Stetige und diskrete parametrische Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Dr. Mariana Nold

Institut für Soziologie,
Fakultät für Sozial- und Verhaltenswissenschaften,
Lehrstuhl für empirische Sozialforschung und Sozialstrukturanalyse

16. Oktober 2017

Übersicht

Ziel der heutigen Veranstaltung ...

ist es die folgenden Fragen beantworten zu können:

Zielfragen für heute

1. Wie interpretiert man die Normalverteilung als stetige parametrische Wahrscheinlichkeitsverteilung?
2. Was ist die Binomialverteilung?
3. Wie interpretiert man die Parameter der Binomialverteilung?
4. Was bedeuten die Aussagen:

   Die Zufallsvariable X ist normalverteilt.
   Die Zufallsvariable Y ist binomialverteilt.
5. Welche Kenngrößen dienen der Beschreibung von Zufallsvariablen?

Erinnerung: Einfache Zufallsstichprobe und Inferenzschluss

Definition: Einfache Zufallsstichprobe

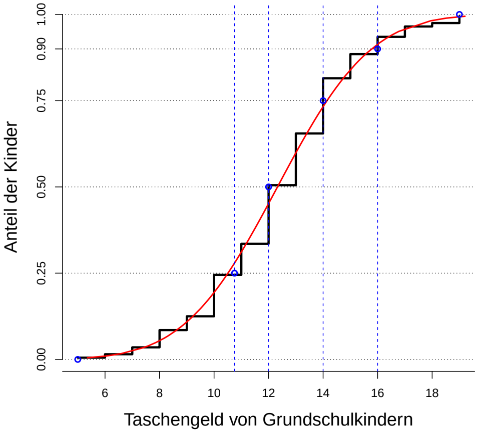
Eine einfache Zufallsstichprobe liegt dann vor, wenn jede der möglichen auf diese Weise gezogenen Stichproben vom Umfang n aus einer Grundgesamtheit vom Umfang N die gleiche Chance hat aufzutreten.

1. Nur bei Realisierung einer Zufallsauswahl kann von einer Stichprobe **mit kontrollierter Irrtumswahrscheinlichkeit** auf die zugrundeliegende Grundgesamtheit zurückgeschlossen werden.
2. Dieser auch **Inferenzschluss** bezeichnete Rückschluss von Eigenschaften der Stichprobe auf Eigenschaften der Grundgesamtheit ist Gegenstand der induktiven Statistik.
3. Ein Inferenzschluss ist stets mit Unsicherheit behaftet. Dies ergibt sich zwingend daraus, dass nur eine Teilinformation zu Verfügung steht.

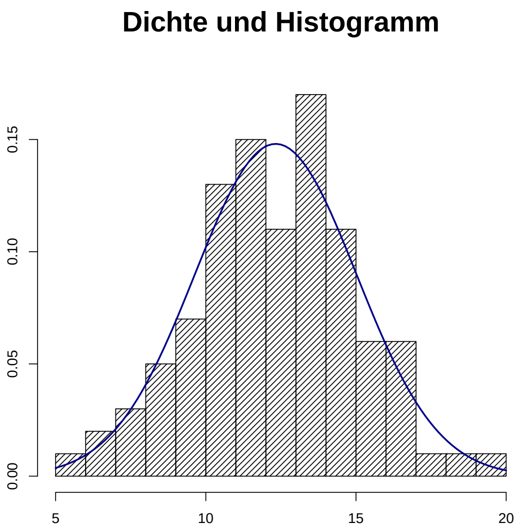
Erinnerung: Fiktive Befragung zum Taschengeld

- Annahme: Bei der fiktiven Stichprobe von 100 Grundschulkindern handelt es sich um eine einfache Zufallsstichprobe.
- Die nächsten Folien sind aus der letzten Vorlesung und zeigen das Ergebnis.
- Wir wollen einen Inferenzschluss ziehen. Das heißt wir wollen eine Aussage machen, die sich auf alle N Grundschulkinder in Jena bezieht.
- Wir gehen davon aus, dass sich die Normalverteilung eignet, um die Verteilung in der Grundgesamtheit zu beschreiben.
- Wir nennen die entsprechenden Parameter μ_G und σ_G.

Grafische Darstellung: Empirische Verteilungsfunktion und beschreibende Verteilungsfunktion



Grafische Darstellung: Histogramm und deskriptive Normalverteilung



Erinnerung: Ergebnis der fiktiven Erhebung in Zahlen

Wir haben die fiktive Erhebung zum Thema Taschengeld abgeschlossen und wollen herausfinden, ob sich die Normalverteilung eignet um die Daten zu beschreiben.

- Ist die beobachtetet Verteilung der Daten symmetrisch?
  - Mittelwert: $\bar{x} = 12.33$, Median (= 50% Quantil): $\tilde{x} = 12,34$
  - 1. Quartil (= 25% Quantil): $x_{0.25} = 10.52$
  - 3. Quartil (= 75% Quantil): $x_{0.75} = 14.07$
  - Minimum: 5.36 und Maximum: 19.2
- Sprechen die Lagemaße für eine symmetrische Verteilung?
- Grafische Verfahren werden genutzt um einen Eindruck von den Daten zu bekommen. Wir setzen $\mu \equiv \hat{\mu} = \bar{x} = 12.33$ und $\sigma^2 \equiv \hat{\sigma}^2 = 7.26$.
- Das Zeichen $\equiv$ bedeutet, dass wir für den Modellparameter einen bestimmten Wert einsetzen.

Die Normalverteilung

- Wenn wir eine symmetrische Verteilung beobachtet haben, haben wir die Normalverteilung genutzt um die Daten zu approximieren
  - Entweder indem wir die Dichte durch das Histogramm der Daten legen oder
  - indem wir die Verteilungsfunktion durch die empirische Verteilungsfunktion der Daten legen.
- Wenn wir für die Parameter μ und σ bestimmte Werte festlegen, sind damit sowohl die Dichte als auch die Verteilungsfunktion bestimmt.

Dichte als auch die Verteilungsfunktion ...

sind zwei verschiedene Möglichkeiten die sich entsprechen. Wenn man eins von beiden festlegt, ist auch das andere bestimmt.

Die Parameter schätzen

- Wenn wir die Parameter

$$\mu_G := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

und

$$\sigma_G := \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_G)}$$

kennen, dann kennen wir die Verteilung in der Grundgesamtheit.

- Wir kennen diese Parameter nicht und nutzen Verfahren um diese Parameter zu schätzen.
- Wichtig ist, dass wir die mit dieser Vorgehensweise verbundene Unsicherheit quantifizieren können.

Erinnerung: Zufallsvariable

Ein ganz zentraler Begriff in diesem Semester ist der der Zufallsvariable:

Definition: Zufallsvariable

Eine Variable oder ein Merkmal X, dessen Werte oder Ausprägungen die Ergebnisse eines Zufallsvorgangs sind, heißt Zufallsvariable X. Die Zahl x, die X bei der Durchführung eines Zufallsvorgangs annimmt, heißt Realisierung oder Wert von X

Für unser Beispiel definiere ich die Zufallsvariable X :

$$X := \text{Höhe des Taschengeld von Grundschulkind aus Jena in Euro}$$

Eine typisches Aufgabe in der Statistik

1. Wir machen die Annahme das die Zufallsvariable X

   $X =$ Höhe des Taschengeld von Grundschulkind aus Jena in Euro

   in der Grundgesamtheit normalverteilt ist. Diese Verteilung wird in der Grundgesamtheit festgelegt durch die Parameter μ_G und σ_G.
2. Wir wollen diese Parameter durch Zahlen schätzen und so eine Aussage über die Grundgesamtheit machen.
3. Wir sagen: Wir schätzen die Parameter der Verteilung der Zufallsvariable X.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung

Definition: Wahrscheinlichkeitsverteilung

Ein Modell, welches das Verhalten einer Zufallsvariable vollständig beschreibt, nennt man Wahrscheinlichkeitsverteilung oder kurz Verteilung der betreffenden Zufallsvariable.

- Wenn im obigen Beispiel μ_G und σ_G bekannt sind, ist jede Wahrscheinlichkeit bekannt. Eben das bedeutet es, dass das Verhalten der Zufallsvariable vollständig beschrieben ist.
- Es ist z. B. möglich die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass ein Kind höchstens zehn Euro Taschengeld bekommt.

Zwei Parameter genügen

Zur vollständigen Beschreibung des Verhaltens einer normalverteilten Zufallsvariablen X genügt es, ihre beiden Parameter μ und σ zu kennen.

Das Verhalten einer Zufallsvariable

Verteilung einer Zufallsvariable

Die Begriffe "Verhalten einer Zufallsvariable" und "Verteilung einer Zufallsvariable" sind gleichbedeutend. Sie legen das probabilistische Gesetz des entsprechenden Zufallsvorgangs fest.

Diesen wichtigen Zusammenhang werde ich an eignen Beispielen verständlicher machen.

Definition: Zufallsvorgang

Ein Zufallsvorgang führt zu einem von mehreren, sich gegenseitig ausschließenden Ergebnissen. Es ist vor der Durchführung ungewiss, welches Ergebnis tatsächlich eintreten wird.

Beispiel: Befragung nach dem Taschengeld

- Die Befragung von Kindern nach ihrem Taschengeld ist ein Zufallsvorgang.
- Wir bezeichnen diesen Vorgang mit einer Zufallsvariable X.
- Das Verhalten dieser Zufallsvariable wird beschrieben durch Wahrscheinlichkeiten mit denen bestimmte Ereignisse im Zufallsvorgang eintreten.
- Wenn man die Verteilung in der Grundgesamtheit kennt und eine einfache Zufallsstichprobe zieht, dann ist das Verhalten der Zufallsvariable X vollständig bekannt.
- Für die obigen Daten, kenne ich die Verteilung und damit das Verhalten der Zufallsvariable X.

Was möchten Sie wissen?

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...

- die ersten drei Kinder die befragt werden in der Summe weniger als 33 Euro Taschengeld bekommen?
- 28.19%
- Die ersten zwei befragten Kinder jeweils höchstens 12 Euro Taschengeld erhalten?
- 25%
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert einer Stichprobe von 10 Kindern mindestens den Wert 10 hat?
- 98.25%

Die stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine Zahl hat immer die Wahrscheinlichkeit Null

Es ist eine Eigenschaft von stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen, dass eine konkrete Zahl mit Wahrscheinlichkeit Null auftritt.

- Man kann eine Zahl beliebig genau angeben, wenn die Zahl Realisation einer stetigen Zufallsvariable ist.
- Daher macht es bei stetigen Variablen keinen Sinn, nach der Wahrscheinlichkeit zu fragen, dass genau ein bestimmter Wert angenommen wird.
- Man kann z. B. fragen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Kinder gerundet auf ganze Euro 12 Euro Taschengeld bekommt. Dann fragt man nach dem Intervall $[11.5, 12.5)$.

Stetige und diskrete Zufallsvariablen

Wenn man die Ausprägungen eines Merkmals als Ergebnis eines Zufallsvorgang interpretiert, spricht man das Merkmal als Zufallsvariable an und die Ergebnisse des Zufallsvorgangs als Realisierungen oder Werte der entsprechenden Zufallsvariable.

- Eine Zufallsvariable heißt stetig, wenn gilt: Wenn die Zufallsvariable die Werte a und b annehmen kann, dann kann sie auch jeden Wert zwischen a und b annehmen.
- Bei einer diskreten Zufallsvariable ist die Anzahl der Werte abzählbar. Das heißt man kann sie den natürlichen Zahlen zuordnen. Diese sind $\{1,2,3,\dots\}$
- Insbesondere ist jede Zufallsvariable mit endlich vielen Ausprägungen diskret.

Beispiele für diskrete Zufallsvariablen

- Anzahl der Kinder die 2018 geboren werden.
- Anzahl der SMS die Sie heute bekommen.
- Das Geschlecht einer befragten Person.

Die bekanntesten diskreten Verteilungen sind die

1. Bernoulliverteilung
2. Binomialverteilung
3. Poissonverteilung

Ich möchte Sie mit der Bernoulliverteilung und der Binomialverteilung vertraut machen.
Die Bernoulliverteilung ist ein Spezialfall der Binomialverteilung.

Beispiel: Wie oft trifft ein Basketballer den Korb?

- Ein Basketballer hat zehn versuche auf einen Korb zu werfen.
- Diesen Vorgang können wir als Zufallsvorgang interpretieren.

$$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{Treffer bei } i. \text{ Wurf} \\ 0, & \text{kein Treffer bei } i. \text{ Wurf} \end{cases},$$

  wobei der Index i die Zahlen von 1 bis 10 annehmen kann.
- $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 0$ bedeutet, dass von den ersten drei Würfen nur der zweite ein Treffer war.

Die Zufallsvariable Y ist gleich:

$$Y := \text{Anzahl der Treffer bei 10 Würfen} = \sum_{i=1}^{10} Z_i.$$

Das Verhalten der Zufallsvariable Y

Wenn wir das Verhalten der Zufallsvariable Y kennen, können wir alle Fragen über Ereignisse mit Bezug auf diese Variable beantworten: Wie wahrscheinlich ist es, dass ...

- ... kein einziger Treffer erzielt wird?
- ... genau ein Treffer erzielt wird?
- ... weniger als acht Treffer erzielt werden?
- ... mindestens drei Treffer erzielt werden?

Dieses Beispiel stammt aus dem Abitur 2008 in NRW und ...

Fiasko beim Zentralabitur 2008 in NRW

- In NRW gab es erhebliche Kritik an einer Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitstheorie im Abitur 2008.
- Den Schülerinnen und Schülern wurde sogar angeboten, die Prüfung zu wiederholen.
- Damit Sie verstehen können, was passiert ist, möchte ich Ihnen zunächst die Aufgabenstellung vorlesen und dann das Modell der Binomialverteilung zunächst am Beispiel der Werfens einer Münze einführen.
- Kann man das selbe Modell nutzen, um das Werfen einer Münze und das Werfen eines Basketballers auf einen Korb zu modellieren?
- Man brauch eine Modellebene um Daten zu analysieren und eben bei der Wahl der Modellierung für diese Modelleben kann auch viel schief gehen.

Was soll ein Modell leisten?

- Die soziale Wirklichkeit wird von probabilistischen Gesetzen bestimmt.
- Die Verteilung der Zufallsvariable ist ein **Modell**, welches das Verhalten der entsprechenden Zufallsvariable vollständig beschreibt.
- Es geht nicht darum, die Wirklichkeit in einem Modell abzubilden.

All models are wrong, but some are useful (Zitat von G. Box)

Now it would be very remarkable if any system existing in the real world could be exactly represented by any simple model. ... For such a model there is no need to ask the question “Is the model true?”. If “truth” is to be the “whole truth”the answer must be “No”. The only question of interest is “**Is the model illuminating and useful?**”.

Was kann ein Modell leisten?

"The most that can be expected from any model is that it can supply a useful approximation to reality: **All models are wrong, some models are useful**"

Abbildung: George Box, ⋆1919- †2013

Die Binomialverteilung am Beispiel Münzwurf

Wir Beginnen mit dem Werfen einer Münze und lernen das Modell der Binomialverteilung kennen.

- Nehmen Sie eine Münze und Werfen Sie diese zehn mal.
  Wir legen fest: Treffer=Zahl
- Es sei

$$\tilde{Z}_i = \begin{cases} 1, & \text{Treffer bei } i\text{. Münzwurf} \\ 0, & \text{kein Treffer bei } i\text{. Münzwurf} \end{cases},$$

- Notieren Sie das Ergebnis der Zufallsvariable

$$\tilde{Y} := \text{Anzahl der Treffer bei 10 Münzwürfen} = \sum_{i=1}^{10} \tilde{Z}_i$$

und heben Sie den Zettel auf.

Die Verteilung der Zufallsvariable $\tilde{Z}_i$

Zwei zentrale Eigenschaften:

1. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer ist 50%.
2. Die einzelnen Münzwürfe sind unabhängig, d. h. wenn Sie beim ersten Wurf einen Treffer hatten, hat es keinen Einfluss auf den zweiten Wurf.

- Mit Gesetzen der Wahrscheinlichkeitstheorie lässt sich damit die Verteilung von $\tilde{Y}$ herleiten. Man nennt sie Binomialverteilung.
- Die Verteilung der Zufallsvariablen $\tilde{Z}_i$ ist jeweils identisch (also $\tilde{Z}_1$ hat die selbe Verteilung wie $\tilde{Z}_2$ und wie $\tilde{Z}_3 \ldots$). Sie heißt Bernoulliverteilung.

Die Bernoulliverteilung

Definition: Binäre Variable und Bernoulliverteilung

Es sein ein Ereignis mit A bezeichnet. Die Zufallsvariable V

$$\tilde{V} = \begin{cases} 1, & \text{falls } A \text{ eintritt} \\ 0, & \text{falls } A \text{ nicht eintritt} \end{cases},$$

kann die Werte $\{0, 1\}$ annehmen und indiziert, ob A eintritt oder nicht.
Sie heißt **binäre Variable.**
Wenn die Wahrscheinlichkeit dass A eintritt mit p bezeichnet wird, also $\mathbb{P}(A) = p$, so folgt

$$\mathbb{P}(V = 1) = p, \ \ \mathbb{P}(V = 0) = 1 - p.$$

Diese heißt Bernoulliverteilung. Man schreibt:

$$V \sim Be(p)$$

Die Binomialverteilung

Definition: Binomialverteilung

Wenn man ein Zufallsvariable U auffassen kann als die Summe von n unabhängig und identisch Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen V_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, dann nennt man die Verteilung dieser Zufallsvariable Binomialverteilung. Man schreibt:

$$U \sim Bin(n, p)$$

In Formelsprache:

$$V_i \sim Be(p), iid, i \in \{1, \ldots n\}$$

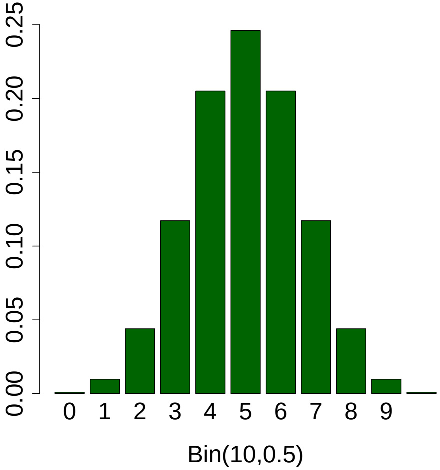
$$U := \sum_{i=1}^{n} V_i.$$

(iid = independent identically distributed)

Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. Dichtefunktion

- Man kann die Verteilung von stetigen und diskreten Zufallsvariablen in mathematischen Formeln aufschreiben.
- Die Formeln sind ein Möglichkeit ein probabilistisches Gesetzt auszudrücken. Man nennt sie Dichte(funktion) oder Wahrscheinlichkeitsfunktion.
- Sie haben bereits die Dichte der Normalverteilung kennengelernt. Allerdings nicht in Form einer mathematischen Ausdrucks sondern grafisch.
- Wir brauchen um die Kernkompetenzen umsetzen zu können, diese mathematischen Ausdrücke nicht.
- Sie sollten allerdings wissen, dass es sie gibt und sie sollten die entsprechenden Grafiken interpretieren können.

Der 10-fache Münzwurf: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...



Wie ist die relative Häufigkeit hier im Hörsaal?

- Bitte werfen Sie ihr Ergebnis in den Korb.
- Ich kann das Histogramm der relativen Häufigkeit erstellen.
- Es sollte der Binomialverteilung ähnlich sein. Der Vergleich erfolgt in er Übung.
- Bitte nutzen Sie den folgenden Link:
  `https://www.geogebra.org/m/CmHJuJxs`
  um die Binomialverteilung kennen zu lernen.

Für welche realen Mechanismen ist die Binomialverteilung ein gutes Modell?

- Es gibt zwei Parameter n und p.
- Man nennt n die Anzahl der Versuche und p die (Treffer-)Wahrscheinlichkeit.
- Man stellt sich n unabhängige binäre Variablen vor, die summiert werden.
- Beispiele:
  - Wenn man 20 Personen (jeweils einzeln) fragt, ob sie die Grünen bei einer Bundestagswahl wählen würden. Wie ist p hier zu interpretieren?
  - p: Anteil der Personen, die die Grünen wählen würden.
  - Treffer wenn eine Person 10 mal auf einen Basketballkorb wirft und man annimmt, sie trifft mit 20% und zwar unabhängig.

Die Aufgabenstellung:

Wir wollen die Aufgabe nicht lösen, sondern überlegen, ob die Binomialverteilung hier anwendbar ist.

Die Aufgabenstellung: E-Book von H.-J. Mittag S. 175

Der deutsche Basketball-Profi Dirk Nowitzki spielte in der amerikanischen Profiliga beim Club Dallas Mavericks. In der Saison 2006/07 erzielte er bei Freiwürfen eine Trefferquote von 90.4%. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er

(1) genau 8 Treffer bei 10 Versuchen erzielt,

(2) höchstens 8 Treffer bei 10 Versuchen erzielt,

(3) höchstens viermal nacheinander bei Freiwürfen erfolgreich ist.

Einige Kritikpunkte an der Aufgabenstellung

- Die Analogie zwischen Freiwurf und Münzwurf liegt auf der Hand: Es sind binäre Merkmale
- Identische Verteilung: Beim Münzwurf bleibt die Wahrscheinlichkeit dafür Zahl zu werfen, von Wurf zu Wurf konstant. Trifft das auch auf den Freiwurf beim Basketball zu?
- Beim Münzwurf sind die Würfe unabhängig, gilt das auch beim Freiwurf?
- Beim Münzwurf lässt sich die Trefferwahrscheinlichkeit von 0.5 aus physikalischen Gründen als beständig ansehen. Gilt das auch für die Trefferquote von 90.4% ?
- Der Teil (3) der Aufgabenstellung ist unvollständig und daher nicht lösbar. Hier fehlt die Anzahl der Versuche n.

Welches Modell eignet sich?

An der Aufgabe lässt sich verdeutlichen, wie wichtig es ist, zwischen empirischen Befunden (Datenebene) und Modellansätzen zur approximativen Beschreibung solcher Befunde (Modellebene) zu unterscheiden.

Es wird auch deutlich: Es ist ein Unterschied, ob man Daten die vorliegen beschreibt, oder ob man beruhend auf diesen Daten eine Vorhersage machen möchte, für zukünftige Ereignisse.

Man kann darüber diskutieren, ob sich das Modell der Binomialverteilung hier als nützlich erweist. (Äll models are wrong, some models are useful")

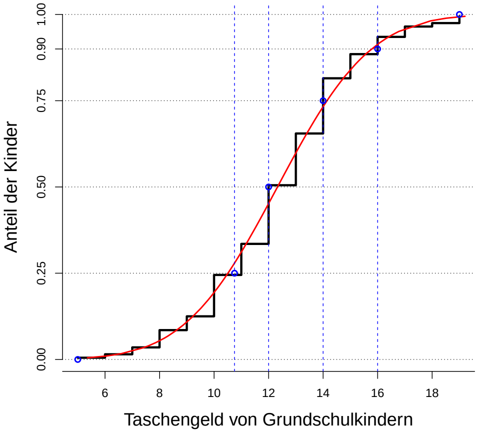
Daten- und Modellebene

Zwischen empirischen Verteilungen von Merkmalen (Häufigkeitsverteilungen) und theoretischen Verteilungen von Zufallsvariablen gibt es zentrale Analogien.

Wichtig ist die Unterscheidung beider Konzepte, also Daten- und Modellebene.

Verteilungen von Zufallsvariablen sind als Modelle zu verstehen, die oft gut geeignet sind, **Strukturen und Gesetzmäßigkeiten,** die großen Datenmengen zu Grunde liegen können, **zu approximieren.**

Empirische Verteilung und theoretische Verteilung



Kenngrößen für Zufallsvariablen

Wie bei empirischen Verteilungen lassen sich auch bei theoretischen Verteilungen Kenngrößen angeben, die das **Zentrum der Verteilung** beschreiben oder die **Variabilität der Zufallsvariable,** die dieser Verteilung folgt.

- Im letzten Semester hatten wir in der deskriptiven Statistik Lage- und Streuungsmaße verwendet, um empirische Verteilungen zu beschreiben.
- Wen man mit Daten arbeitet beschreibt man die empirische Verteilung.
- Wenn man mit Modellen für Zufallsvariablen arbeitet, beschreibt man die (theoretische) Verteilung.

Wiederholung: Lagemaße in der deskriptiven Statistik

Tabelle: Messniveau und Lagemaße

Zulässige Lagemaße				
Skala	Modus	Median	Quantile	Mittelwert
Nominals.	ja	nein	nein	nein
Ordinals.	ja	ja	ja	jein[1]
Intervalls.	ja	ja	ja	ja
Verhältniss.	ja	ja	ja	ja

[1] Eigentlich nein, aber es gibt Merkmale, die sich als ordinal oder intervallskaliert auffassen lassen.

Wiederholung: Streuungsmaße in der deskriptiven Statistik

Tabelle: Messniveau und Streuungsmaße

Zulässige Streuungsmaße				
Skala	Spannweite	Interquartilsabst.	Varianz	Standardab.
Nominals.	nein	nein	nein	nein
Ordinals.	ja	ja	nein	nein
Intervalls.	ja	ja	ja	ja
Verhältniss.	ja	ja	ja	ja

Lagemaße und Streuungsmaße einer Zufallsvariable

Häufig verwendete Lagemaße der Verteilung einer Zufallsvariable sind:

- der Erwartungswert
- und die (theoretischen) Quantile

Häufig verwendete Streuungsmaße der Verteilung einer Zufallsvariable sind:

- die (theoretische) Varianz
- und ihre Wurzel die (theoretischen) Standardabweichung

Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsvariable wird gebildet indem man die Werte die die Zufallsvariable annehmen kann mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit gewichtet.

Bei stetigen Zufallsvariablen entspricht das mathematisch einer Integration.

Bei diskreten Zufallsvariablen ist die Berechnung sehr ähnlich zur Berechnung des Mittelwertes. Man gewichtet die Ausprägung mit der Wahrscheinlichkeit.

Für das Beispiel 10-facher Münzwurf werden wir uns diese Analogie in der Übung ansehen.

Erwartungswert und Varianz der Normal- und Binomialverteilung

Der Erwartungswert der Normalverteilung entspricht dem Parameter μ. Die Standardabweichung ist σ, die Varianz ist σ^2.

Die Normalverteilung ist durch Angabe von μ und σ eindeutig bestimmt.

Der Erwartungswert der Binomialverteilung entspricht ist $n \cdot p$. Die Standardabweichung ist $n \cdot p \cdot (1 - p)$.