 稿 区

得 分

九、 A 是三阶实对称方阵，且满足条件 $A^2-2A=O$，已知 $R(A)=2$。

（1）求 A 的全部特征值。

（2）当 k 为何值时，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵，其中 E 为三阶单位矩阵。 （本题 5 分）

草 稿 区