得 分

七、 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性空间 V 的一个基底，

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1-\alpha_2 \\ \beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3 \\ \beta_3=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3 \end{cases}$$

证明 β_1,β_2,β_3 也是 V 的一个基底，并求向量 $\alpha=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$ 在基底 β_1,β_2,β_3 下的坐标。 (10 分)

七、 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性空间 V 的一个基底，$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1-\alpha_2 \\ \beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3 \\ \beta_3=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3 \end{cases}$

证明 β_1,β_2,β_3 也是 V 的一个基底，并求向量 $\alpha=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$ 在基底 β_1,β_2,β_3 下的坐标。 (10 分)

证明：$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]M$ ——2 分

由于 $|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0$ ——1 分

知 β_1,β_2,β_3 在同一个基底下的坐标列向量线性无关，从而 β_1,β_2,β_3 线性无关构成三维线性空间 V 的一个基底。 ——2 分

（注：其他方法证出是基底 得 5 分， 如证明 β_1,β_2,β_3 线性无关）

显然 α 在基底 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 下的坐标为 $X=(2,-1,3)^T$， ——1 分

而基底 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 到 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 的过渡矩阵为 M，$M^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ ——2 分

因此 α 在基底 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $Y=M^{-1}X=[5.5000,-5.0000,6.5000]^T$.——2 分

八、 设在向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m (m>2)$中，$\alpha_1 \neq 0$，且每个$\alpha_i\ (i=2,3,\cdots,m)$都不能被$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1}$线性表示，证明该向量组线性无关。(8 分)

八、 设在向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m (m>2)$中，$\alpha_1 \neq 0$，且每个$\alpha_i\ (i=2,3,\cdots,m)$都不能被$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1}$线性表示，证明该向量组线性无关。(8 分)

证明：（多种方法，有 4 种以上方法）

（反证法）假设该向量组线性相关，则有一组非全零的数$k_1,k_2,\ldots,k_m$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m=0 \quad (1)$$ ——2 分

设$k_1,k_2,\ldots,k_m$中最后一个不为零的为k_r， ——1 分

则必有$r>1$，否则(1)化为$k_1\alpha_1=0$，从而$\alpha_1=0$，这与$\alpha_1\neq 0$矛盾。 ——2 分

此时(1)化为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r=0$，得到$\alpha_r=-\dfrac{1}{k_r}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_{r-1})$ ——2 分

即α_r可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,k_{r-1}$线性表出，与已知条件矛盾，故假设错误，从而该向量组线性无关。 ——1 分

常见证明 2：设有则有一组数$k_1,k_2,\ldots,k_m$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m=0 \quad (1)$$

若$k_m\neq 0$，则(1)化为$\alpha_m=-\dfrac{1}{k_m}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_{m-1})$，即 即$\alpha_m$可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,k_{m-1}$线性表出，与已知条件矛盾，从而必有 $k_m=0$。此时(1)化为

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_{m-1}\alpha_{m-1}=0$$

类似可得$k_{m-1}=0,k_{m-2}=0,\cdots,k_2=0$，此时(1)化为$k_1\alpha_1=0$，由于$\alpha_1\neq 0$，故必有$k_1=0$。因此仅当$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$时(1)成立，从而该向量组线性无关。

证 3：数学归纳法，证 4：证明任何一个向量都不能被其它向量线性表出。

九、　设实矩阵 $C_{m\times n}$（其中 $m>n$）的秩为 n。矩阵 $A=C^{\mathrm{T}}C$。证明：（1）A 是正定矩阵；（2）$\left|A+E\right|>1$，其中 E 为 n 阶单位阵。(共 5 分)

九、　设实矩阵 $C_{m\times n}$（其中 $m>n$）的秩为 n。矩阵 $A=C^{\mathrm{T}}C$。证明：（1）A 是正定矩阵；（2）$\left|A+E\right|>1$，其中 E 为 n 阶单位阵。(共 5 分)

证明：（多种方法，注意，本题阅卷可出现 0.5 分，5＝2.5＋2.5。）

(1)由 $R(C)=n$，知其次线性方程组 $CX=0$ 只有零解，　——0.5 分

从而任取 n 维列向量 $Y\neq 0$，有 $CY\neq 0$，　——0.5 分

显然 A 对称，而 $Y^T AY=Y^T C^{\mathrm{T}} CY=(CY)^T(CY)>0$，故二次型 $Y^T AY$ 正定　——1 分

从而 A>0.　——0.5 分

(2)由 A 对称知存在 n 阶正交矩阵 P 使得 $P^T AP=D$ 为对角形，　——0.5 分

而 $A=PDP^T$，　因此 $\left|A+E\right|=|PDP^T+PP^T|$

$$=|P(D+E)P^T|=|P||D+E||P^T|=|D+E|$$　——1 分

由(1)知 A>0，从而 D 的对角元，即 A 的特征根，都大于零，故对焦矩阵 D+E 的对角元都大于 1,因此 $\left|A+E\right|=|D+E|>1$.　——1 分

七、 A为n阶$(n>2)$可逆矩阵，α为n维列向量，b为实常数。记分块矩阵$P=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，$E$为$n$阶单位矩阵. (本题 9 分)

(1) 计算并化简PQ，

(2) 证明Q可逆的充要条件是 $\alpha^T A^{-1}\alpha \neq b$.

解：（1） **PQ** $=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & b|A|-\alpha^T A^*\alpha \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A|(b-\alpha^T A^{-1}\alpha) \end{pmatrix}$ （**5** 分）

（2）矩阵 **Q** 可逆的充要条件是$|Q|\neq 0$ （**1** 分）

因为 **A** 可逆，所以$|A|\neq 0$，则有

$|P|=\begin{vmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{vmatrix}=|A|\neq 0$，如果$|Q|\neq 0$，则有$|P||Q|=|PQ|\neq 0$（**2** 分）

因此，**Q** 可逆的充要条件是$\begin{vmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A|(b-\alpha^T A^{-1}\alpha) \end{vmatrix}=|A|^2(b-\alpha^T A^{-1}\alpha)\neq 0$

又因为$|A|\neq 0$，所以Q可逆的充要条件是$\alpha' A^{-1}\alpha \neq b$。（**2** 分）

八、 设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_L$ 和向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_S$ 的秩分别为 p 和 q. 试证明：若向量组 A 可由 B 线性表示，则 $p\le q$.

(本题 8 分)

证明：设向量组 A 的极大线性无关组为 A_1(有 p 个向量)。

向量组 B 的极大线性无关组为 B_1(有 q 个向量)。（2 分）

由极大线性无关组的性质，B 可由 B_1 线性表示。

A_1 是 A 的部分组，又 A 可由 B 线性表示，所以

A_1 可由 B 线性表示。也可以由 B_1 线性表示。 （4 分）

又因为 A_1 是线性无关的向量组，所以有

$p\le q$ （2 分）

九、 设 α,β 是 3 维列向量，矩阵 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$.（本题 5 分）

证明：(1) A 的秩 $R(A)\le 2$;

(2) 若 α,β 线性相关，则 $R(A)<2$.

证明：（1）因为 α，β 是 3 维列向量，所以 $R(\alpha)\le 1$, $R(\beta)\le 1$,

同时 $R(\alpha^T)\le 1$, $R(\beta^T)\le 1$ （1 分）

则 $R(\alpha\alpha^T)\le \min\{R(\alpha), R(\alpha^T)\}\le 1$

$R(\beta\beta^T)\le \min\{R(\beta), R(\beta^T)\}\le 1$ （1 分）

又 $R(A)\le R(\alpha\alpha^T)+R(\beta\beta^T)$ （1 分）

所以 $R(A)\le 2$

(2) 因为 α，β 线性相关，所以有 α＝kβ，或者 β＝kα，

k 为常数。 （1 分）

因此可得，$A=(1+k^2)\beta\beta^T$，或者 $A=(1+k^2)\alpha\alpha^T$

则 $R(A)=R(\alpha\alpha^T)\le 1$，或者 $R(A)=R(\beta\beta^T)\le 1$ （1 分）

所以有 $R(A)<2$

七、设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，且有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，证明：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{BC}| \ .$$

（本题 10 分）

七、本题共 10 分

因为已知 A 可逆，作分块矩阵乘积：

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -BA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ -BA^{-1}A+B & -BA^{-1}C+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D-BA^{-1}C \end{pmatrix},$$ **（3 分）**

而行列式 $\begin{vmatrix} E & 0 \\ -BA^{-1} & E \end{vmatrix}=1$ **（1 分）**，

所以：

$$\text{左式}=\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -BA^{-1} & E \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} E & 0 \\ -BA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & D-BA^{-1}C \end{vmatrix},$$ **（3 分）**

根据拉普拉斯定理，左式 $=|A|\cdot|D-BA^{-1}C|$。又因为已知 $AB=BA$，

$$\text{左式}=|A(D-BA^{-1}C)|=|AD-ABA^{-1}C|=|AD-BAA^{-1}C|=|AD-BC|=\text{右式}$$。**（3 分）**

证毕。

七、设 A 是 n 阶方阵，且 $AA^T=E$，$|A|=-1$，证明 $|A+E|=0$ （本题 9 分）

（其中 E 是 n 阶单位矩阵）。

证明：$|A+E|=|A+AA^T|$ （2 分）

$=|A(E+A^T)|$ （1 分）

$=|A||E+A^T|$ （1 分）

$=-|E^T+A^T|$ （2 分）

$=-|(E+A)^T|$ （1 分）

$=-|A+E|$ （1 分）

所以 $|A+E|=0$ （1 分）

九、设 A 是 $m\times n$ 的实矩阵，已知矩阵 $B=\lambda E+A^TA$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，

证明：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 B 为正定矩阵。　　　　（本题 4 分）

证明：

$$\begin{aligned} B^T &= (\lambda E + A^T A)^T \\ &= (\lambda E)^T + (A^T A)^T \\ &= \lambda E + A^T A \\ &= B \end{aligned}$$

（1 分）

又 A 是实矩阵

所以， B 是实对称矩阵

设任意 X=$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$ 是一 n 维实向量。

则

$$\begin{aligned} X^TBX &= X^T(\lambda E + A^T A)X \\ &= X^T(\lambda E)X + X^T(A^T A)X \\ &= \lambda X^T X + (AX)^T(AX) \end{aligned}$$

（1 分）

因为 X 是一不为 0 的实向量，所以有 $X^TX>0$

又 A 是 $m\times n$ 的实矩阵，所以 AX 是 m 维实向量。

则 $(AX)^T(AX)\geq 0$。　　　　（1 分）

所以对于任意不为 0 的 n 维实向量 X，满足

$X^TBX>0$

即 B 是正定矩阵　　　　（1 分）

五、设 R^2 中的两组基分别为： （本题 12 分）

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ 和\ \beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

已知线性变换 σ 在基 α_1，α_2 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$。

1）求由基 α_1，α_2 到基 β_1，β_2 的过渡矩阵 M；

2）求 σ 在基 β_1，β_2 下的矩阵。

解：1）

显然 $\beta_1=\alpha_2$ **[1 分]**

$\beta_2=-\alpha_1+3\alpha_2$ **[2 分]**

故 $[\beta_1,\beta_2]=[\alpha_1,\alpha_2]\begin{bmatrix}0&-1\\1&3\end{bmatrix}$**，** $M=\begin{bmatrix}0&-1\\1&3\end{bmatrix}$ **[3 分]**

令解 $M=(\alpha_1,\alpha_2)^{-1}(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&3\end{pmatrix}$ **【式子 2 分，求逆 2 分，结果 2 分】**

2）令 A=$\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$

则 σ 在基 β_1,β_2 下的矩阵：$B=M^{-1}AM=\begin{pmatrix}3&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\0&3\end{pmatrix}$

【式子 2 分，求逆 2 分，结果 2 分】

九、设 A 是 n 阶实对称矩阵，t 是一个正实数，证明：当 t 充分大时，$tE+A$ 是正定矩阵。

（其中 E 是 n 阶单位矩阵）　　（本题 4 分）

证明：法 1

A 为 n 阶实对称矩阵，所以 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$

$$(tE+A)^{\mathrm{T}}=tE+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=tE+\mathbf{A}$$

所以 $tE+A$ 是 n 阶实对称矩阵　　（1 分）

因为 A 为 n 阶实对称矩阵，所以 A 的特征值都是实数，（1 分）

设为 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$。不妨假设其中 λ_1 的值最小。

则 tE+A 的特征值为 $t+\lambda_1,t+\lambda_2,\dots,t+\lambda_n$ 亦都是实数。（1 分）

当 $t>-\lambda_1$ 时，$t+\lambda_i>0, i=1,2,\dots,n$

即 tE+A 的特征值都大于 0，所以 $tE+A$ 是正定矩阵。（1 分）

法 2

A 为 n 阶实对称矩阵，所以 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$

$$(tE+A)^{\mathrm{T}}=tE+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=tE+\mathbf{A}$$

所以 $tE+A$ 是 n 阶实对称矩阵

因为 A 为 n 阶实对称矩阵，所以 A 的特征值都是实数，

设为 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$。不妨假设其中 λ_1 的值最小。

存在正交矩阵 C 使得：

$$\mathrm{C^TAC=C^{-1}AC=diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$$　　(2 分)

则

$$\mathrm{C^T(tE+A)C=C^{-1}(tE+A)C=tE+C^{-1}AC}$$

$$=\mathrm{tE+diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}=\mathrm{diag}\{t+\lambda_1,t+\lambda_2,\dots,t+\lambda_n\}$$

当 $t>-\lambda_1$ 时，$t+\lambda_i>0, i=1,2,\dots,n$

即 tE+A 的特征值都大于 0，所以 $tE+A$ 是正定矩阵。　　（2 分）

九、已知存在 n 阶非零实矩阵 C，使得矩阵 $A=C^TC$，证明 $|A+E|>1$

其中 E 为 n 阶单位矩阵。（本题 4 分）

证明：因为 $A^T=(C^TC)^T=C^TC=A$，且 C 为非零实矩阵，所以 A 是非零的实对称矩阵。对于任意的 n 维非 0 实向量 X，

$$X^TAX=X^TC^TCX=(CX)^T(CX)$$

令 $Y=CX=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，

则 $X^TAX=Y^TY=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\ge 0$，

所以，矩阵 A 是半正定或者正定矩阵。（1 分）

A 的所有特征值都大于等于 0。A 是非零的实对称矩阵，一定能够找到可逆矩阵 P 使得：

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},\lambda_i\ge 0,i=1,2,\cdots,n,$$

且一定存在 $\lambda_i>0$，否则 A = 0，与题设矛盾。不妨设 $\lambda_1>0$。

则 $A=P\,\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}P^{-1}$（1 分）

$$|A+E|=|P\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}P^{-1}+PP^{-1}|$$

$$=|P(\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}+E)P^{-1}|$$

$$=|P||\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}+E||P^{-1}|$$

$$=|P||P^{-1}|(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)$$

$$=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)$$

$$\ge(\lambda_1+1)>1$$（2 分）

命题得证。

八、n维欧氏空间V，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是$V$内的一个向量组，令

$$D=\begin{vmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \ldots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle\\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \ldots & \langle\alpha_2,\alpha_n\rangle\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_n,\alpha_2\rangle & \ldots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle\end{vmatrix},$$

证明：若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关，则$D\neq 0$。　　（本题 9 分）

八、证明：若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关，则$D\neq 0$。

解：设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$在$V$中某标准正交基下的坐标列向量依次为$X_1,X_2,\ldots,X_n$, (2 分)

则 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=X_i^TX_j$

若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关，则$X_1,X_2,\ldots,X_n$线性无关，

令$M=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$，则M为n阶方阵且$|M|\neq 0$，　　（2 分）

于是$D=\begin{vmatrix}X_1^TX_1 & X_1^TX_2 & \ldots & X_1^TX_n\\ X_2^TX_1 & X_2^TX_2 & \ldots & X_2^TX_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ X_1^TX_1 & X_n^TX_1 & \ldots & X_n^TX_n\end{vmatrix}=|M^TM|$　　（3 分）

$=|M^T|\cdot|M|=|M|^2\neq 0$　　（2 分）

七、已知$\alpha=(1,2,3),\beta=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，设$A=\alpha^T\beta$，求$A^n$。$(n>2)$

证法一：　$A=\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$　　（2 分）

$n>2$时，$A^n=(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)^n=\alpha^{\mathrm{T}}(\beta\alpha^{\mathrm{T}})^{n-1}\beta$，　　（3 分）

而$\beta\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(1+1+1)=(3)$，　　（2 分）

而向量乘 1 阶矩阵与向量作数乘是相等的，因此，

$A^n=\alpha^{\mathrm{T}}(\beta\alpha^{\mathrm{T}})^{n-1}\beta=3^{n-1}\alpha^{\mathrm{T}}\beta=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$（2 分）

九、自然数m,n满足$m>n>0$。A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，且

秩$(A)=$**秩**$(B)=n$，证明：**秩**$(AB)=n$。（本题 4 分）

九、自然数m,n满足$m>n>0$。A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，且

秩$(A)=$**秩**$(B)=n$，

证明：**秩**$(AB)=n$。（本题 4 分）

证明：因秩$(AB)\le$秩$(B)=n$，（2 分），以下只需证明AB的列向量中确可找到n个线性无关的向量。

记B的第i列为列向量β_i，由矩阵乘法，AB的第i列为$A\beta_i$。

因已知秩$(B)=n$，因此$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$的秩为$n$，即$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$的极大线性无关组包含$n$个向量，设这个极大线性无关组为$\beta_{i_1},\beta_{i_2},\ldots,\beta_{i_n}$。考虑$AB$的第$i_1,i_2,\ldots,i_n$列共$n$个列向量$A\beta_{i_1},A\beta_{i_2},\ldots,A\beta_{i_n}$。若数$k_1,k_2,\ldots,k_n$使

$k_1A\beta_{i_1}+k_2A\beta_{i_2}+\cdots+k_nA\beta_{i_n}=0$，

即$A\begin{pmatrix}\beta_{i_1} & \beta_{i_2} & \cdots & \beta_{i_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0$，

因秩$(A)=n$，A的n个列向量线性无关，所以由上式有：

$$\begin{pmatrix}\beta_{i_1} & \beta_{i_2} & \cdots & \beta_{i_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0$$

但$\beta_{i_1},\beta_{i_2},\ldots,\beta_{i_n}$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$。

因此$A\beta_{i_1},A\beta_{i_2},\ldots,A\beta_{i_n}$线性无关，故秩$(AB)\ge n$。结合前面式子，知命题成立。（2 分）

五、在线性空间 R^2 中，给定一组基底：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ （本题 9 分）

在 R^2 中定义变换 **σ**：$\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}$

(1) 证明：变换 σ 为线性变换。

(2) 求 σ 在基底 α_1,α_2 下的矩阵 A。

解：显然 $\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}\in R^2$

设 $\alpha=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in \mathrm{R}^2,\beta=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\in \mathrm{R}^2,k\in R,$ 则 $\alpha+\beta=\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}\in \mathrm{R}^2$

$\sigma\alpha=\begin{pmatrix}b\\a+b\end{pmatrix},\sigma\beta=\begin{pmatrix}d\\c+d\end{pmatrix},\sigma(\alpha+\beta)=\begin{pmatrix}b+d\\a+c+b+d\end{pmatrix}=\sigma\alpha+\sigma\beta$ （2 分）

$\sigma(k\alpha)=\sigma\begin{pmatrix}ka\\kb\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kb\\ka+kb\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}b\\b+a\end{pmatrix}=k\sigma\alpha$ （2 分）

所以变换 σ 为线性变换

$\sigma\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\alpha_2-\alpha_1=(\alpha_1\ \alpha_2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\sigma\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2=(\alpha_1\ \alpha_2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ （3 分）

则 σ 在基底 α_1,α_2 **下的矩阵 A=** $\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$ （2 分）

九、n 阶矩阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = 0$。 **（本题 5 分）**

证明 (1) A 的特征值为 -1 和 2。

(2) A 与对角形矩阵相似。

九．解：

（1）设 A 的特征值 λ 所对应的特征向量为 X。则

$$0X = (A^2 - A - 2E)X = A^2X - AX - 2X = A(\lambda X) - \lambda X - 2X = (\lambda^2 - \lambda - 2)X,$$

因 $X \neq 0$，所以 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$。因此 $\lambda = 2$ 或 $\lambda = -1$。(2 分)

（2）A 的关于 $\lambda = 2$ 的特征子空间的维数为 $n - R(A-2E)$，故可从中取 $n - R(A-2E)$ 个向量构成线性无关的向量组 S_1，A 的关于 $\lambda = -1$ 的特征子空间的维数为 $n - R(A+E)$，故可从中取 $n - R(A+E)$ 个向量构成线性无关的向量组 S_2。将 S_1 和 S_2 合并得到的向量组 S 依然是线性无关的向量组，且每一个都是 A 的特征向量。S 含有向量的个数为 $2n - [R(A+E) + R(A-2E)]$，但

由 $(A-2E)(A+E) = 0$ 得到，$R(A+E) + R(A-2E) \le n$；另一方面，

$R(A+E) + R(A-2E) \ge R(A+E-A+2E) = R(3E) = n$。

因此 $R(A+E) + R(A-2E) = n$。所以 S 含有 n 个向量，即 A 有 n 线性无关的特征向量，因此 A 与对角形矩阵相似。（3 分）

得 分

九、设 A 是 n 阶矩阵，如果存在正整数 k，使得 $A^k = O$（O 为 n 阶零矩阵），则称 A 是 n 阶幂零矩阵。证明：

(1) 如果 A 是 n 阶幂零矩阵，则矩阵 A 的特征值全为 0。

(2) 如果 $A \neq O$ 是 n 阶幂零矩阵，则矩阵 A 不与对角矩阵相似。（本题 5 分）

证明：(1) 设 A 是 n 阶幂零矩阵，则 $A^k = 0$

设 A 的特征值为 λ，属于 λ 的特征向量为 α，则有

$A\alpha = \lambda\alpha$

等式两端左乘以矩阵 A^{k-1}，得到：

$A^k\alpha = A^{k-1}\lambda\alpha = \lambda^k\alpha = 0$ （1 分）

因为 α 为特征向量，所以 $\alpha \neq 0$，则有：

$\lambda^k = 0$，所以 $\lambda = 0$

即 A 的特征值全为 0 （1 分）

（2）如果 $A \neq O$ 是 n 阶幂零矩阵，根据上文，其特征值全为 0，则它的特征向量 X 满足：

$(\lambda E - A)X = 0$,

即 $AX = 0$

因为 $A \neq O$，所以 $R(A) = r > 0$, （1 分）

那么方程组 $AX=0$ 的解向量组的基础解系有 $n-r<n$ 向量，（1 分）

只有当 n 阶矩阵有 n 个线性无关的特征向量时，矩阵才可以与对角矩阵相似。显然，非零的 n 阶幂零矩阵不满足这一条件，所以不与对角矩阵相似。 （1 分）

九、矩阵 A 是 n 阶实对称矩阵，R^n 是 n 维欧氏空间，α 属于 R^n，P 是 n 阶正交矩阵，

$\beta = P\alpha$，证明：

(1) $\langle \alpha,\alpha \rangle = \langle \beta,\beta \rangle$。

(2) 一定存在一个正实数 g_0，对于任意的 n 维实向量 X，都有 $|X^T AX| \le g_0 X^T X$。　　（本题 5 分）

九．证：

(1) 因为 P 为正交矩阵，所以

$$\langle \beta,\beta \rangle = \beta^{\mathrm{T}}\beta = (P\alpha)^{\mathrm{T}}(P\alpha) = \alpha^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}P\alpha = \alpha^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}P)\alpha = \alpha^{\mathrm{T}}\alpha = \langle \alpha,\alpha \rangle. \qquad (1\text{ 分})$$

(2) 因为 A 为实对称矩阵，所以可以找到一个正交变换 $X = CY$，将二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 化为平方和

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个实特征值。取 $u = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}$，则

$$\begin{aligned}|X^{\mathrm{T}}AX| &= |\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2| \le |\lambda_1|\, y_1^2 + |\lambda_2|\, y_2^2 + \cdots + |\lambda_n|\, y_n^2 \\ &\le uY^{\mathrm{T}}Y = u(C^{\mathrm{T}}X)^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}X) = uX^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})X = uX^{\mathrm{T}}X,\end{aligned}$$

因此，取 $g_0 \ge u$，就有　$|X^{\mathrm{T}}AX| \le g_0 X^{\mathrm{T}}X$。　　（4 分）

说明：上面直接取 $g_0 = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}$ 也可以。

八、设实矩阵 $A = E - bb^T$，E 是 n 阶单位阵，b 是 n 维非零实列向量。

求证：(1)　$A^2 = A$ 的充要条件是 $b^T b = 1$；

(2) 当 $b^T b = 1$ 时，A 不可逆。　　（本题 9 分）

八、证明：

（1）充分性。已知 $b^{\mathrm{T}}b = 1$。计算：

$A^2 = (E - bb^T)(E - bb^T) = E - bb^T E - Ebb^T + bb^T bb^T = E - bb^T - bb^T + b(b^T b)b^T$，　　(2 分)

将 $b^{\mathrm{T}}b = 1$ 代入上式，得：$A^2 = E - bb^T - bb^T + b(b^T b)b^T = E - bb^T = A$，充分性得证。　　(1 分)

必要性，已知 $A^2 = A$，即 $A^2 - A = 0$。计算：

$0 = A^2 - A = (E - bb^T)(E - bb^T) - (E - bb^T) = -bb^T + b(b^T b)b^T$，　　(2 分)

$b^T b$ 为一个 1×1 矩阵，因此上式又可表示为：$0 = (b^T b - 1)bb^T$。

因为 b 为非 0 列向量。因此 bb^{T} 是非 0 矩阵。所以由上式得：$b^T b - 1 = 0$，即 $b^T b = 1$。必要性得证。

(1 分)

（充分性和必要性各 3 分）

（2）反证法。

如果 A 可逆。因已知 $b^{\mathrm{T}}b = 1$，由（1）知 A 满足 $A^2 = A$。此式等号两边都乘 A^{-1}，得：$A = E$。

(1 分)

即 $E - bb^{\mathrm{T}} = E$，因此 $bb^{\mathrm{T}} = 0$。　　(1 分)

但已知 b 为非 0 列向量，bb^{T} 是非 0 矩阵。矛盾。因此 A 可逆不成立，　即 A 不可逆。　　(1 分)

九、A 是 n 阶方阵，证明：$A^2 = E$ 成立的充要条件是 $R(A+E)+R(A-E)=n$。 （本题 5 分）

九．证：

必要性：已知 $A^2 = E$，因此 $(A+E)(A-E)=0$，所以 $R(A+E)+(A-E)\le n$， (1 分)

又 $R(A+E)+R(A-E)=R(E+A)+R(E-A)\ge R[(E+A)+(E-A)]=R(2E)=n$， (1 分)

因此 $R(A+E)+(A-E)=n$。 (1 分)

充分性：已知 $R(A+E)+(A-E)=n$，则 $R\begin{pmatrix} A+E & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix}=n$，

又应用矩阵的分块初等变换，

$$\begin{pmatrix} A+E & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A+E & 0 \\ A-E & A-E \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2E & E-A \\ A-E & A-E \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2E & E-A \\ 2A-2E & 2A-2E \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 2E & E-A \\ 0 & (E-A)(E-A)+2A-2E \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & A^2-E \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A^2-E \end{pmatrix},$$

因此 $R\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A^2-E \end{pmatrix}=n$，但 $R(E)=n$，故 $R(A^2-E)=0$。

因此 $A^2-E=0$，即 $A^2=E$。 (共 2 分)

八、设 A,B,C,D 都是 n 阶矩阵，其中 $|A|=6$ 并且 $AC=CA$，

求证：$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|$。 （本题 9 分）

八. 证明：由 $|A|=6$ 已知，因此 A 可逆。 （1 分）

因此 $\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$ （2 分）

此式两边取行列式，由于左边第一个矩阵行列式为 1，因此有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|$$ （3 分）

根据行列式乘法的公式，以及已知 $AC=CA$，有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|=|AD-ACA^{-1}B|=|AD-CAA^{-1}B|=|AD-CB|。$$ （3 分）

九、 A 是三阶实对称方阵，且满足条件 $A^2-2A=O$ ，已知 $R(A)=2$ 。

（1）求 A 的全部特征值。

（2）当 k 为何值时，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵，其中 E 为三阶单位矩阵。（本题 5 分）

九. 解：设 A 的特征值为 λ ，属于 λ 的特征向量为 X ，则有 $AX=\lambda X$ 。
由已知 $A^2-2A=O$，有 $0=0X=(A^2-2A)X=A^2X-2AX=\lambda^2X-2\lambda X=(\lambda^2-2\lambda)X$ ，
因 $X\neq 0$，所以 $\lambda^2-2\lambda=0$。故 A 的特征值只能是 0 或 2。且 A 与对角形矩阵相似。所相似的对角形矩阵的秩与 A 的秩相等，为 2，且对角形矩阵对角线上元素都是 A 的特征值，因此 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$， $\lambda_3=0$ 。（3 分）

A 是实对称矩阵，则存在正交矩阵 C，使 $C^TAC=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，于是

$$C^T(A+kE)C=C^TAC+kE=\begin{pmatrix}2+k&0&0\\0&2+k&0\\0&0&k\end{pmatrix},$$

即 $A+kE$ 与此对角形矩阵合同，该对角形矩阵正定的充要条件是 $k>0$，因此 $k>0$ 时， $A+kE$ 正定。（2 分）

九、已知 A 是 n 阶实反对称矩阵，证明 $E-A^2$ 是正定矩阵。（本题 5 分）

九、证明：由 A 是 n 阶实反对称矩阵得 $A^T=-A$, 从而 $E-A^2=E+A^TA$.（1 分）

考虑二次型 $X^T(E-A^2)X$，对于 $\forall X\neq 0$，有 $X^TX>0,(AX)^T(AX)\geq 0$,（2 分）

因此 $X^T(E-A^2)X=X^T(E+A^TA)X=X^TX+(AX)^T(AX)>0$,（1 分）

故 $X^T(E-A^2)X$ 是正定二次型，从而 $E-A^2$ 是正定矩阵.（1 分）

6. 已知二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

（1）t 为何值时，该二次型是正定的

（2）取 t=1，用可逆线性变化化二次型为标准型，并写出所用的线性变换。

(1) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，选取 t 使得

$$\Delta_1 = t > 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0,\quad \Delta_3 = |A| = (t+1)^2(t-2) > 0$$

故当 $t > 2$ 时，二次型 f 正定.

(2) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 =$

$$[x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3)] + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$，得 $f = y_1^2 - 4y_2y_3$

再令 $\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_2 - z_3 \end{cases}$，得标准形为 $f = z_1^2 - 4z_2^2 + 4z_3^2$

所用的可逆线性变换为 $\begin{cases} x_1 = z_1 - 2z_2 \\ x_2 = z_2 + z_3 \\ x_3 = z_2 - z_3 \end{cases}$

7.2 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\ (n \geq 3)$ 中，前 $n-1$ 个向量线性相关，后 $n-1$ 个向量线性无关，试证明：

（1）α_1 可表示为 $\alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 的线性组合；

（2）α_n **不能**表示为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 的线性组合。

证明：（1）由题设知 $\alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性无关，

又 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性相关，

所以 α_1 可表示为 $\alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 的线性组合。

（2）反证法。

若 α_n 能表示为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 的线性组合，

由（1），α_n 能表示为 $\alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 的线性组合，

所以 $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关，矛盾。