Portfolio Risk and Return

基础知识铺垫：

1　单个资产的指标计算：

- **An individual investment:**
  - Expected Return $E(R)=\sum_{i=1}^{n}P_iR_i=P_1R_1+P_2R_2+\cdots+P_nR_n$
  - Variance of Return $\text{Var}=\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}[R_i-E(R)]^2P_i$
  - Standard Deviation of Return $\text{SD}=\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[R_i-E(R)]^2P_i}$
  - Covariance $Cov_{1,2}=\sum_{i=1}^{n}P_i[R_{i,1}-E(R_1)][R_{i,2}-E(R_2)]$
  - Correlation

$$\rho_{1,2}=\frac{Cov_{1,2}}{\sigma_1\sigma_2} \qquad Cov_{1,2}=\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2$$

2　多个资产的方差计算

- Variance of N-asset portfolio (same covariance, same weight, same volatility)

$$\sigma_p^2=\frac{\bar{\sigma}^2}{N}+\frac{N-1}{N}\overline{Cov}$$

- Two-asset portfolio:

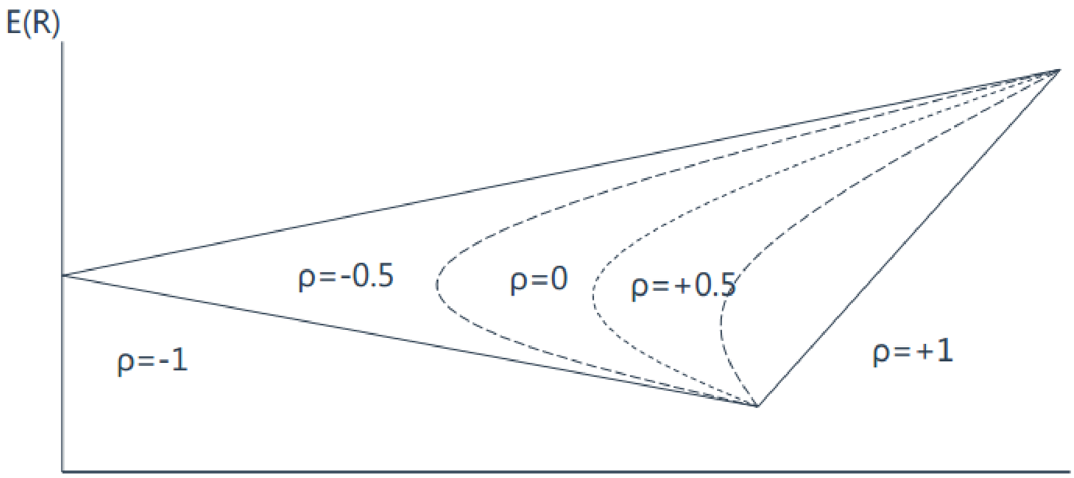
$$\sigma_p^2=w_1^2\sigma_1^2+w_2^2\sigma_2^2+2w_1w_2COV_{1,2}=w_1^2\sigma_1^2+w_2^2\sigma_2^2+2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2}$$

9-118

2.1　当相关性为 1 时：$\sigma_p=w1\sigma1+w2\sigma2$

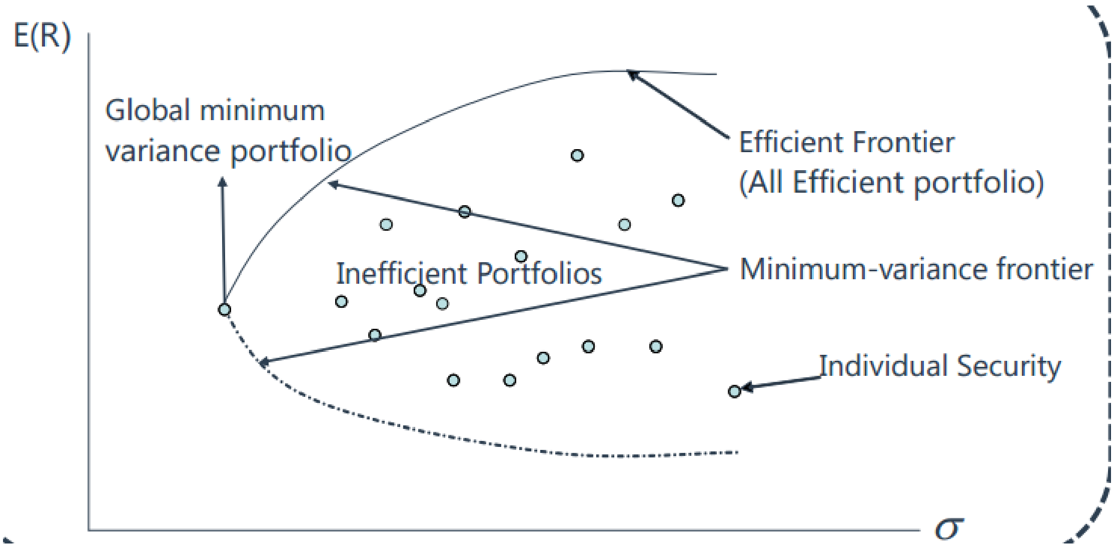
2.2　当相关性为-1 时：$\sigma_p=w1\sigma1-w2\sigma2$

2.3　组合资产相关性越小，组合的方差越小，风险也越小



马科维茨均值方差模型

1 马科维茨模型中用到的资产都是风险资产
2 选择标准：
  2.1 均值相同时，选方差最小的
  2.2 方差相同时，选均值最大的



3 根据选择标准，只要左边弧线上的点，中间的点都不要了，这条线叫做：minimum-variance frontier,最小方差前言，包括途中虚线的
4 把虚线去掉（因为相同方差下，上面的点均值更高），就是有效前沿，effect frontier
5 根据主观分析对投资者分类：
  5.1 根据 risk 不同，讲投资者分为三类：
    5.1.1 Risk seeking，风险偏好者，high risk>low risk
    5.1.2 Risk neutral，风险中性者，不关注风险
    5.1.3 Risk averse，风险厌恶者，low risk>high risk
  5.2 效用理论 Utility Theory:（爽度）
    5.2.1 假设：
      5.2.1.1 投资者都是风险厌恶的

5.2.1.2 大家都喜欢更高的效用

5.2.1.3 投资组合可根据效用做排序

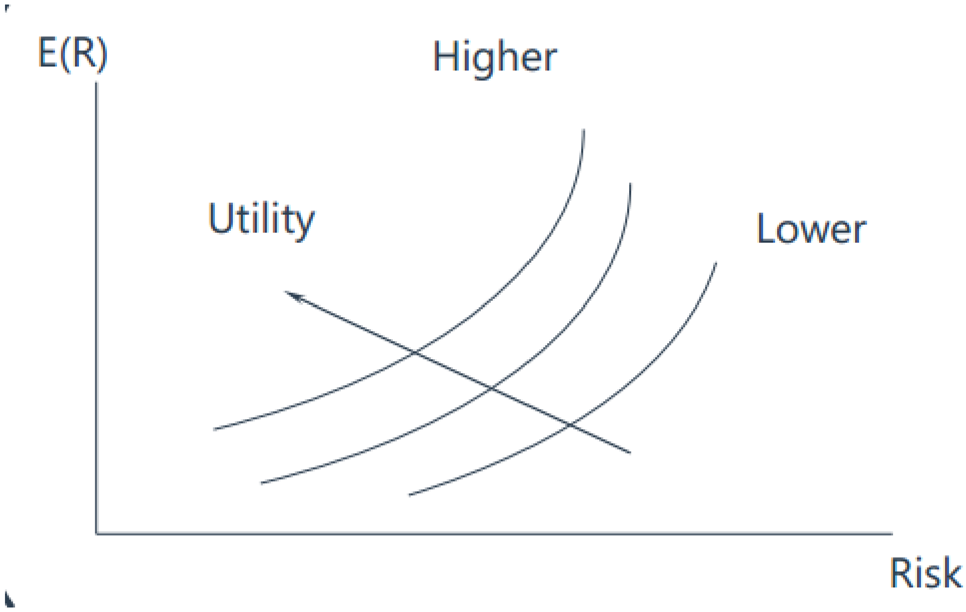
5.2.2 效用函数 $U = E(r) - \frac{1}{2}A\sigma^2$

5.2.2.1 A 是风险厌恶系数， A<0:风险厌恶 A=0:风险中性 A>0:风险偏好

5.2.2.2 E(r)是期望收益

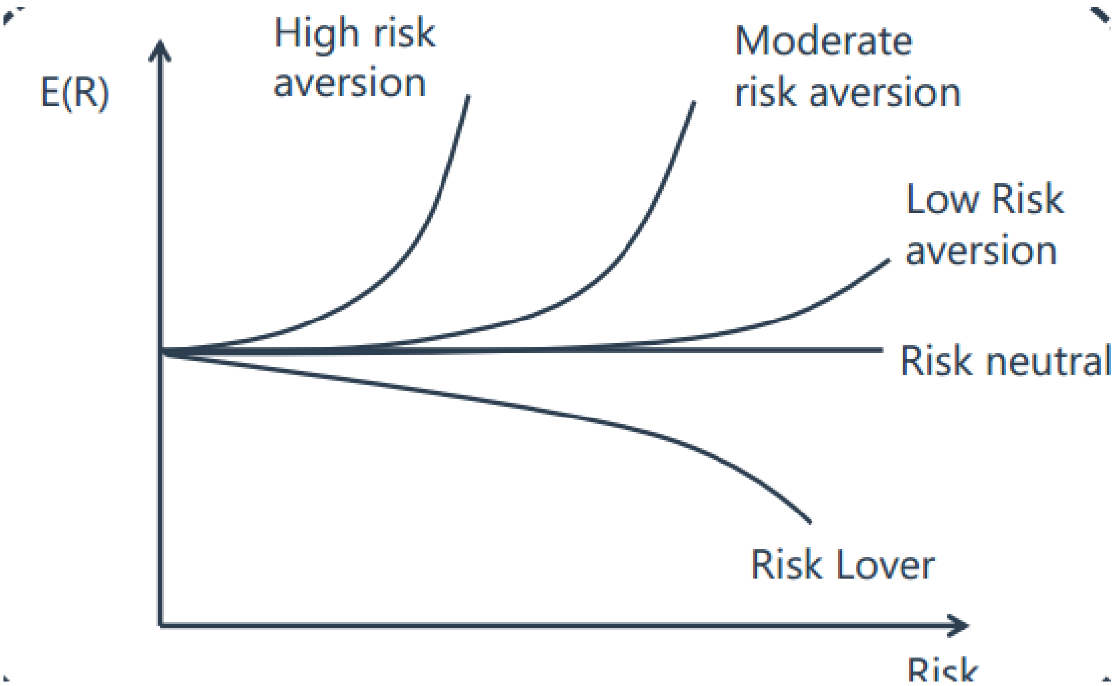
5.2.3 Indifference Curve 无差异曲线：

5.2.3.1 在同一条无差异曲线上每个点的效用一样的

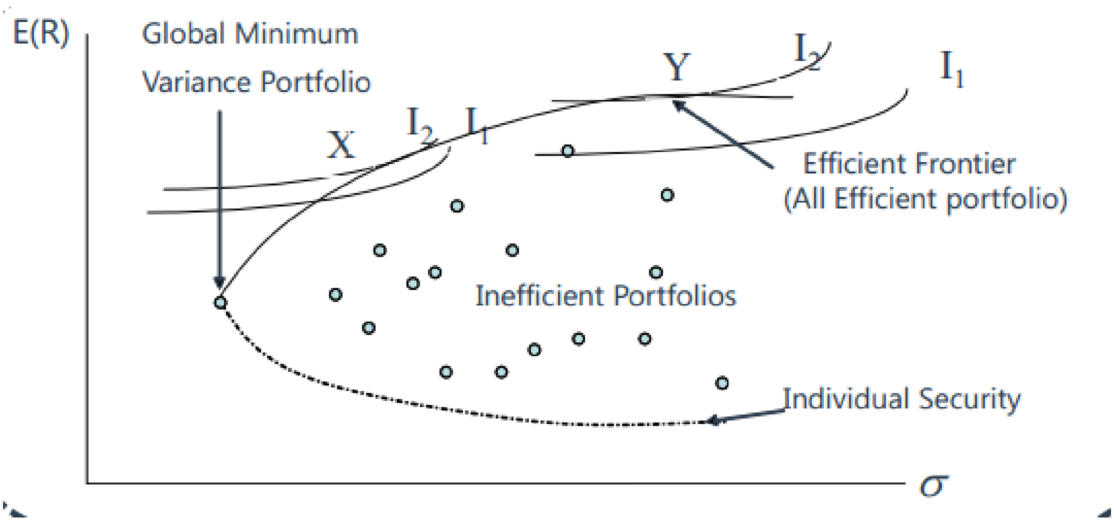


5.2.3.2 有无数条无差异曲线

5.2.3.3 不同的投资者无差异曲线不同



6 有效前沿（客观事实）+无差异曲线（主观选择）相切的点就是最有投资组合



6.1

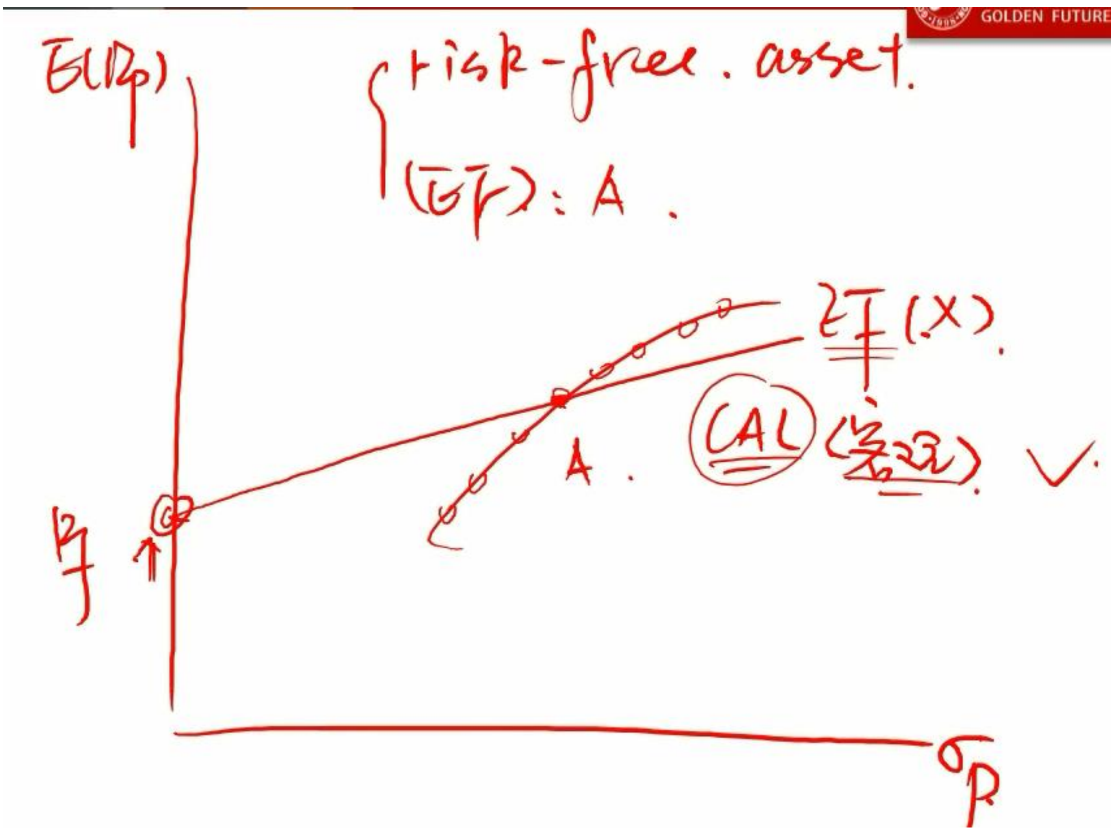
6.2 Optimal portfolio is tangent to the efficient frontier

夏普对马科维茨理论的优化

1 夏普在马科维茨理论的基础上加入了无风险资产

2 CAL 线：Capital Allocation Line 资本市场线，CAL 线是 Rf（无风险收益）和有效前沿上任一点链接形成的

3 两基金分离定律（如何根据 CAL 寻找最优投资组合）



3.1

3.2 Rf 和 A 链接，客观事实改变，变成了 CAL 而不是 EF

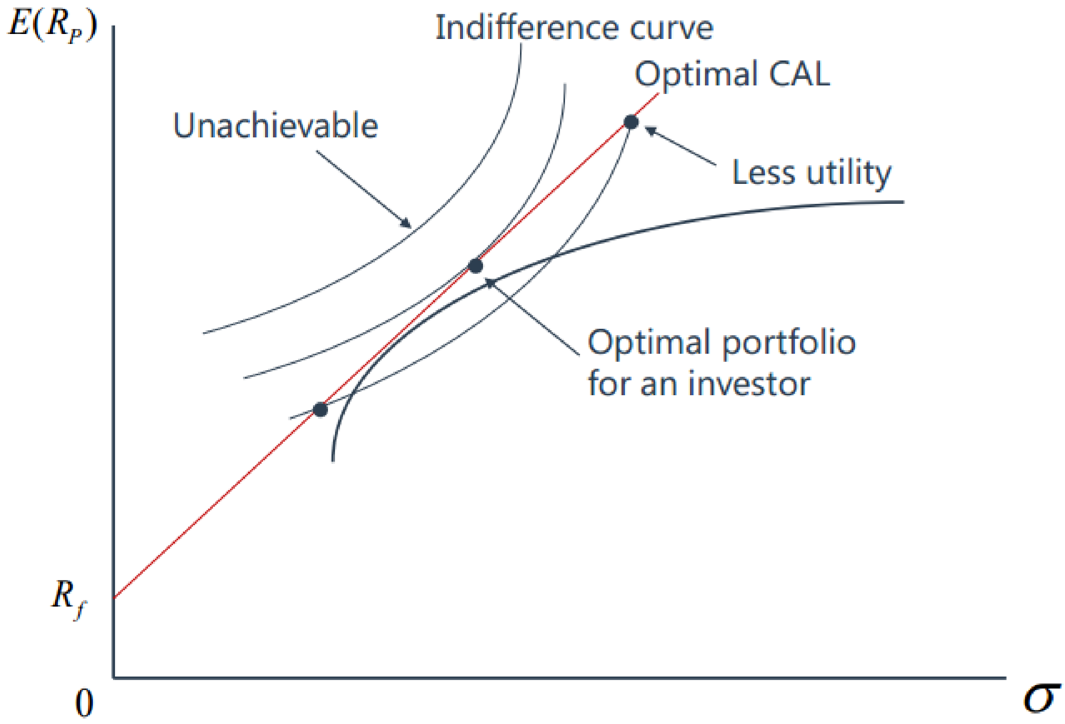
3.3 让无差异曲线和 CAL 相切

3.4 因为 CAL 有无数条，CAL 是 Rf 和 EF 上任意一点链接形成的，要取 Rf 和 EF 相切

的点，因为这个点 E 最高

3.5 这时取到的 CAL 是最优的 Optimal CAL，也叫 CML 线：Capital Market Line

3.6



3.7 两个概念：

3.7.1 Optimal Risk Portfolio:最优风险资产组合，最优 CAL 和 EF 的切点

3.7.2 Optimal Portfolio：客观最优组合，最优 CAL 和无差异曲线相切的点

3.8 CML：Capital Market Line

3.8.1 CML 只有一条，CAL 有无数条，CML 是最优的 CAL 线，也就是 CAL 和 EF 相切的那条

3.9 Market Portfolio 市场组合

3.9.1 CML 和 EF 的切点

3.9.2 是充分分散化的 portfolio

3.9.3 市场组合在 EF 上，相同 E，方差最小，同方差，E 最大

3.9.4 包含了所有的风险资产

3.9.5 各资产权重，用 market value 市值做权重

3.9.6 CAL 和 CML 的公式：

$$\text{CAL:}\quad E(R_p) = R_f + \frac{R_A - R_f}{\sigma_A} \cdot \sigma_p$$

$$\text{CML:}\quad E(R_p) = R_f + \frac{R_M - R_f}{\sigma_M} \cdot \sigma_p$$

3.9.6.1

3.9.6.2 A 是有效前沿的任意一点，M 是 market portfolio

3.9.6.3 CML 的斜率是市场组合的夏普比例

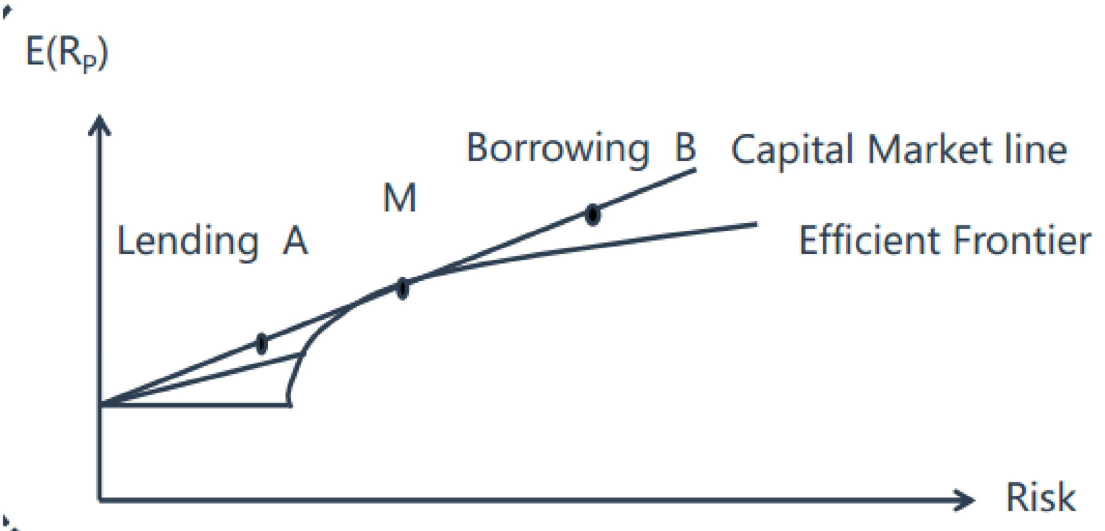
3.10 CML 线的作用

3.10.1 本质上依然是在做资产配置,CML 线投资的是市场组合+无风险资产

3.10.2 买无风险资产和市场组合都没有主动选股的过程，这种投资策略是 passive strategy，消极的投资策略

3.10.3 无风险资产是没有风险的，市场组合是风险完全分散化的，所以 CML 得到的组合也是风险完全分散化的组合

3.11 Borrowing portfolio and lending portfolio



3.11.1

3.11.2 在市场资产组合 M 左边的资产组合叫做 lending portfolio，因为有一部分钱买了无风险资产，相当于借给银行钱

3.11.3 在市场资产组合 M 的右边的资产组合叫做 borrowing portfolio，因为相当于是向银行借钱买 M

3.11.4 推导过程：

$p?$ $\begin{cases} M \to 2 \\ f \to 1 \end{cases}$ $E.$

$$\sigma_p^2 = \cancel{w_1^2\sigma_1^2} + w_2^2\sigma_2^2 + \cancel{2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2}}$$

$$\sigma_p^2 = w_2^2\sigma_2^2 \qquad \sigma_p = w_2\sigma_2 \qquad W_2 = \frac{\sigma_p}{\sigma_2}$$

$$W_M = \frac{\sigma_p}{\sigma_M}$$

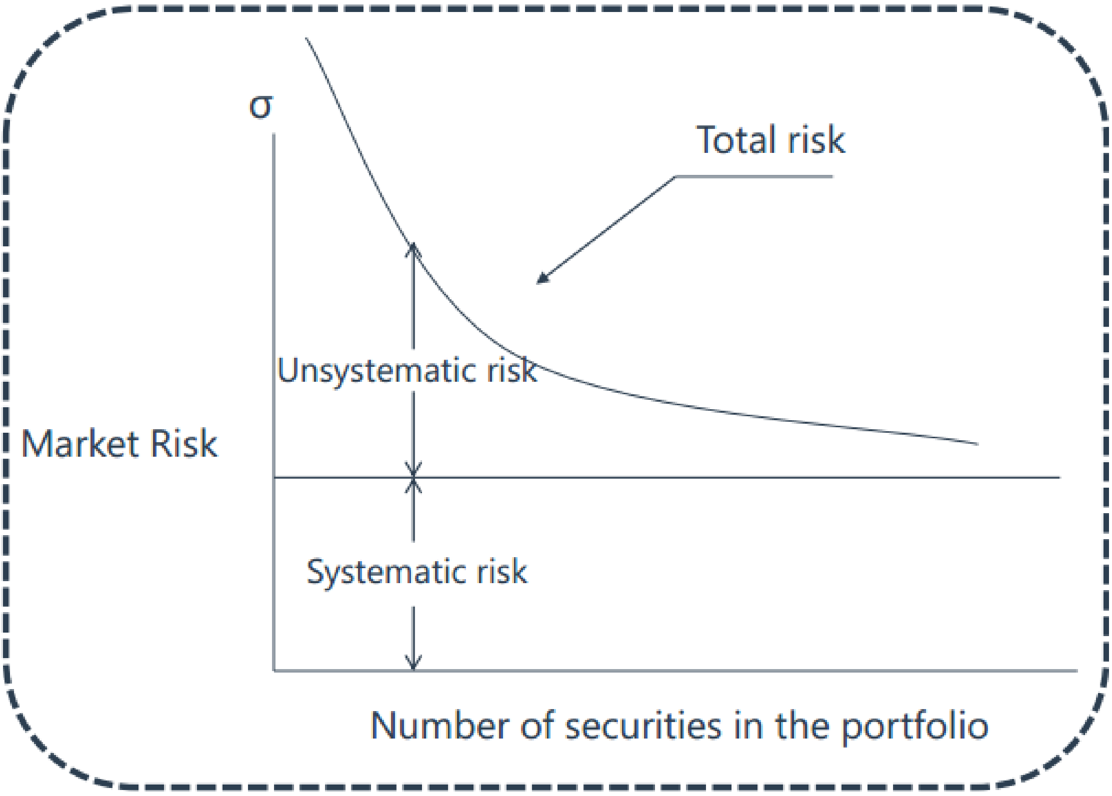
CAPM 模型

1　风险的分类

1.1　Nonsystematic risk:非系统性风险，可以通过资产配置的方式分散的风险（公司，行业相关）

1.2　Systematic risk:系统性风险，无法通过资产配置分散的风险（宏观经济相关）

1.3　CML 线上的资产只有系统性风险



1.4

2　贝塔：系统性风险的衡量

2.1　公式：$\beta i = \frac{COV_{i,m}}{\sigma_m^2}$　单个资产 i 和市场组合 M 的贝塔

2.2　因为$\rho i, m = \frac{COV_{i,m}}{\sigma i \sigma m}$　所有$\beta = \frac{\sigma i}{\sigma m}\beta_{i,m}$

2.3　贝塔越大，系统性风险越大

3　CAPM 模型的假设

3.1　所有投资者都是风险厌恶切最大效用的

3.2　市场是完美的，没有成本

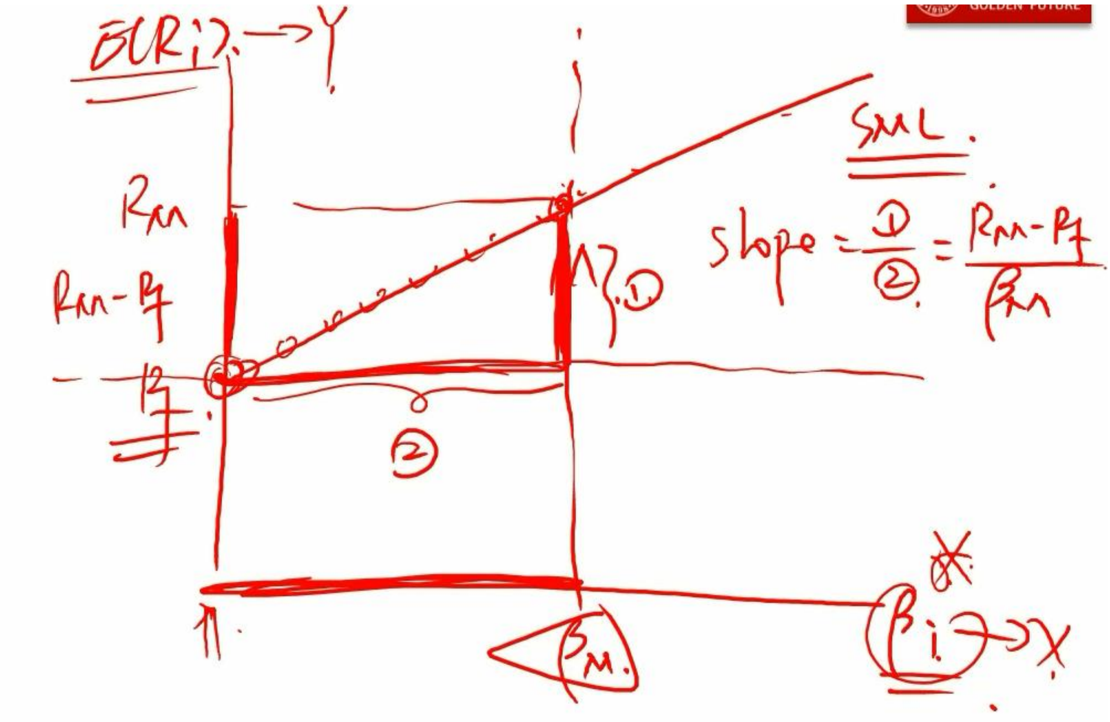
3.3　所有投资者都是同质的，相同的投资期限，预期一致

3.4　尽可能多样化

4　给系统性风险定价

4.1　所有横坐标轴是贝塔

4.2　Security market line(SML)　E(Ri) = Rf +$\beta i(Rm - Rf)$



关键点，市场组合的贝塔等于 1，因为市场组合只有系统性风险

4.3 公式：$E(Ri) = Rf + \beta i(Rm - Rf)$

4.3.1 公式的斜率是 Rm-Rf ,代表了市场组合的超额收益

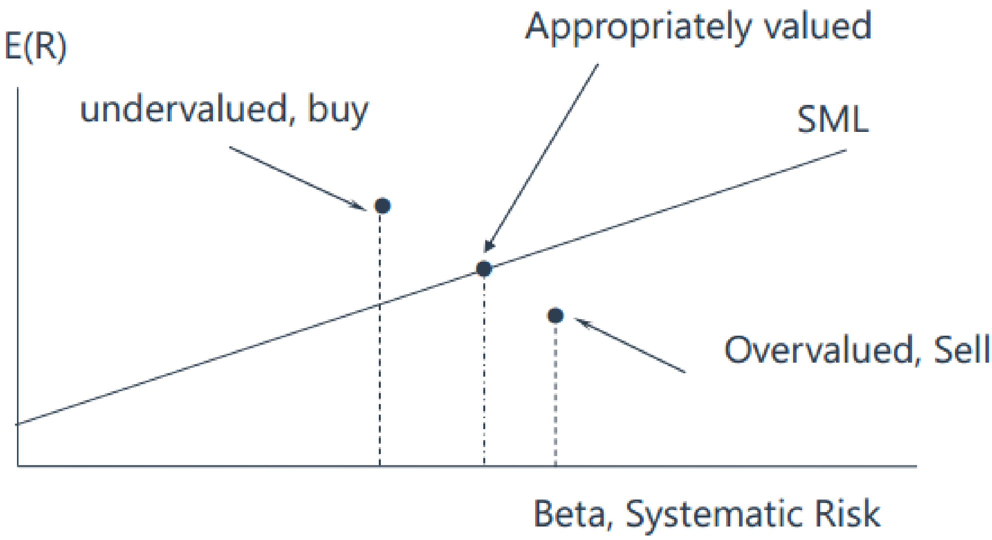
4.3.2 公式中的$\beta i(Rm - Rf)$超额收益时对系统性风险的补偿，makret risk premium

4.3.3 SML 上任意一个资产，$\mathrm{sharp(i)} = \mathrm{sharp(m)} \times \rho_{i,m}$ 资产 i 的夏普比例等于市场组合 M 的夏普比例乘以市场组合和资产的相关性 corrolation

4.3.4 作用：用来定价，只要可以合理定价的资产都应该在 SML 线上

5 应用

5.1 使用 CAPM 模型是在收益率做定价，有了收益率就可以根据现金流折现算出价格，根据算出的价格和实际的价格比价就可以判读有没有高估或者低估。



5.2

5.3 高估低估是说的价格，而不是收益率，价格高度，收益率低估的。

衡量基金业绩的四个指标

1 Sharp ratio

1.1 $$Sharpe\ ratio = \frac{R_P - R_f}{\sigma_P}$$

1.2 每单位总风险的收益

2 M square

2.1 $M^2 = (sharp(p) - sharp(M)) \times \sigma_m$

2.2 大于 0 好，小于 0 不好

3 Treynor measure

3.1 $$Treynor\ measure = \frac{R_P - R_f}{\beta_P}$$

3.2 每单位系统性风险的收益

4 Jensen's alpha

4.1 $\alpha = R_p \times (Rf - \beta_p(Rm - Rf))$

4.2 大于 0 好，小于 0 不好

5 应用分类

5.1 衡量 total risk， sharp ratio, M2 (CML,未充分分散化的)

5.2 衡量系统性风险， Tr, α (CAPM 充分分散化的)

5.3 用数值直接判断好不好，直接判断： M2 α

5.4 比较后判断好不好 sharp ratio, Tr

金融性风险和非金融性风险

1 金融性风险

1.1 Market risk 市场风险

1.2 Credit risk

1.3 Liquidity risk: bid-ask spread

2 非金融性风险

2.1 Operational risk 操作风险

2.2 Solvency risk 求偿风险：财务状况不好，有可能违约

3 Risk metrics

3.1 Value at risk：在险价值，尾巴的风险

3.1.1 三个要点同时说：时间，概率，最小损失

3.1.2 一天内 5%的概率最小损失 5000 块的风险

3.2 Conditional value at risk:超过最小损失后整体的平均损失