

Fluid-dynamic analysis of ping-pong ball trajectory

김재환, 2016-19515

지도교수 : 김 호 영

2022. 06. 18

0. 초록 (Abstract)

본 논문에서는 중력 이외에 항력, 양력이 존재하는 경우의 탁구공의 움직임에 대하여 분석하였다. 항력과 양력을 고려하지 않고 중력만이 존재함을 가정하는 경우, 투사체는 포물선 궤적으로 운동하게 된다. 이는 이론적으로 다루기 쉽고 움직임을 대략적으로 예상하기는 쉬우나, 현실과는 동떨어진 경우가 많다. 따라서, 본 논문에서는 항력과 양력이 투사체의 움직임에 유의미한 영향을 미칠 것으로 예상되는 탁구공에 대한 운동을 분석한다. 탁구공의 속도와 회전 각속도에 따라 항력 (Drag force)과 양력 (Lift force)이 달라짐을 고려하여 이론적인 방정식을 세우고, 실험 및 영상 분석을 통해 수립된 방정식이 실제 탁구공의 거동을 얼마나 잘 예측하는지를 분석한다.

I. 서론 (introduction)

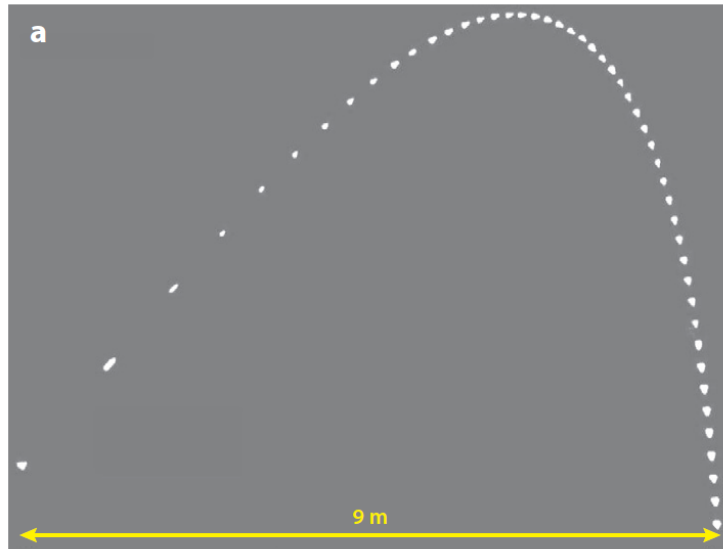


Figure 1. Chronophotography of Shuttlecock ($U_0 = 59\text{m/s}$, $\theta_0 = 52^\circ$)

비스듬히 발사된 투사체는 중력 이외의 외력을 받지 않을 때 포물선의 궤적으로 운동한다는 사실이 잘 알려져 있다. 하지만 공기저항, 바람 등의 영향이 있는 실제 상황에서는 이상적인

궤적을 따라 운동하지 않는다. 투사체의 경로는 이러한 외부적 요인 이외에도 투사체 자체의 특성에도 영향을 받는다. Figure 1에서 확인할 수 있듯이, Shuttlecock의 경로는 주어진 초기조건에서 포물선에서 크게 벗어난 궤적을 보인다. 하지만 축구공이나 농구공의 경우, Shuttlecock과 비교했을 때 같은 초기조건 하에서 그 궤적이 포물선에서 더 크게 벗어나지는 않을 것으로 예상된다. 그렇기 때문에 실제 상황에서 투사체의 경로를 더 잘 이해하고 예상하기 위해서, 이런 요소들을 함께 고려하는 과정이 필요하다. 본 논문에서는, 탁구공(Ping-pong ball)에 초점을 맞추어 연구를 진행하였다. Drag force 및 Lift force를 고려한 이론적인 식을 수립하고, 실제 Pingpong-ball의 움직임을 촬영한 후 Python을 이용한 이미지 트래킹을 통해 이론적인 식이 실제 Pingpong-ball의 거동을 얼마나 잘 예측하는지를 분석할 것이다,

II. 본론

II.1. 실험 방법

탁구공의 공간 상에서의 거동을 분석하기 위해 다음과 같이 실험을 진행하였다.

1. 탁구공의 움직임을 정측면에서 촬영할 수 있는 카메라를 설치한다.
2. 카메라의 프레임 축척을 알 수 있도록, 반대측면 배경에 줄자를 설치한다.
3. 탁구공의 회전 운동을 알 수 있도록 탁구공에 일정 간격으로 점을 찍는다.
4. 탁구공에 회전 (top spin, back spin)과 초속도를 다양한 방식으로 가하여 촬영한다. 이 때 탁구공의 회전이 보일 수 있도록 높은 fps로 촬영한다.
5. 이 때 탁구공의 움직임을 2차원 평면 상에서 image-tracking하기 위해, 촬영 평면에 가능한 한 평행하도록 공을 발사한다. 오차의 한계를 선정하여 한계 이내의 데이터만 유효한 것으로 하여 사용한다.
6. 탁구공의 수평 및 수직 운동, 회전 운동을 영상 처리를 통해 분석한다.

II.2. 영상 처리 과정

실험을 진행하여 촬영된 영상으로부터 탁구공의 운동 특성을 알아내기 위해, 2차원 평면상의 운동과 회전 운동에 대한 분석이 요구된다. 각각은 다음의 과정으로 진행하였다.

A. 2차원 평면상의 운동 분석

2차원 평면상의 운동을 분석하기 위해, 먼저 촬영된 영상에서 탁구공이 지나가는 영역만을 추출한다. 영상을 촬영하는 동안 배경에 해당하는 pixel은 그 RGB 값이 거의 변하지 않고, 탁구공이 지나가는 pixel은 그 RGB값이 특정 순간에 크게 변화할 것임을 예상하고 이를 이용하여 탁구공

의 경로와 background를 구분 지었다. 탁구공이 발사된 시점부터 처음 지면에 닿기 전까지의 시간 동안 촬영된 frame들에 대해, pixel의 R, G, B 값의 분산의 합이 어떤 threshold보다 큰 pixel들만 탁구공이 지나갔을 수 있는 것으로 생각되는 영역으로 판단하여 이 pixel들의 index를 저장하였다. 이 threshold값은 signal을 명확히 감지하면서 noise를 최대한 걸러내는 값으로 설정한다. 이 pixel들만을 흰색으로 표시하여 시각화한 그림은 Figure 2와 같다. Threshold에 따라 다음과 같이 경로가 아닌 부분까지 포함할 수 있으므로 영상에 따라 threshold 값을 설정한다.

이를 통해 탁구공의 경로에 대한 정보를 추출하였고, 시점에 탁구공의 경로를 파악하기 위해 탁구공의 색과 관련된 특징을 사용하였다. 실험에서 사용한 탁구공의 색은 주황색이었고, 이 색과 유사한 RGB 값은 (255, 127, 0)이다. 이를 reference RGB 값이라고 부르도록 한다. 첫 번째 과정으로 filtering 된 탁구공의 경로 상의 점들 중, 특정 frame에서 RGB값이 위의 reference RGB 값과 유사한 pixel이 있다면 그것은 그 시점(frame)에 탁구공이 그 pixel을 지나고 있기 때문일 것이라고 예상할 수 있다. 이를 이용하여 매 frame에서 각 pixel들의 RGB값과 reference RGB 값 cosine similarity를 계산하여 이 값이 어떤 threshold2보다 큰 pixel들만을 추출하면, 이 pixel들이 탁구공의 영역을 구성할 것이라고 예측할 수 있다. 마찬가지로 threshold2값은 signal을 명확히 감지하면서 noise를 최대한 걸러내는 값으로 설정한다. Figure 2에서 이 과정을 수행한 결과는 Figure 3에 표시하였다.

마지막으로, 매 frame에서 위의 과정을 통해 얻어진 탁구공의 영역을 둘러싸는 직사각형 모양 경계선을 추출하여 그 중심을 탁구공의 해당 frame에서의 위치로 저장한다. 위의 두 처리 과정에서 목표인 탁구공 외에 다른 영역들 역시 함께 추출되는데, 이런 noise들을 제거하고 탁구공만의 위치를 추출하기 위해 직사각형 모양에 대한 크기 조건, 가로/세로 비 조건 등을 부여하여 filtering을 진행한다. 최종적으로 이것으로 탁구공의 frame별 위치 값을 추출한다.

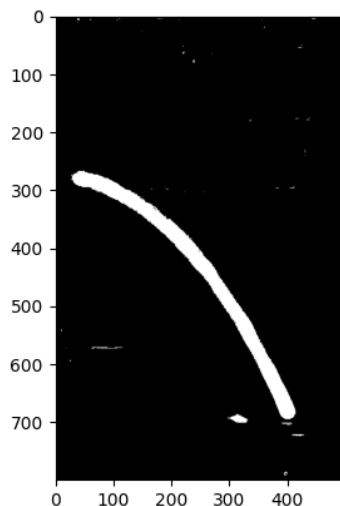


Figure 2. 공의 경로 필터링 결과 (threshold = 60)

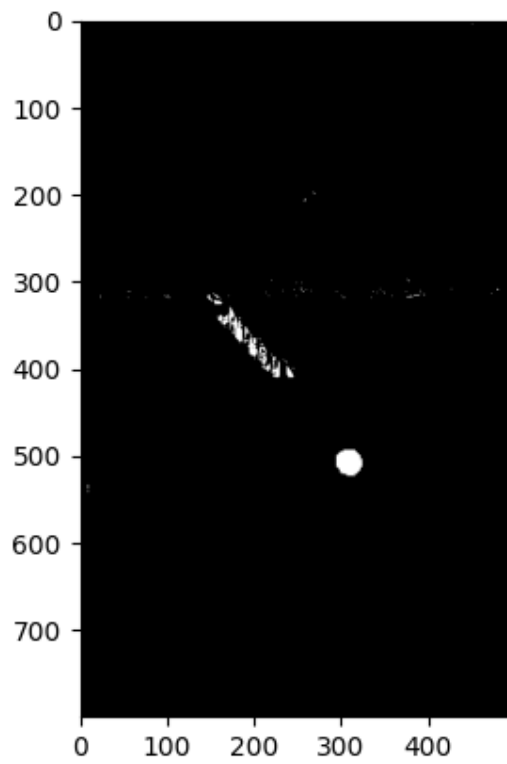


Figure 3. 공의 위치 필터링 결과 (threshold2 = 230)



Figure 4. 필터링 이전 이미지

B. 회전 운동 분석

회전 운동의 경우, 프레임 별로 탁구공 위에 있는 점의 위치 변화 양상만을 파악하여 측정하였다. 먼저, 발사 시점과 가장 가까운 frame의 데이터들 중, 탁구공 위의 점이 잘 관찰되는 시점을 선정한다. 그리고 frame을 하나씩 이동해가며 그 점이 몇 frame 동안 얼마만큼 시계방향 혹은 반시계방향으로 회전했는지를 측정하여 데이터로 기록한다. 아래 그림에서 볼 수 있듯이, 연속된 몇 개의 프레임에 대해서 탁구공에 찍힌 점이 얼마나 회전했는지를 바탕으로 탁구공의 각속도를 측정하여 기록하였다.

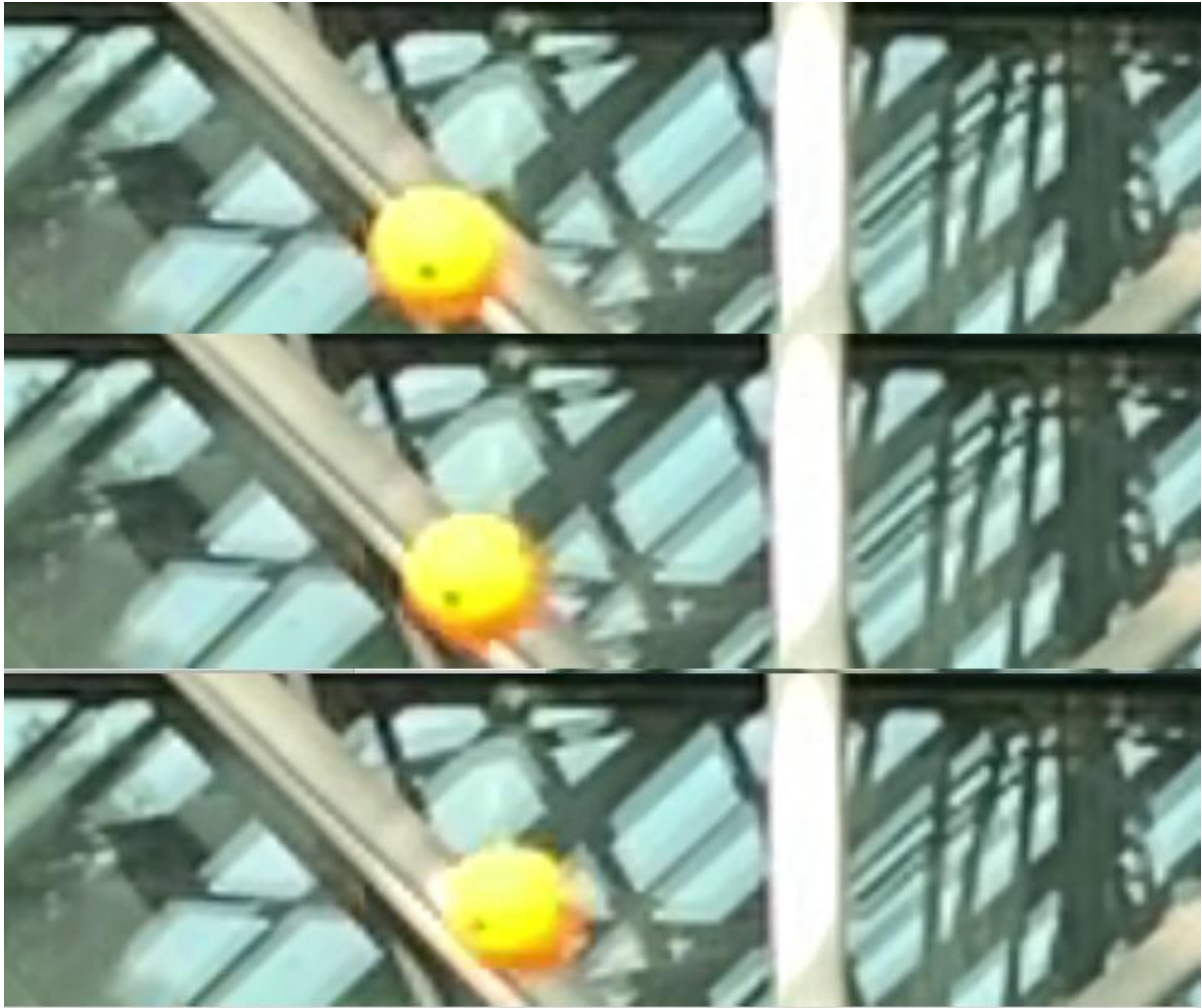


Figure 5. 연속된 3개의 frame에 대한 공의 회전 양상

II.3. 운동 방정식 수립

참고문헌에 따르면, 2차원 공간 상에서 양력, 항력을 받는 공의 운동방정식은 다음과 같이 수립된다.

$$m \frac{d\vec{U}}{dt} = -mg - \frac{1}{2} \rho U \vec{U} S C_D + \rho R^3 \vec{U} \times \vec{\Omega} C_\Omega$$

여기서 $\vec{U}, \vec{\Omega}$ 는 공의 속도, 각속도 벡터이다. R, S 는 각각 공의 반지름, 단면적이고 C_D, C_Ω 는 각각 공의 항력계수, spin이 있는 상황에서의 양력계수를 의미한다. 벡터로 정의된 $\vec{U}, \vec{\Omega}$ 를 직교좌표계에서 표현하고자 각 벡터를 다음과 같이 성분별로 정의한다. 여기서, Ω 는 top, back spin 만 있는 상황을 상정한다.

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \\ \vec{\Omega} &= \omega\hat{k}\end{aligned}$$

이 표현 방식으로 공의 운동방정식을 다시 쓰면,

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \rho \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x} S C_D + \rho R^3 \omega \dot{y} C_\Omega \right) \\ \ddot{y} &= -g + \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \rho \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} S C_D - \rho R^3 \omega \dot{x} C_\Omega \right)\end{aligned}$$

로 표현된다.

II.4. 분석 과정

[3]에 따르면, 실험에서의 Reynolds number 영역에서는 $C_D = 0.4$ 로 근사할 수 있고, [3]의 figure 2를 참고하여 $S = \frac{\Omega r}{U}$ 로 정의했을 때 실험에서의 Reynolds number 영역 ($1 \times 10^4 \sim 3 \times 10^4$)에서는 $C_\Omega = S$ 로 가정이 합당하다고 판단하여 이 값을 사용하였다. S 값의 계산에 사용한 U 값은 측정된 경로로부터 계산한 frame 간 평균 속력의 크기의 평균값이고, 양력계수가 운동 경로 동안 이 값으로 일정하다고 가정하였다.

양력과 항력을 고려한 경우, 위와 같이 양력 계수와 항력 계수가 일정하다는 가정 하에서도 공의 운동방정식은 해석적으로 해결하기 불가능한 형태가 된다. 따라서 양력 계수와 항력 계수에 따라 fitness가 어떻게 달라질지를 modeling하는 것이 어렵기 때문에 C_D, C_Ω 가 위에서 계산된 값으로 고정되어 있을 때, 양력과 항력을 고려한 경우와 그렇지 않은 경우에 대해, 실제 공의 경로와의 x, y 좌표축에 대한 SSE를 조사함으로써 양력과 항력을 고려하는 것이 공의 경로 예측에 도움이 되는지를 판단하였다.

따라서, 양력과 항력을 고려한 이 미분방정식이 공의 경로를 잘 예측하는지를 판단하기 위하여 다음의 방식을 이용하였다. 먼저, II.2를 통해 시간에 따른 공의 위치 변화 실험 데이터를 저장한다. 저장된 데이터는 공이 발사된 시점부터 지면에 닿기 직전까지 (frame 번호, pixel의 x좌표, pixel의 y좌표)가 frame 별로 저장된 데이터이다. 이를 실제 scale로 바꾸기 위해, frame-second 변환과 pixel-meter 변환을 수행하였다. Frame-second 변환의 경우, 촬영이 240fps로 진행되었으므로 1frame = 1/240 sec의 관계식을, pixel-meter의 경우 줄자의 눈금을 분석하여 pixel 한 번의 길이 = 1/623 m의 관계식을 이용하였다.

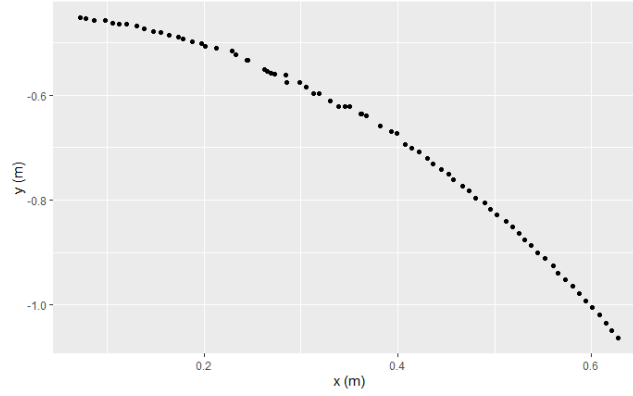


Figure 6. 영상 분석으로 얻어진 시간에 따른 공의 이동 경로

이후, 이론적인 경로 예측을 위해 이 데이터로부터 공의 초기 x, y 좌표 및 x, y 초속도를 저장한다. Figure 6에서 볼 수 있듯이, 영상 분석 데이터는 이산적인 값으로 얻어지고 이상적으로 미분 가능한 형태를 띄지 않는다. 따라서 예측의 정확성을 높이기 위해, 중력만 고려한 경우와 중력 및 양력, 항력을 고려한 경우 모두에 대해서 공의 초속도를 1번째 frame에서 10번째 frame까지 이동할 때의 평균 속도로 지정하고, 11번째 frame을 starting point로 가정하여 경로 예측을 진행하였다. 이 경로와 실험으로 얻어진 데이터의 11번째 frame부터의 경로를 비교하였다. 앞으로 중력만을 이용해 공의 위치를 예측하는 방식을 naïve 방식으로, 중력 및 양력, 항력을 고려하여 예측하는 방식을 theoretical 방식으로 부르기로 한다.

Naïve 방식의 경우, x, y 방향 초기 위치와 초기 속도를 각각 $x(0), y(0), v_{0x}, v_{0y}$ 로 정의했을 때 공의 경로는

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + v_{0x}t \\ y(t) &= y(0) + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

로 정의된다. Theoretical 방식의 경우, 추가적으로 측정한 따른 공의 각속도 데이터를 사용한다. 공의 각속도는 공이 발사된 시점부터 지면에 닿기 직전까지 일정하다고 가정한다. 이를 이용하여 공의 운동방정식

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \rho \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x} SC_D + \rho R^3 \omega \dot{y} C_\Omega \right) \\ \ddot{y} &= -g + \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \rho \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} SC_D - \rho R^3 \omega \dot{x} C_\Omega \right) \end{aligned}$$

을 수치해석적으로 풀 결과가 공의 예측 경로가 된다. 처음에 $t=0$ 에서의 \dot{x}, \dot{y} 값을 알고 있으므로, 이를 위의 방정식에 대입해 $t=0$ 에서의 \ddot{x}, \ddot{y} 값을 구할 수 있고, 다음으로 $\dot{x}(t_1) \approx \dot{x}(0) + \ddot{x}(0)(t_1 - 0)$, $\dot{y}(t_1) \approx \dot{y}(0) + \ddot{y}(0)(t_1 - 0)$ 의 관계식으로 $t=t_1$ 에서의 \dot{x}, \dot{y} 값을 구하는 식으로 경로 예측을 진행하였다. 여기서 t_1 값은 수치해석을 진행하는 step time gap이 되는데, 이 값을 1 frame의 시간 간격과 일치시켰다. 이것으로 얻는 장점은, 경로 비교를 진행할 때 공의 운동 경로 전체에 대해서 시간에 따른 공의 위치 예측의 정확도를 비교할 수 있다는 것이다. Naïve 방식의 경우 어떤 t 값에 대해서든 공의 위치 예측을 수행할 수 있지만, theoretical 방식의 경우 수치해석을 진행한 time gap의 정수배가 되는 시간에 대해서만 공의 위치 예측을 수행할 수 있기 때문이다. 최종적으로 한 실험에 대해 실험 데이터, naïve 방식, theoretical

방식으로 경로 측정 및 예측을 진행한 결과는 아래와 같다.

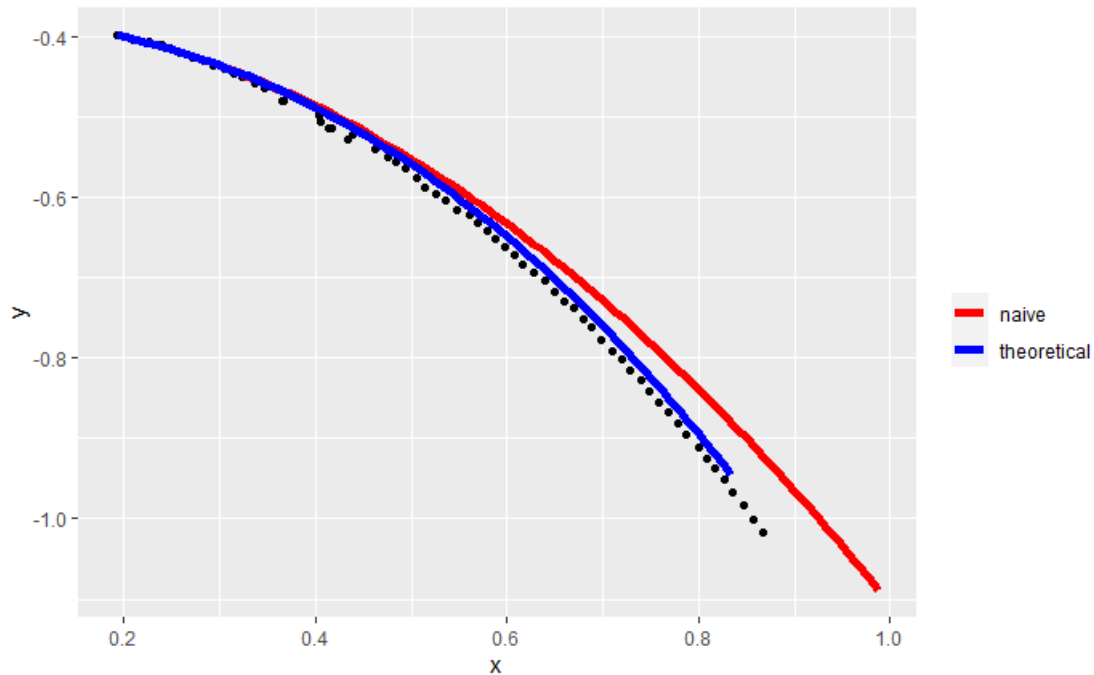


Figure 7. 공의 실제 경로와 예측 경로 (naive, theoretical)

위의 그림에서 볼 수 있듯이, 동일 시간 동안의 이동 경로인데 naïve 방식이 실제 공의 경로보다 공이 x, y 방향 모두에 대해서 더 멀리 진행할 것으로 예측함을 확인할 수 있다. 이것은 공에 작용하는 drag force를 고려하지 않은 결과로 해석할 수 있다. 경로 예측에 대한 정확도를 수치적으로 판단하기 위해 공이 발사된 시점부터 지면에 닿기 직전의 순간까지, frame 별로 실제 x, y좌표와 예측 경로의 x, y좌표 간의 거리의 제곱의 총합을 metric으로 이용하였다. 이를 SSE (Sum of Squared Error) 로 정의하고 실험 별로 naïve, theory 방식에 대한 SSE 값을 비교하였다.

$$SSE = \sum_{t=1}^T (x_{t,measure} - x_{t,pred})^2 + (y_{t,measure} - y_{t,pred})^2$$

II.5. 분석 결과

실험은 다양한 초기 조건에 대해 총 26회 반복되었고, 각 실험들에 대해 naïve, theoretical 방식에 대한 SSE 값을 측정한 뒤 이 결과를 그래프로 그려본 결과는 아래와 같다.

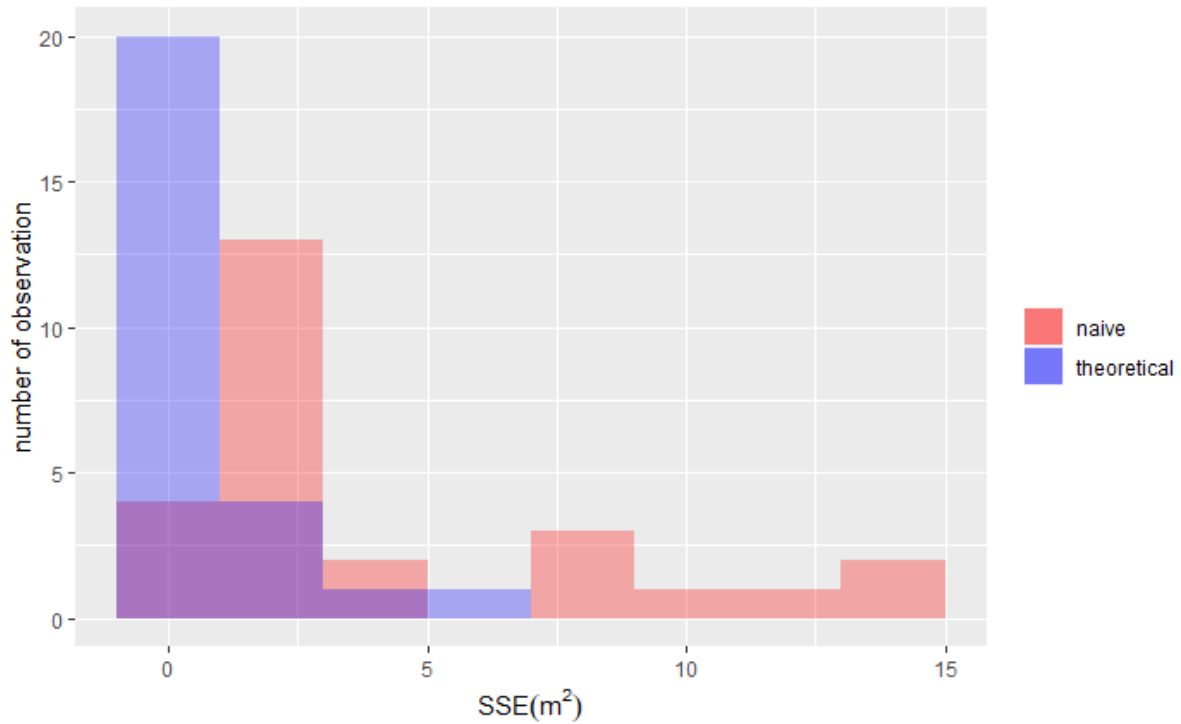


Figure 8. SSE histogram (naive, theoretical)

위의 그래프에서 볼 수 있듯이, theoretical 방식이 naïve 방식보다 작은 SSE를 가짐을 확인할 수 있다. 다음으로 실험 데이터에 대한 pairwise comparison을 진행해보았다. 이를 위해 SSE비를 다음과 같이 정의하였다.

$$SSE_{ratio} = \frac{SSE_{naive}}{SSE_{theoretical}}$$

그리고 26회의 실험에 대한 SSE_{ratio} 값은 아래와 같다.

Min	1 st Q.	Median	Mean	3 rd Q.	Max
1.861	4.644	10.049	28.293	31.227	141.075

Table 1. SSE value summary

SSE의 최소값이 1보다 크다는 사실로부터 모든 실험 데이터에 대해서 naïve 방식보다 theoretical 방식이 작은 SSE 값을 가진다는 사실을 알 수 있고, 절반 정도의 경우에 대해서는 theoretical 방식의 SSE 값이 naïve 방식의 $\frac{1}{10}$ 보다 작음을 확인할 수 있다. 즉 양력과 항력을 함께 고려하여 운동방정식을 수립한 경우에 경로 예측이 훨씬 더 정확하게 이루어짐을 확인할 수 있다.

III. 결론(summary)

Drag force와 Spin에 의한 Lift force를 고려한 경우, 탁구공의 경로가 포물선 경로와 비교했을 때 훨씬 개선된 경로 예측이 가능함을 확인할 수 있었다. 항력과 양력을 고려하지 않은 경우 같은 시간 동안 실제 공의 경로보다 공이 x, y 방향 모두로 더 길게 이동할 것으로 예측한다는 사실 역시 확인할 수 있었다.

참고문헌

- [1] Clanet, C. (2015). Sports ballistics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 47, 455-478.
- [2] Nathan AM. 2008. The effect of spin on the flight of a baseball. *Am. J. Phys.* 76:119–240
- [3] Rice, Dillon. *The Myth of the Soviet Soldier: Envisioning the "Other" in Late-Cold War American Military Training Materials*. Diss. Concordia University, 2017.