Préparation des concours BAC +2

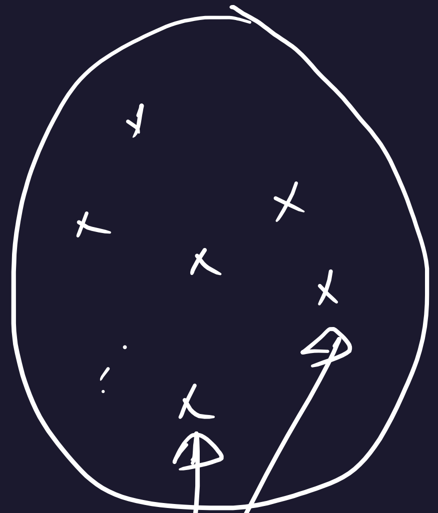
Séance 3 et 4

Algèbre : Les Espaces Vectoriels

GRIF center

GRIF center

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels



Espace

ensemble des éléments (∞) ayant des caractéristiques communes

Vecteurs

Exemple :

$\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ...

Coordonnées $\in \mathbb{R}$

Corps de l'espace

Vecteur

On dit que $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$ - Espace

GRIF center

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

$\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-Espace

$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}_2[x]$: l'espace des pôly de deg ≤ 2

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$2x^2+3$

$x-1$

3

0

$(ax^2 + bx + c)$

Vecteur

Vecteur

Coordonnés $\in \mathbb{R}$

Coord $\mathbb{R}$

Vect

(1) $(\sqrt{3})$

(2) (0)

$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-Espace

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

* $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}$-EV
* $\mathbb{R}_n[x]$
* $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

⋮

th₁ : Chaque SEV est un EV

th₂ : E est un SEV de F ssi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cdot\ 0_F \in E \\ \cdot\ \forall A, B \in E ;\ A+B \in E \text{ (loi interne)} \\ \cdot\ \forall A \in E ;\ \forall \alpha \in \mathbb{R} ;\ \alpha A \in E \text{ (loi extérieure)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall A, B \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha A + B \in E$

Exemple :

$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0 \right\}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in E_1$ $\quad 1 + 2 - 3 = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\in ?\ E_1$ non
car
$1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$

Mq E_1 est un EV (Mq E_1 est un SEV de $\mathbb{R}^3$)

N/o θ : Mq $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$

$0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad 0 + 0 - 0 = 0$ ✓

donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

2) $\forall A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix} \in E_1 \; ; \forall \alpha \in \mathbb{R} :$

$$\begin{cases} a+b-c=0 \\ a'+b'-c'=0 \end{cases}$$

$\alpha A + B \in ? \; E_1$

$$\alpha A + B = \alpha\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix} = \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\begin{pmatrix}\alpha a + a'\\ \alpha b + b'\\ \alpha c + c'\end{pmatrix} \in ? \; E_1$$

$$\overset{x}{(\alpha a + a')} + \overset{y}{(\alpha b + b')} - \overset{z}{(\alpha c + c')} = \alpha(a+b-c) + (a'+b'-c')$$

$= \alpha \cdot 0 + 0$

$= 0$

donc $\alpha A + B \in E$

donc E est un SEV de $\mathbb{R}^3$

E est un EV

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{array}{l} x+y=0 \\ x-2z=0 \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow E_2$ est un EV.

$$\underbrace{ax+by+cz \cdots = \text{cte}}_{\text{eq linéaire}}$$

si cte $= 0$
alors l'eq linéaire
admet des solutions
linéaires..

$N \cdot 0_{\mathbb{R}^3} \overset{?}{\in} E_1$

$$0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{cases} 0+0=0 \; ✓ \\ 0-2.0=0 \; ✓ \end{cases}$$

donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E_2$

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

2) $\forall A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in E_2 \; ; \forall \alpha \in \mathbb{R} :$

$A \begin{cases} a - b = 0 \\ a - 2c = 0 \end{cases}$

$B \begin{cases} a' - b' = 0 \\ a' - 2c' = 0 \end{cases}$

$\alpha A + B \overset{?}{\in} E_2$

$\alpha A + B = \begin{pmatrix} \alpha a + a' \\ \alpha b + b' \\ \alpha c + c' \end{pmatrix} \overset{?}{\in} E_2$

- $(\alpha a + a') - (\alpha b + b')$

$= \alpha(a - b) + (a' - b')$

$= \alpha \cdot 0 + 0$

$= 0$

- $(\alpha a + a') - 2(\alpha c + c')$

$= \alpha(a - 2c) + (a' - 2c')$

$= \alpha \cdot 0 + 0$

$= 0$

donc E_2 est un SEV de $\mathbb{R}^3$

E_2 est un EV

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

- $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x = y = z \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right\}$ $E.V$

$x = y = z$

$\left\{ \begin{array}{l} x = y \\ \text{et} \\ x = z \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right.$

$\left(\theta(x) = 0x^2 + 0x + 0 \right.$
$\left. = 0 \right)$

- $E_4 = \{ P(x) \in \mathbb{R}_2[x] / P'(x) = P(x) \}$ $\Rightarrow P'(x) - P(x) = 0$

1/ $0_{\mathbb{R}_2[x]} \overset{?}{\in} E_4$

$0_{\mathbb{R}^2[x]} = \theta(x) = 0$

$\theta'(x) = (0)' = 0$

donc $\theta'(x) = \theta(x)$

donc $\theta(x) = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \in E_4$

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

$$\begin{cases} P_1'(x) = P_1(x) \\ P_2'(x) = P_2(x). \end{cases}$$

$$\forall P_1(x), P_2(x) \in E_4, \forall \alpha \in \mathbb{R} :$$

$$P_3(x) = \left(\alpha P_1(x) + P_2(x)\right) \in ? E_4$$

$$P_3'(x) = \left(\alpha P_1(x) + P_2(x)\right)'$$

$$= \alpha P_1'(x) + P_2'(x)$$

$$= \alpha P_1(x) + P_2(x) = P_3(x)$$

alors $P_3(x) \in E_4$

donc E_4 est un SEV de $\mathbb{R}_2[x]$

E_4 est un EV

GRIF center

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

$$E_5 = \{ P(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,/\, P'(1) = 0 \}$$

• $0_{\mathbb{R}_2[x]} \in ? \; E_5$:

$0_{\mathbb{R}_2[x]} = 0(x) = 0$

$0'(x) = 0$

$0'(1) = 0$

donc $0(x) \in E_5$

• $\forall P_1(x), P_2(x) \in E_4, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$P_3(x) = \alpha P_1(x) + P_2(x) \in ? \; E_5$

• $P_3'(1) = \alpha P_1'(1) + P_2'(1)$

$= \alpha \cdot 0 + 0$

$= 0$

donc $P_3(x) \in E_5$

donc E_5 est un SEV de $\mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{cases} f(x) = 2x \\ f(4) = 2 \cdot 4 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ f(4) = 2 \end{cases}$$

$f(x) = 0$

$f(1) = 0$

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = \dots$

Exercice : Mq E n'est pas un EV.

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 1 \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{array}{l} x + y - 3 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right\}$$

$$E_3 = \left\{ P(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,/\, P'(0) = 1 \right\}$$

$$E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y = 0 \right\}$$

$$E_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + 2y \geq 0 \right\}$$

$f'(x) \geq 0$

$$E_6 = \left\{ f(x) \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,/\, f \text{ croissante} \right\}$$

$$E_7 = \left\{ (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \,/\, U_n \text{ est majorée} \right\}$$

$U_n \leq M$

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

- $0_F \notin E$ (ctc)
- La · intr (liné)
- La · extr (inég)

1/ $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y-z=1 \right\}$

• On a $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$0+0-0=0 \neq 1$

donc $0_{\mathbb{R}^3} \notin E_1$ donc E_1 n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^3$.

2/ $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{array}{l} x+y-3=0 \\ x+2y=0 \end{array} \right\}$

• $0_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin E_2$ car $0+0-3=-3 \neq 0$

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

- $E_3 = \{ P(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,/\, P'(0) = 1 \}$

- On a $\Theta_{\mathbb{R}_2[x]} = \Theta(x) = 0$

$\Theta'(x) = 0$

$\Theta'(0) = 0 \neq 1$

donc $\Theta_{\mathbb{R}_2[x]} \notin E_3$

- $E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,/\, x^2 + y = 0 \right\}$

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : 1^2 + (-1) = 0$

donc $A \in E_4$

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_4$

$A + B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} : 2^2 + (-2) = 2$

donc $A + B \notin E_4$

$\exists A, B \in E_4 ;\ A + B \notin E_4$

donc E_4 n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^2$

$E_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + 2y \geqslant 0 \right\}$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_5 \qquad \alpha = -1 \in \mathbb{R}$

$1 + 2 \cdot 1 = 3 \geqslant 0$

$\alpha A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin E_5$

$-1 + 2(-1) = -3 < 0$

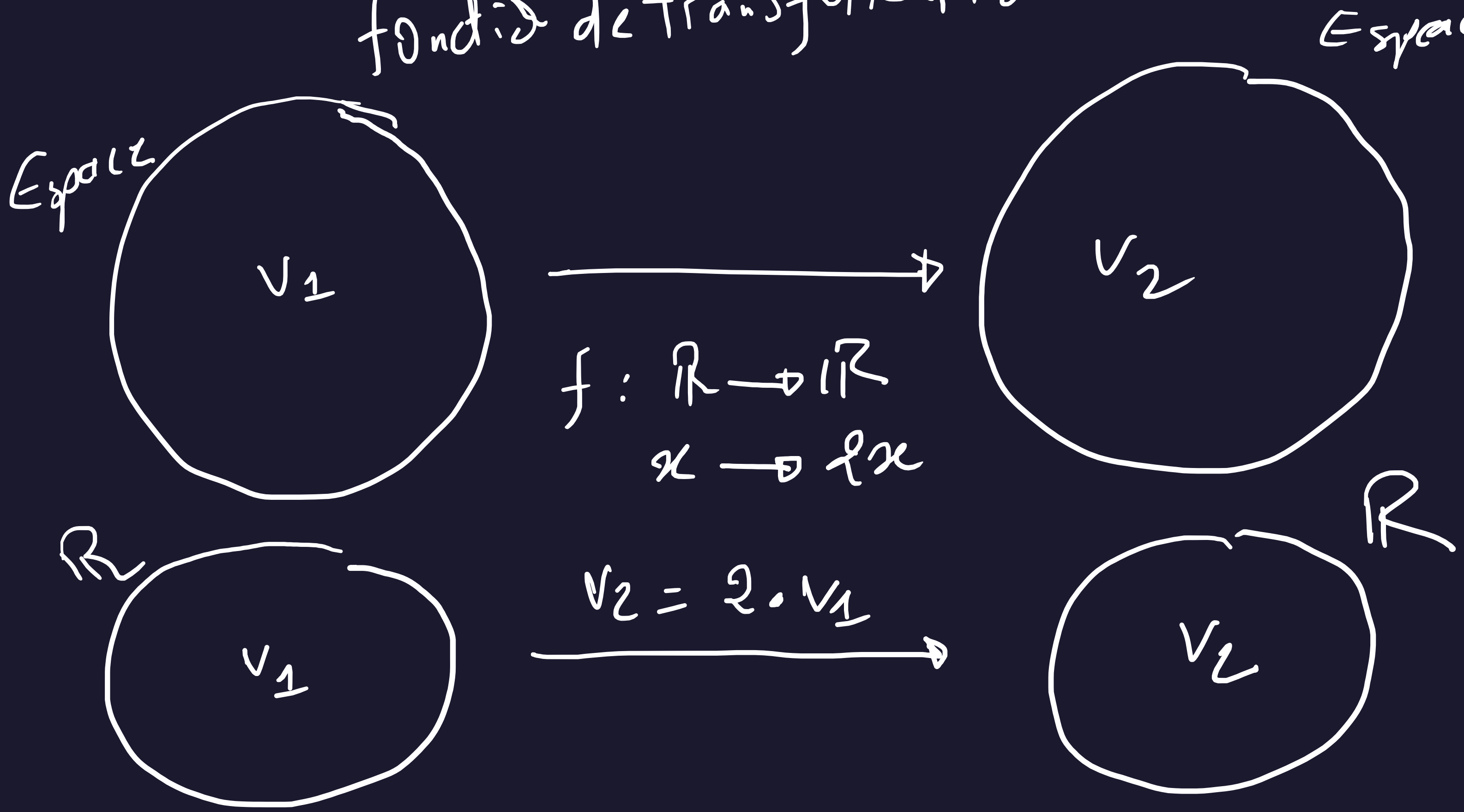
$\exists A \in E_5,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq $\alpha A \notin E_5$

donc E_5 n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^2$

$f(x) = 2x$

f

fonction de transformation



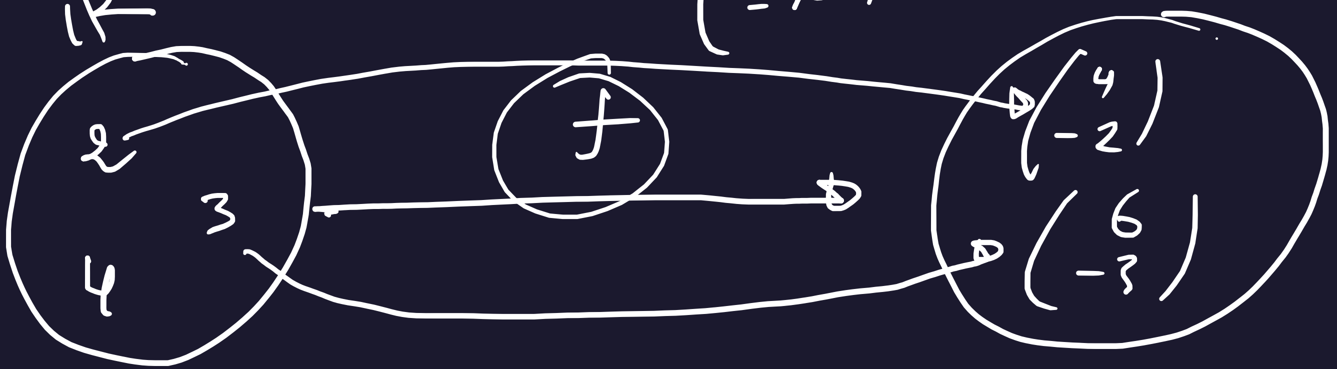
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to 2x$$

$$V_2 = 2 \cdot V_1$$

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

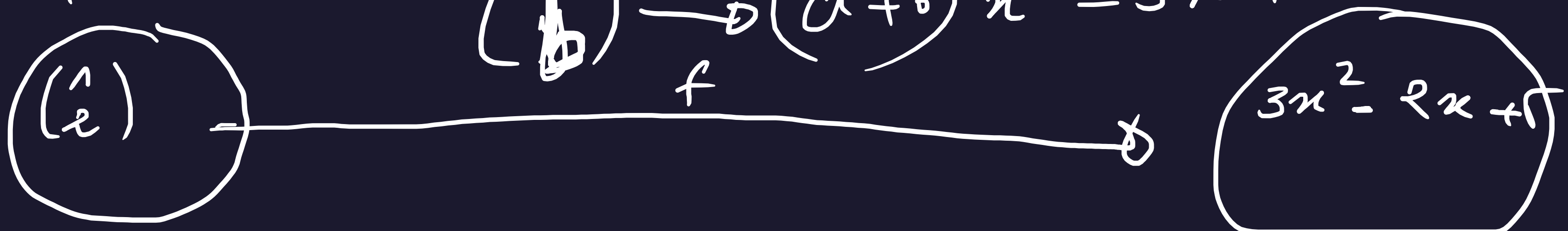
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto \begin{pmatrix} 2x \\ -x \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^2$



$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

$\mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow (a+b)x^2 - bx + 1$ $\qquad$ $\mathbb{R}_2[x]$



Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

$$f \in \mathcal{F}(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{F}})$$

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$E_6 = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,/\, f \text{ croissante} \}$$

$f(x) = 2x \in E_6$; $\alpha = -2 \in \mathbb{R}$

(croissante)

$f'(x) = 2 > 0$

$g(x) = \alpha f(x) = -4x \notin E_6$

(décroissante)

$g'(x) = -4 < 0$

$\exists f \in F ; \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq

$\alpha F \notin E_6$

$\Downarrow$

donc E_6 n'est pas un SEV de $\mathcal{F}$

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

- famille libre
- famille gén
- base
- dim Famille
- dim Espace

Résolution des système

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \dim F \neq 0$$

$\dim F$: Echellonement

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \dim F = 3$$

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dim F = 2$$

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dim F = 1$$

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Les Famille : $\{(\ ),(\ ),(\ ),\ldots\}$

un nbr fini des vecteurs

Les familles libre : aucune Relation (CL) entre les vecteurs de la famille

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Combinaison linéaire :

V est une CL de $\{V_1, \dots, V_n\}$

ssi $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^*$ tq

$$V = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n V_n$$

Exemple : $V\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $V_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$

V est-il une CL de V_1 et V_2

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

On Rq $V = 1V_1 + 1 \cdot V_2$

donc V est une CL de V_1 et V_2.

$\Rightarrow$ donc $\exists$ une Relation entre V, V_1, V_2

donc la famille $\{V, V_1, V_2\}$ est une famille liée

Exemple 2 :

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

V est il une CL de V_1 et V_2

Réponse

soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $V = \alpha V_1 + \beta V_2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

eq > inc

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

$$\times 2 \begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 2 \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

$$① - ② \begin{cases} 0 + 3\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{3} \\ \alpha = \frac{1-\beta}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 1/3 \\ \alpha = \frac{1 - 1/3}{2} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta = \frac{1}{3} \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

$$1/3 - 1/3 = 1 \quad 0 \neq 1 \quad \text{Faux}$$

$$S = \emptyset$$

donc v n'est pas une CL de v_1 et v_2
alors la famille $\{v, v_1, v_2\}$ est une famille libre.

famille libre :

$v_1, \dots, v_n \in E$ $\quad$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une famille libre ssi :

si $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tq $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_E$

$\Longrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ (le système admet sol unique $(0, \dots, 0)$)

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Exemple :

Méthode ① Résolution :

$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

F est-elle libre ?

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

Rappel :

La Résolution des sys linéaires

$\left\{ \begin{array}{l} \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \end{array} \right. = |||$

éq inc

det

$\neq 0$ → sol unique → Cramer, Gauss

$= 0$ → inf → Gauss

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

$$\det S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\cancel{-2} + 1 + \cancel{2} - (\cancel{-1} + \cancel{1} + 4)$$

$$= -3 \neq 0$$

donc S admet sol unique

et puisque S est homogène alors

donc la solution est $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Système Homogène

$$\begin{cases} \text{———} = 0 \\ \text{———} = 0 \\ \text{———} = 0 \end{cases}$$

1er membre

Second membre $= 0$

eq = inc

+ le système admet sol unique

$\Longrightarrow$ la solution unique est la solution nulle

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Méthode ①: dqc F est libre.

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \right\}$$

→ n Vecteurs

=

→ n coordonnées

Libre → $\det F \neq 0$

Liée → $\det F = 0$

Exemple ② :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Rep : Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

① + ② $\begin{cases} 3\alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

$\rightarrow 3\alpha + 2\beta = 0$

$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$

$0 = 0$

F est Libre

Exemple 8 :

$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

3 vect
2 coor
$\Rightarrow$ liée.

soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$\times 2 \begin{cases} \alpha + 2\beta = -\gamma \\ 2\alpha + \beta = \gamma \end{cases}$ $\quad \gamma \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} 2\alpha + 4\beta = -2\gamma \\ 2\alpha + \beta = +\gamma \end{cases}$

$① - ② \begin{cases} 3\beta = -3\gamma \\ 2\alpha + \beta = \gamma \end{cases}$ $\begin{cases} \beta = -\gamma \\ \alpha = \dfrac{\gamma - \beta}{2} = \gamma \end{cases}$

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

$$\boxed{\alpha = \gamma \, ; \, \beta = -\gamma} \,/\, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} / \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} / \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Ls Systèm admet une inf ds sol $\left(\begin{array}{l} \text{droite } \langle \{ (\;) \} \rangle \\ \text{plan } \langle \{ (\;) (\;) \} \rangle \end{array} \right.$

Donc la Famille est liée.

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

<u>Astuces</u>;

$F = \{ ( ) \}$ +tjrs libre

$F = \{ (\vdots), \ldots\ldots, ( ) \}$

n vecteurs

m coordonnées

nbr ds vect > nbr ds coord

$n > m$

tjrs liée.

Exemple (4)

Méthode 1

$F = \{(x-1)^2 ; (x+1)^2 ; x^2-2\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\det F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= -4 + 0 - 2 - (-4 + 0 + 4) = -4 \neq 0$$

F est libre

Rappel :

$\mathbb{R}_2[x]$

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

$P_1(x) = 3$

$P_2(x) = x^2$

$P_3(x) = 4x^2 - 3$

$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$

$\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$

$\dim \mathbb{R}^n = n$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

Méthode ②

$$F = \{(x-1)^2 ; (x+1)^2 ; x^2-2\}$$

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$0_{\mathbb{R}_2[x]} = 0(x) = 0.x^2 + 0x + 0 = 0$$

$$\alpha(x-1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma(x^2-2) = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$$

$$\alpha(x^2-2x+1) + \beta(x^2+2x+1) + \gamma x^2 - 2\gamma = 0x^2 + 0x + 0$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)x^2 + x(-2\alpha+2\beta) + \alpha+\beta-2\gamma = 0x^2+0x+0$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ -2\alpha+2\beta = 0 \\ \alpha+\beta-2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\det S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

donc le système admet sol unique et le système est homogène

Donc Il admet la solution unique $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$

donc la famille F est libre

Exemple (5) :

$F \subset \mathbb{R}_2[x]$

$F = \{ x^2 - 3 \ ; \ x + 2 \}$

soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha(x^2 - 3) + \beta(x + 2) = 0x^2 + 0x + 0$

$\alpha x^2 + \beta x + (-3\alpha + 2\beta) = 0x^2 + 0x + 0$

$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -3\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$

$\{ \alpha = \beta = 0$

F est libre

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

$\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$

n'importe quel Vecteur de $\mathbb{R}^2$ $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ Combinaison linéaire

On dit que $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Conclusion : n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^2$ forme une CL de $\vec{i}$; $\vec{j}$: Il suffit de prendre $\alpha = x$ $\beta = y$

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

F est une F.G de E si $\forall X \in E$: X est une CL de F.

Exple : de CL

X est une CL de V_1 et V_2

$$\Leftrightarrow \quad X = \alpha V_1 + \alpha V_2$$

$\{X, V_1, V_2\}$ liée

$\{V_1, V_2\}$ liée

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

$F = \{v_1, \dots, v_n\}$ st une FG de E, ssi $\forall X \in E$:

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^*$ tq

$X = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

Ex 1 Mq $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ FG de $\mathbb{R}^2$:

soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Je doit trouver α, β en fct de (x, y)

$\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \end{cases}$ $\quad \vec{i} \quad \vec{j}$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ st une F.G de $\mathbb{R}^2$

Exemple 2 : $F = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \right\}$ Mq F est une F.G de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = x \\ 2\alpha + \beta = y \end{cases}$$

$$① + ② \begin{cases} 3\alpha = x + y \\ 2\alpha + \beta = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{x+y}{3} \\ \beta = y - 2\alpha = y - \dfrac{2x+2y}{3} = \dfrac{y-2x}{3} \end{cases}$$

donc $$\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{x+y}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{y-2x}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}$$

donc F est une F.G de $\mathbb{R}^2$.

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

astuce :

Si $F = \{ \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}}_{n \text{ vecteurs}} \}$

n coordonnée

nbr de vect = nbr de coord

et $\det F \neq 0$

$\Rightarrow \boxed{F \text{ est une FG de } \mathbb{R}^n}$

Exple ③ $F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

déterminer par deux méthodes que F est une famille gén de $\mathbb{R}^3$.

Méthode ①

$$\det F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} = -6 \qquad =$$

Méthode 2 : $F = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$

soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\forall \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta + \gamma = y \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = z \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{-3x - 2y + z}{-6}$$

$$\beta = \frac{3x - 2y + z}{6}$$

$$\gamma = \frac{y + z}{3}$$

donc $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{-3x-2y+z}{-6}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{3x-2y+z}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{y+z}{6}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

donc F est f. G de $\mathbb{R}^3$

Exple ④

$F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\det F_4 = 0$

méthode ①

F_4 n'est pas une f. G de $\mathbb{R}^3$

Méthode ②:

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ 2\alpha + \beta + \gamma = y \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = z \end{cases}$$

Application de Gauss :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ 2\alpha + \beta + \gamma = y \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = z \end{cases}$$

$L_2 = L_2 - 2L_1$

$L_3 = L_3 - 3L_1$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ 0 + \beta - \gamma = y - 2x \\ 0 \quad 2\beta - 2\gamma = z - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ \beta - \gamma = y - 2x \\ \beta - \gamma = \frac{z - 3x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ \beta - \gamma = y - 2x \\ y - 2x = \frac{z - 3x}{2} \end{cases}$$

$g(x, y, z)$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ \beta - \gamma = y - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = x - \gamma \\ \beta = y - 2x + \gamma \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x - \gamma)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (y - 2x + \gamma)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

F n'est pas une famille génératrice

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Cas très important

$\alpha = f(x,y)$

$\beta = f(x,y)$

$g(x,y)$

F n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$

mais F est une f.g de $E\{(x,y) \in \mathbb{R}^n / g(x,y)\}$.

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Exple (5) : $F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ F est elle génératrice ?

soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x & (1) \\ 2\alpha - \beta = y & (2) \\ \alpha + 3\beta = z & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = z - x \\ \alpha = z - 3\beta = z - 3z + 3x = -2z + 3x \end{cases}$$

(3) − (1)

$$\begin{cases} 0 + \beta = z - x \\ 2\alpha - \beta = y & (2) \\ \alpha + 3\beta = z & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -2z + 3x \\ \beta = z - x \\ 2\alpha - \beta = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -2z + 3x \\ \beta = z - x \\ -4z + 6x - z + x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -2z + 3x \\ \beta = z - x \\ 7x - y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -2z + 3x \\ \beta = z - x \\ 7x - y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \exists \alpha = (-2z + 3x) ; \beta = (z - x) \text{ tq}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{(-2z + 3x)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{(z - x)} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

F est une f.g de $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, 7x - y - 5z = 0 \right\}$.

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels

Chapitre 1 : Les Espaces Vectoriels