

1. 진동 모드와 가진원

진동모드는 일반적으로 다음과 같이 표현된다.

$$p_r(\theta_m, t) = P_{mr} \cos(r\theta_m - \omega t) \quad (1)$$

여기서 r 은 진동모드이고, ω 은 진동모드에 대한 각속도, P_{mr} 은 진동모드에 대한 Pressure의 크기 즉, 가진력의 크기이다. 그림 1은 주요 진동모드에 따른 변위를 그림으로 나타낸 것이다.

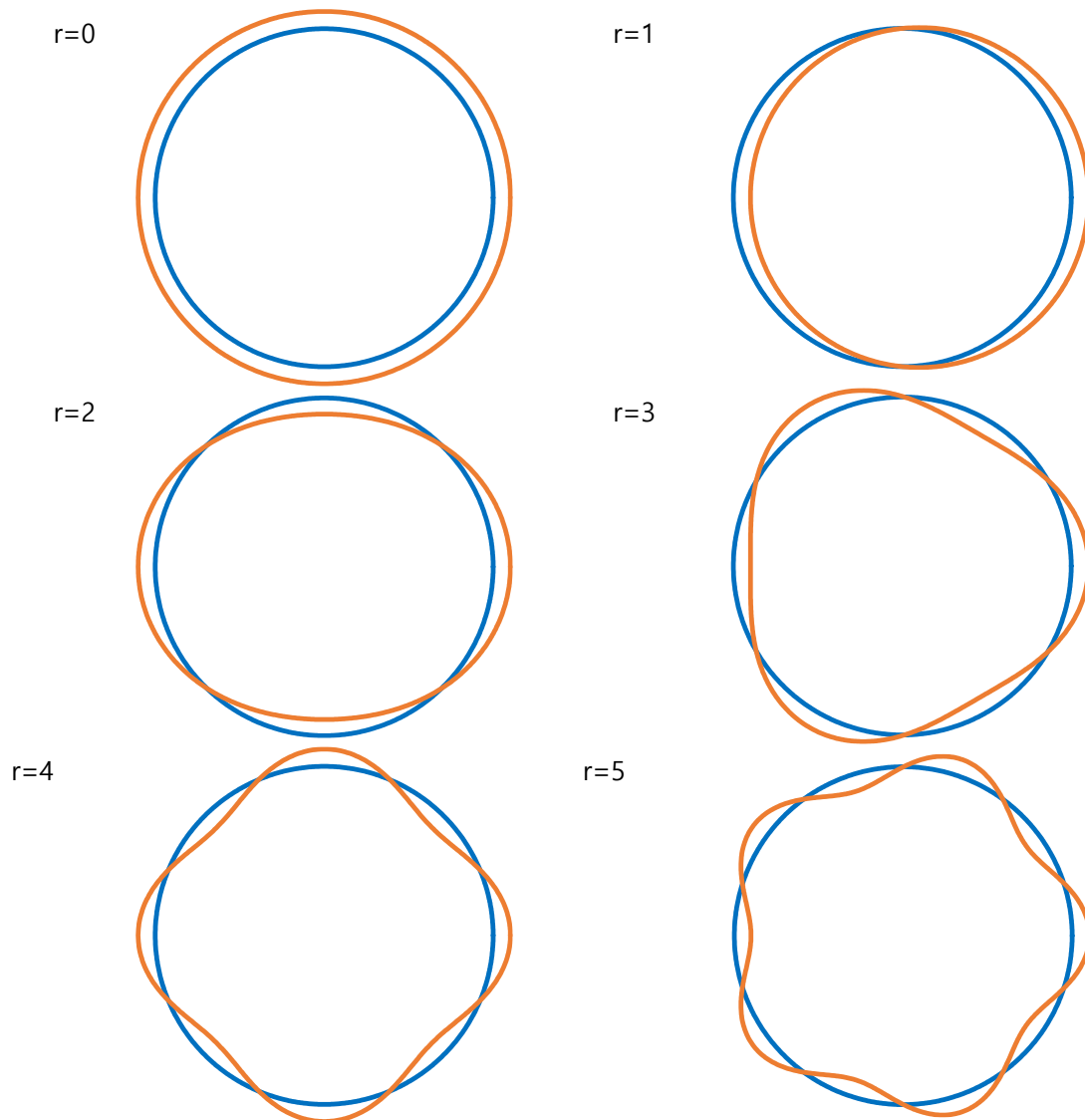


그림 1 진동모드에 따른 변형

고정자에서 순수 원주 진동모드만 따지는 경우, 가진력에 의한 변위 Δd 는 진동모드 r 와 다음과 같은 관련이 있다.

$$\Delta d \propto \frac{1}{r^4} \quad (2)$$

변위는 진동모드의 네제곱에 반비례하므로 낮은 진동모드를 주의 깊게 봐야 한다.

전자기력에 의한 가진원을 이미지화 하기 위해서는 공극 중간에 자석이 존재해서 이 자석이 시간에 따라 회전하는 경우를 떠올려 보자. 자석은 철을 끌어당기는 효과가 있으므로 자극이 센 곳에서는 철을 세게 끌어당길 것이고, 자극이 약한 경우에는 상대적으로 약하게 끌어당길 것이다. 세게 당기는 곳은 상대적으로 큰 변형이 일어날 것이고 약하게 잡아당기는 곳은 상대적으로 적은 변형이 일어날 것이다. 이러한 가상의 자석이 시간에 따라 회전하는 경우를 고려하면, 회전자나 고정자의 특정위치에서의 변형이 시간에 따라 변하게 된다고 생각할 수 있고, 이것이 바로 진동이 되는 것이다.

위에서 언급한 공극 중간에 자석이 존재한다는 것은, 권선과 영구자석에 의해 만들어진 자속을 공극에서 자석으로 형상화 해본 것이다. 권선에 의해 발생하는 자속은 기자력 및 공극의 생김새와 관련이 되고, 영구자석에 의해 발생한 자속은 자극 및 공극의 생김새와 관련이 된다. 공극의 생김새라는 것은 공극형상, 슬롯형상, 영구자석형상, 이심률 등에 영향을 받게 되며 비퍼미언스라고 하는 성분으로 표현된다.

공극에서의 자속 분포를 알 수 있다면, Maxwell stress tensor 법을 이용해 공극에서 단위 면적당 radial magnetic force는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p_r(\theta_m, t) = \frac{1}{2\mu_0} (B_n^2(\theta_m, t) - B_t^2(\theta_m, t)) \quad (3)$$

여기서 B_n 은 공극자속밀도의 반경방향 성분이고 B_t 는 공극자속밀도의 원주방향 성분이다.

고정자와 회전자 철심은 투자율이 공기보다 매우 크기 때문에 공극을 지나는 자속은 대부분 반경 방향으로 지나간다. 즉, $B_n \gg B_t$ 이므로 위 식을 간단히 다음과 같이 써 볼 수 있다.

$$\begin{aligned}
p_r(\theta_m, t) &\approx \frac{B^2(\theta_m, t)}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \left(F(\theta_m, t) \Lambda(\theta_m) + B_{gm}^2(\theta_m, t) \right)^2 \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \left(B_{gw}^2(\theta_m, t) + B_{gm}^2(\theta_m, t) \right)^2 \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \left(\underbrace{B_{gw}^2(\theta_m, t)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{2B_{gw}(\theta_m, t)B_{gm}(\theta_m, t)}_{\textcircled{2}} + \underbrace{B_{gm}^2(\theta_m, t)}_{\textcircled{3}} \right)
\end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $B_{gw}(\theta_m, t)$ 는 고정자 권선에 의해 형성된 공극자속밀도 항이고, $B_{gm}(\theta_m, t)$ 는 계자 자극에 의해 형성된 공극자속밀도이다.

2. 공극자속밀도

앞서 언급한바와 같이 공극자속밀도는 전기자권선과 계자자석에 의해 형성된다. 여기서는 편의상 전기자를 고정자 계자를 회전자로 고려하여 공극자속밀도를 분석하겠다.

2.1. 전기자 권선에 의한 공극자속밀도

권선이 만들어내는 자계를 이해하기 위해서는 우선 기자력에 대한 이해가 필요하다. 기자력에 대해 살펴보기 위해 우선 하나의 코일에 의해 발생된 기자력을 살펴보자. 하나의 코일에 의해 발생된 기자력의 공간적인 분포를 표현하면 그림 2과 같이 나타낼 수 있다.

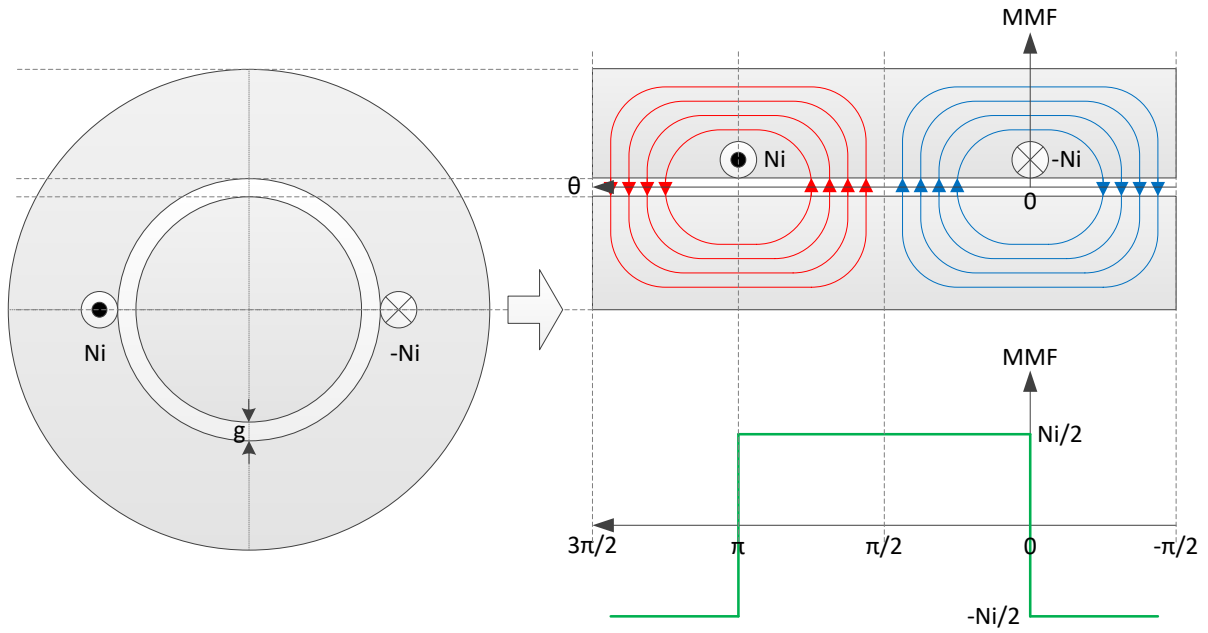


그림 2 코일에 의해 발생하는 MMF
(코일에 의해 발생된 자극의 공간적인 형태)

암페어의 주회법칙에 의해 코일에 의해 형성된 공극에서의 자계는 다음과 같이 써 볼 수 있다.

$$N_c i = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2Hg \quad (5)$$

여기서 공극에서의 자계 \mathbf{H} 는 반경방향 성분만 존재한다고 가정하였고 슬롯효과는 무시하였다.

공극에서의 기자력의 크기는 공극에서의 자계를 반경방향으로 적분한 것이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F_c = \int_g \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Hg = \begin{cases} \frac{N_c i}{2} & \text{where } 0 < \theta_m \leq \pi \\ -\frac{N_c i}{2} & \text{where } \pi < \theta_m \leq 2\pi \end{cases} \quad (6)$$

이제 코일에 의한 공극자속밀도 B_g 는 공극에서의 자계의 세기에 진공의 투자율을 곱하면 된다.

$$B_g = \mu_0 H = F_c \Lambda_g = \begin{cases} \frac{\mu_0}{g} \frac{N_c i}{2} & \text{where } 0 < \theta_m \leq \pi \\ -\frac{\mu_0}{g} \frac{N_c i}{2} & \text{where } \pi < \theta_m \leq 2\pi \end{cases} \quad (7)$$

$$\because \Lambda_g = \frac{\mu_0}{g}, \quad H / m^2$$

여기서 Λ_g 를 비퍼미언스라 부르며 이는 형상에 대한 함수이다.

기자력의 공간적인 분포를 수학적으로 표현하기 위해서는 기자력 파형을 급수형태로 전개해 표현하는 것이 편리하다.

$$F_c = Hg = \frac{N_c i}{2} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} K_n \cos(n\theta_m) \quad (8)$$

여기서 θ_m 은 기계각을 의미한다.

푸리에 급수를 이용해 그림 2의 기자력을 분해해 보면 그림 3과 같이 여러 고조파 성분이 포함되어 있는 것을 알 수 있다.

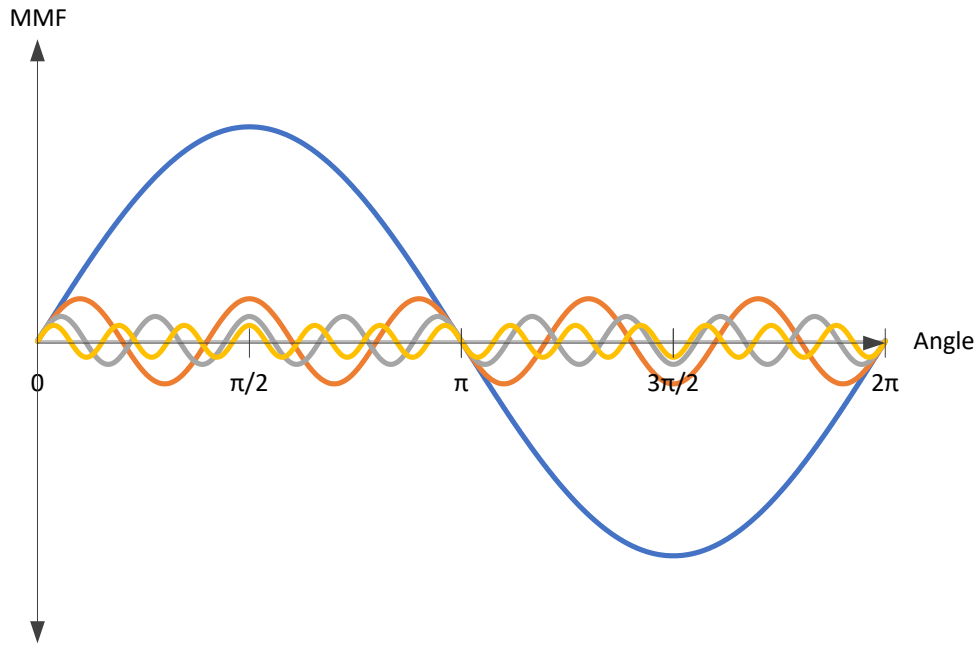


그림 3 구형파 MMF를 공간고조파로 분해한 모습

이제 전류가 다음과 같이 시간에 따른 교류 파형으로 인가된다고 하자.

$$i(t) = I_m \cos(\omega t) \quad (9)$$

여기서 $\omega = 2\pi f$ 로 전기 각속도이며, f 는 전기주파수이다.

전류가 시간에 따라 변하므로 기자력도 시간에 따라 변하게 될 것이다.

$$F_c = Hg = \frac{N_c I_m}{2} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} K_n \cos(n\theta_m) \cos(\omega t) \quad (10)$$

위 수식을 확장시켜 한상에 의한 기자력 분포는 다음과 같이 표현할 수 있다. 단, 다음 수식은 정수형 슬롯 전동기에 한하며 분수형 슬롯 전동기에 있어서는 서브하모닉 성분이 추가적으로 존재한다.

$$F_{ph}(\theta_m, t) = \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos(\omega t) \cos(\nu p \theta_m)$$

$$\therefore F_{m\nu} = \frac{4}{\nu\pi} \frac{K_{w\nu} N_{ph} I_m}{2p}$$
(11)

여기서 p 는 극쌍수, $K_{w\nu}$ 는 고조파 ν 에 대응하는 권선계수이다.

한상의 기자력은 아래와 같이 정방향 회전성분과 역방향 회전성분으로 분리할 수 있다.

$$F_{ph}(\theta_m, t) = \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos(\omega t) \cos(\nu p \theta_m)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos(\omega t - \nu p \theta_m)}_{\text{forward-rotating waves}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos(\omega t + \nu p \theta_m)}_{\text{backward-rotating waves}}$$
(12)

기본파의 동기속도는 $v_s = \frac{\omega_m}{p} = \frac{2\pi f_m}{p}$ 이고, ν 고조파의 동기속도는 $v_{s\nu} = \frac{1}{\nu} v_s$ 이다.

이제 3상 권선에 의한 기자력을 살펴보자. 각상은 시간적, 공간적으로 전기각 $2\pi/3$ 씩 위상차가 나도록 배치된다. 즉, 각 상의 전류를 다음과 같이 크기가 같고 위상이 $2\pi/3$ 씩 차이가 난다.

$$i_A(t) = I_1 \cos(\omega t)$$

$$i_B(t) = I_1 \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$i_C(t) = I_1 \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)$$
(13)

또한 코일이 공간적으로도 전기각 $2\pi/3$ 씩 위상차가 나게 분포되므로 각 상의 기자력은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
F_A(\theta_m, t) &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos(\omega t - \nu p \theta_m) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos(\omega t + \nu p \theta_m) \\
F_B(\theta_m, t) &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos\left(\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) - \nu\left(p\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos\left(\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + \nu\left(p\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right)\right) \\
F_C(\theta_m, t) &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos\left(\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) - \nu\left(p\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos\left(\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) + \nu\left(p\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right)\right)
\end{aligned} \tag{14}$$

패턴을 찾으면

$$\begin{aligned}
F_A(\theta_m, t) &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos\left((\omega t - \nu p \theta_m) + 0(\nu-1)\frac{2}{3}\pi\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos\left((\omega t + \nu p \theta_m) - 0(\nu+1)\frac{2}{3}\pi\right) \\
F_B(\theta_m, t) &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos\left((\omega t - \nu p \theta_m) + 1(\nu-1)\frac{2}{3}\pi\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos\left((\omega t + \nu p \theta_m) - 1(\nu+1)\frac{2}{3}\pi\right) \\
F_C(\theta_m, t) &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos\left((\omega t - \nu p \theta_m) + 2(\nu-1)\frac{2}{3}\pi\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{m\nu} \cos\left((\omega t + \nu p \theta_m) - 2(\nu+1)\frac{2}{3}\pi\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

위 식에서 B상은 A상 대비 $(\nu \mp 1)\frac{2}{3}\pi$ 만큼 위상이 차이 나고, C상은 B상 대비 $(\nu \mp 1)\frac{2}{3}\pi$ 만큼 차이 난다.

세 권선에 의한 합성 기자력은 각 상의 기자력을 더하면 되는데, 이때 공간 고조파별로 다른 특징이 나타난다. 예를 들어 $\nu=1$ 인 경우, 즉 기본파에 대해서는 모든 상 기자력 성분의 정방향 회전성분에 있어 $\nu-1=0$ 이 되면서 위상 성분이 모두 0으로 같아져 같은 파형이 되고 때문에 이

들의 합은 각 상의 정방향 회전성분을 3배한 값이 된다. 반대로 역방향 성분의 경우 $\nu+1=2$ 이 되면서 각 위상이 $0, \frac{2 \times 2\pi}{3}, \frac{4 \times 2\pi}{3}$ 을 가지게 되는데 이는 각 기자력 성분의 위상이 $2\pi/3$ 씩 차이가 나는 것이므로 세 상의 역방향성분 기자력을 합치면 0이 된다. (복소평면에서 크기가 같고 위상이 $2\pi/3$ 씩 차이나는 세 페이지의 합은 0이다)

이를 조금 더 자세히 고찰해 보면 $\nu \mp 1 = 3k \quad \because k=1,2,3,\dots$ 인 경우 각 기자력 성분의 위상이 같아질 수 있는데, 고조파 ν 는 홀수값만 가지므로 k 는 짝수값만 가질 수 있게 된다. 즉, $\nu \mp 1 = 6k' \quad k'=1,2,3,\dots$ 이 되는 경우에만 각 상의 정방향 성분 혹은 역방향 성분의 위상이 동일하게 되어 그 합이 0이 아니게 된다. 예컨대 합성기자력에 있어 $\nu-1=6$ 인 경우 정방향 회전 성분만 남고, $\nu+1=6$ 인 경우 역방향 회전성분만 남는 것을 알 수 있고 그 크기는 상기자력 크기의 $3/2$ 배가 된다.

이를 m상으로 확장하여 합성기자력을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F(\theta_m, t) &= \sum_{ph=A,B,C,\dots}^m F_{ph}(\theta_m, t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{m\nu} \frac{\sin((\nu-1)\pi)}{\sin((\nu-1)\pi/m)} \cos(\omega t - \nu p \theta_m) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{m\nu} \frac{\sin((\nu+1)\pi)}{\sin((\nu+1)\pi/m)} \cos(\omega t + \nu p \theta_m) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $\frac{\sin((\nu \mp 1)\pi)}{\sin((\nu \mp 1)\pi/m)}$ 를 Band Factor라 부르고 다음과 같은 특징이 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\sin((\nu-1)\pi)}{\sin((\nu-1)\pi/m)} &= m \quad \text{for } \nu = 2km+1 \quad \because k=0,1,2,3,\dots \\ \frac{\sin((\nu+1)\pi)}{\sin((\nu+1)\pi/m)} &= m \quad \text{for } \nu = 2km-1 \quad \because k=1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (17)$$

따라서

$$\begin{aligned}
F(\theta_m, t) &= \sum_{ph=A, B, C, \dots}^m F_{ph}(\theta_m, t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\nu=2km+1}^{\infty} F_{m\nu} m \cos(\omega t - \nu p \theta_m) + \frac{1}{2} \sum_{\nu=2km-1}^{\infty} F_{m\nu} m \cos(\omega t + \nu p \theta_m)
\end{aligned} \tag{18}$$

위 수식에서 3상 그리고 $\nu=1$ 인 기본파만 고려하면,

$$F|_{\nu=1}(\theta_m, t) = \frac{3}{2} F_{m\nu} \cos(\omega t - p \theta_m) \tag{19}$$

위 수식을 말로 표현해 보자면, “360도 공간에 p 개 주기의 싸인파가 존재하여 ω 의 속도로 반시계 방향으로 회전하고 있다”라고 말할 수 있다. 즉 회전자계를 표현하고 있는 수식이다.

기자력이 정의가 되었으므로 이제 다음과 같은 수식에 의해 권선에 의한 공극자속밀도를 구해 볼 수 있다.

$$\begin{aligned}
B_{gw}(\theta_m, t) &= \frac{\Phi_{gw}(\theta_m, t)}{A} = \frac{F(\theta_m, t)P(\theta_m)}{A} \\
&= F(\theta_m, t) \frac{\mu}{l} = F(\theta_m, t) \frac{\mu_0}{g(\theta_m)} = F(\theta_m, t) \Lambda(\theta_m)
\end{aligned} \tag{20}$$

여기서 $P(\theta_m)$ 는 퍼미언스, $g(\theta_m)$ 는 공극길이이다.

공극길이는 단순히 기계적인 공극의 길이가 아닌 자기경로상의 공극길이로, 슬롯을 고려하게 되면 다음 그림과 같이 표현된다.

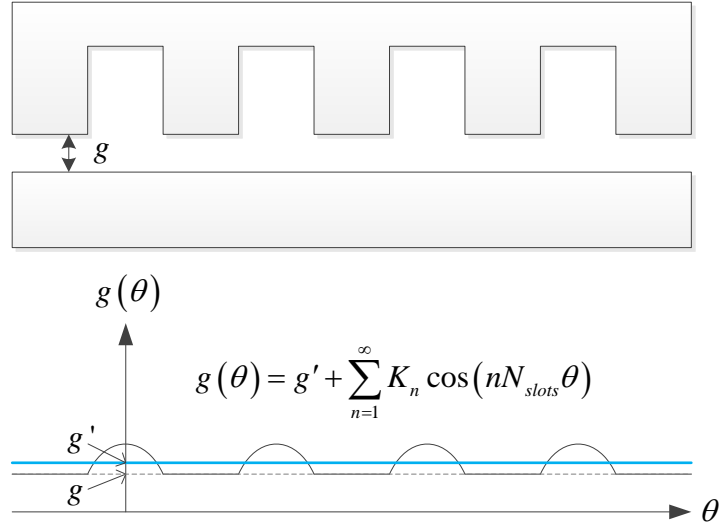


그림 4 자기적인 공극의 길이

카터계수 K_{cart} 를 도입하면,

$$B_{gw}(\theta_m, t) = F(\theta_m, t) \frac{\mu_0}{g(\theta_m)} = \frac{\mu_0}{K_{cart} g} \frac{F(\theta_m, t)}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos(nN_{slots} \theta_m)} \quad \because K_{cart} = \frac{g'}{g} \quad (21)$$

$\frac{1}{a + b \cos(\alpha)}$ 의 경우 테일러 급수를 활용하면 $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} \cos(\alpha)$ 로 근사할 수 있다. 이를 활용하여 위 수식을 다시 쓰면

$$B_{gw}(\theta_m, t) = F(\theta_m, t) \frac{\mu_0}{g(\theta_m)} = \frac{\mu_0}{K_{cart} g} \frac{F(\theta_m, t)}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} K'_n \cos(nN_{slots} \theta_m)} \approx F(\theta_m, t) \underbrace{\frac{\mu_0}{K_{cart} g} \Gamma(\theta_m)}_{\Lambda(\theta_m)} \quad (22)$$

$$\because \Gamma(\theta_m) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos(nN_{slots} \theta_m)$$

여기서 $\Gamma(\theta_m)$ 는 슬롯함수로 슬롯을 고려하지 않은 경우 1의 값을 갖는다.

결국 권선에 의한 공극자속밀도는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$B_{gw}(\theta_m, t) = \frac{m}{2} \left(\sum_{v=2km+1}^{\infty} B_{wv} \cos(\omega t - v p \theta_m) + \sum_{v=2km-1}^{\infty} B_{wv} \cos(\omega t + v p \theta_m) \right) \Gamma(\theta_m) \quad (23)$$

$$\therefore B_{wv} = F_{mv} \frac{\mu_0}{K_{cart} g}$$

위와 같은 수식전개의 장점을 살펴보면, 슬롯을 고려하지 않았을 때 기자력파형과 공극길이로 공극자속밀도를 간단히 구할 수 있고, 슬롯이 존재하는 경우 여기에 슬롯함수만 곱하여 공극자속밀도의 공간적인 분포를 구할 수 있는 것이다. 슬롯함수는 형상에 따라 달라지는 복잡한 함수이겠지만 급수형태로 전개될 수 있고, 따라서 형상변화에 따른 급수의 계수만 적절히 구해 낼 수 있으면 충분히 사용가치가 있다. 예전에는 이러한 계수 혹은 슬롯함수 자체를 형상치수에 의한 함수로 표현하려고 많은 노력을 하였으나, 현재는 기계학습이라는 대안이 있다. 본 저자는 슬롯함수를 구하기 위해 기계학습을 적용할 것이다.

슬롯효과를 무시하고 기본파에 대해서 쓰면

$$B_{gw}|_{v=1}(\theta_m, t) = \frac{3}{2} B_{w1} \cos(\omega t - p \theta_m) \quad (24)$$

여기서 B_{w1} 는 F_{ph} 에 의한 공극자속밀도 기본파 성분의 크기이다.

2.2. 영구자석에 의한 공극자속밀도

영구자석 기기의 경우 영구자석에 의한 공극자속밀도는 다음과 같이 홀수고조파 성분의 합으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
B_{gm}(\theta_m, t) &= \sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{\infty} B_{m\mu} \cos(\mu p(\theta_m + \theta_0 - \omega_m t)) \\
&= \sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{\infty} B_{m\mu} \cos(\mu(p(\theta_m + \theta_0) - p\omega_m t)) \\
&= \sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{\infty} B_{m\mu} \cos(\mu(p(\theta_m + \theta_0) - \omega t)) \\
\because \omega_m &= 2\pi f_m = \frac{2\pi f}{p} = \frac{\omega}{p}
\end{aligned} \tag{25}$$

여기서 ω_m 은 기계적인 각속도이고 f_m 은 이에 대응하는 기계적인 주파수이고, 아래 첨자가 붙지 않은 ω 와 f 는 각각 전기각속도와 전기주파수이다.

위식은 고정자 슬롯 구조나 회전자에 노치가 있는 경우 등은 고려하지 않은 식으로 일정한 공극에서 대칭적인 자극을 가지는 경우에 대한 것이다. 만약 고정자 슬롯구조를 고려하게 되면 다음과 같이 슬롯함수를 추가적으로 곱하여 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned}
B_{gm}(\theta_m, t) &= \left(\sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{\infty} B_{m\mu} \cos(\mu p(\theta_m + \theta_0 - \omega_m t)) \right) \frac{1}{K_{cart}} \left(\underbrace{1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos(n N_{slots} \theta_m)}_{\Gamma(\theta_m)} \right) \\
&= \frac{1}{K_{cart}} \sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{\infty} B_{m\mu} \cos(\mu p(\theta_m + \theta_0 - \omega_m t)) \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{K_{cart}} \sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} B_{m\mu} P_n \cos(\mu p(\theta_m + \theta_0 - \omega_m t)) \cos(n N_{slot} \theta_m)}_{\text{①}}
\end{aligned} \tag{26}$$

①항에 삼각함수 공식 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$ 를 적용하면

$$\begin{aligned}
& B_{m\mu} P_n \cos(\mu p(\theta_m + \theta_0 - \omega_m t)) \cos(n N_{slot} \theta_m) \\
&= \frac{B_{m\mu} P_n}{2} \left(\cos(\mu p \theta_m + \mu p \theta_0 - \mu p \omega_m t + n N_{slot} \theta_m) \right. \\
&\quad \left. + \cos(\mu p \theta_m + \mu p \theta_0 - \mu p \omega_m t - n N_{slot} \theta_m) \right) \\
&= \frac{B_{m\mu} P_n}{2} \left(\cos((\mu p + n N_{slot}) \theta_m - \mu p \omega_m t + \mu p \theta_0) \right. \\
&\quad \left. + \cos((\mu p - n N_{slot}) \theta_m - \mu p \omega_m t + \mu p \theta_0) \right) \\
&= \frac{B_{m\mu} P_n}{2} \left(\cos((\mu p + n N_{slot}) \theta_m - \mu p \omega_m t + \mu p \theta_0) \right. \\
&\quad \left. + \cos((\mu p - n N_{slot}) \theta_m - \mu p \omega_m t + \mu p \theta_0) \right) \\
&= \frac{B_{m\mu} P_n}{2} \sum_n \cos((\mu p \pm n N_{slot}) \theta_m - \mu p \omega_m t + \mu p \theta_0) \\
&= \frac{B_{m\mu} P_n}{2} \sum_n \cos((\mu p \pm n N_{slot}) \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0)
\end{aligned} \tag{27}$$

따라서

$$\begin{aligned}
B_{gm}(\theta_m, t) &= \left[\sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{\infty} B_{m\mu} \cos(\mu p(\theta_m + \theta_0 - \omega_m t)) \right] \underbrace{\left[\frac{1}{K_{cart}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos(n N_{slot} \theta_m) \right) \right]}_{\text{Slot function}} \\
&= \frac{1}{K_{cart}} \left[\underbrace{\sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{\infty} B_{m\mu} \cos(\mu p \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0)}_{\textcircled{1}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \underbrace{B_{m\mu} P_n \cos((\mu p \pm n N_{slot}) \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0)}_{\textcircled{2}} \right]
\end{aligned} \tag{28}$$

슬롯효과를 무시하고 기본파만 쓰면

$$B_{gm}|_{\mu=1}(\theta_m, t) = B_{m1} \cos(p(\theta_m + \theta_0 - \omega_m t)) \tag{29}$$

3. Radial force와 진동모드

공극자속밀도가 주어진 경우 가진력, 즉 radial force 를 구해볼 수 있으며 이로부터 진동모드와 이에 해당하는 주파수를 예측해 볼 수 있다.

진동모드 0은 pulsating vibration 모드 혹은 "breathing" 모드라 부르며 다음과 같은 가진력 분포를 가질 때이다.

$$p_0(\theta_m, t) = P_{mr} \cos(\omega t) \quad (30)$$

위 함수는 공간에 대한 함수가 아니므로 가진력이 원주상에서 전체적으로 커졌다 작아졌다는 반복하는 경우이다. 수학적으로 이러한 파형이 만들어 질 수 있는 경우는 공간적으로 동일한 파장을 가지는 두개의 파형이 시간에 따라 서로 다른 속도로 움직이고 있을 때 만들어질 수 있다. 전동기에 있어서는 고정자 회전자계의 속도와 회전자 자계의 회전 속도가 일치하지 않을 때 발생한다. 유도기를 포함한 어떤 타입의 전동기가 되었던, 전동기가 토크를 발생시키며 회전하기 위해서는 고정자의 자계 회전속도와 회전자의 자계 회전속도가 동일해야 하는데, 이 두 속도가 다르다 함은 처음부터 구동이 안되는 경우를 상정한 것이므로 전동기의 탈조현상이 발생했을 때 외에는 발생이 어려운 모드이다.

진동모드 1이상이 발생할 수 있는 경우는 크게 두가지 경우로 나누어 분석해 볼 수 있다. 첫번째 경우는 기자력 혹은 계자극에서 발생된 자속의 서브하모닉들의 상호작용 때문에 발생하는 경우이고, 두번째는 하모닉 성분에 의해 발생하는 경우이다. 우선 서브하모닉들의 상호작용에 의한 진동모드에 대해 살펴보자.

3.1. 서브하모닉 성분에 의한 진동모드

서브하모닉이란 기본 주파수(기저 주파수)의 정수 배가 아닌, 기본 주파수보다 작은 분수 배 주파수로 발생하는 주파수이다. 기자력에 의한 서브하모닉이 발생할 수 있는 원인은 극당상당슬롯수가 1보다 적은 분수형슬롯의 경우가 대표적이다.

기자력의 서브하모닉을 포함한 고조파 성분을 분석하기 위해서는 이전 장에서 도출한 식(18)을 활용하는 어렵다. 왜냐하면 식(18)을 도출하는 과정에서 가정으로 정수형 슬롯이 전제되었기 때문이다. 따라서 분수형 슬롯의 기자력 분석은 조금 다른 접근법이 필요하다.

그림 5는 분수형 슬롯 전동기의 기자력을 분석하는 과정을 보여주고 있다. 우선 하나의 코일에 의해 발생된 기자력파형을 푸리에 분석하여 고조파별 크기와 위상을 구한다. 이때 기자력의 크기는 턴수와 코일에 흐르는 전류에 의존하게 되는데, 코일별 턴수를 1, 흐르는 전류 또한 1로 가정하여 기자력의 최대 최소 진폭의 차이가 1이 되게 한다. 다음으로 Star of Slots 방법을 이용해 각 코일이 어떤 상에 포함될지 정한다. 이제 코일에 흐르는 전류를 앞서 가정한 전류 1이 아닌 실제 전류로 고려해 기자력을 재산정해야 하는데 이는 특정 시점에서의 각 상 전류를 결정하고 이를 위에서 구한 각 코일의 기자력과 곱하면 된다. 최종 기자력의 합은 코일수가 많을수록 그 크기가 커질 수 있다. 따라서 극수 슬롯수 조합에 따른 기자력의 비교를 위해서는 표준화 작업이 필요하게 되는데, 극당 상당 슬롯수가 1인 경우를 표준 모델로 삼아볼 수 있다.

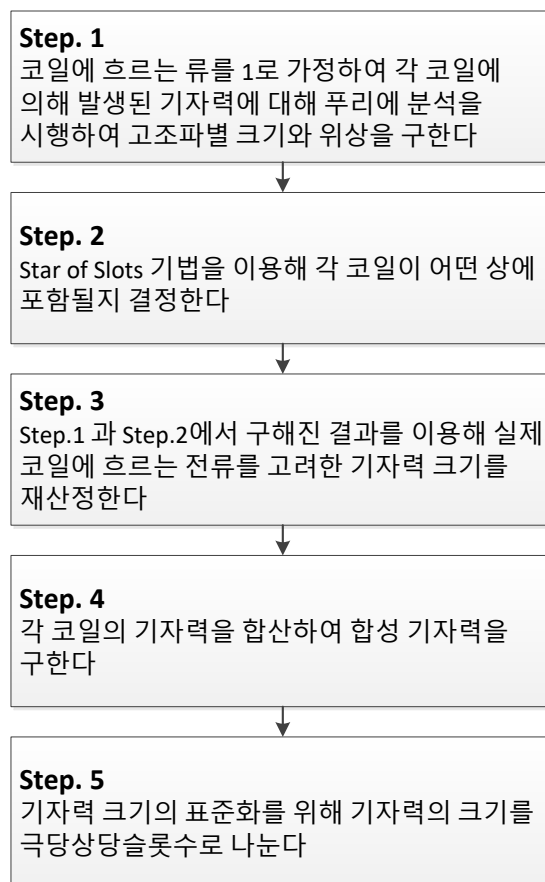


그림 5 기자력의 (서브)하모닉 분석 방법

언뜻 보면 그림 5의 방법에 문제가 있어 보인다. 즉, Step 3에서 실제 코일에 흐르는 전류를 고려해 기자력 크기를 재산정하는 과정이 있는데, 코일에 흐르는 전류는 시점별로 달라질 수 있고 때문에 시점별로 하모닉 분석결과가 다르게 나올 것 같다는 생각이 든다. 실제로 문제가 되는지 자세히 살펴보자.

그림 5의 방법으로 기자력의 푸리에 분석을 하게 되면 고조파별 크기와 위상을 얻을 수 있다. 특히 Step 4에서 각 코일의 기자력을 합산하는 과정을 두단계로 나누어 우선 상별로 기자력을 합산을 하고 다음으로 각 상의 기자력을 더하는 순서로 진행할 수도 있을 것이다. 이렇게 되면 상별

특정 고조파 성분의 크기와 위상각을 알 수 있게 된다. 특정 고조파의 차수는 극쌍수와 동일하므로, 특정 고조파 성분의 상별 크기와 위상각을 알아 내는 것은 특정 극쌍수의 자극을 만들어내는 상별 기자력 성분의 크기와 위상을 알 수 있다는 것과 동일한 의미이다. 이때 상별 위상각의 차이가 $2\pi/3$ 씩 나면 이는 해당 극쌍에서 주어진 권선이 대칭적이라고 말할 수 있고, 이러한 권선에 의해 만들어지는 합성 기자력의 크기는 일정하다고 할 수 있다. 즉, 전류를 산정하는 시점이 달라지더라도 해당 극쌍에 대한 합성 기자력의 크기는 달라지지 않음을 의미한다.

만약 상별 위상각의 차이가 $2\pi/3$ 가 아니라면 각 기자력의 위상차는 특정 상을 기준으로 $\pm\alpha$ 만큼 차이해야 한다. 왜냐하면 권선의 대칭성에 의해 A상의 권선에 포함된 코일들을 전기적으로 $2\pi/3$ 만큼 비틀면 B상 권선의 패턴이 나타나고, 전기적으로 $-2\pi/3$ 만큼 비틀면 C상 권선의 패턴이 나타나기 때문이다. 전기적으로 $2\pi/3$ 만큼 비틀 수 있는 슬롯의 개수를 n 이라 하면 A상 코일의 전후 혹은 좌우로 n 슬롯만큼 떨어진 곳에 B상 코일과 C상 코일이 존재함을 의미한다.

이제 3상 $2p$ 극 Q 슬롯 전동기를 위한 Star of Slots이 존재하고 이에 따른 코일의 상별 기자력을 분석한 경우를 상정하자. 이 경우, p 고조파 성분에 있어 각 상의 위상은 $2\pi/3$ 씩 위상차가 나게 될 것이다. 기자력 성분에 서브하모닉으로 k/p 성분이 존재하는 경우 A상 권선의 서브하모닉 성분의 위상을 0이라 두면 나머지 B와 C상 서브하모닉 성분의 위상은 다음과 같이 계산된다.

$$\pm \frac{2\pi}{Q} kn = \pm \alpha \quad (31)$$

위에서는 A상 권선의 서브하모닉 성분의 위상을 기준으로 나머지 권선의 위상을 구한 것이지만 B상 권선의 서브하모닉 성분을 위상을 기준으로 나머지 권선의 위상을 구해도 동일한 결과가 나와야 한다. 이렇게 되기 위해서는 α 는 대칭성을 가져야 하며 $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ 의 셋 중의 하나의 값만 가질 수 있게 된다.

먼저 $\alpha = 0$ 이면 각 상의 기자력의 위상이 동일하여 합성기자력 성분이 0이 아닌 값으로 존재할 것 같이 여겨지지만, 이는 각 상에 인가되는 전류의 대칭성을 고려하지 않은 결과로 전류의 대칭성을 고려하면 각상의 기자력은 $2\pi/3$ 만큼 위상차가나서 합성기자력은 0이된다. 즉, $\alpha = 0$ 의 의미는 코일의 공간적인 분포가 전기적으로 동일 위상을 가진다는 뜻이다. 즉, 전기적인 관점에서 공간적으로 분포되어 있지 않다는 것이다.

다음으로 $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ 이면 각 상의 기자력이 공간적으로 $\frac{2}{3}\pi$ 만큼 차이 난다는 의미가 되고 이는 기본파 성분과 동일한 공간적 위상 분포를 가지는 것으로 이해할 수 있다. 따라서 기본파 성분과 동일한 방향으로 회전하는 자계가 된다.

마지막으로 $\alpha = \frac{4}{3}\pi$ 이면, 상별 대칭적인 분포는 지나 그 순서가 반대가되어 역방향으로 회전하는 자계가 된다.

그림 6은 3상 14극 12슬롯 전동기의 MMF 고조파 분석 결과를 보여주고 있다. 고정자 원주에 발생된 기자력파형을 푸리에 분석한 결과이다. x축은 기계적인 고조파 차수이고 y축은 고조파의 크기를 나타낸다. 스템프의 색깔은 각 상의 기자력 위상관계를 표현하는데 파란색은 위상이 $2\pi/3$ 만큼, 빨간색은 $4\pi/3$ 만큼, 회색은 동일 위상을 의미한다. 검은색도 존재하는데 이는 수치오차에 의해 위상관계를 알 수 없다는 뜻이다. 또한 굵은 선으로 표시된 차수는 기본파와 이의 고조파성분을 의미한다. 14극 전동기 이므로 7극쌍에 해당하는 7고조파 성분이 메인 주파수가 될 것이며 그림에서 7고조파 성분이 굵은 선으로 표시되었음을 알 수 있다.

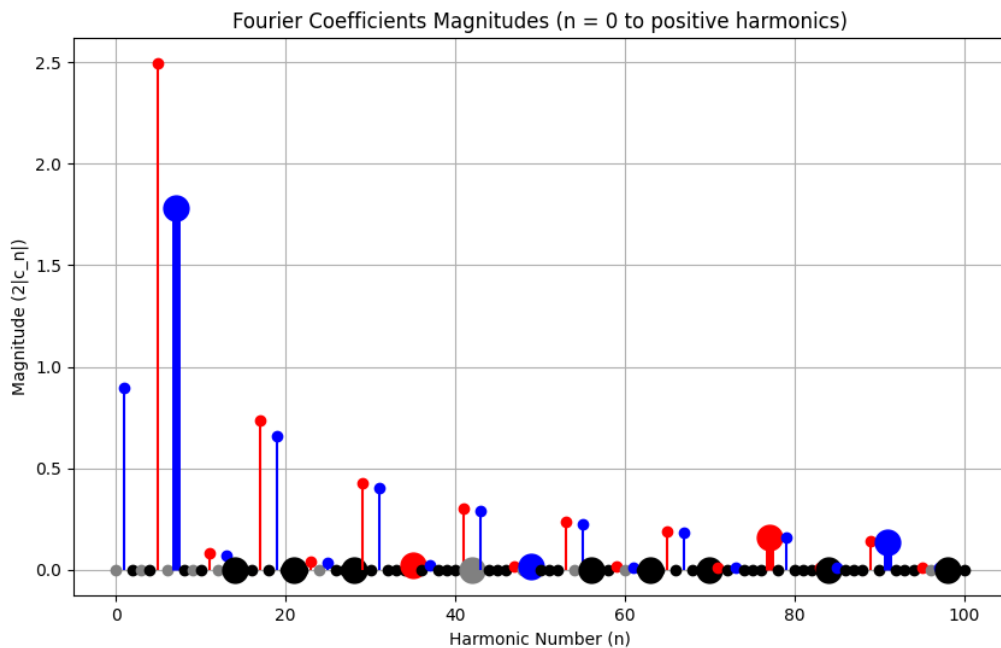


그림 6 14극 12슬롯 전동기의 MMF 고조파 분석결과

헌데, 이보다 낮은 고조파 대역에서 아주 큰 크기를 가지는 성분이 있으니 5고조파 성분이다. 14극 12슬롯 전동기에 있어 기자력의 5고조파 성분은 서브하모닉 성분으로 따졌을 때 5/7차 서브하모닉이 된다. 5/7차 서브하모닉을 수식으로 써 보면

$$F|_{v=5/7}(\theta_m, t) = \frac{3}{2} F_{m\frac{5}{7}} \cos(5\theta_m + \omega t) \quad (32)$$

여기서 5/7차 서브하모닉 성분은 회전방향이 주성분과 반대이므로 $+\omega t$ 로 쓰였다.

이러한 서브하모닉 성분과 회전자 자극의 기본파 성분이 합쳐지면 다음과 같은 공극자속밀도를 만들어 낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 B_g^{w_{\frac{5}{7}},m1}(\theta_m, t) &= B_{gw}|_{v=5/7}(\theta_m, t) + B_{gm}|_{\mu=1}(\theta_m, t) \\
 &= \frac{3}{2} B_{w_{\frac{5}{7}}} \cos(\omega t + 5\theta_m) + B_{m1} \cos(7(\theta_m + \theta_0 - \omega_m t))
 \end{aligned} \tag{33}$$

여기서 공극의 비퍼미언스는 슬롯효과등을 무시하고 상수로 간주하였다.

진동모드수를 구하기 위해 식(33)와 식(4)을 이용해 radial force를 계산해 보자.

$$p_r(\theta_m, t) \approx \frac{1}{2\mu_0} \left(\underbrace{\frac{9}{4} B_{w_{\frac{5}{7}}}^2(\theta_m, t)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{4}{3} B_{w_{\frac{5}{7}}}(\theta_m, t) B_{m1}(\theta_m, t)}_{\textcircled{2}} + \underbrace{B_{m1}^2(\theta_m, t)}_{\textcircled{3}} \right) \tag{34}$$

①의 경우

$$B_{w_{\frac{5}{7}}}^2(\theta_m, t) = \frac{1}{2} B_{w_{\frac{5}{7}}}^2 (1 + \cos(2(\omega t + 5\theta_m))) = \frac{1}{2} B_{w_{\frac{5}{7}}}^2 (1 + \cos(10\theta_m + 2\omega t))$$

이때 진동모드수는 10, 주파수는 $2f$ 이다.

②의 경우

$$\begin{aligned}
 &B_{w_{\frac{5}{7}}}(\theta_m, t) B_{m1}(\theta_m, t) \\
 &= \frac{1}{2} B_{w_{\frac{5}{7}}} B_{m1} (\cos(\omega t + 5\theta_m + 7(\theta_m + \theta_0 - \omega_m t)) + \cos(\omega t + 5\theta_m - 7(\theta_m + \theta_0 - \omega_m t))) \\
 &= \frac{1}{2} B_{w_{\frac{5}{7}}} B_{m1} (\cos(12\theta_m + 7\theta_0) + \cos(2\theta_m - 2\omega t + 7\theta_0))
 \end{aligned}$$

이때 진동모드수는 2, 주파수는 $2f$ 이다.

③의 경우

$$B_{m1}^2(\theta_m, t) = \frac{B_{m1}^2}{2} \left(1 + \cos(14(\theta_m + \theta_0 - \omega_m t)) \right)$$

$$= \frac{B_{m1}^2}{2} \left(1 + \cos(14\theta_m + 14\theta_0 - 2\omega_t) \right)$$

이때 진동모드수는 14, 주파수는 $2f$ 이다.

서브하모닉 차수를 k/p 이라 한 경우 (주의! 차수의 분모가 반드시 p 로 표기되어야 함), ①과 ③에 의한 진동모드는 서브하모닉 차수의 분자와 분모의 2배수에 해당하는 모드이며, ②에 의한 진동모드는 분모와 분자의 차이 ($p-k$) 에 해당하는 모드이다. 따라서 서브하모닉의 분자와 분모 차이가 1이 되는 경우 가장 낮은 진동모드인 1를 만들어 낼 수 있다.

그림 7은 14극 15슬롯 전동기의 기자력 분석 결과인데 7고조파성분외 8고조파 성분도 매우 큰 것을 알 수 있다. 이러한 전동기는 진동모드 1이 발생할 수 있다.

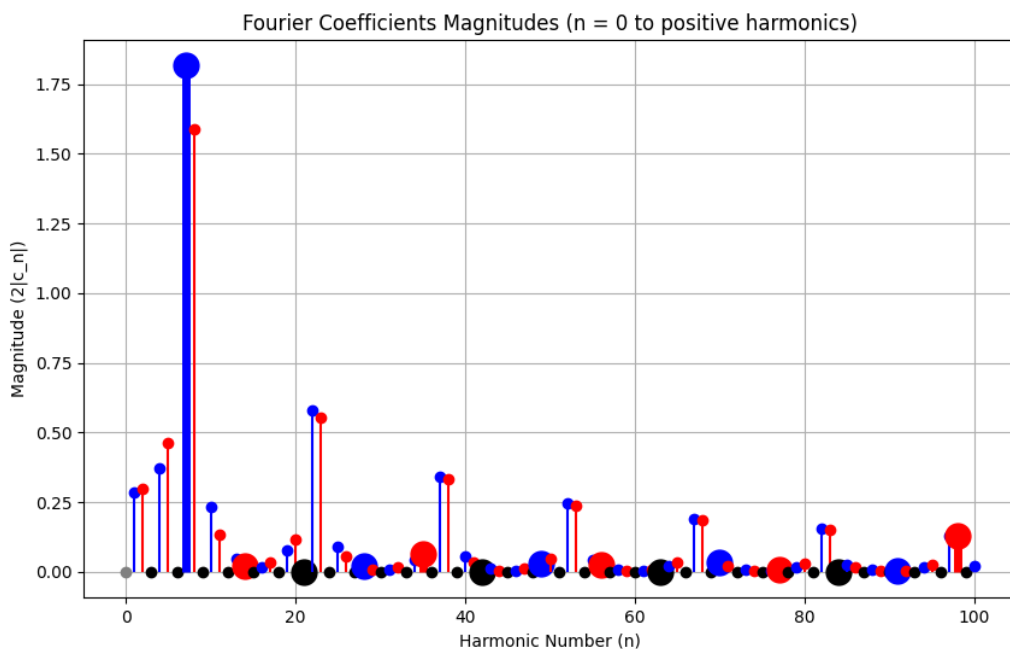


그림 7 14극 15슬롯 전동기의 MMF 고조파 분석결과

3.2. 하모닉성분에 의한 진동모드

식(4)를 다시쓰면,

$$p_r(\theta_m, t) \approx \frac{B^2(\theta_m, t)}{2\mu_0} = \underbrace{\left(\frac{B_{gw}^2(\theta_m, t)}{2\mu_0} \right)}_{P_{r1}} + \underbrace{\left(\frac{B_{gw}(\theta_m, t)B_{gm}(\theta_m, t)}{\mu_0} \right)}_{P_{r2}} + \underbrace{\left(\frac{B_{gm}^2(\theta_m, t)}{2\mu_0} \right)}_{P_{r3}} \quad (35)$$

여기서 슬롯을 고려한 경우 권선과 계자에 의한 공극자속밀도는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$B_{gw}(\theta_m, t) = \frac{m}{2} \left(\sum_{v=2km+1}^{\infty} B_{wv} \cos(\omega t - v p \theta_m) + \sum_{v=2km-1}^{\infty} B_{wv} \cos(\omega t + v p \theta_m) \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos(n N_{slots} \theta_m) \right) \quad (36)$$

$$B_{gm}(\theta_m, t) = \left(\sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{\infty} B_{m\mu} \cos(\mu p(\theta_m + \theta_0 - \omega_m t)) \right) \frac{1}{K_{cart}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos(n N_{slots} \theta_m) \right) \quad (37)$$

전체 수식을 전개하려면 매우 많은 지면이 필요한데, 슬롯고조파의 경우 기본차수만 고려해 $n=1$ 로 두도록 하자. 식(36) 과 식(37)을 전개하여 다시 정리하면,

$$B_{gw}(\theta_m, t) = \frac{3}{2} \left(\sum_{v=2km+1}^{\infty} B_{wv} \left(\cos(\omega t - v p \theta_m) + \frac{P_1}{2} (\cos(\omega t - (v p - N_{slots}) \theta_m) + \cos(\omega t - (v p + N_{slots}) \theta_m)) \right) + \sum_{v=2km-1}^{\infty} B_{wv} \left(\cos(\omega t + v p \theta_m) + \frac{P_1}{2} (\cos(\omega t + (v p + N_{slots}) \theta_m) + \cos(\omega t + (v p - N_{slots}) \theta_m)) \right) \right) \quad (38)$$

$$B_{gm}(\theta_m, t) = \frac{1}{K_{cart}} \left(\sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{\infty} B_{m\mu} \cos(\mu p \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0) + \sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{\infty} B_{m\mu} P_1 \cos((\mu p \pm N_{slot}) \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0) \right) \quad (39)$$

식(38)과 식(39)에서 ν 와 μ 고조파 성분만 고려하게 되면 다음과 같다.

$$B_{gw} \Big|_{\nu=6k \pm 1}(\theta_m, t) = B_{w\nu} \left(\underbrace{\cos(\omega t \mp \nu p \theta_m)}_{\textcircled{1}} + \frac{P_1}{2} \underbrace{\left(\cos(\omega t \mp (\nu p \mp N_{slots}) \theta_m) + \cos(\omega t \mp (\nu p \pm N_{slots}) \theta_m) \right)}_{\textcircled{2}} \right) \quad (40)$$

$$B_{gm} \Big|_{\mu=1,2,3,\dots}(\theta_m, t) = \frac{B_{m\mu}}{K_{cart}} \left(\underbrace{\cos(\mu p \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0)}_{\textcircled{a}} + P_1 \underbrace{\cos((\mu p \pm N_{slot}) \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0)}_{\textcircled{b}} \right) \quad (41)$$

식(40)은 수식의 간략화를 위해 두개의 수식을 하나의 수식으로 작성한 것이다. 수식 내 존재하는 \mp 혹은 \pm 의 경우 일괄적으로 위쪽 혹은 아랫쪽 연산자를 적용할 수 있으며 위쪽 연산자를 적용한 경우와 아랫쪽 연산자를 적용한 경우 두가지를 합성한 것이라 보면 된다.

식(40)을 이용한 B_{gw}^2 의 계산 결과는 ①, ②의 제곱성분과 ①의 ②곱 성분이 나타날텐데 이에 대해 살펴보자.

①의 제곱성분

$$\cos^2(\omega t \mp \nu p \theta_m) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t \mp 2\nu p \theta_m))$$

여기서 발생가능한 진동모드는 $2\nu p$ 이며 $\nu = 6k \pm 1$ 임을 참고하자. 이때 주파수는 $2f$ 이다. 진동모드가 극쌍수에 비례하므로 다극에서는 해당 성분이 큰 문제가 되지 않을 것이다.

②의 제곱성분

$$\cos^2(\omega t \mp (\nu p \mp N_{slots})\theta_m) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t \mp 2(\nu p \mp N_{slots})\theta_m))$$

$$\cos^2(\omega t \mp (\nu p \pm N_{slots})\theta_m) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t \mp 2(\nu p \pm N_{slots})\theta_m))$$

여기서 발생가능한 진동모드는 $2(\nu p \mp N_{slots})$ 이며 주파수는 $2f$ 이다. 특히 $2(\nu p - N_{slots})$ 는 낮은 차수의 진동모드를 발생시킬 수 있으므로 자세히 살펴야 한다.

①의 ②곱 성분

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t - \nu p \theta_m) \cos(\omega t - (\nu p - N_{slots})\theta_m) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(2\omega t - (2\nu p - N_{slots})\theta_m) + \cos(N_{slots}\theta_m)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t - \nu p \theta_m) \cos(\omega t - (\nu p + N_{slots})\theta_m) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(2\omega t - (2\nu p + N_{slots})\theta_m) + \cos(N_{slots}\theta_m)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t + \nu p \theta_m) \cos(\omega t - (\nu p - N_{slots})\theta_m) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(2\omega t + N_{slots}\theta_m) + \cos((2\nu p - N_{slots})\theta_m)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t + \nu p \theta_m) \cos(\omega t - (\nu p + N_{slots})\theta_m) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(2\omega t - N_{slots}\theta_m) + \cos((2\nu p + N_{slots})\theta_m)) \end{aligned}$$

여기서 발생 가능한 진동모드는 $2\nu p - N_{slots}$, $2\nu p + N_{slots}$, N_{slots} 이 있으며 주파수는 모두 $2f$ 이다. 특별히 $2\nu p - N_{slots}$ 모드는 낮은 차수의 진동모드를 발생시킬 수 있으므로 자세히 살펴야 한다.

여기서 잠시 ②의 제곱성분과 ①과 ②의 곱성분 중 어떠한 성분이 더 큰 영향을 줄지 생각해 보자. ②의 제곱 성분의 크기는 $P_1/2$ 의 제곱에 비례하고 ①과 ②의 곱성분은 $P_1/2$ 에 비례하는데, $P_1/2$ 이 1보다 크다면 제곱성분의 영향력이 더 크다 말할 수 있고, 1보다 작으면 곱성분이 더 영향력이 크다 말할 수 있다. 그렇다면 P_1 이 의미하는 것이 무엇인가? 그림 4의 $g(\theta_m)$ 을 공극길 이 g 로 나눈 것이 $\Gamma(\theta_m)$ 인데, P_1 은 이 함수의 기본파 성분의 크기이다. $\Gamma(\theta_m)$ 함수는 옴셋값 을 가지는데 그 값이 1이며 P_1 이 1보다 크다는 의미는 $g(\theta_m)$ 의 파형에서 옴셋과 기본파만 남

기고 제거한 경우 그 최소값이 0보다 작음을 의미한다. 즉 공극길이가 0보다 작다는 것이다. 이는 물리적으로 불가능하므로 P_1 은 1보다 작아야 함을 의미한다. 따라서 ①과 ②의 공급성분이 ②의 제 공급성분보다 더 큰 영향력을 가지고 있다고 볼 수 있다. 즉, $2\nu p - N_{slots}$ 차 진동모드가 중요하게 된다. 단순히 $\nu=1$ 인 경우 극수와 슬롯수의 차이가 진동모드가 되는 것이다. 예를 들면 14극 12슬롯 10극 12슬롯 등이 되겠다.

식(41)을 이용한 B_{gm}^2 의 계산 결과도 비슷한 방식으로 전개해 볼 수 있다.

㉓의 제곱성분

$$\cos^2(\mu p \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2(\mu p \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0)))$$

여기서 발생가능한 진동모드는 $2\mu p$ 이며 μ 는 홀수임을 참고하자. 이때 주파수는 $2f$ 이다. 가진력의 크기는 상대적으로 크다

㉔의 제곱성분

$$\cos^2((\mu p \pm N_{slot}) \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2((\mu p \pm N_{slot}) \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0)))$$

여기서 발생가능한 진동모드는 $2(\mu p \pm N_{slot})$ 이며 주파수는 $2\mu f$ 이다. 특히 $2(\mu p - N_{slot})$ 는 낮은 진동모드를 발생시킬 수 있으므로 자세히 살펴야 한다. 가진력의 크기는 상대적으로 작다

㉓의 ㉔곱 성분

$$\begin{aligned} & \cos(\mu p \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0) \cos((\mu p \pm N_{slot}) \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0) \\ &= \frac{1}{2} (\cos((2\mu p \pm N_{slot}) \theta_m - 2\mu \omega t + 2\mu p \theta_0) + \cos(N_{slot} \theta_m)) \end{aligned}$$

여기서 발생가능한 진동모드는 $2\mu p \pm N_{slot}$ 이며 주파수는 $2\mu f$ 이다. 특히 $2\mu p - N_{slot}$ 은 낮은 차수의 진동모드를 발생시킬수 있으므로 자세히 살펴야 한다. 가진력의 크기는 상대적으로 중간이다.

마지막으로 식(40)과 식(41)의 곱에 대해서 살펴보자.

①과 ㉓의 곱

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t \mp \nu p \theta_m) \cos(\mu p \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos((1-\mu)\omega t + (\mu \mp \nu) p \theta_m + \mu p \theta_0) \right. \\ & \quad \left. + \cos((1+\mu)\omega t - (\mu \pm \nu) p \theta_m - \mu p \theta_0) \right) \end{aligned}$$

여기서 발생가능한 진동모드는 $(\mu \pm \nu)p$ 이며 주파수는 $(1 \pm \mu)f$ 이다. $(\mu - \nu)p$ 는 낮은 차수의 진동모드를 발생시킬 수 있다. 또한 가진력의 크기는 상대적으로 크다.

①과 ㉔의 곱

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t \mp \nu p \theta_m) \cos((\mu p \pm N_{slot})\theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos((1-\mu)\omega t + ((\mu \mp \nu)p \pm N_{slot})\theta_m + \mu p \theta_0) \right. \\ & \quad \left. + \cos((1+\mu)\omega t - ((\mu \pm \nu)p \pm N_{slot})\theta_m - \mu p \theta_0) \right) \end{aligned}$$

여기서 발생가능한 진동모드는 $(\mu \pm \nu)p \pm N_{slot}$ 이며 주파수는 $(1 \pm \mu)f$ 이다. $(\mu \pm \nu)p - N_{slot}$ 는 낮은 차수의 진동모드를 발생시킬 수 있다. 또한 가진력의 크기는 상대적으로 중간이다.

②와 ㉓의 곱

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t - (\nu p - N_{slots})\theta_m) \cos(\mu p \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos((1-\mu)\omega t + ((\mu - \nu)p + N_{slots})\theta_m + \mu p \theta_0) \right. \\ & \quad \left. + \cos((1+\mu)\omega t - ((\mu + \nu)p - N_{slots})\theta_m - \mu p \theta_0) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t - (\nu p + N_{slots})\theta_m) \cos(\mu p \theta_m - \mu \omega t + \mu p \theta_0) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos((1-\mu)\omega t + ((\mu - \nu)p - N_{slots})\theta_m + \mu p \theta_0) \right. \\ & \quad \left. + \cos((1+\mu)\omega t - ((\mu + \nu)p + N_{slots})\theta_m - \mu p \theta_0) \right) \end{aligned}$$

여기서 발생가능한 진동모드는 $(\mu - \nu)p \pm N_{slots}$, $(\mu + \nu)p \pm N_{slots}$ 이며 주파수는 $(1 \mp \mu)f$ 이다. $(\mu - \nu)p - N_{slots}$ 과 $(\mu + \nu)p - N_{slots}$ 는 낮은 차수의 진동모드를 발생시킬 수 있다. 또한 가진력의 크기는 상대적으로 중간이다.

②와 ㉔의 곱

$$\cos(\omega t - (\nu p - N_{slots})\theta_m) \cos((\mu p \pm N_{slot})\theta_m - \mu\omega t + \mu p\theta_0)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos((1-\mu)\omega t + ((\mu-\nu)p \pm N_{slot} + N_{slots})\theta_m + \mu p\theta_0) \right. \\ \left. + \cos((1+\mu)\omega t - ((\mu+\nu)p \mp N_{slot} + N_{slots})\theta_m - \mu p\theta_0) \right)$$

$$\cos(\omega t - (\nu p + N_{slots})\theta_m) \cos((\mu p \pm N_{slot})\theta_m - \mu\omega t + \mu p\theta_0)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos((1-\mu)\omega t + ((\mu-\nu)p \pm N_{slot} - N_{slots})\theta_m + \mu p\theta_0) \right. \\ \left. + \cos((1+\mu)\omega t - ((\mu+\nu)p \mp N_{slot} - N_{slots})\theta_m - \mu p\theta_0) \right)$$

여기서 발생가능한 진동모드는 $(\mu-\nu)p$, $(\mu-\nu)p-2N_{slots}$ 이며 주파수는 $(1\mp\mu)f$ 이다. 둘다 낮은 차수의 진동모드를 발생시킬 수 있다. 하지만 가진력의 크기는 상대적으로 작다.

종합해 보면 ㉑의 ㉒곱, ㉓의 ㉔곱, ㉑과 ㉔의 곱, 그리고 ㉒와 ㉓의 곱에서 가진력의 크기가 중간 정도이고 위험한 진동모드가 발생할 수 있다. 위험한 진동모드수는 다음과 같다.

$$2\nu p - N_{slots}, 2\mu p - N_{slot}, (\mu + \nu)p - N_{slot}$$

표 1 고조파 차수에 따른 진동모드

ν	μ	$2\nu p - N_{slots}$	$2\mu p - N_{slot}$	$(\mu + \nu)p - N_{slot}$
1	1	$2p - N_{slot}$	$2p - N_{slot}$	$2p - N_{slot}$
1	3	$2p - N_{slot}$	$6p - N_{slot}$	$4p - N_{slot}$
1	5	$2p - N_{slot}$	$10p - N_{slot}$	$6p - N_{slot}$
5	1	$10p - N_{slot}$	$2p - N_{slot}$	$6p - N_{slot}$
7	1	$14p - N_{slot}$	$2p - N_{slot}$	$8p - N_{slot}$
5	3	$10p - N_{slot}$	$6p - N_{slot}$	$8p - N_{slot}$
5	5	$10p - N_{slot}$	$10p - N_{slot}$	$10p - N_{slot}$
7	3	$14p - N_{slot}$	$6p - N_{slot}$	$10p - N_{slot}$
7	5	$14p - N_{slot}$	$10p - N_{slot}$	$12p - N_{slot}$

표 1은 고조파 차수에 따른 진동모드를 나타내고 있다. 고조파 차수가 커지면 그 크기도 일반적으로는 줄어들게 되므로 낮은 차수의 고조파성분이 만들어 내는 진동모드를 주의깊게 살펴볼 필요가 있다. 또한 진동모드수가 낮을수록 진동의 변위가 커지므로 낮은 차수의 고조파성분이 만들어 내는 진동모드가 1,2,3과 같은 낮은 진동모드를 만들어 내는지 살펴보아야한다.