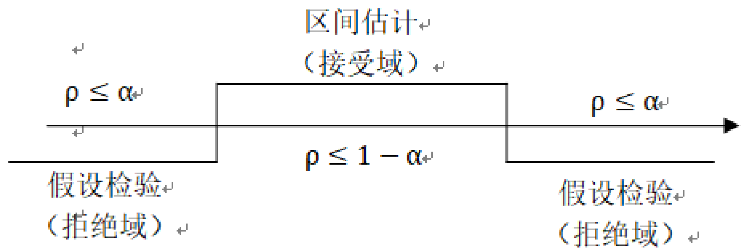
应用数理统计——第三章

3.1 假设检验

一、估计与假设检验间关系



估计和检验都是对参数近似值的一种度量方式。估计是从接受误差的角度去衡量参数近似值的优良程度，给出可接受误差的区间，即“置信区间”；假设检验是从拒绝偏差的角度去衡量参数近似值的优良程度，给出拒绝偏差的区域，即“拒绝域”。

置信区间本着“概率越大的事件越容易发生”的原则进行求解；拒绝域本着“小概率事件在一次试验中不能发生”的原理进行求解。二者本质上是统一的。

置信区间之外为拒绝域，置信区间的长度称为“精度”，置信区间对应的概率值称为“置信度”，“1-置信度”的值对应在假设检验中称为“显著性水平”。因此，置信度和显著性水平之和为 1。

二、检验统计量

1.定义

用于判断原假设是否成立的统计量，被称为检验统计量。检验统计量的分布在零假设成立的条件下应该是已知的，一般为待检验总体参数的良好的点估计。

2.检验统计量的构造与拒绝域的求解

对于带参数的假设检验问题来说，构造检验统计量和求解拒绝域是十分关键的一个步骤。一般来说，选取参数在零假设下的点估计作为检验统计量。下面介绍拒绝域的求解方法：

（1）选取检验统计量；

（2）将检验统计量和待检验参数进行比较：一次做差、二次做商；

（3）根据备择假设，确定比较值的范围（x 表示点估计值）：

原假设与备择假设间关系	原假设符号	备择假设符号	比较值符号	表达形式
对立关系	＝	≠	绝对值，＞	$\lvert x-\mu \rvert >C$
	⩾	＜	＜	$x-\mu <C$
	⩽	＞	＞	$x-\mu >C$
非对立关系	＝	＞或＜	绝对值，＞	$\lvert x-\mu \rvert >C$
	⩾	＝	＜	$x-\mu <C$
	⩽	＝	＞	$x-\mu >C$

规律：原假设与备择假设为对立事件时，表达形式符号与备择假设符号相同；

原假设与备择假设不是对立事件时，表达形式符号与原假设符号相反。

（4）构造常见分布求解拒绝域。

注：表达形式符号与检验统计量本身有关，对于指数总体来说，其点估计值为$\frac{1}{\overline{X}}$，因此其表达形式为$g(\frac{1}{\overline{X}})>C$，这与最终构造的表达形式$2n\lambda\overline{X}<C$的符号方向并不矛盾。

三、两类错误与功效函数

1.定义

无论我们采用什么决策，任何一个假设检验都必然可能犯以下两种错误之一：

第一类错误“拒真”：零假设本身是正确的，却被检验拒绝，接受的是一个错误的对立假设。即，真实参数$\theta\in\Theta_0$，但是我们认为它在Θ_1中 ；

第二类错误“采假”（纳伪）：零假设本身是错误的，而没有被拒绝，最后接受的是一个错误的零假设。即，真实参数$\theta\in\Theta_1$，但是我们认为它在Θ_0中 。

2.功效函数

（1）定义:$\beta_\phi(\theta)=P_\theta\{否定零假设H_0\},\theta\in\Theta$

（2）两类错误的概率：

$$第一类错误的概率=\begin{cases}\beta_\phi(\theta), & 当\theta\in\Theta_0\\ 0, & 当\theta\in\Theta_1\end{cases}$$

$$第一类错误的概率=\begin{cases}0, & 当\theta\in\Theta_0\\ 1-\beta_\phi(\theta), & 当\theta\in\Theta_1\end{cases}$$

（3）一个好的检验应该是功效函数$\beta_\phi(\theta)$在Θ_0中越小越好，而在Θ_1中越大越好。

3.2 带参数的假设检验

一、常用的带参数检验的拒绝域

分布类型	待检验参数	条件	检验类型	拒绝域
正态分布	μ	σ^2 已知	正态检验	$\dfrac{\sqrt{n}\,\lvert\bar{X}-\mu_0\rvert}{\sigma_0} > u_{\alpha/2}$
				$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma_0} > u_{\alpha}$
				$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma_0} < -u_{\alpha}$
		σ^2 未知	T 检验	$\dfrac{\sqrt{n}\,\lvert\bar{X}-\mu_0\rvert}{S} > t_{\alpha/2}(n-1)$
				$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S} > t_{\alpha}(n-1)$
				$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S} < -t_{\alpha}(n-1)$
	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2 σ_2^2 已知	正态检验	$\dfrac{\lvert(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)\rvert}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} > u_{\alpha/2}$
				$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} > u_{\alpha}$
				$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} < -u_{\alpha}$
		σ_1^2 σ_2^2 未知 但相等	T 检验	$\dfrac{\lvert(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)\rvert}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} > t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$
				$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} > t_{\alpha}(n_1+n_2-2)$

<table>
<tr><td rowspan="10">正态分布</td><td>$\mu_1-\mu_2$</td><td>$\sigma_1^2\ \sigma_2^2$ 未知
但相等</td><td>T 检验</td><td>$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}<-t_\alpha(n_1+n_2-2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">σ^2</td><td rowspan="3">μ 已知</td><td rowspan="3">χ^2 检验</td><td>$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(X_k-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha/2}(n)$

$or\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(X_k-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$</td></tr>
<tr><td>$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(X_k-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha}(n)$</td></tr>
<tr><td>$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(X_k-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha}(n)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">μ 未知</td><td rowspan="3">χ^2 检验</td><td>$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(X_k-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

$or\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(X_k-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha/2}(n\text{-}1)$</td></tr>
<tr><td>$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(X_k-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha}(n-1)$</td></tr>
<tr><td>$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(X_k-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha}(n\text{-}1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">σ_1^2/σ_2^2</td><td rowspan="3">$\mu_1\ \mu_2$ 未知</td><td rowspan="3">F 检验</td><td>$S_1^2/S_2^2>F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

$orS_1^2/S_2^2<F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$</td></tr>
<tr><td>$S_1^2/S_2^2>F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$</td></tr>
<tr><td>$orS_1^2/S_2^2<F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">指数分布</td><td rowspan="3">λ</td><td rowspan="3">--</td><td rowspan="3">χ^2 检验</td><td>$2n\lambda_0\bar{X}<\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)$

$or2n\lambda_0\bar{X}>\chi^2_{\alpha/2}(2n)$</td></tr>
<tr><td>$2n\lambda_0\bar{X}<\chi^2_{1-\alpha}(2n)$</td></tr>
<tr><td>$2n\lambda_0\bar{X}>\chi^2_{\alpha}(2n)$</td></tr>
</table>

两点分布	p	--	正态检验	$\dfrac{\lvert p_s - p_0 \rvert}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} > u_{\alpha/2}$
	$p_1 - p_2$	--	正态检验	$\dfrac{\lvert p_{s1} - p_{s2} \rvert}{\sqrt{\dfrac{p_{s1}(1-p_{s1})}{n_1} + \dfrac{p_{s2}(1-p_{s2})}{n_2}}} > u_{\alpha/2}$

注：表中所给出的拒绝域按照＝、≤、≥的顺序给出。

二、成对数据的检验问题

成对数据可用来检验差异性，可将成对总体的对应项的差值近似看作一个正态总体，对此总体进行 T 检验，即可得到数据间的差异性检验结果。

三、似然比检验

1.似然比统计量

$$LR = \frac{\sup\{L(x,\theta), \theta \in \Theta_0\}}{\sup\{L(x,\theta), \theta \in \Theta\}}$$

2.拒绝域

$$\text{由} \sup\{P_\theta(LR < C), \theta \in \Theta_0\} = \alpha \text{ 得} W = \{LR < C\}$$

3.3 非参数的假设检验

一、皮尔逊拟合优度检验

1.思想

拟合优度检验用于检验“样本是否服从某一分布”，可将拟合优度检验问题描述为“$H_0: F(x) = F_0(x) \leftrightarrow H_1: F(x) \neq F_0(x)$”的检验问题。

拟合优度检验问题对离散性总体的检验效果较好，对连续性总体的检验相比于科尔莫戈洛夫检验稍差，但依然可以进行检验。对于离散总体，可通过离散的分点对数轴进行区间划分；对于连续总体，常采用整体长度的五分之一作为每个划分后的小区间的长度。

2.检验统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i}(\frac{v_i}{n} - p_i)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \frac{v_i^2}{p_i} - n$$

3.拒绝域

（1）完全已知离散分布的拟合优度检验（卡方检验）：

$$\chi^2 > \chi_\alpha^2(k-1)$$

（2）含未知参数离散分布的拟合优度检验（卡方检验）：

$$\chi^2 > \chi_\alpha^2(k-r-1)$$

,r 为未知参数个数 。

二、科尔莫戈洛夫检验

科尔莫戈洛夫检验用于检验连续型的分布，待检验的分布常为样本生成的经验分布函数，该方法无法检验零假设中含有参数的情况。

三、卡方独立性检验（列联表检验）

1.定义

卡方独立性检验用于检验“两种因素间是否独立的检验”，可将卡方独立性检验问题描述为“$H_0: p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j} \leftrightarrow H_1: p_{ij} \neq p_{i\cdot} \times p_{\cdot j}$”的检验问题。

当检验总体存在未知参数时，需要利用极大似然估计先对位置参数进行估计，再做卡方独立性检验。

2.检验统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\frac{(n_{ij}-n\hat{p}_i\hat{q}_j)^2}{n\hat{p}_i\hat{q}_j}=n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}[n_{ij}-\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}]/n_{i\cdot}n_{\cdot j}$$

3.拒绝域

$$\chi^2>\chi_\alpha^2((s-1)(t-1))$$

4.四格表检验

$$\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1\cdot}n_{2\cdot}n_{\cdot1}n_{\cdot2}}$$

四、秩和检验

1.检验统计量

$$W=R_1+\ldots+R_n$$

2.两个总体分布函数的秩和检验方法

H_0	H_1	拒绝域
$F(x)\le G(x)$	$F(x)>G(x)$	$W\ge d$
$F(x)\ge G(x)$	$F(x)<G(x)$	$W\le c$
$F(x)=G(x)$	$F(x)\ne G(x)$	$W\le c\cup W\ge d$

3.非参数的均值检验方法

H_0	H_1	拒绝域
$\mu_1\ge\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$	$W\ge d$
$\mu_1\le\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$	$W\le c$
$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\ne\mu_2$	$W\le c\cup W\ge d$

五、符号检验

利用二项分布计算正号的值进行检验，基本思想与秩和检验相似。

3.4 题型总结

一、两类错误相关问题

1.题型描述：求解犯两类错误的概率问题。

2.解题策略：

利用功效函数定义求解：

犯第一类错误的概率=原假设参数值带入拒绝域的概率；

犯第二类错误的概率=1-备择假设参数带入拒绝域的概率。

3.题解：

例：设$\xi_1,...,\xi_n$为总体$\xi \sim N(a,1)$的样本，对假设$H_0: a=1, H_1: a=2$的拒绝域为$W=\{\bar{\xi}>1.5\}$。

（1） 求犯两类错误的概率α与β

（2） 如果$(x_1,x_2,...,x_9)=(1.8,1.7,1.4,1.5,1.9,2.0,1.7,1.7,1.6)$，

问H_0是否成立？

解：

（1） 犯第一类错误的概率=原假设参数值带入拒绝域的概率：

$$\alpha = P\{\bar{\xi}>1.5\} = P\{\frac{\bar{\xi}-1}{\sqrt{\frac{1}{9}}} > \frac{1.5-1}{\sqrt{\frac{1}{9}}}\} = P\{3(\bar{\xi}-1)>1.5\} = 1-\Phi(1.5) = 0.0668$$

犯第二类错误的概率=1-备择假设参数带入拒绝域的概率。

$$\beta = 1-P\{\bar{\xi}>1.5\} = P\{\bar{\xi}\le 1.5\} = P\{\frac{\bar{\xi}-2}{\sqrt{\frac{1}{9}}} \le \frac{1.5-2}{\sqrt{\frac{1}{9}}}\} = P\{3(\bar{\xi}-2)\le -1.5\} = 1-\Phi(1.5) = 0.0668$$

（2） $\bar{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = 1.7 > 1.5$落在了拒绝域内，所以拒绝$H_0$，即认为$H_0$不成立。

二、带参数的假设检验问题

1.题型描述：检验某一参数或某一参数反应的现象是否成立，待检验分布常为正态分布。

2.解题策略：

套用模板解决问题：

【模板】

解：设【样本观测量】为 X ，满足【总体分布】，则有如下假设：

$$【H_0：原假设 \leftrightarrow H_1：备择假设】$$

拒绝域为：$W=$【拒绝域格式】

由题可知，【题中给出的样本观察值信息】

计算可得，【样本反应的观测值】

查表可知，【拒绝域上（下）界值】

因为【判断观测值是否在拒绝域内】，所以【拒绝/接受】H_0，即【题干】。

3.题解：

例：食品厂用自动装罐头机装罐头食品，每罐标准重量为 500g，每隔一定时间需要检查机器工作情况。现抽 10 罐，测得重量为（单位：g）：495，510，505，498，503，492，502，512，497，506.假定重量服从正态分布，试问机器工作是否正常（$\alpha=0.05$）？

解：

设【每罐罐头重量】为 X ，满足【 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 】，则有如下假设：

$$【H_0:\mu=500 \leftrightarrow H_1:\mu\neq 500】$$

拒绝域为：$W=$【 $|\frac{\sqrt{n-1}(\bar{X}-\mu)}{S}|>t_{\alpha/2}(n-1)$ 】

由题可知，【 $n=10,\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=502,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=38$ 】

计算可得，【 $|\frac{\sqrt{n-1}(\bar{X}-\mu)}{S}|=0.9733$ 】

查表可知，【 $t_{0.025}(9)=2.262$ 】

因为【0.9733<2.262】，所以【接受】H_0，即【机器工作正常】。

三、皮尔逊拟合优度检验问题

1.题型描述：判断样本数据是否为某一特定分布的问题。

2.解题策略：

套用模板解决问题：

【模板】
解：将正半轴分为【区间组】，【区间个数】个区间，则有如下假设：

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \leftrightarrow H_1 : F(x) \neq F_0(x)$$

其中，$F_0(x)$为【分布类型】。

（当分布类型中存在未知参数时）
由极大似然估计可得：【参数=参数估计量=参数估计值】

于是得下表：

【样本】i	
频数v_i	
理论频率 p_i	
理论频数 np_i	
$v_i^2 / n_i p_i$	

由皮尔逊定理得：$\chi^2(k-r-1) =$【表格最后一行求和$-n$】

查表可知：$\chi_\alpha^2(k-r-1)$

因为【比较两值的大小关系】，所以【拒绝/接受】H_0，即【题干】。

【注释】
1. 理论频率需要通过待检验分布去计算；
2. 理论频数=理论频率×样本容量；
3. K 表示区间个数，r 表示未知参数个数。

3.题解：

例：在某公路上某处 50 分钟之内，记录每 15 秒路过汽车的辆数，得到数据如下：

辆数	0	1	2	3	4	⩾5
频数	92	68	28	11	1	0

试问这个分布能否看作为泊松分布（$\alpha = 0.05$）？

解：将正半轴分为【[0,1)，[1,2)，[2,3)，[3,4)，[4,5)，[5,+∞)】，【6】个区间，则有如下假设：

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \leftrightarrow H_1 : F(x) \neq F_0(x)$$

其中，$F_0(x)$ 为【泊松分布】。

由极大似然估计可得：

【$\hat{\lambda} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} v_i n_i = \frac{1}{200} \times (0\times 92 + 1\times 68 + 2\times 28 + 3\times 11 + 4\times 1) = 0.805$】

于是得下表：

【样本】i	0	1	2	3	4	⩾5
频数 v_i	92	68	28	11	1	0
理论频率 p_i	0.447	0.3599	0.1449	0.0389	0.0078	0.0015
理论频数 np_i	89.418	71.981	28.972	7.774	1.565	0.3
$v_i^2 / n_i p_i$	94.657	64.239	27.061	15.565	0.6390	0

由皮尔逊定理得：$\chi^2(4) =$【$\sum_{i=1}^{k} v_i^2 / n_i p_i - n = 2.161$】

查表可知：$\chi^2_{0.05}(4) = 9.448$

因为【$\chi^2(4) < \chi^2_{0.05}(4)$】，所以【接受】$H_0$，即【这个分布能看作泊松分布】。

四、卡方独立性检验问题

1.题型描述：判断两个因素之间是否有关的问题。

2.解题策略：

套用模板解决问题：

【模板】

解：此题可视为假设检验问题：$H_0: p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j} \leftrightarrow H_1: p_{ij} \neq p_{i\cdot} \times p_{\cdot j}$

$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}[n_{ij} - \frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}]^2 / n_{i\cdot}n_{\cdot j}$ =【计算过程表达式】=【计算值】

查表可知：$\chi_\alpha^2((r-1)(s-1))$

因为【比较两个值的大小】，所以【拒绝/接受】H_0，即【题干】。

【注释】

1. r 和 s 为两个因素的水平指标个数；2. 四格表检验也可直接带公式计算。

3.题解：

例：为了研究慢性气管炎与吸烟量的关系，调查了 385 人，统计数字如下表所示。

	a 支/日	b 支/日	c 支/日	和
患病人数	26	147	37	210
健康者	30	123	22	175
和	56	270	59	385

试问慢性气管炎与吸烟量是否有关系（$\alpha = 0.05$）？

解：此题可视为假设检验问题：$H_0: p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j} \leftrightarrow H_1: p_{ij} \neq p_{i\cdot} \times p_{\cdot j}$

$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}[n_{ij} - \frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}]^2 / n_{i\cdot}n_{\cdot j}$ =【

$$385\times[\frac{(26-210\times56\div385)^2}{210\times56}+\frac{(30-56\times175\div385)^2}{56\times175}+\frac{(147-270\times210\div385)^2}{270\times210}+\frac{(123-270\times175\div385)^2}{270\times175}+\frac{(37-59\times210\div385)^2}{59\times210}+\frac{(22-59\times175\div385)^2}{59\times175}]$$

】=【$0.676+0.812+0.001+0.001+0.721+0.866=3.077$】

查表可知：$\chi_{0.05}^2(2) = 5.991$

因为【$\chi^2 < \chi_{0.05}^2(2)$】，所以【接受】$H_0$，即【慢性气管炎与吸烟量无关系】。