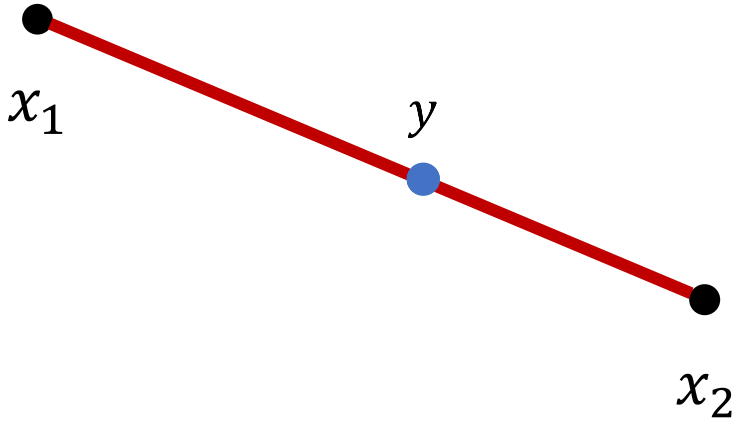
선분(Line segment)

두 점을 잇는 선분이란 무엇일까요?

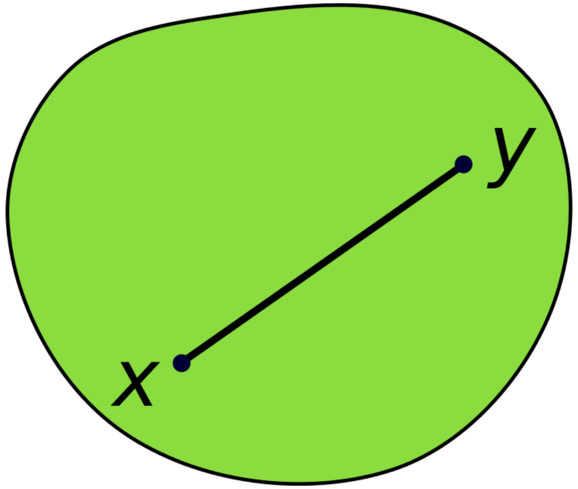


선분의 정의를 여러 가지 형태로 작성해 볼 수 있습니다.

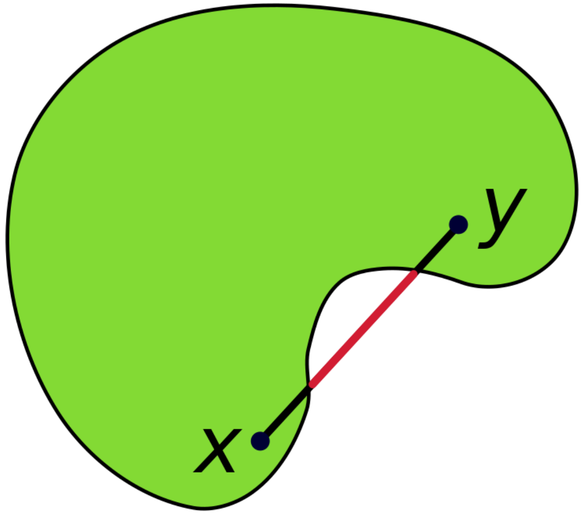
- $y = ax_1 + (1 - a)x_2 \; with \; 0 \leq a \leq 1$
- $y = x_2 + a(x_1 - x_2) \; with \; 0 \leq a \leq 1$

볼록 집합(Convex set)

집합 내 두 점을 연결한 선분이 항상 집합에 포함되면 볼록 집합입니다.



Convex set

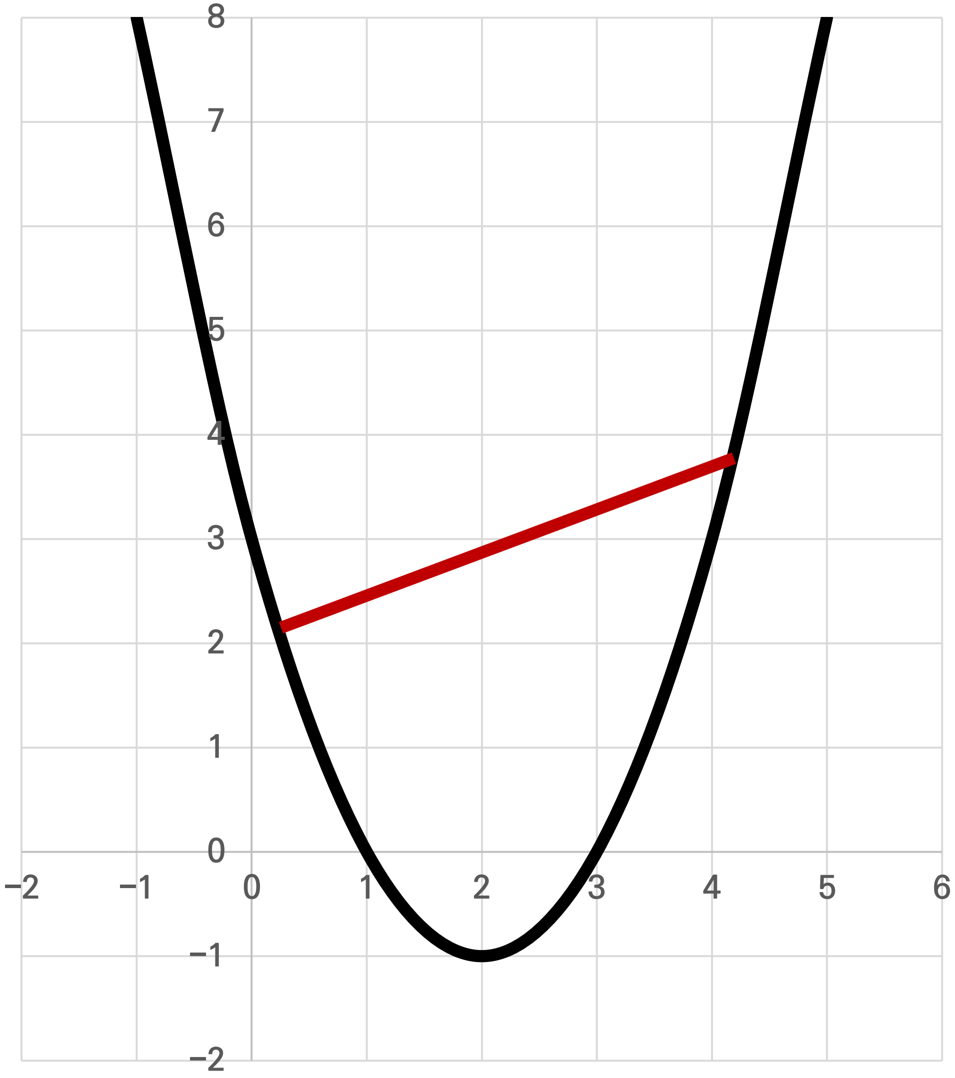


Non-convex set

다시 말해, 어떤 집합 C가 아래의 식을 만족한다면 볼록 집합입니다.

$$ax_1 + (1 - a)x_2 \in C \; with \; x_1, x_2 \in C, 0 \leq a \leq 1$$

볼록 함수(Convex function): 아래로 볼록하게 생긴 함수



볼록 함수의 정의는 다양하게 표현할 수 있습니다.

- 그래프의 위쪽 영역이 볼록 집합이라면, 볼록 함수
- 두 점 사이의 그래프가 항상 선분 아래쪽에 있다면, 볼록 함수

$$f(ax_1 + (1-a)x_2) \leq af(x_1) + (1-a)f(x_2)$$

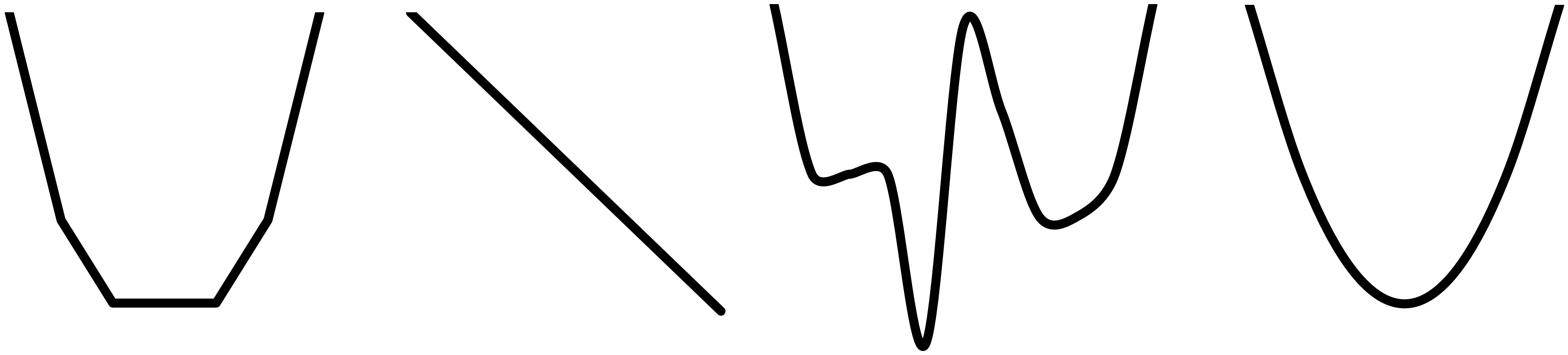
$$with\ 0 \leq a \leq 1, for\ all\ x_1, x_2 \in domain\ f$$

- 흔히 인공지능 분야에서의 **convex optimization**이란, convex function의 최저점을 찾는 과정을 말합니다.
- 특정 모델에서 최적화하려는 function이 convex function인 것을 증명하게 되면, 계산 과정이 간편해질 수 있습니다.

나동빈

Q. Convex function을 구분해보세요.

(a) (b) (c) (d)



Strictly convex function에서는 optimal point가 unique합니다.

- Strictly convex function의 정의

$$f(ax_1 + (1-a)x_2) < af(x_1) + (1-a)f(x_2)$$

$$with\ 0 < a < 1, x_1 \neq \mathrm{x}_2, for\ all\ x_1, x_2 \in domain\ f$$

테일러 전개(Taylor Expansion): 특정 포인트를 기준으로 함수를 근사하는 방법

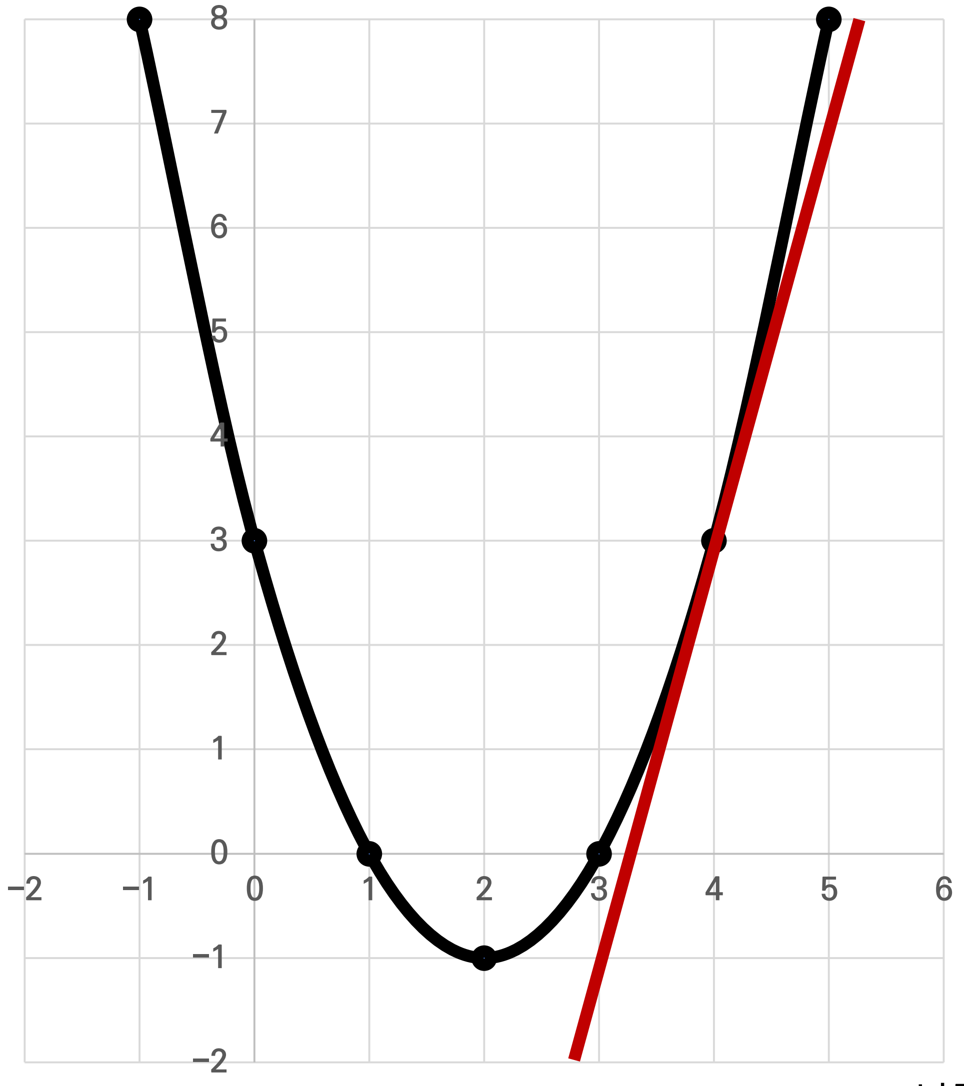
특정 포인트 a에서의 1차 테일러 전개 식은 다음과 같습니다.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$i.e., f(x) = (x - 2)^2 - 1$$

$a = 4$에서의 접선을 구해봅시다.

$$f(x) = 4x - 13$$

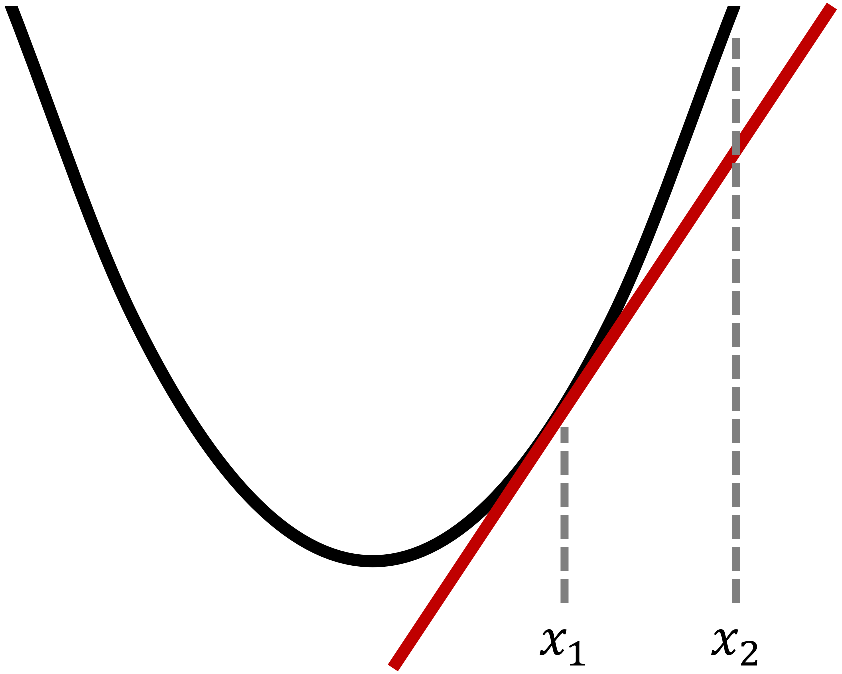


볼록 함수(Convex function)의 특징

특정한 함수가 최소한 한 번 미분 가능할 때, 다음의 명제는 참입니다.

$$f(x)\ is\ convex\ over\ X$$

$$if\ f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)\ for\ all\ x_1, x_2 \in X$$



특정한 함수가 최소한 두 번 미분 가능할 때, 다음의 명제는 참입니다.

$$f(x)\ is\ convex$$

$$if\ f''(x) \geq 0$$