计算机类本科生 **2020—2021** 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（**A** 卷）参考答案

一 .客观题：**1–3** 小题为判断题，在对的后面括号中填“ √ ”，错的后面括号中填“×”，

4–8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. **(**每小题 2 分，共 16 分**)**。

1. × **2.** √ **3.** ×

4. C **5. D** **6. B** **7. C** **8. B**

二 、行列式计算 （第 **1** 小题 **6** 分，第 **2** 小题 **8** 分，共 **14** 分）

1．计算行列式 $\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix}$。

解：（方法一）

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c+d & b & c & d \\ x+a+b+c+d & x+b & c & d \\ x+a+b+c+d & b & x+c & d \\ x+a+b+c+d & b & c & x+d \end{vmatrix}$$ （2 分）

$$=\left(x+a+b+c+d\right)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & x+b & c & d \\ 1 & b & x+c & d \\ 1 & b & c & x+d \end{vmatrix}$$

$$=\left(x+a+b+c+d\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$ （2 分）

$$=x^3\left(x+a+b+c+d\right)$$ （2 分）

解：（方法二）

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x+a & b & c & d \\ 1 & a & x+b & c & d \\ 1 & a & b & x+c & d \\ 1 & a & b & c & x+d \end{vmatrix}$$ （2 分）

$$=\begin{vmatrix} 1 & -a & -b & -c & -d \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\frac{d}{x} & -a & -b & -c & -d \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$ （2 分）

$$=\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\frac{d}{x}\right)x^4 = x^3 \ \ x+a+b+c+d$$ （1 分）

此处要求 $x \neq 0$，但当 x=0 时，原行列式显然等于 0，与 $x^3\left(x+a+b+c+d\right)$ 结果一致。

（1 分）

2. 解：（方法一）

$$\left|D_n\right| = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x & x \\ 1 & 1 & x & \dots & x & x \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x & x \\ 0 & 1-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$ （6 分）

$$= 1 \cdot \left(1-x\right)^{n-1} = \left(1-x\right)^{n-1}$$ （2 分）

解：（方法二）

$$\left|D_n\right| = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x & x \\ 1 & 1 & x & \dots & x & x \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1-x & 1-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1-x & 1-x & 1-x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1-x & 1-x & 1-x & \dots & 1-x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ （6 分）

$$= \left(1-x\right)^{n-1} \cdot 1 = \left(1-x\right)^{n-1}$$ （2 分）

三、已知 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，求 A^{-1} 和 AB

解：令 $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$,其中 $A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ （2 分）

则 $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}$， $A_1^{-1} = \dfrac{A_1^*}{\left|A_1\right|} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, A_2^{-1} = \dfrac{A_2^*}{\left|A_2\right|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ （3 分）

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$ （1 分）

$$AB=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2\\2&-1\\3&1\\0&1\end{bmatrix}$$ （4 分）

四、解：方程组的增广矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\-1&1&-3&2\\2&-1&\lambda&\mu\end{pmatrix}$ （2 分）

对 A 作初等行变换，化成阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\-1&1&-3&2\\2&-1&\lambda&\mu\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&1\\0&-1&\lambda-4&\mu+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&1\\0&0&\lambda-5&\mu+3\end{pmatrix}$$ （3 分）

因此当 $\lambda\neq 5$ 时，方程组的系数矩阵的秩和增广矩阵的秩都等于 3，且等于方程组未知数个数，方程组有唯一解；当 $\lambda=5$ 且 $\mu=-3$ 时，方程组的系数矩阵的秩和增广矩阵的秩都等于 2，小于未知数的个数，方程组有无穷多组解；当 $\lambda=5$ 且 $\mu\neq-3$ 时，方程组系数矩阵的秩为 2，增广矩阵的秩为 3，方程组无解。 （3 分）

当 $\lambda\neq 5$ 时，继续对增广矩阵作初等行变换

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&\frac{\mu+3}{\lambda-5}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1-2\frac{\mu+3}{\lambda-5}\\0&1&0&1+\frac{\mu+3}{\lambda-5}\\0&0&1&\frac{\mu+3}{\lambda-5}\end{pmatrix}$$

方程组解为 $\begin{cases}x_1=-1-2\frac{\mu+3}{\lambda-5}\\x_2=1+\frac{\mu+3}{\lambda-5}\\x_3=\frac{\mu+3}{\lambda-5}\end{cases}$ （2 分）

当 $\lambda=5$ 且 $\mu=-3$ 时，方程组化为 $\begin{cases}x_1+2x_3=-1\\x_2-x_3=1\end{cases}$ （1 分）

取 x_3 为自由未知量， $x_3=\tilde{x}_3$，得

$\begin{cases}x_1=-1-2\tilde{x}_3\\x_2=1+\tilde{x}_3\\x_3=\tilde{x}_3\end{cases}$，写成向量形式：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\tilde{x}_3\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ （2 分）

其中 $\tilde{x}_3$ 取任意实数。 （1 分）

五、解：

（1）解法 1：

取基$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$ (1 分)

则从基$[e_1,e_2,e_3]$到$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$的过渡矩阵为$\mathrm{T}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}$ (1 分)

从基$[e_1,e_2,e_3]$到$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$的过渡矩阵为$\mathrm{S}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ (1 分)

所以从基$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 到$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$的过渡矩阵为

$\mathrm{M}=\mathrm{T}^{-1}S=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\\1&2&2\\0&-1&-1\end{pmatrix}$ (3 分)

另解法 2：

也可直接由

$$\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+a_{31}\alpha_3$$
$$\beta_2=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+a_{32}\alpha_3$$
$$\beta_3=a_{13}\alpha_1+a_{23}\alpha_2+a_{33}\alpha_3$$

解出a_{ij}，进而得到$\mathrm{M}=(a_{ij})$，最终结果同解法 1

（若思路正确，但 M 计算有误，扣 3 分；M 写成M^{T}扣 3 分）

（2）解法 1：

$\alpha=\beta_1+\beta_2$在基$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$下的坐标为 M 的前两列之和，即为$\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$ (3 分)

解法 2：

也可直接求$\alpha=\beta_1+\beta_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\mathrm{k}_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$求出$k_1=4,k_2=3,k_3=-1,$

从而α在基$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$下的坐标为$\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$ (3 分)

解法 3：

$\alpha=\beta_1+\beta_2$在基$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$的坐标为$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，从而$\alpha$在基$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$下的坐标为

$$\mathrm{Y}=\mathrm{MX}=\begin{pmatrix}1&3&2\\1&2&2\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$$

六、二次型矩阵$\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$ （1 分）

求出特征根为 1（二重），4（一重） （2 分）

获得特征根 1 的特征向量 x1=(-1,1,0),x2=(-1,0,1)

特征根 4 的特征向量 x3=(1,1,1)　（2 分）

对特征根 1 的特征向量正交化 a1=(-1,1,0), a2=(-1/2,-1/2,1),
对特征根 4 的特征向量正交化（无需显式进行）　（2 分）

对上述正交向量组单位化

b1=(-.., $1/\sqrt{2}$,0), b2=(-$1/\sqrt{6}$,-$1/\sqrt{6}$,$2/\sqrt{6}$),b3=($1/\sqrt{3}$,$1/\sqrt{3}$,$1/\sqrt{3}$)　（2 分）

故正交矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

（X=PY）　（2 分）

所得标准形为 $f=y_1^2+y_2^2+4y_3^2$ （系数与 P 的列需对应）　（2 分）

该二次型为正定二次型。　（1 分）

七、

α_1，α_2，α_3为$AX=0$的一个基础解系，则其解空间　（1 分）

$$\mathrm{k}_1(\alpha_1+\alpha_2)+\mathrm{k}_2(\alpha_2+\alpha_3)+\mathrm{k}_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$$

$$\Rightarrow(\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_3)\alpha_1+(\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2)\alpha_2+(\mathrm{k}_2+\mathrm{k}_3)\alpha_3=0$$

$\because\alpha_1$，α_2，α_3 线性无关

$$\therefore\begin{cases}\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_3=0\\ \mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2=0\Rightarrow \mathrm{k}_1=\mathrm{k}_2=\mathrm{k}_3=0\\ \mathrm{k}_2+\mathrm{k}_3=0\end{cases}$$

（4 分）

$\therefore\alpha_1+\alpha_2$、$\alpha_2+\alpha_3$、$\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关

$\because\alpha_1$，α_2，α_3为$AX=0$的解

$\therefore\alpha_1+\alpha_2$、$\alpha_2+\alpha_3$、$\alpha_3+\alpha_1$也为$AX=0$的解　（3 分）

即$\alpha_1+\alpha_2$、$\alpha_2+\alpha_3$、$\alpha_3+\alpha_1$为$AX=0$的解空间的极大线性无关组

$\therefore$为基础解系　（1 分）

八、解：显然$(A+C)^{-1}$和D^{-1}都存在，由于

$$\begin{bmatrix} E & E \\ & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & -D \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & \\ -D^{-1}C & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+C & O \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & \\ -D^{-1}C & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+C & O \\ O & D \end{bmatrix}$$

(3 分)

对上式两端同取逆得

$$\begin{bmatrix} E & \\ -D^{-1}C & E \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A & -D \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} E & E \\ & E \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A+C & O \\ O & D \end{bmatrix}^{-1}$$ **(2 分)**

于是有

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} A & -D \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} E & \\ -D^{-1}C & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A+C & O \\ O & D \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} E & E \\ & E \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E & \\ -D^{-1}C & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (A+C)^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & E \\ & E \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A+C)^{-1} & O \\ -D^{-1}C(A+C)^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & E \\ & E \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A+C)^{-1} & (A+C)^{-1} \\ -D^{-1}C(A+C)^{-1} & D^{-1}-D^{-1}C(A+C)^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$ **(4 分)**

解 2：显然$(A+C)^{-1}$和D^{-1}都存在，由于

$$\begin{bmatrix} A & -D & E & \\ C & D & & E \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} A+C & O & E & E \\ C & D & & E \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} E & O & (A+C)^{-1} & (A+C)^{-1} \\ C & D & & E \end{bmatrix}$$ **(4 分)**

$$\to\begin{bmatrix} E & O & (A+C)^{-1} & (A+C)^{-1} \\ O & D & -C(A+C)^{-1} & E-C(A+C)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} E & O & (A+C)^{-1} & (A+C)^{-1} \\ O & E & -D^{-1}C(A+C)^{-1} & D^{-1}-D^{-1}C(A+C)^{-1} \end{bmatrix}$$ **(4 分)**

从而$\begin{bmatrix} A & -D \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} (A+C)^{-1} & (A+C)^{-1} \\ -D^{-1}C(A+C)^{-1} & D^{-1}-D^{-1}C(A+C)^{-1} \end{bmatrix}$ **(1 分)**

九、证明：由 A 是 n 阶实反对称矩阵得 $A^T=-A$, 从而 $E-A^2=E+A^TA$. （1 分）

考虑二次型 $X^T(E-A^2)X$，对于 $\forall X\neq 0$，有 $X^TX>0,(AX)^T(AX)\geq 0$, （2 分）

因此 $X^T(E-A^2)X=X^T(E+A^TA)X=X^TX+(AX)^T(AX)>0$, （1 分）

故 $X^T(E-A^2)X$ 是正定二次型，从而 $E-A^2$ 是正定矩阵. （1 分）