应用数理统计——第二章

2.1 点估计

一、常见分布的点估计

估计方法	分布形式	点估计量
矩估计	二项分布 $B(N,p)$，N 已知	$\hat{p}=\dfrac{\bar{X}}{N}$
	均匀分布 $U(a,b)$	$\bar{X}\pm\sqrt{3(n-1)/n}S$
	泊松分布 $P(\lambda)$	$\hat{\lambda}=\bar{X}$
	参数为 λ 的指数总体	$\hat{\lambda}=1/\bar{X}$
	正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$	$\hat{\mu}=\bar{X},\hat{\sigma}^2=\dfrac{n-1}{n}S^2$ $\hat{\sigma}=\sqrt{(n-1)/n}S$
极大似然估计	二项分布 $B(N,p)$，N 已知	$\hat{p}=\dfrac{\bar{X}}{N}$
	均匀分布 $U(a,b)$	$X_{(1)},X_{(n)}$
	泊松分布 $P(\lambda)$	$\hat{\lambda}=\bar{X}$
	参数为 λ 的指数总体	$\hat{\lambda}=1/\bar{X}$
	正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$	$\hat{\mu}=\bar{X},\hat{\sigma}^2=\dfrac{n-1}{n}S^2$ $\hat{\sigma}=\sqrt{(n-1)/n}S$

二、矩估计

1.定义

利用样本矩去估计总体矩的方法。

2.矩估计原则

（1）总体的参数无法表示成矩的函数，即总体矩不存在时，不能使用矩估计方法；

（2）如果能使用低阶矩，就不要使用高阶矩；

（3）实际应用中常用样本方差作为总体方差的估计，而非计算二阶中心矩。

3.方法

利用随机变量的分布，计算期望值（取值乘概率求和）。

三、极大似然估计

1.定义

选取使得事件发生可能性最大的参数的取值作为估计值的方法。

2.方法

（1）构造似然函数：非随机变量取 n 次方，随机变量取值做连乘操作；
（2）利用对数化简似然函数，便于之后的求导工作；
（3）对参数求偏导，观察偏导数的性质：

1）恒正或恒负：推出似然函数单调性，选择使得似然函数取最大值的参数的值；

2）偏导数值可变号：构造似然方程，令偏导数等于 0，计算求得参数的值。

3.注意事项

极大似然估计可以不唯一。

2.2 估计量的评价标准

一、无偏性

1.定义

如果参数的估计量的均值等于参数本身，则该估计量为参数的无偏估计量。

2.无偏估计的证明方法

对估计值求其期望，若期望值等于参数本身，则该估计量为无偏估计量。

3.无偏估计的构造

（1）观察法：通过观察特殊统计量的期望，构造无偏估计量。

（2）验证法：对点估计和极大似然估计求期望，判断是否为无偏估计量。

（3）充分统计量构造法：构造充分统计量，求解其满足无偏性的函数作为无偏估计量。

二、有效性

1.定义

均方误差越小，估计量越好，而无偏估计的均方误差即为方差。因此，无偏估计的方差大小反应无偏估计的有效性。

2.有效性的比较

无偏估计的方差越小，有效性越好。

三、一致性（相合性）

对于任意的$\varepsilon > 0$，如果当$n \to \infty$时，

$$P\{|\varphi_n - g(\theta)| > \varepsilon\} \to 0$$

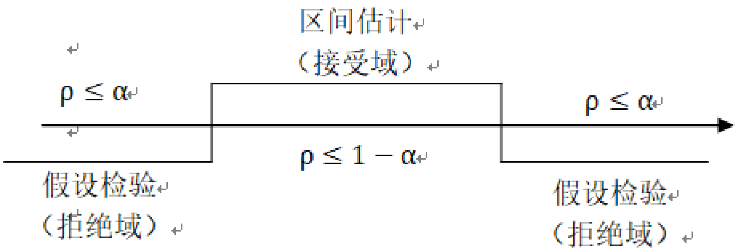
则称φ_n是$g(\theta)$的一致估计（又叫相合估计）。

四、一致最小方差无偏估计（$UMVUE$）

一致最小方差无偏估计是限制在无偏估计中的最优估计。该估计的方差达到所有无偏估计方差的下界，可通过充分、完备统计量求解一致最小方差无偏估计。

2.3 区间估计

一、估计与假设检验间关系



估计和检验都是对参数近似值的一种度量方式。估计是从接受误差的角度去衡量参数近似值的优良程度，给出可接受误差的区间，即“置信区间”；假设检验是从拒绝偏差的角度去衡量参数近似值的优良程度，给出拒绝偏差的区域，即“拒绝域”。

置信区间本着“概率越大的事件越容易发生”的原则进行求解；拒绝域本着“小概率事件在一次试验中不能发生”的原理进行求解。二者本质上是统一的。

置信区间之外为拒绝域，置信区间的长度称为“精度”，置信区间对应的概率值称为“置信度”，“1-置信度”的值对应在假设检验中称为“显著性水平”。因此，置信度和显著性水平之和为 1。

二、常用已知分布

区间估计的核心工作是构造枢轴量，而枢轴量的构造依赖于已知分布的形式。常用的已知分布有：正态分布、χ^2 分布、t 分布和 F 分布。具体分布形式及特点，详见第一章内容。

三、枢轴量

1.定义

枢轴变量是一个随机变量，它与抽取出的样本以及待估计的$g(\theta)$都有关系。但是它的分布又必须是与参数θ无关的已知分布。

2.构造方法

（1）明确参数含义；
（2）利用样本表示参数（常用参数的点估计）；
（3）将二者进行比较：一次做差、二次做商；
（4）构造比较式的已知分布即得枢轴量，化简即可求置信区间。

.

2.4 题型总结

一、点估计的计算问题

1.题型描述： 计算参数的点估计（矩估计、极大似然估计）。

2.解题策略：

（1）矩估计：

计算分布的期望值：取值乘概率求和。

（2）极大似然估计：

1）构造似然函数：非随机变量取 n 次方，随机变量取值做连乘操作；

2）利用对数化简似然函数，便于之后的求导工作；

3）对参数求偏导，观察偏导数的性质：

a.恒正或恒负：推出似然函数单调性，选择使得似然函数取最大值的参数的值；

b.偏导数值可变号：构造似然方程，令偏导数等于 0，计算求得参数的值。

3.题解：

例 1：设$\xi_1,\dots,\xi_n$为总体ξ的样本，ξ的密度函数或概率密度如下，试求其中未知参数θ的矩估计量。

（1）$P\{\xi=x\}=\dfrac{1}{N}, x=1,2,\dots,N, N$为（正整数）未知参数。

（2）$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^2}2(\theta-x), & 0<x<\theta,\theta>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

解：

（1）$E(\xi)=\sum_{i=1}^{N}x\dfrac{1}{N}=\dfrac{(1+N)N}{2N}=\dfrac{N+1}{2}=\bar{\xi}\Rightarrow\hat{\theta}=2\bar{\xi}-1$

（2）$E(\xi)=\int_0^{\theta}x\dfrac{1}{\theta^2}2(\theta-x)dx=\bar{\xi}\Rightarrow\hat{\theta}=3\bar{\xi}$

例 2：设总体ξ的密度函数或概率函数如下，求参数的θ极大似然估计量：

（1）$P(x;\theta)=C_N^x\theta^x(1-\theta)^{N-x}, x=0,1,\dots,N, N$为已知，$0<\theta<1.$

（2）$f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\le x\le 1,\theta>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（1） 解：

1） 构造似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{N} C_N^{x_i}\theta^{x_i}(1-\theta)^{N-x_i}$

2） 利用对数化简似然函数：

$$g(\theta)=\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{N}\ln C_N^{x_i}+\ln\theta\sum_{i=1}^{N}x_i+\ln(1-\theta)\sum_{i=1}^{N}N-x_i$$

3） 求偏导：$g'(\theta)=\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{N}x_i+\frac{1}{\theta-1}\sum_{i=1}^{N}N-x_i$

4） 令偏导数等于 0，求出参数估计值：$\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{N}$

（2） 解：

1） 构造似然函数：$L(\theta)=(\sqrt{\theta})^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\sqrt{\theta}-1}$

2） 利用对数化简似然函数：$g(\theta)=\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

3） 求偏导：$g'(\theta)=\frac{n}{2\theta}+(\frac{1}{2\sqrt{\theta}})\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

4） 令偏导数等于 0，求出参数估计值：$\hat{\theta}=\frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2}$

二、无偏估计量问题

1.题型描述：无偏估计的证明与构造问题。

2.解题策略：

（1）无偏估计的证明：估计量的期望值等于参数本身。
（2）无偏估计的构造问题：
1）观察法：通过观察特殊统计量的期望，构造无偏估计量。
2）验证法：对点估计和极大似然估计求期望，判断是否为无偏估计量。
3）充分统计量构造法：构造充分统计量，求解其满足无偏性的函数作为无偏估计量。
a.写出似然函数，求出极大似然估计量；
b.对似然函数进行因子分解，得到充分统计量；
c.求极大似然估计量的期望；
d.根据充分统计量与极大似然估计量间关系，构造无偏估计。

3.题解：

例 1：设总体$\xi \sim N(a,\sigma^2)$，$\xi_1,\ldots,\xi_n$为ξ的样本。

（1） 求k，使$\hat{\sigma}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\bar{\xi}|$为$\sigma$的<u>无偏估计量</u>。

（2） 求k，使$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-1}(\xi_{i+1}-\xi_i)^2$为$\sigma^2$的<u>无偏估计量</u>。

解：

（1）$E(\hat{\sigma})=E(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\bar{\xi}|)=\frac{1}{k}E\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\bar{\xi}|=\frac{n}{k}E|\xi_i-\bar{\xi}|$

$$=\frac{n}{k}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}}dx=\frac{2n}{k}\int_{0}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}}dx$$

因为$\xi_i-\bar{\xi}\sim N(0,\frac{n-1}{n}\sigma^2)$，所以$\sigma_1^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$。

所以$E(\hat{\sigma})=\frac{\sigma}{k}\sqrt{\frac{2n(n-1)}{\pi}}=\sigma$，解得$k=\sqrt{\frac{2n(n-1)}{\pi}}$

（2）$E(\hat{\sigma}^2)=E(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-1}(\xi_{i+1}-\xi_i)^2)=\frac{1}{k}E\sum_{i=1}^{n-1}(\xi_{i+1}-\xi_i)^2=\frac{n-1}{k}E(\xi_2-\xi_1)$

因为$\xi_{i+1}-\xi_i\sim N(0,2\sigma^2)$，所以$E(\hat{\sigma}^2)=\frac{n-1}{k}E(\xi_2-\xi_1)^2=\frac{n-1}{k}(2\sigma^2+0)=\sigma^2$

解得$k=2(n-1)$

例 2：设总体ξ服从几何分布：$P\{\xi=k\}=p(1-p)^{k-1},k=1,2,\ldots$

（1） 求未知参数p的<u>无偏估计</u>。

（2） 求未知参数p的倒数$\frac{1}{p}$的<u>无偏估计</u>。

解：

（1） 观察到，$P\{\xi=1\}=p$

于是令ξ_1为ξ的一个容量为 1 的样本，有

$$T(\xi_1)=\begin{cases}1, & \xi_1=1,\\ 0, & \xi_1=2,3,\ldots,\end{cases}$$

因为$E(T(\xi_1))=P\{\xi=1\}=p$，所以$T(\xi_1)$为p的一个无偏估计。

（2） 由于ξ为几何分布，其点估计值可取为$\frac{\hat{1}}{p}=\bar{\xi}$。

因为$E(\frac{\hat{1}}{p})=E(\bar{\xi})=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{p}=\frac{1}{p}$，所以$\bar{\xi}$为$\frac{1}{p}$的一个无偏估计。

例 3：试构造密度函数下的一致最小方差无偏估计量：

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x} & 0<x<\infty,\theta>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

解：

（1） 写出似然函数：$L(\theta)=\theta^n\prod_{i=1}^{n}e^{-\theta x_i}\Rightarrow Y_1=\frac{1}{\bar{X}}$

（2） 对似然函数进行因子分解：$L(\theta)=e^{n\ln\theta-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}\Rightarrow Y_2=\sum_{i=1}^{n}x_i$

（3） 对极大似然估计量求期望：$E(Y_1)=E(\frac{1}{\bar{X}})=\frac{n}{n-1}\theta$

（4） 根据充分统计量和极大似然估计量间关系，推出一致最小方差无偏估计：

$$\theta=\frac{n-1}{n}E(Y_1)=\frac{n-1}{n}E(\frac{n}{Y_2})=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{Y_2}=\frac{n-1}{Y_2}=\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

三、无偏估计的有效性问题

1.题型描述：比较多个无偏估计的有效性。

2.解题策略：

计算无偏估计的方差值，方差值越小越有效。

3.题解：

例：设总体$\xi\sim N(a,1),\xi_1,\xi_2,\xi_3$为$\xi$的样本，试证明下述 3 个估计量都是$a$的无偏估计量，并求每个估计量的方差，指出哪个最小。

（1）$\hat{a}_1=\frac{2}{5}\xi_1+\frac{3}{5}\xi_2.$

（2）$\hat{a}_2=\frac{1}{10}\xi_2+\frac{9}{10}\xi_3.$

（3）$\hat{a}_3=\frac{1}{3}\xi_3+\frac{2}{3}\xi_1.$

解：

（1）$E(\hat{a}_1)=E(\frac{2}{5}\xi_1+\frac{3}{5}\xi_2)=\frac{2}{5}E(\xi_1)+\frac{3}{5}E(\xi_2)=a$

$D(\hat{a}_1)=D(\frac{2}{5}\xi_1+\frac{3}{5}\xi_2)=\frac{4}{25}D(\xi_1)+\frac{9}{25}D(\xi_2)=\frac{13}{25}$

（2）$E(\hat{a}_2)=E(\frac{1}{10}\xi_2+\frac{9}{10}\xi_3)=\frac{1}{10}E(\xi_2)+\frac{9}{10}E(\xi_3)=a$

$D(\hat{a}_{10})=D(\frac{1}{10}\xi_2+\frac{9}{10}\xi_3)=\frac{1}{100}D(\xi_2)+\frac{81}{100}D(\xi_3)=\frac{41}{50}$

（3）$E(\hat{a}_3)=E(\frac{1}{3}\xi_3+\frac{2}{3}\xi_1)=\frac{1}{3}E(\xi_3)+\frac{2}{3}E(\xi_1)=a$

$D(\hat{a}_3)=D(\frac{1}{3}\xi_3+\frac{2}{3}\xi_1)=\frac{1}{9}D(\xi_3)+\frac{4}{9}D(\xi_1)=\frac{5}{9}$

四、区间估计问题

1.题型描述：求解某个参数的区间估计。

2.解题策略：

利用枢轴量求解：

（1）明确参数含义；

（2）利用样本表示参数（常用参数的点估计）；

（3）将二者进行比较：一次做差、二次做商；

（4）构造比较式的已知分布即得枢轴量，化简即可求置信区间。

3.题解：

例：设总体$\xi\sim N(a,\sigma^2)$，已知$\sum_{i=1}^{15}x_i=8.7,\sum_{i=1}^{15}x_i^2=25.05$，试分别求置信度为 0.95 的$a$及$\sigma^2$的区间估计。

解：

（1）明确参数含义：a为总体均值，σ^2为总体方差。

（2）利用样本表示参数：$\hat{a}=\bar{X},\hat{\sigma}^2=S^2$

（3）将二者进行比较：$\bar{X}-a,\frac{S^2}{\sigma^2}$

（4）构造比较式的已知分布，即得枢轴量：$\frac{\sqrt{n}\bar{X}-a}{S}\sim t(n-1),\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

（5）计算：$\bar{X}=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}x_i=\frac{8.7}{15}=0.58,S^2=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}x_i^2-\bar{X}^2=1.3336$

（6）带入解得：

$$a \in [\bar{X} - \frac{t_{\alpha/2}(n-1)S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{t_{\alpha/2}(n-1)S}{\sqrt{n}}] \Rightarrow a \in [-0.05952, 1.2195]$$

$$\sigma^2 \in [\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}] \Rightarrow \sigma^2 \in [0.7149, 3.3168]$$