草稿区

计算机类本科生2020—2021学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A卷）

专业(大类或特色班)：________________ 年级：20 ___ 学号：___________ 姓名：________________ 成绩:

说明：A^T表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，O是零矩阵，$R(A)$或$r(A)$表示矩阵A的秩

A^{-1}表示可逆矩阵A的逆矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$的内积。

得 分

一 .客观题：1–3小题为判断题，在对的后面括号中填“√”，错的后面括号中填“×”，

4–8为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题2分，共16分)。

1. 若矩阵等式$AX=BX$成立，则$A=B$。 (　　)

2. 在线性空间$P[x]$中，定义变换$T:f(x)\mapsto f(x_0)$，其中$f(x)$是$P[x]$中的多项式，x_0是一固定实数，则T是线性变换。 (　　)

3. n维（$n\ge 3$）欧几里得空间中，存在两个不同的单位向量，它们的内积是1。 (　　)

4. 下列命题中正确的是 (　　)

(A) 任意n个$n+1$维向量线性相关　(B) 任意n个$n+1$维向量线性无关
(C) 任意$n+1$个n维向量线性相关　(D) 任意$n+1$个n维向量线性无关

5. 在线性空间R^3中定义如下变换，其中为线性变换的为 (　　)

(A) $\sigma_1(x_1,x_2,x_3)=(|x_1|,x_2,x_3)$　(B) $\sigma_2(x_1,x_2,x_3)=(x_1+1,x_2,x_3)$
(C) $\sigma_3(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2^2,x_3^2)$　(D) $\sigma_4(x_1,x_2,x_3)=(x_2,x_3,0)$

6. 下列矩阵不相似于对角矩阵的是 (　　)

(A) $\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$

7. 如果行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$，则行列式 $M=\begin{vmatrix}-a_{11}&4a_{21}-a_{31}&3a_{31}\\-a_{12}&4a_{22}-a_{32}&3a_{32}\\-a_{13}&4a_{23}-a_{33}&3a_{33}\end{vmatrix}=$ (　　)

(A) $-3D$　(B) $-4D$　(C) $-12D$　(D) $4D$

8. 设A为$n(n>3)$阶可逆方阵，则$(3A)^*=$ (　　)

(A) $3A^*$　(B) $3^{n-1}A^*$　(C) 3^nA^*　(D) $3^{-1}A^*$

得 分

二 、行列式计算 （第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分，共 14 分）

草 稿 区

1．计算行列式 $\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix}$。

2. 计算n阶行列式 $|D_n| = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x & x \\ 1 & 1 & x & \cdots & x & x \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$，其中$n>2$。

得 分

三、已知$A=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\1&1\\-1&0\end{bmatrix}$，求$A^{-1}$及$AB$。（本题 10 分）

草 稿 区

得 分

四、当λ与μ如何取值时，下面方程组有唯一解？无解？有无穷解？当有解时，求出全部解。

（本题 **14** 分）

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \mu \end{cases}$$

草 稿 区

得 分

五、设 $\boldsymbol{R}^3$ 的两个基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$；$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，

(1) 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 $\boldsymbol{M}$。

(2) 已知向量 $\alpha=\beta_1+\beta_2$，求向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标。 （本题 9 分）

草 稿 区

得 分

六、已知二次型：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，（本题 14 分）

用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$为标准形，求出所用正交变换矩阵P，并说明该二次型的类型（正定、负定、半正定、半负定、不定）。

草 稿 区

得 分

七、已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的一个基础解系，证明$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$也是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的一个基础解系。（本题 9 分）

草 稿 区

得 分

八、$\boldsymbol{A},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵。已知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$ 可逆且 $\boldsymbol{D}$ 可逆。求分块矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$ 的逆矩阵。（本题 9 分）

草 稿 区

得 分

九、已知 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶实反对称矩阵，证明 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2$ 是正定矩阵。（本题 5 分）

草 稿 区