

# 평행선 공준과 비유클리드 기하학

2023년 3월 16일 MIMIC 세미나

# CONTENTS

---

01  
유클리드기하학

02  
구면기하학

03  
쌍곡기하학

04  
가우스의  
놀라운 정리

01

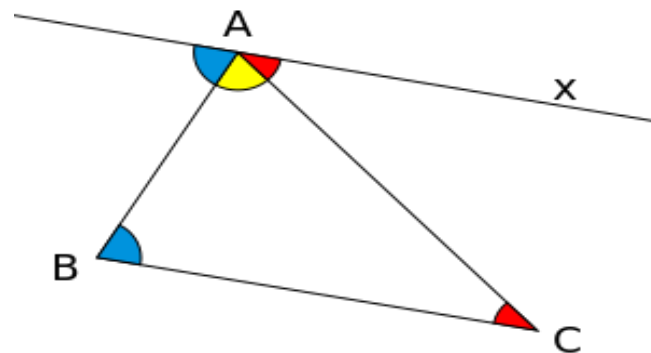
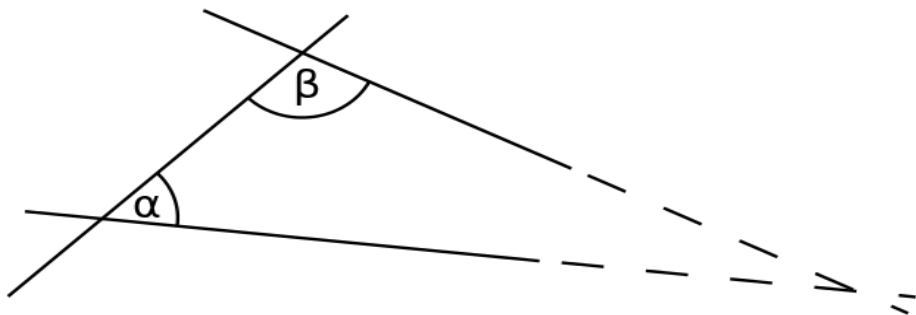
유클리드 기하학

## 01. 유클리드 기하학의 공준

1. 서로 다른 두 점이 주어졌을 때, 그 두 점을 잇는 직선을 그을 수 있다.
2. 임의의 선분은 더 연장할 수 있다.
3. 서로 다른 두 점 A, B에 대해, 점 A를 중심으로 하고 선분 AB를 한 반지름으로 하는 원을 그릴 수 있다.
4. 모든 직각은 서로 같다.
5. 임의의 직선이 두 직선과 교차할 때, 교차되는 각의 내각의 합이 두 직각(180도)보다 작을 때, 두 직선을 계속 연장하면 두 각의 합이 두 직각보다 작은 쪽에서 교차한다. (평행선의 공리, 제5공준)

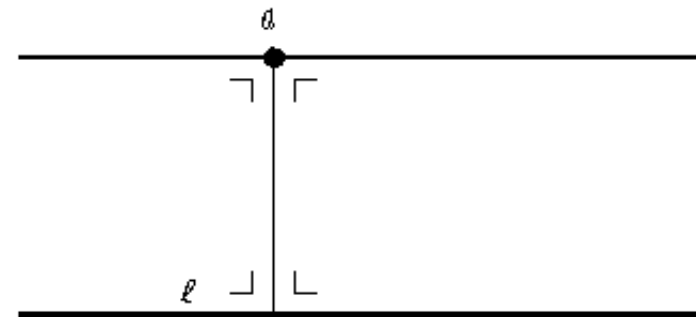
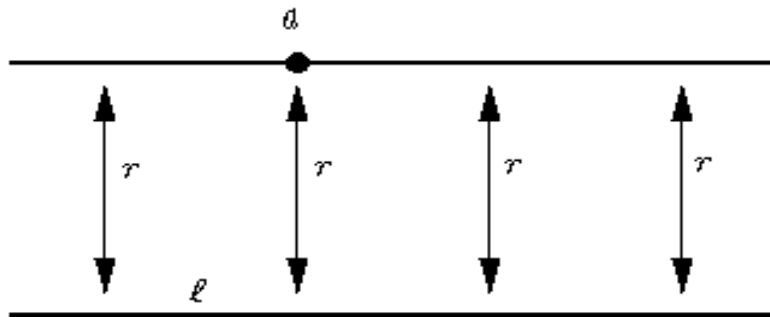
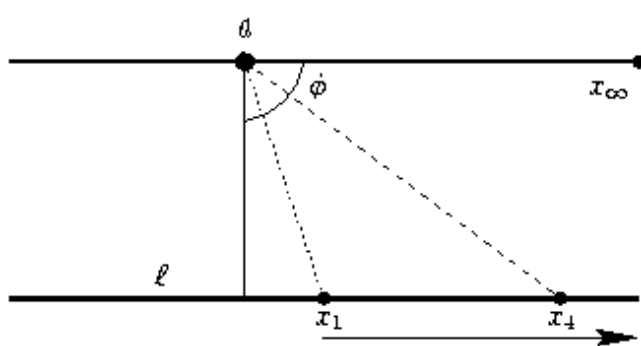
## 01. 평행선 공준

- 임의의 직선이 두 직선과 교차할 때, 교차되는 각의 내각의 합이 두 직각(180도)보다 작을 때, 두 직선을 계속 연장하면 두 각의 합이 두 직각보다 작은 쪽에서 교차한다. (평행선의 공리, 제5공준)
- 주어진 직선 밖 한 점을 지나는, 그 직선의 **평행선**은 많아야 하나 존재한다.
- 모든 삼각형의 내각합은  $180^\circ$ 이다.  $\angle A + \angle B + \angle C - \pi = 0$



## 01.      평행선

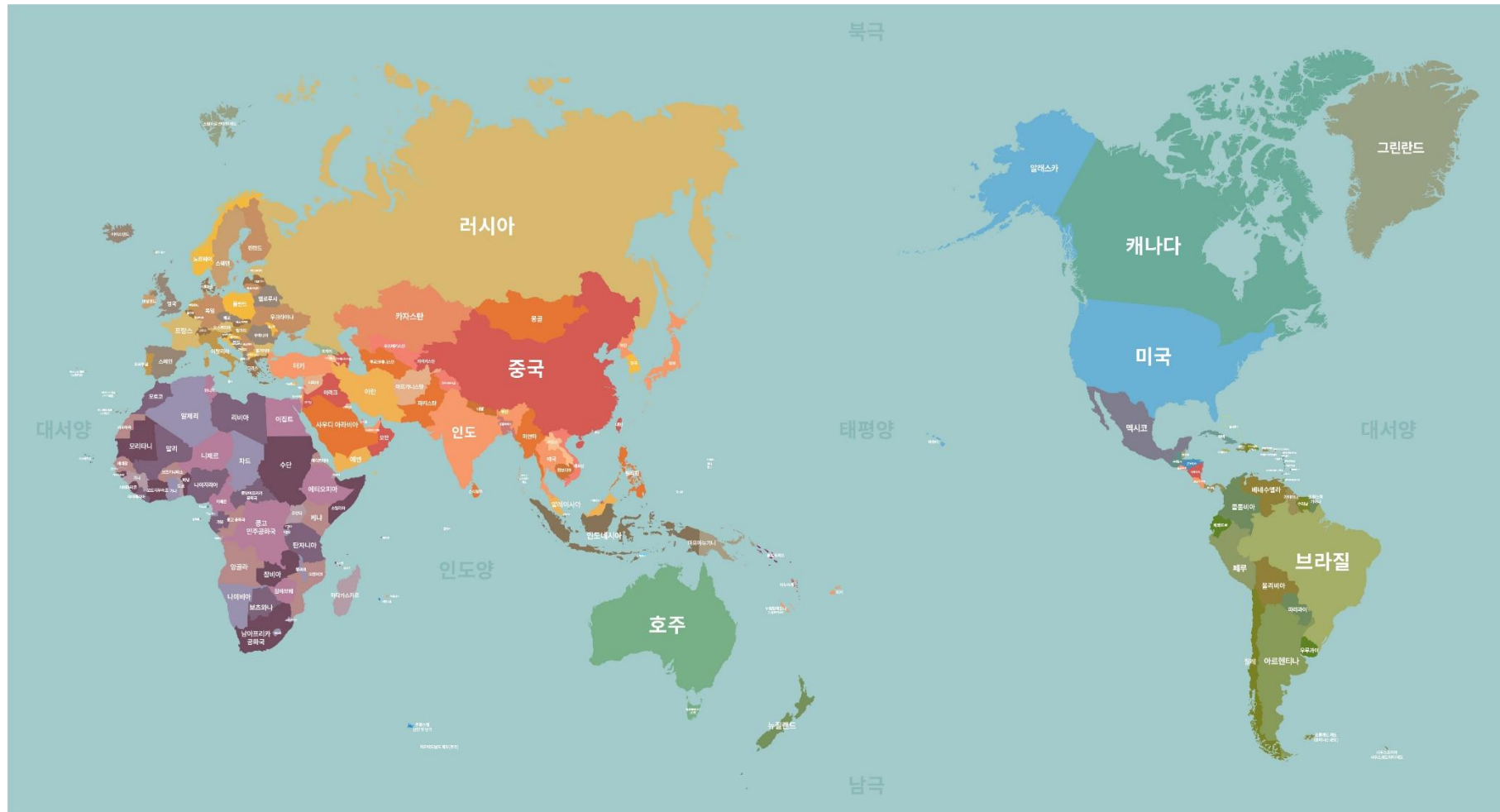
- 두 직선  $l, m$ 이 있을 때 직선  $m$ 이  $l$ 과 한 평면에 있고  $l$ 과 만나지 않으면 두 직선  $l, m$ 은 평행하다.
- 직선  $m$ 의 모든 점은 모두 직선  $l$ 과 같은 최단거리에 존재한다.
- 직선  $l$ 과  $m$ 이 다른 직선  $n$ 과 한 평면에서 교차한다면, 동위각은 합동이다.



02

구면기하학

## 02. 구면기하학



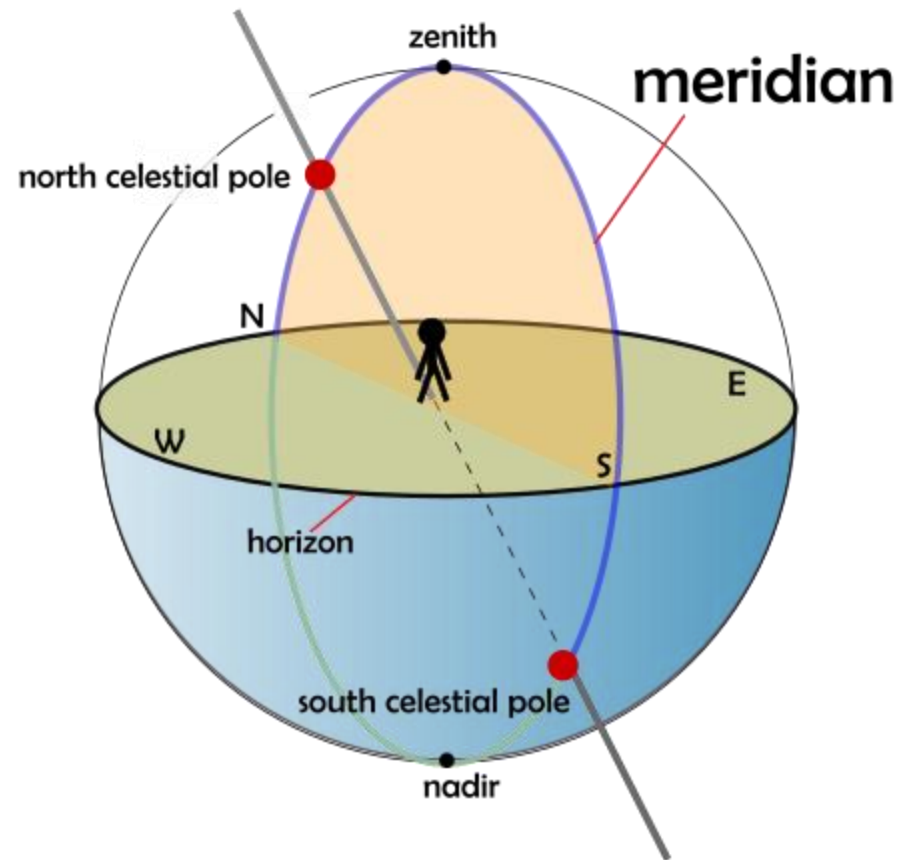


## 02. 구면기하학



02.

## 직선

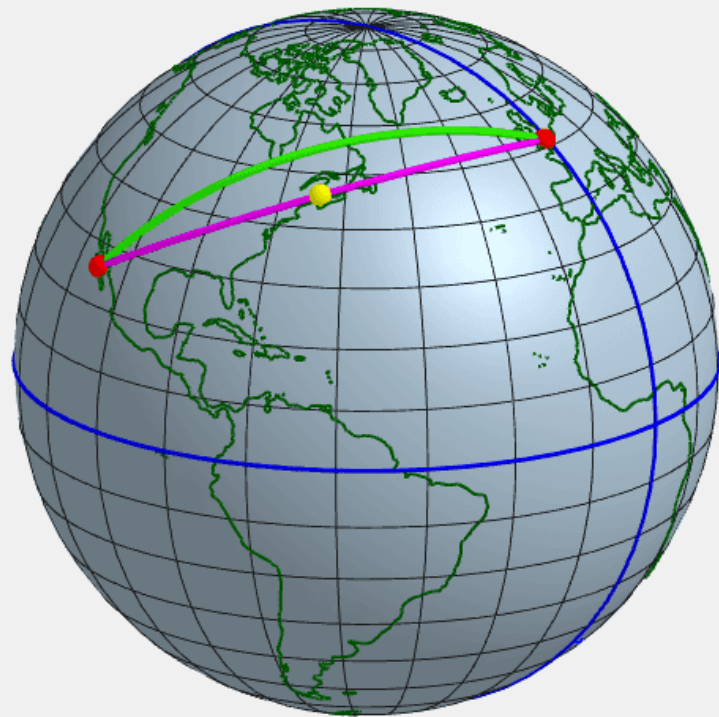


## 02. 최단거리

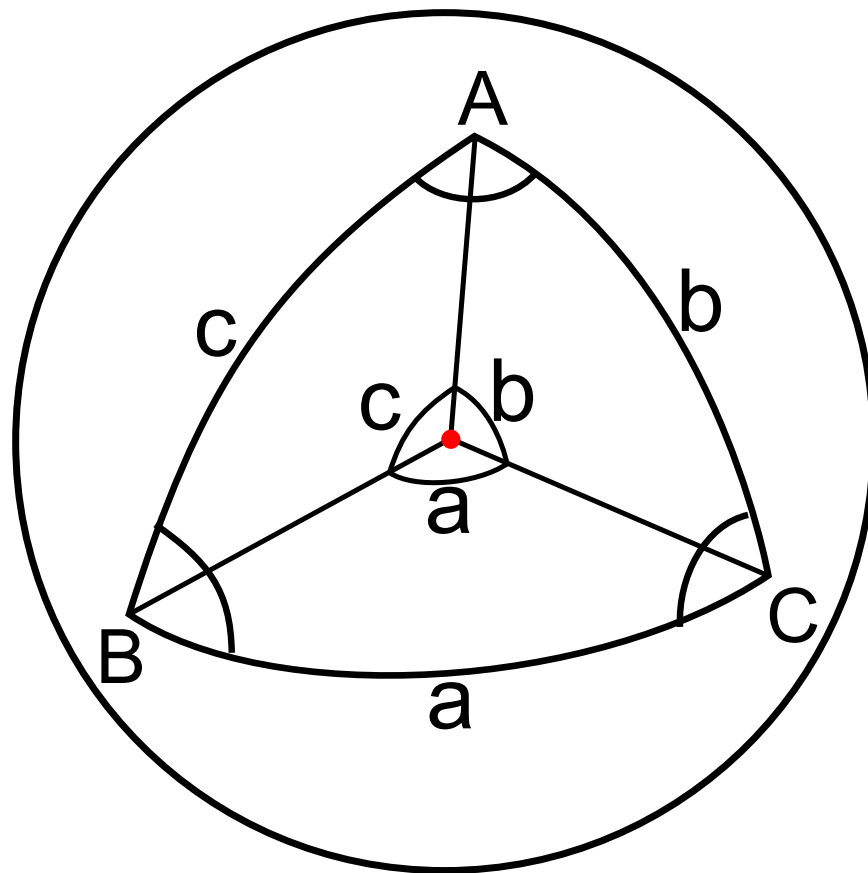
거리 :

녹색 = 9088 km

자주색 = 9309 km

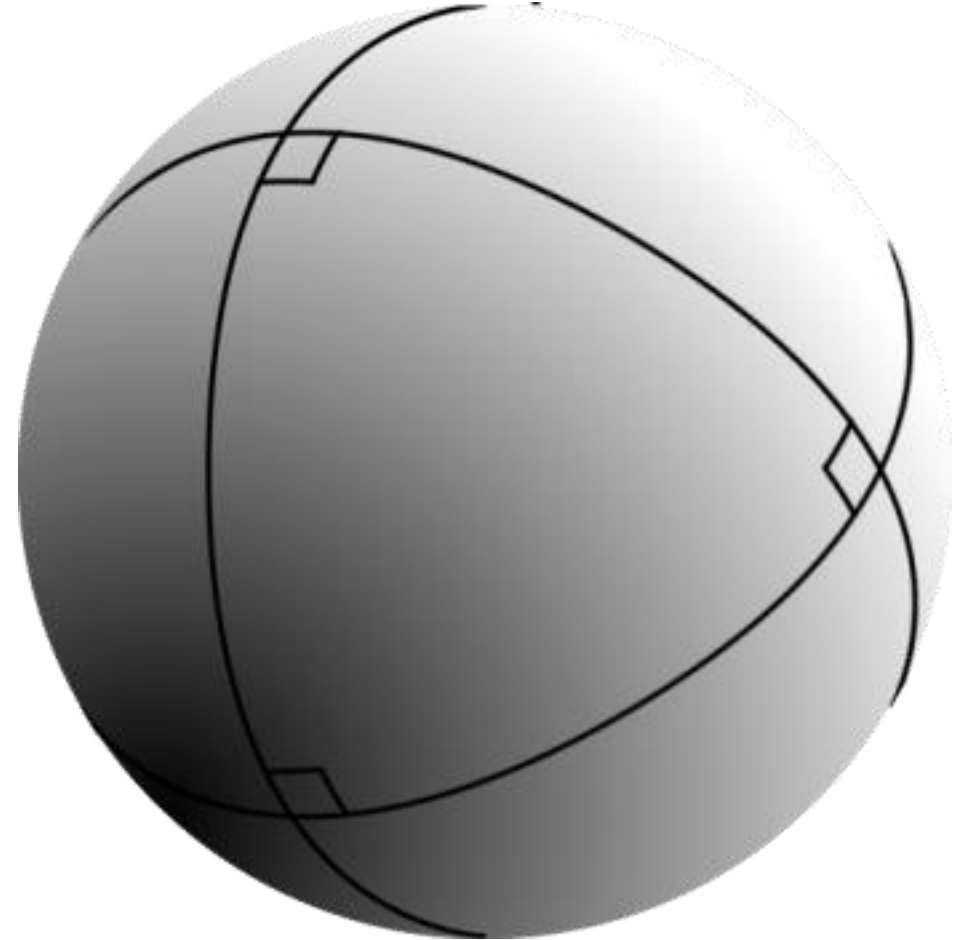


## 02. 삼각형



## 02. 삼각형 내각의 합

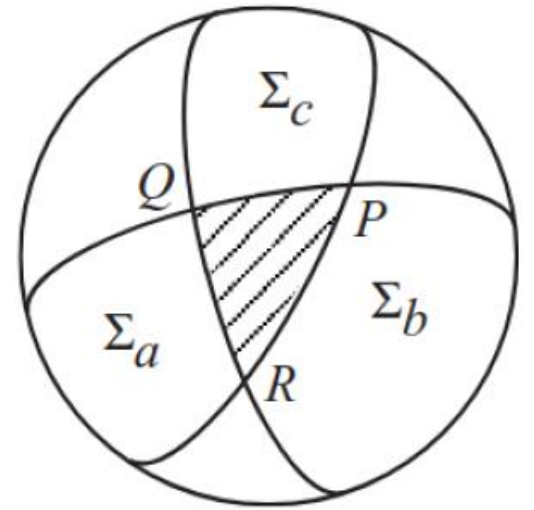
- 삼각형 내각의 합은  $180^\circ$  ??



- No !

## 02. 평행선?

- $\angle P + \angle Q + \angle R - \pi = \text{Area}\Delta PQR > 0$
- 모든 삼각형의 내각합은  $180^\circ$ 이다.  $\angle A + \angle B + \angle C - \pi = 0$
- 주어진 직선 밖 한 점을 지나,  
그 직선의 평행선은 많아야 하나 존재한다.



- 평행선 자체가 존재하지 않는다.

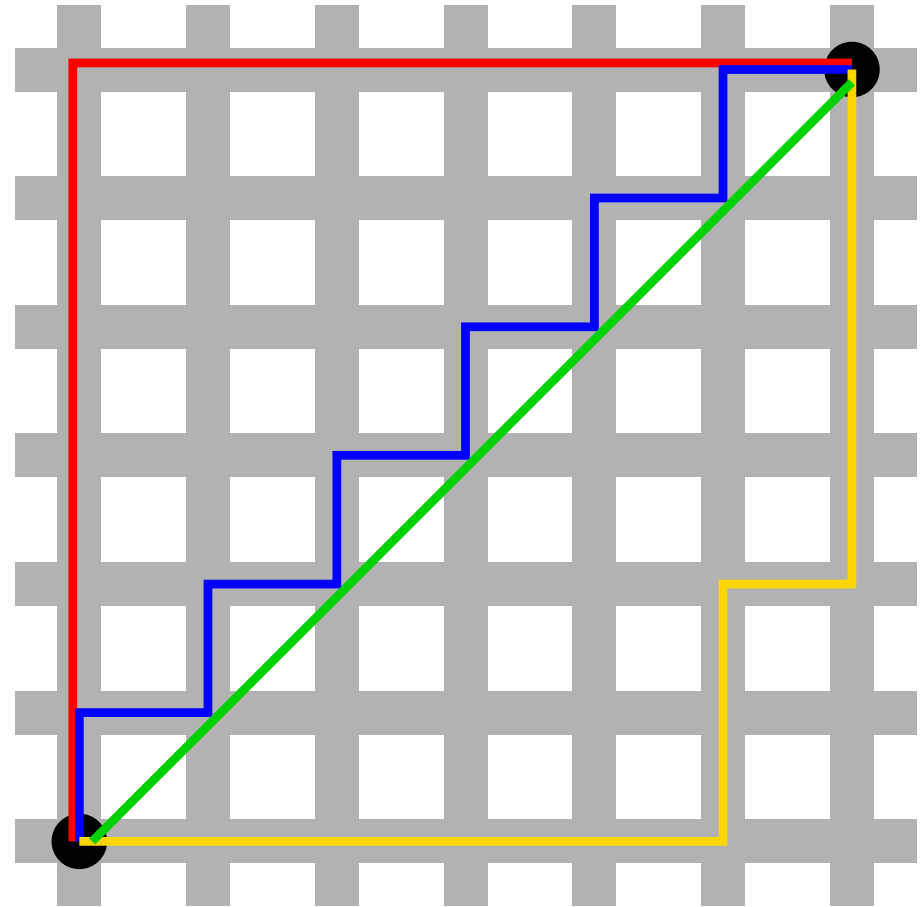
03

쌍곡기하학

### 03. 거리

거리는 항상 피타고라스 정리를 이용해서 잴까?

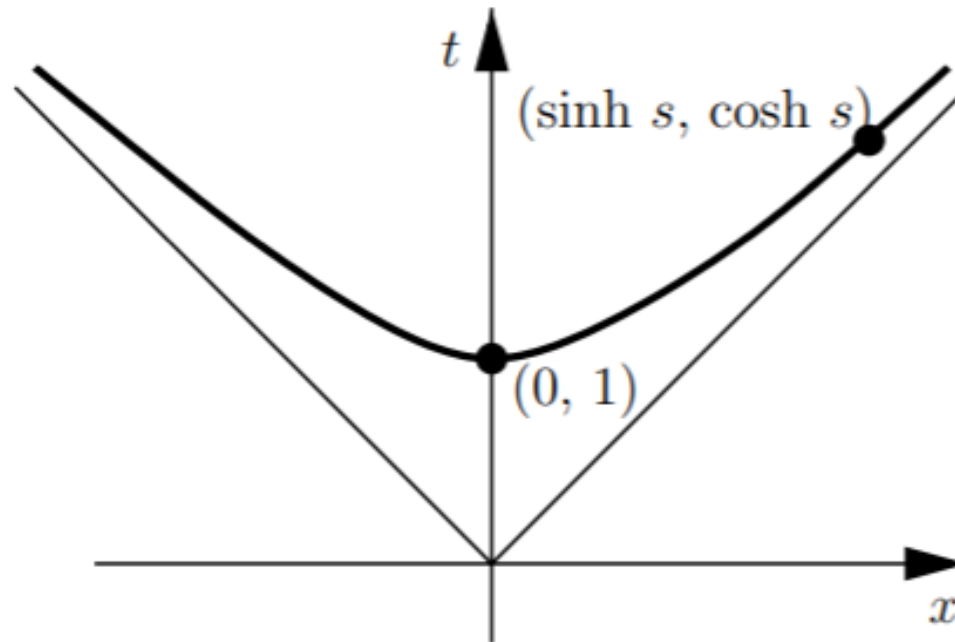
음의 거리는 없을까?



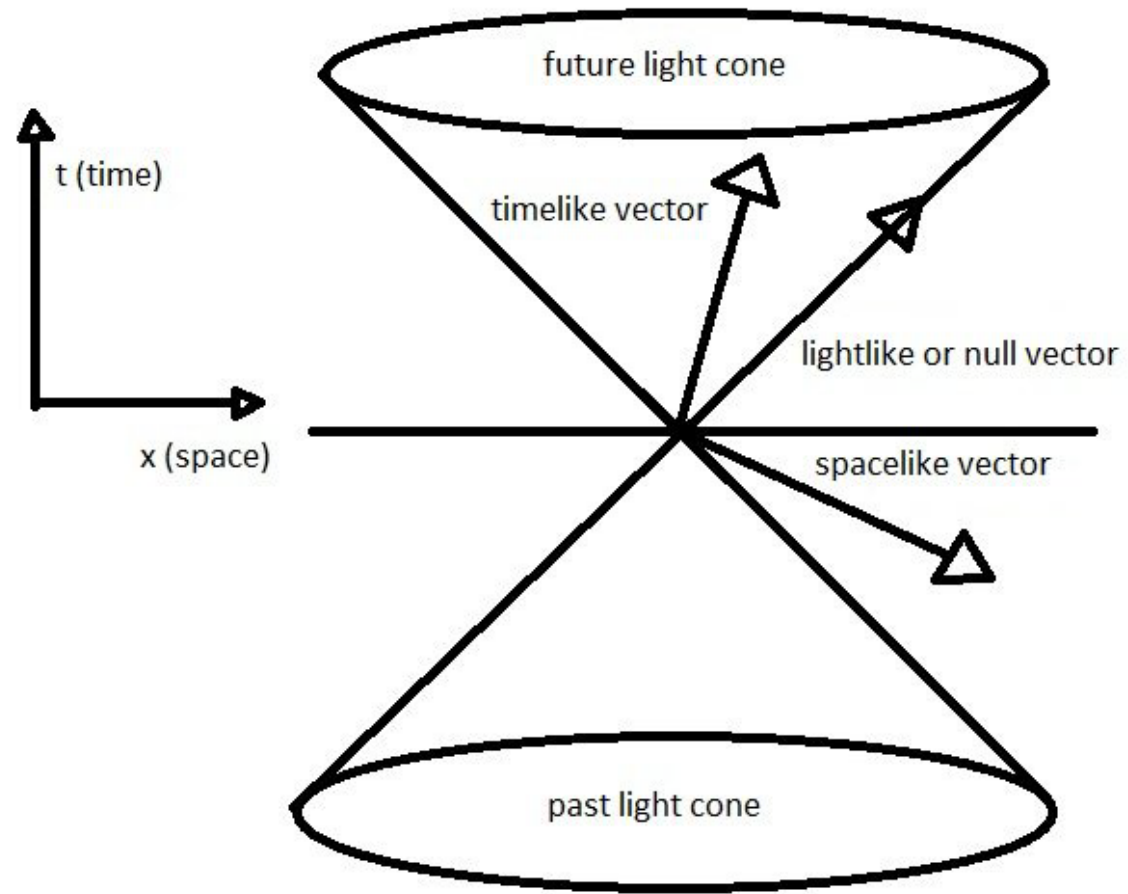


### 03. Lorentz Space

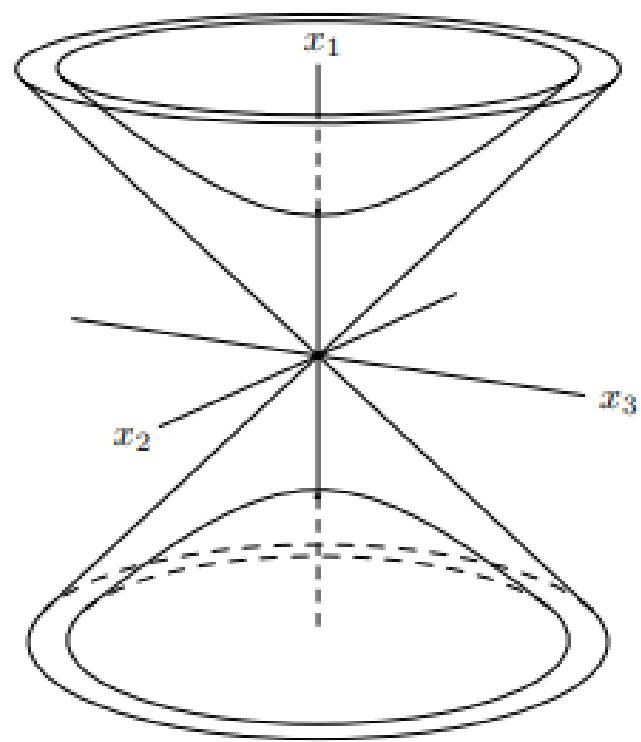
$$-dt^2 + dx^2 = ds^2$$



### 03. Lorentz Space

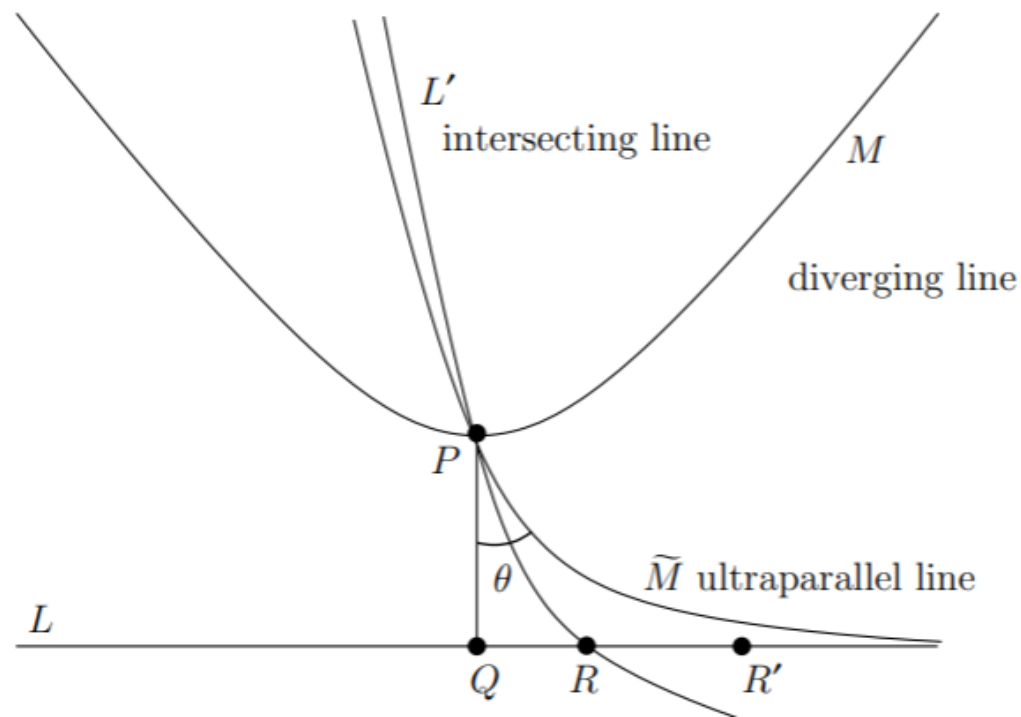


### 03. 직선



### 03. 두 직선의 관계

1. 두 직선은 만난다.
2. 만나진 않지만 공통 수선을 갖는다.
3. 만나지도 공통 수선을 갖지도 않는다.
4. 무한대에서 만난다. (*Ultraparallel*)



### 03. 삼각형 내각의 합

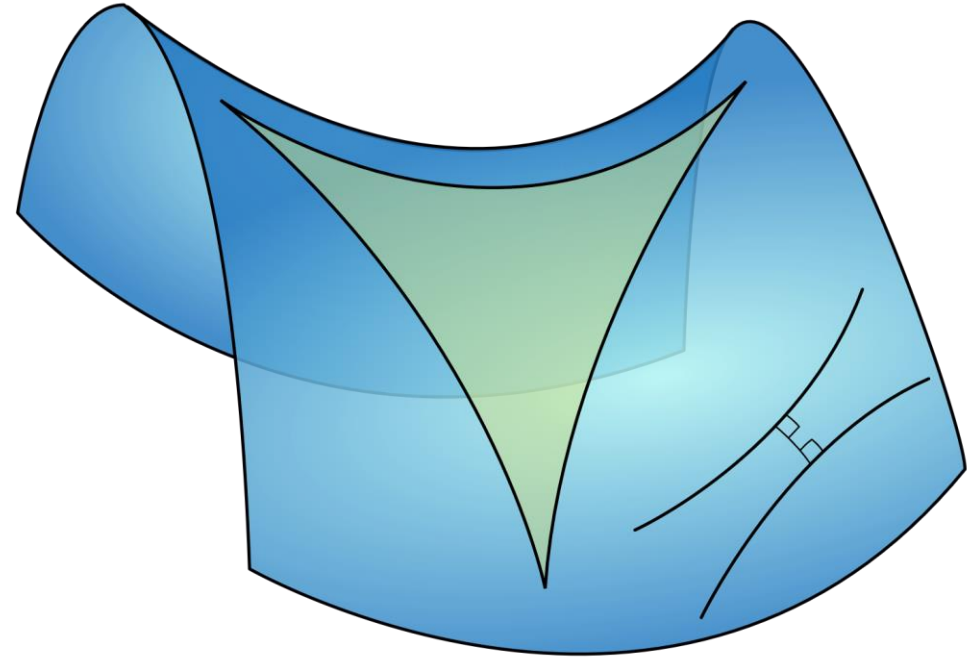
- $\angle P + \angle Q + \angle R - \pi = -Area\Delta PQR < 0$

vs

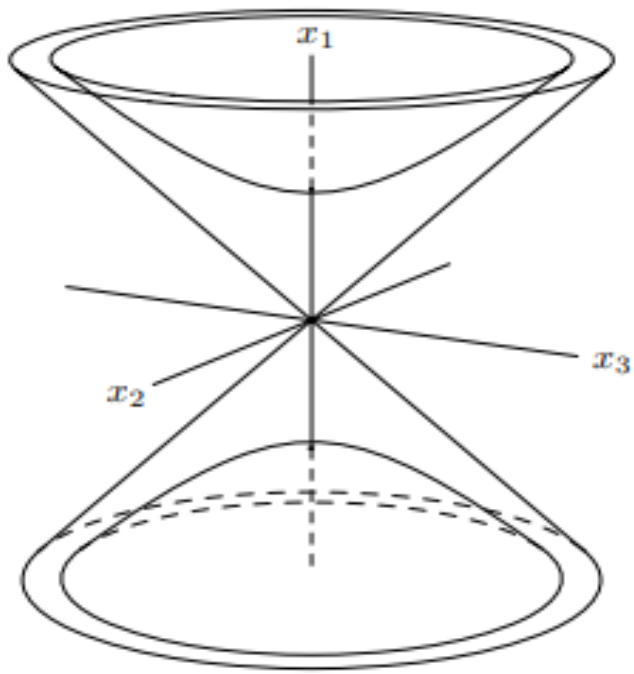
- 모든 삼각형의 내각합은  $180^\circ$ 이다.  $\angle A + \angle B + \angle C - \pi = 0$

- 주어진 직선 밖 한 점을 지나는, 그 직선의 평행선은 많아야 하나 존재한다.

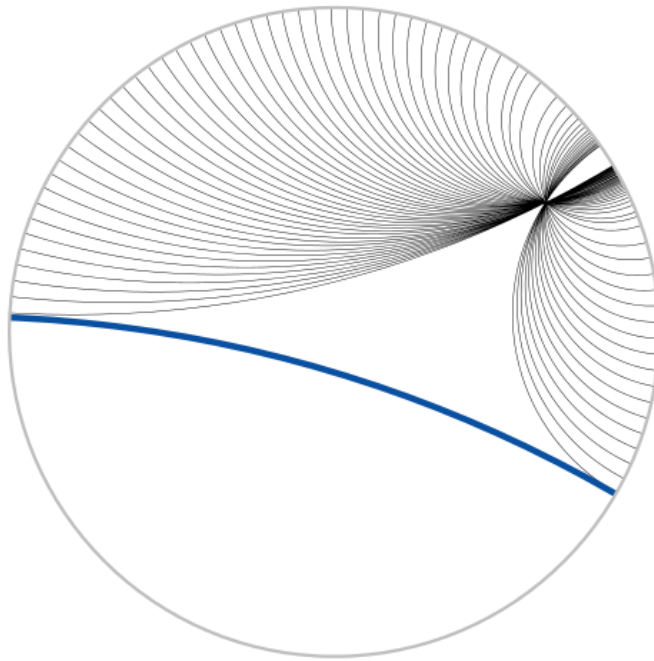
몇 개?



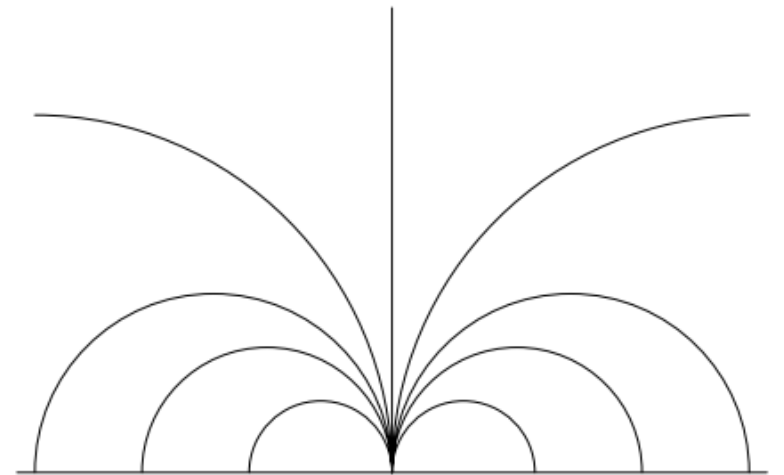
### 03. 쌍곡기하학 모델



Hyperboloid model

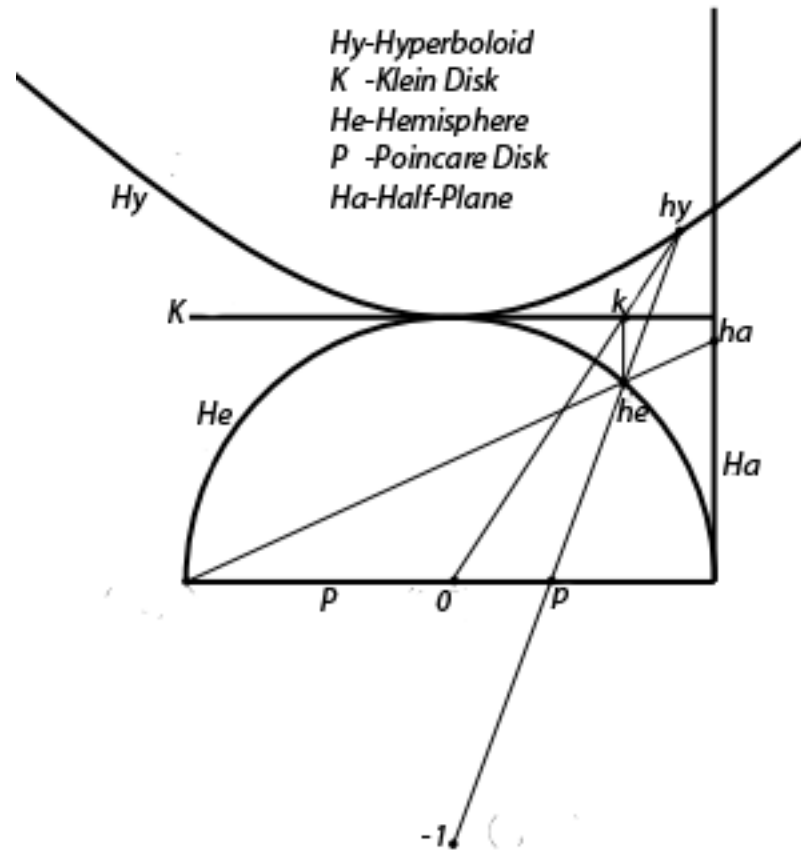


Poincaré disk model



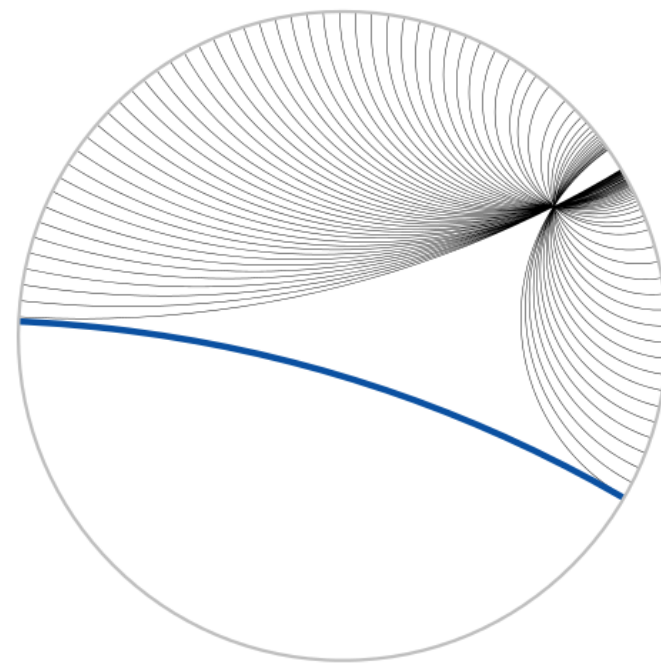
Upper half plane model

### 03. 쌍곡기하학 모델



### 03. Poincaré disk model

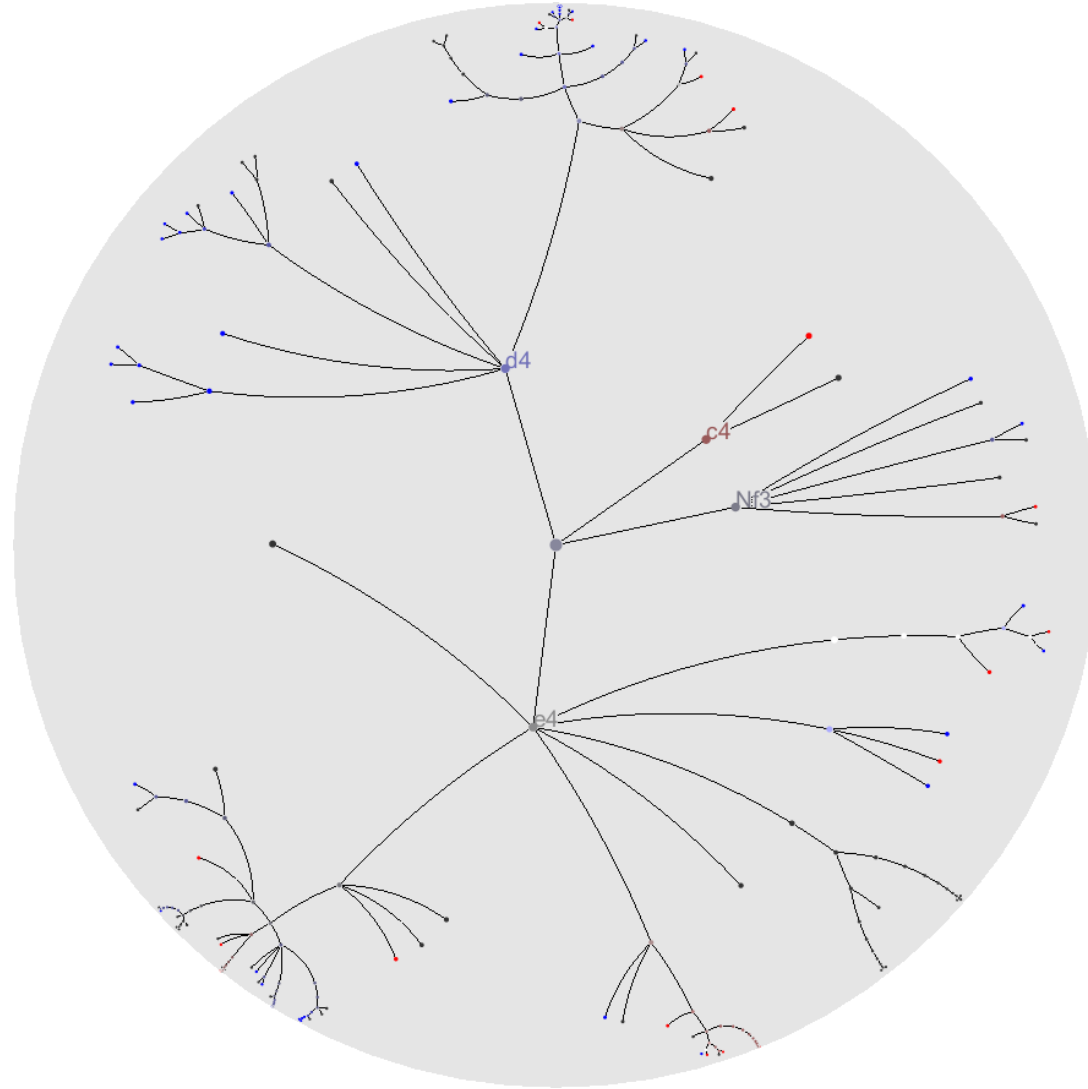
- 점: 열린 원판 위의 점 (경계는 포함하지 않는다.)
- 직선: 원판의 중심을 지나는 직선 또는 원판과 직교하는 원 중 원판의 내부에 속해있는 원호
- 선분: 위에서 정의한 직선의 일부분
- 각: 두 곡선에서 그은 (통상적) 접선이 이루는 각



Poincaré disk model



### 03. 예시



04

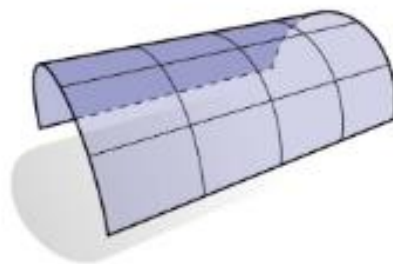
가우스의 놀라운 정리

## 04. 삼각형 내각의 합과 넓이

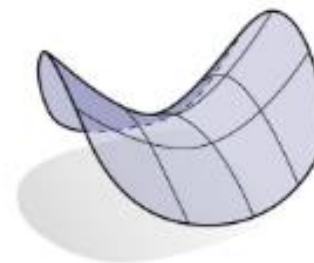
$$K = (\angle P + \angle Q + \angle R - \pi) / \text{Area} \Delta PQR \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{구면기하학} \\ \text{유클리드 기하학} \\ \text{쌍곡기하학} \end{array}$$



$$K > 0$$



$$K = 0$$



$$K < 0$$

## 04. 가우스 곡률

곡률?

## 04. 가우스의 놀라운 정리

가우스 곡률은 등거리변환(isometry)에 대해 불변이다.



Thank you