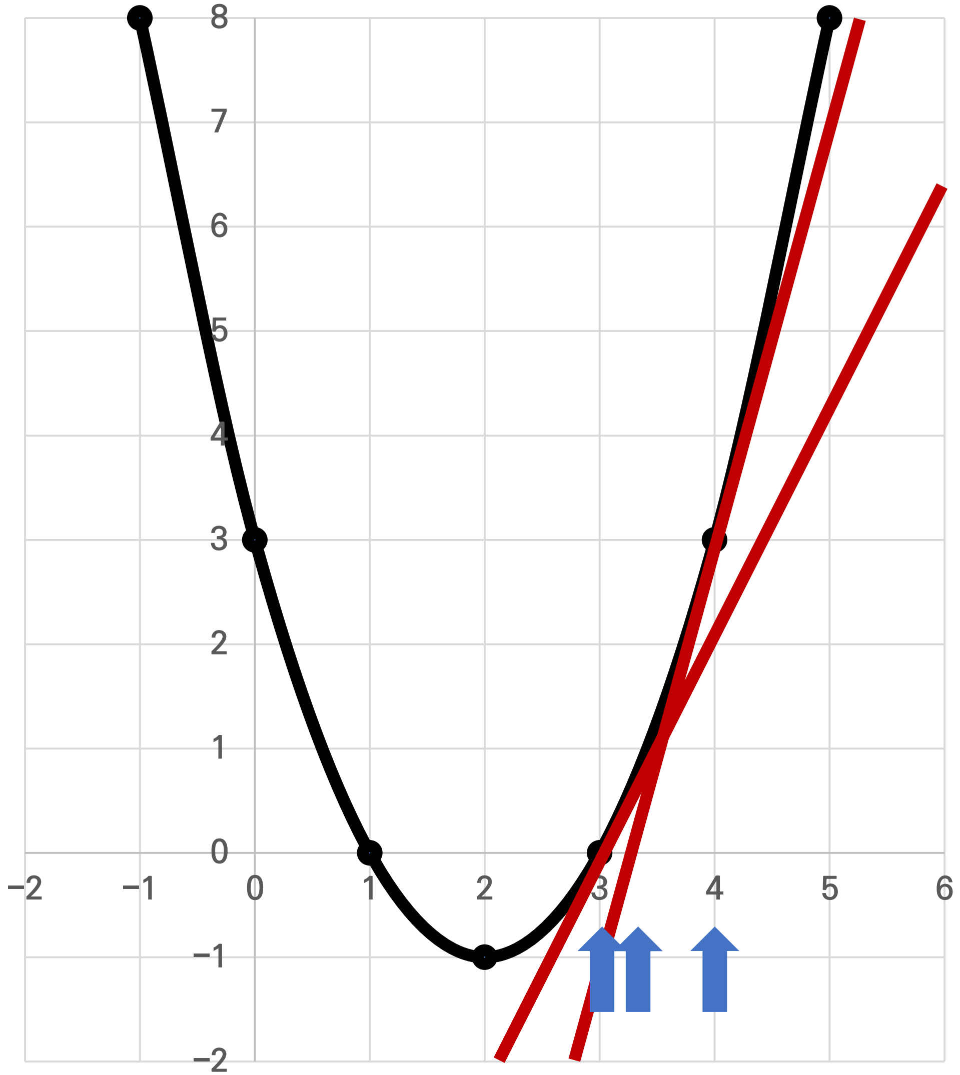
뉴턴 방법(Newton method): 함수의 해를 근사하는 방법



뉴턴 방법(Newton method): 함수의 해를 근사하는 방법

어떤 함수의 해를 계산하기 어려울 때가 있습니다. 다음 함수의 해를 하나라도 구해보세요.

$$f(x) = x^{12} - 3x^{10} - 6x^7 + 5x^4 - 35x^3 - 6x^2 + 3x - 38$$

$$f(2) = 0$$

복잡한 함수의 해를 효과적으로 근사하기 위해서는 어떻게 해야 될까요?

➡ 1차 함수로 근사한 뒤에, 해를 찾는 방식을 반복하면 어떨까요?

테일러 전개(Taylor expansion): 특정 포인트를 기준으로 함수를 근사하는 방법

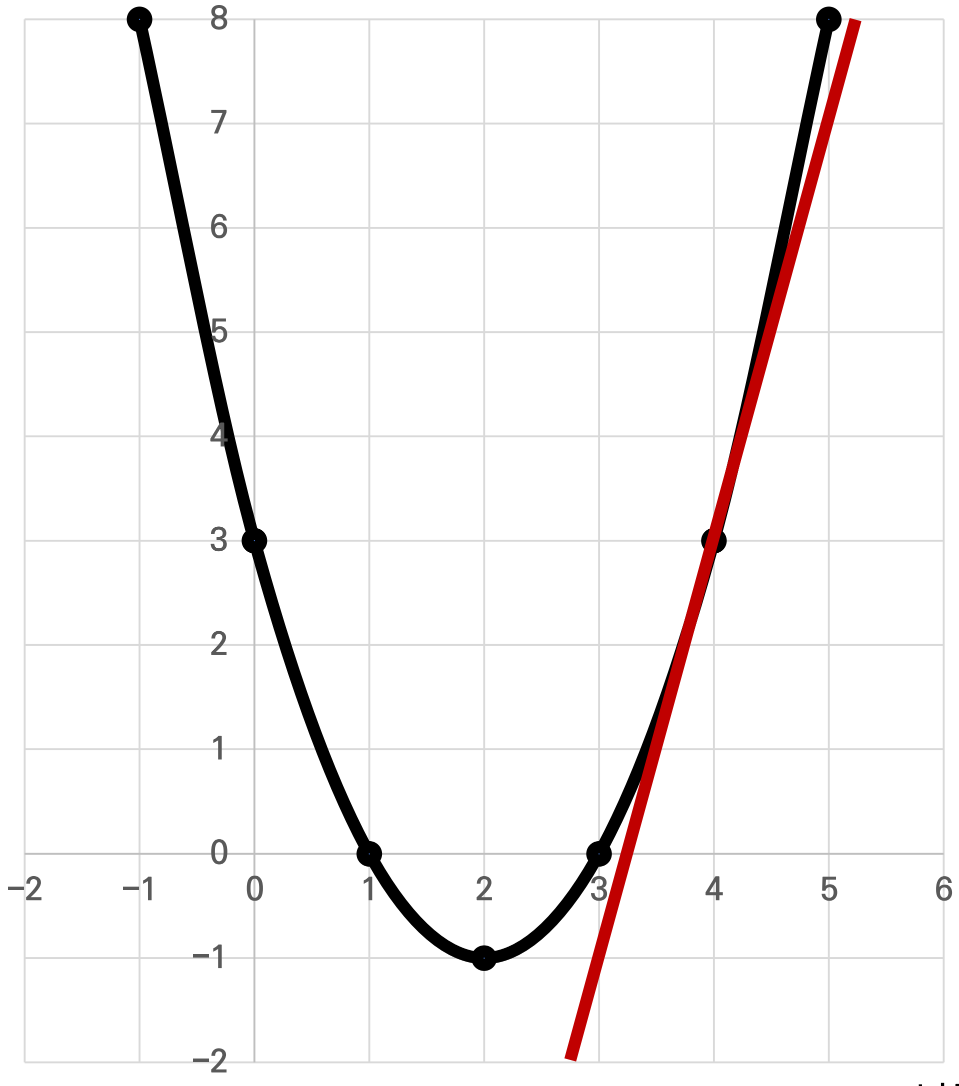
특정 포인트 a에서의 1차 테일러 전개 식은 다음과 같습니다.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$i.e., f(x) = (x - 2)^2 - 1$$

$a = 4$에서의 접선을 구해봅시다.

$$\Rightarrow \quad f(x) = 4x - 13$$



나동빈

뉴턴 방법(Newton method): 함수의 해를 근사하는 방법

뉴턴 방법은 특정 포인트에 출발하여 반복적으로 1차 함수로 근사하며 해를 찾습니다.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$f(x) = 0$가 되도록, 현재 포인트를 다음과 같이 업데이트합니다.

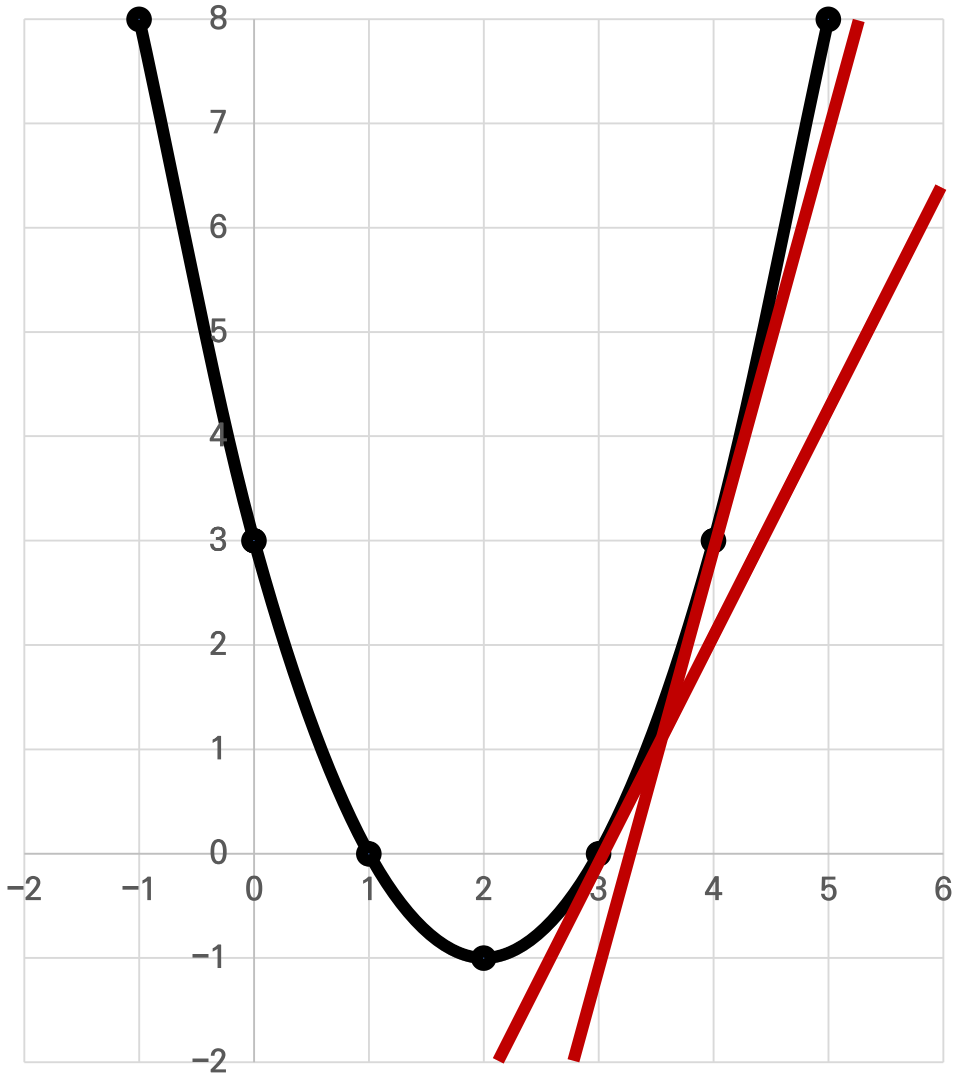
$$f(a) + f'(a)(x - a) = 0$$

$$x - a = \frac{-f(a)}{f'(a)}$$

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)}$$

$$x = \frac{-f(a)}{f'(a)} + a$$

$$i.e., f(x) = (x-2)^2 - 1$$



$$x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)} = x_t - \frac{(x-2)^2 - 1}{2x - 4}$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$$

$$x_3 = \frac{13}{4} - \frac{9}{40} = \frac{121}{40}$$

$$x_4 = \cdots$$

나동빈

Q. $x = \sqrt{7}$의 근사 값을 계산해보세요.

뉴턴 방법(Newton method)의 사용 예시와 한계점

- 사용 예시
  - 인공지능 분야에서 이미지를 모델에 대하여 미분하여 이미지를 조금씩 변화시킬 때 사용됩니다.
  - 컴퓨터 비전 분야에서 다양한 목적 함수(Objective function) 최적화를 위해 사용됩니다.
- 한계점
  - 해가 여러 개인 경우 하나의 해만 찾을 수 있습니다.
  - 함수 $f(x)$가 미분 가능해야 합니다.
  - 초기값 설정을 잘못하는 경우 수렴 시간이 오래 걸리거나, 발산할 수 있습니다.