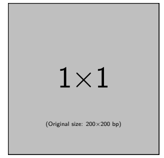


Luaking
Školní zápisník

by

Jaroslav Fait

University of West Bohemia
Faculty of Electrical Engineering

Obsah

Část I

MA I

Table of Contents

Kapitola 1

Počet Pravděpodobnosti

Contents

Slovo pravděpodobnost používáme velmi často. Jaký však je jeho přesný význam? Jsme přesvědčeni, že pravděpodobnost výhry ve sportce je velmi malá. Ani pravděpodobnost, že se vyplní předpověď počasí, nepovažujeme mnohdy za výraznou. Přesto je mezi oběma příklady obrovský kvantitativní rozdíl. Zkusme význam pojmu pravděpodobnost ukázat pomocí konkrétních číselných příkladů.

- **Příklad se střelcem**: Sportovní střelec střílí na terč série 100 ran. Předpokládejme, že podmínky při střelbě jsou stále stejné. Stejná je zbraň, terč, vzdálenost, povětrnostní podmínky i momentální zdravotní stav střelce. Při hodnocení střelcova „mistrovství“ někdo řekne, že střelec zasáhne terč s pravděpodobností 92%. Jak tomu rozumět? Znamená to, že v souboru sérií výstřelů jsou velmi časté ty, v nichž zasáhl střelec terč 92-krát. Samozřejmě, není řídké, že se objeví i série s 93 nebo 94 zásahy, ale také s 91 nebo 90. Vyloučen není ani případ s úspěšností 96 či 88, a dokonce i stovku bychom mohli zaznamenat. Situace výrazně odlišné od 92 zásahů však budou řídké, a to tím více, čím více se úspěšnost série liší od 92 oběma směry.

- **Příklad se zmetky**: Koupíte si výrobek u firmy, o které je známo, že vyrábí zmetky s pravděpodobností 0,16%? Situaci lze posuzovat obdobně jako úspěšnost střelce. Budeme-li například zkoumat série obsahující 1000 výrobků, bude každá z nich obsahovat „v průměru“ 16% zmetků. Z příkladu se střelcem již zhruba víme, jak posuzovat slovo v průměru.

V této kapitole se budeme pravděpodobnostmi zabývat podrobněji. Zjistíme, že i když se týkají náhodných jevů, platí i pro ně jisté zákonitosti.

1.1 Pravděpodobnost

V úvodních příkladech jsme si vyložili, jak intuitivně chápat pojem pravděpodobnost. Jednalo se v nich o posouzení průměrné úspěšnosti ve velkém souboru operací či úkonů prováděných za stejných podmínek, šlo tedy o jakousi „průměrnou“ pravděpodobnost. Nyní definujeme pravděpodobnost matematicky.

1.1.1 Co se pravdě podobá — definice pravděpodobnosti

Pro definici pravděpodobnosti použijeme pojmu *náhodný pokus*, jehož význam si ukážeme na příkladu. Dobrým příkladem náhodných pokusů je třeba házení mincí, hraní kostkou, výběr karet z balíčku, vidíme-li pouze jejich rub, apod. Budeme třeba házet kostkou. Abychom si situaci zbytečně nekomplikovali, budeme předpokládat, že všechny výsledky hodu kostkou (náhodné pokusy) jsou stejně časté, žádný z nich není nijak preferován[1]. Počet možných výsledků jednotlivého hodu je $N = 6$ (kostka má 6 stěn, na každé je vyznačen odlišný počet ok, tedy 1 až 6). Jednotlivé situace, které mohou nastat, nazýváme náhodnými jevy. Náhodným jevem A tak může být situace *„padne číslo* 2*“*, jiným náhodným jevem B situace *„padne číslo dělitelné třemi“*, apod. Počet situací, kdy výsledek hodu lze hodnotit tak, že určitý jev nastal, označíme M. Například pro jev A *„padne číslo* 2*“* je $M(A) = 1$, pro jev B *„padne číslo dělitelné třemi“* je $M(B) = 2$ (počet ok 3 nebo 6). Můžeme také definovat jev O *„nepadne žádné číslo“* ($M(0) = 0$) nebo jev J *„padne jakékoli číslo“* ($M(J) = 6$).

Definice 1.1.1. *Pravděpodobností jevu rozumíme podíl*

$$p = \frac{M}{N} = \frac{\textit{počet případů příznivých}}{\textit{počet případů možných}}. \tag{1.1}$$

Počtem případů možných jsme zkráceně nazvali počet všech možných výsledků náhodného pokusu, počtem případů příznivých pak počet všech takových výsledků pokusu, při nichž daný jev nastal.

Je zřejmé, že hodnota pravděpodobnosti jakéhokoli jevu je nezáporná a může nabývat hodnoty nejvýše 1, tj. $0 < p < 1$. Jev s *nulovou pravděpodobností* se nazývá **nemožný**, jev s *jednotkovou pravděpodobností* je **jistý**. V našem příkladu s kostkou tak dostáváme

$$p(A) = \frac{1}{6}, \qquad p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad p(O) = 0, \qquad p(J) = 1.$$

Příklad 1.1.1. ***Barevné ponožky:***
*V zásuvce jsou ponožky tří barev. Červené (**Č**), zelené (**Z**) a modré (**M**). Je jich tam od každé barvy hodně. Student jde na schůzku a chce si vzít čisté ponožky. Náhle zhasne světlo. Student vytáhne potmě dvě ponožky. Jaká je pravděpodobnost, že ponožky budou mít stejnou barvu? Vyjmenujme případy, které mohou při vytažení dvou ponožek nastat: (**Č+Č**), (**Č+Z**), (**Z+Č**), (**Č+M**), (**M+Č**), (**Z+Z**), (**Z+M**), (**M+Z**), (**M+M**). Je tedy $n = 9$. Příznivé situace jsou tři, (**Č+Č**), (**Z+Z**), (**M+M**). Pravděpodobnost je tedy 1/3. (Převzato z [1, s. 200])*

[1] Kostka by tedy měla být homogenní, plocha, na kterou po hodu dopadne, vodorovná, kvalita povrchu všech stěn kostky stejná (žádná stěna by třeba neměla být natřena lepidlem), apod.

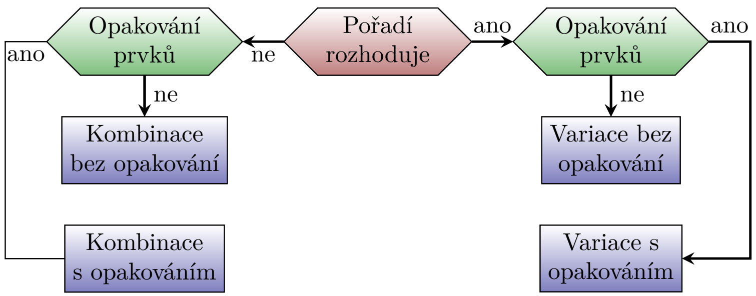
1.1.2 Cifry, kostky, karty - kombinatorické opakování

Příklad s ponožkami byl velmi jednoduchý. Podařilo se nám vyjmenovat všechny případy možné i všechny případy příznivé, neboť obojího bylo docela málo. Daleko běžnější jsou však situace, kdy výčet případů není schůdný. A tehdy potřebujeme **kombinatoriku**.

Nechť $\mathcal{M}$ je n-prvková množina, z níž budeme provádět výběry k prvků podle určitých pravidel. Prvky množiny $\mathcal{M}$ nemusíme nijak konkretizovat. Abychom si však o výběrech a pravidlech pro jejich tvorbu dokázali udělat nějakou názornou představu, je taková konkretizace vhodná. Prvky množiny $\mathcal{M}$: mohou být třeba žáci ve třídě, barvy, hrací karty, apod. Výběry mohou představovat třeba družstva pro odbíjenou, signály tvořené barevnými praporky, možnosti rozdání karet při mariáši, apod. Jednotlivé typy výběrů získaly své názvy právě na základě pravidel stanovených pro jejich vytváření. Rozhodující jsou dvě základní kritéria:

- Je pro tvorbu výběru podstatné pořadí prvků ve výběru či nikoliv?
- Mohou se prvky ve výběru opakovat či nikoliv?

Typy výběrů shrnuje následující diagram:



Obrázek 1.1: *Typy výběrů. [1, s. 201]*

Představuje-li daný výběr například volejbalové družstvo osmi děvčat (šest hráček a dvě náhradnice), které bude reprezentovat v soutěži třídu osmou bé, do níž chodí 25 děvčat a 18 chlapců, jedná se o výběr k—8 prvků z počtu $n = 25$ prvků. Chlapce nelze postavit do družstva volejbalistek. Každý výběr možného družstva bude představovat *kombinaci bez opakování*, neboť pořadí hráček nehraje roli a třeba Aničku Novákovou máme ve třídě jen jednu. Budeme-li však chtít vytvářet z deseti cifer $0, 1, \ldots, 9$ trojciferná čísla, pak tyto výběry tří prvků z deseti ($k = 3$, $n = 10$) jsou *variacemi s opakováním*. Čísla 125, 512, 251, 215, 521 a 152 jsou totiž různá, a například 222 je také trojciferné číslo. Kombinace s opakováním bychom mohli vytvářet třeba i při výběru různobarevných ponožek ze zásuvky a konečně *variacemi bez opakování* by mohly být dejme tomu trojbarevné signály ($k = 3$) tvořené trojicemi barevných hadříků vybíraných z n barev (pro $n = 3$ třeba zrovna z těch ponožek). Nyní bychom však rádi věděli, jak pro zadané hodnoty n a k určit počet všech možných výběrů předepsaného typu. Ukážeme si to na příkladech.

Příklad 1.1.2. ***Šance milion**:*
„Znáte nějakou jinou hru, kde můžete denně vyhrát milion?“ Tento nebo jiný, obdobně nepříliš vtipný reklamní slogan propaguje v televizi hru, jejímž cílem je uhodnout šestici tažených cifer ve správném pořadí. (Hru raději nehrajte, pravděpodobnost výhry je mizivá.) Tah se provádí následovně: V každém ze šesti bubnů, očíslovaných pořadovými čísly 1 *až* 6, *je připraveno deset míčků opatřených ciframi* $0, 1, \ldots, 9$. *Z prvního bubnu se náhodně vylosuje jedna cifra (deset možností). Poté se náhodně vylosuje jedna cifra z druhého bubnu (opět deset možností). Možností vzniku uspořádané dvojice cifer (jedna cifra z prvního a druhá z druhého bubnu) je již sto (každou možnost výsledku u prvního bubnu lze kombinovat s každou možností výsledku z druhého bubnu). Losování pokračuje u třetího, čtvrtého, pátého a šestého bubnu. Celkový počet možností je* $1 \cdot 10^6$, *tedy* ***milion***. *(Šance získat výhru, tedy vyhrát milion, je ovšem pouze jedna milióntina, neboť z milionu možností je pouze jedna skutečně tažena.)*

Zobecněním předchozího příkladu získáváme vzorec pro počet **variací s opakováním** k-té třídy z n prvků. Při tahu totiž záleží na pořadí bubnů a každý buben obsahuje všechny cifry. Výsledky tahů z jednotlivých bubnů se tedy mohou opakovat. Pokud by bubnů bylo k a v každém n různých cifer, dostali bychom pro **variace s opakováním k-té třídy z n prvků** celkový počet

$$\boxed{V'_k = n^k}. \tag{1.2}$$

Příklad 1.1.3. ***Modifikovaná šance milion:***
Představme si hru z předchozího příkladu upravenou takto: K dispozici bude jen jeden buben s ciframi $0, 1, \ldots, 9$, *každá cifra je v bubnu obsažena pouze jednou. Opět máme losovat uspořádanou* ***šestici cifer***. *Nyní se však jedná o* ***variace šesté třídy z deseti prvků bez opakování***. *S jediným bubnem musíme totiž provést šest losování, přičemž při každém losování ubude z bubnu jedna cifra. Při prvním tahu je deset možností, při druhém již jen devět, atd., při šestém již pouze pět možností. Celkem je tedy* $10 \cdot 9 \cdots 5 = 151\,200$ *možností.*

Uvážíme-li, že v předchozím příkladu je $n = 10$ a $k = 6$, dostáváme pro **počet variací bez opakování k-té třídy z n prvků** obecný vztah

$$V_k(n) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

neboli

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}\,. \tag{1.3}$$

Poznamenejme, že $n!$ značí **faktoriál**, $n! = n(n—1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Pro nulu definujeme $0! = 1$. Je zřejmé, že při vytváření variací bez opakování musí být $k \leqq n$. Variace bez opakování n-té třídy z n prvků se nazývají **permutace**. Každá z nich představuje určité uspořádání těchto n prvků. Platí

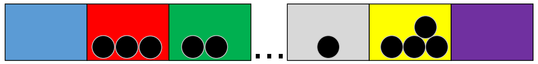
$$\boxed{P(n) = V_n(n) = n!}. \tag{1.4}$$

Nyní odvodíme vzorec pro počet **kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování**. Již jsme si řekli, že *kombinací* rozumíme takový výběr z celkového počtu n prvků, který obsahuje určitých k prvků nezávisle na jejich pořadí. Představme si, že máme k dispozici všechny variace bez opakování k-té třídy ze zmíněných n prvků. Vezměme kteroukoli z nich. Soubor všech variací k-té třídy z n prvků však obsahuje i další variace, lišící se od té naší jen pořadím prvků. Celkem je takových variací (i s tou první) $k!$ a z hlediska kombinací představují totéž. Soubor variací se tak rozpadá na podsoubory, z nichž každý obsahuje $k!$ variací lišících se navzájem pouze pořadím prvků. Každý z těchto podsouborů představuje však jedinou kombinaci. Počet kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování je tedy

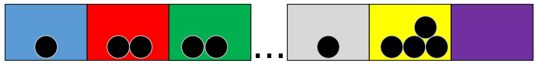
$$\boxed{C(k) = \frac{V_k(n)}{P(k)} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}}. \tag{1.5}$$

Pro odvození vzorce pro **kombinace s opakováním** použijeme opět příkladu.

Příklad 1.1.4. ***Kuličky v přihrádkách:***
*Máme kuličky n různých barev, v každé barvě máme tolik kuliček, kolik bude potřeba. Naším úkolem je vytvářet výběry k kuliček. Na **pořadí barev nezáleží**, kuliček jedné barvy může být ve výběru libovolný počet $0 \leqq s \leqq k$. Výběry budeme vytvářet tak, že budeme kuličky dávat do n přihrádek, z nichž každá bude vyhrazena pro určitou barvu. Pokud tedy v daném výběru zrovna nebude třeba modrá kulička, bude přihrádka vyhrazená pro modrou barvu prázdná. Budou-li v daném výběru právě tři červené kuličky, budou umístěny v přihrádce vyhrazené pro červenou barvu. Vidíme, že pokud konkrétním přihrádkám přisoudíme konkrétní barvy, samotné kuličky by již barevné být nemusely, stačily by třeba kuličky skleněné, bezbarvé. Zůstane-li například přihrádka pro modrou barvu prázdná, víme, že daný výběr neobsahuje modrou barvu. Budou-li v přihrádce pro červenou barvu tři (bezbarvé) kuličky, víme, že daný výběr obsahuje červenou barvu třikrát. Příklad takové situace ukazuje následující schéma:*



Náš úkol můžeme přeformulovat takto: Je třeba rozmístit k kuliček do n přihrádek. V každé přihrádce může být obecně s kuliček, kde $0 \leqq s \leqq k$, přitom celkový počet kuliček musí být samozřejmě stále k. Můžeme si představit, že k kuliček máme položených v řadě na polici mezi dvěma pevnými stěnami (krajní svislé čáry v předchozím schématu) a různé způsoby rozmístění kuliček do přihrádek provádíme přemísťováním pohyblivých přepážek. Kdybychom například v předchozím schématu přesunuli druhou svislou čáru, počítáno zleva, až za první kuličku v přihrádce na červenou barvu, dostaneme uspořádání, při němž je v přihrádce na modrou barvu jedna kulička a v přihrádce na červenou barvu dvě kuličky. Tedy takto:



Mezi dvěma krajními pevnými stěnami máme tedy k dispozici k pozic pro kuličky a $(n-1)$ pozic pro pohyblivé přepážky. Celkem tedy $(n+k-1)$ pozic, na které můžeme libovolně rozmísťovat k kuliček a $(n-1)$ přepážek. Do těchto $(n+k-1)$ pozic můžeme umístit k kuliček $C'_k(n)$ způsoby, kde

$$\boxed{C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}}. \tag{1.6}$$

Na zbylé pozice již musíme umístit přepážky. Nebo naopak, nejprve umístíme $(n-1)$ přepážek a potom kuličky. Výsledek je stejný, jak je vidět z předchozího vzorce. Protože jsme vytváření kombinací s opakováním k-té třídy z n prvků převedli na úlohu o rozmísťování kuliček do přihrádek, udává získaný vzorec právě počet takových kombinací. Aby měl vzorec smysl, musí platit $n+k-1 \geqq k$, tedy $n \geqq 1$.

Komu nevyhovuje představa kuliček v přihrádkách a má raději čísla, může uvažovat následovně: Tak jako je každé číslo v desítkové soustavě zapsáno pomocí cifer $0, 1, 2, \ldots, 8, 9$, je k jeho zápisu ve dvojkové soustavě potřeba pouze dvou cifer, nuly a jedničky. Představme si nyní přepážku jako jedničku a kuličku jako nulu. Náš úkol zjistit počet všech možných způsobů rozdělení k kuliček do n přihrádek, ohraničených $(n+1)$ přepážkami, můžeme převést na ekvivalentní problém: Kolik dokážeme najít čísel, která jsou ve dvojkové soustavě zapsána právě k nulami a $(n+1)$ jedničkami, požadujeme-li, aby první i poslední cifrou byla jednička? Odpověď je jednoduchá. Máme k dispozici $(n+k+1)$ pozic pro cifry. První a poslední pozice jsou pevně obsazeny jedničkami, volných pozic je tedy pouze ($n+k$—1). Počet všech různých způsobů, kterými na k z těchto pozic můžeme umístit nuly, je roven počtu kombinací k-té třídy z ($n+k$—1) prvků. Na zbylé pozice již musíme umístit jedničky. Komplementárně, budeme-li hledat počet všech možných způsobů, jak na (n—1) pozic umístit jedničky, dostaneme shodný výsledek, v souhlasu se vzorcem (1.5).

Příklad 1.1.5. ***Obsazování kvantových stavů:***
*Úloha o kuličkách a přihrádkách má přímou aplikaci v **kvantové fyzice**. Představme si, že fyzikální soustava je tvořena K částicemi. Každá částice se nachází v určitém stavu, v němž jí můžeme přisoudit fyzikální charakteristiky, které jsou s tímto stavem spojeny (třeba energii, moment hybnosti, apod.). Jednotlivé stavy jsou pak rozlišitelné právě pomocí těchto charakteristik. Dejme tomu, že přípustných stavů je $n \geqq 1$. Problémem kvantové fyziky je to, že kvantové částice jsou nerozlišitelné. Nepoznáme jednu od druhé. Je to stejné, jako bychom měli k naprosto stejně vypadajících kuliček, které nemáme nijak očíslovány. Záměna dvou částic (nerozlišitelných kuliček) se nepozná, nevede tedy ke změně stavu fyzikální soustavy. Pro hodnoty fyzikálních charakteristik soustavy jako celku je tedy důležité jen to, kolik částic je v každém z přípustných stavů. Musíme se tedy zajímat o to, kolika způsoby lze našich k **nerozlišitelných částic** (kuliček) umístit do n **stavů** (přihrádek). Kvantové částice jsou však dvojího druhu, **fermiony** (například elektrony, neutrony, protony, jádra s lichým počtem nukleonů) a **bosony** (například fotony, mezony, jádra se sudým počtem nukleonů). Rozdíl mezi nimi je ten, že bosony se „dobře snášejí“, a proto jich může být v jednom stavu i více.*

- *Počet možností, jak rozmístit k **bosonů** po n stavech je tedy*

$$N_{boson} = \binom{n+k-1}{k}$$

- *S **fermiony** je tomu jinak. **Pauliho vylučovací princip** jim zakazuje, aby v daném stavu byl více než jeden fermion. Stav může být buď prázdný, nebo obsazen jedním fermionem. V takovém případě musí být $n \geqq k$ a v každé přihrádce může být nejvýše jedna kulička. Situace tak odpovídá **kombinacím bez opakování k-té třídy z n prvků**, tj.*

$$N_{fermion} = \binom{n}{k}$$

Získané kombinatorické vzorce nyní použijeme při řešení základních úloh o pravděpodobnostech. V každé úloze bude důležité

- definovat jev A, jehož pravděpodobnost počítáme,
- určit počet N případů možných, tj. počet všech možných výsledků pokusu, při kterém sledujeme, zda jev A nastal či nenastal,
- určit počet M případů příznivých, tj. počet těch výsledků daného pokusu, při kterých jev A nastal.

Příklad 1.1.6. ***Výhra ve sportce***

Jaká je pravděpodobnost hlavní výhry ve sportce? Všichni víme, že malá, ale máme představu, jak malé toto číslo je? Při sportce se losuje $k = 6$ čísel a jedno dodatkové z celkového počtu $n = 49$ čísel. (Dříve byla čísla spojena s názvy sportů, odtud název „sportka“.) Na pořadí čísel ve výběru nezáleží, vytažené číslo se do hry nevrací. Jde tedy o ***kombinace bez opakování****. Hlavní výhra požaduje uhodnout všech 6 tažených čísel. Jev A je tedy definován takto:*

- *Jev A: Bude taženo právě oněch 6 čísel, která jsem vsadil. Počet možností, které při tahu sportky mohou nastat (počet případů možných), je $N = \binom{n}{k} = \binom{49}{6}$. Hlavní výhru představuje jediná kombinace, počet příznivých případů je proto $M = 1$. Pravděpodobnost hlavní výhry ve sportce, tj. pravděpodobnost jevu A, je*

$$p(A) = \frac{M}{N} = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{43!6!}{49!} = \frac{720}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} \simeq 7 \cdot 10^{-8} = 7 \cdot 10^{-6}\ \%$$

Pravděpodobnost hlavní výhry je velmi malá, sedm milióntin procenta.

- *A o kolik lepší to bude s pravděpodobností některé z vedlejších výher? Tak třeba pátá cena znamená, že je nutné ze šesti tažených čísel uhodnout libovolné tři. Jev A je tedy: Ze šesti čísel, která jsme vsadili, budou v tažené kombinaci obsažena právě tři libovolná z nich. Počet N zůstává stejný jako v předchozí části úlohy. Je třeba jen určit M. Každý příznivý případ vzniká tak, že trojice správných čísel (výběry tří ze šesti) je doplněna trojicí chybných čísel (výběry tří ze čtyřiceti tří). Tedy $M = \binom{6}{3}\binom{49-6}{3} = \binom{6}{3}\binom{43}{3}$,*

$$p(A) = \frac{M}{N} = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \left(\frac{6!}{3! \cdot 3!}\right)\left(\frac{43!}{40! \cdot 3!}\right)\left(\frac{43!6!}{49!}\right)$$

$$= \frac{120 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 720}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 36} \simeq 0{,}018.$$

Tato pravděpodobnost již zanedbatelná není, na rozdíl od finanční částky, jíž bývá ohodnocena pátá cena. Sázení sportky může domácímu rozpočtu spíše ublížit.

- *Třetí, resp. čtvrtá cena jsou, podobně jako první a pátá, definovány velmi jednoduše. Je třeba uhodnout pět, resp. čtyři ze šesti tažených čísel. V případě druhé ceny hraje roli dodatkové číslo. Druhou cenu získává ten, kdo uhodl pět ze šesti čísel vylosovaných v prvním tahu a ještě navíc číslo dodatkové, které se losuje ze zbylých 43 čísel, jež zůstala po prvním tahu v osudí. Jev A je tedy definován takto:*

  Ze šesti čísel, která jsem vsadil, bude při prvním tahu vylosováno libovolných pět a v druhém tahu bude vylosováno právě to dodatkové číslo, které jsem vsadil. Počet případů příznivých je pouze $M = \binom{6}{5}$, neboť šestým číslem nemůže být libovolné ze 43 čísel, která nebyla v prvním tahu vylosována, ale musí to být právě číslo dodatkové. Pravděpodobnost jevu A je

$$p(A) = \frac{M}{N} = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{49}{6}} \simeq 4{,}2 \cdot 10^{-17}.$$

Pokud bychom jako jev A označili výhru jakékoliv ceny, dostaneme

$$M = \sum_{6}^{k=3} \binom{6}{k}\binom{43}{6-k} + \binom{6}{5}$$

$$= \binom{6}{3}\binom{43}{3} + \binom{6}{4}\binom{43}{2} + \binom{6}{5}\binom{43}{1} + \binom{6}{6}\binom{43}{0} + \binom{6}{5},$$

$$p(A) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3} + \binom{6}{4}\binom{43}{2} + \binom{6}{5}\binom{43}{1} + \binom{6}{6}\binom{43}{0} + \binom{6}{5}}{\binom{49}{6}} =\simeq 0{,}019.$$

Všimněte si, že tento výsledek je roven součtu pravděpodobností výhry páté, čtvrté, třetí, druhé a hlavní ceny. Později si tento závěr ještě připomeneme.

Příklad 1.1.7. ***Losování karet***

Máme karetní hru mariáš, která obsahuje celkem 32 karet osmi hodnot 7, 8, 9, 10, J (kluk), Q (dáma), K (král), A (eso), každá hodnota je ve čtyřech barvách, červené barvy jsou ♡ (srdce) a ♢ (kára), černé barvy jsou ♠ (piky) a ♣ (kříže). Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném vylosování deseti karet budou mezi nimi:

A *právě dvě esa,*

B *alespoň dvě esa,*

C *nejvýše dvě esa,*

D *alespoň šest karet stejné barvy,*

E *právě dvě dámy a alespoň jeden kluk,*

F *právě dvě dámy nebo alespoň jeden kluk?*

Písmena (A) až (F) představují různé části úlohy a také zároveň definují jevy, jejichž pravděpodobnost počítáme. Jedná se opět o kombinace. Nezáleží totiž na pořadí, v jakém karty vytahujeme. Důležité je jen to, zda jsou vyjmenované karty ve výběru obsaženy. Počet možných výsledků náhodného vylosování deseti karet z dvaatřiceti, tj. počet případů možných, je pro všechny části úlohy stejný,

$$N = \binom{32}{10} = \frac{32 \cdot 31 \cdots 24 \cdot 23}{10 \cdot 9 \cdots 2 \cdot 1} = 64\,512\,240.$$

Počítejme nyní případy příznivé pro jednotlivé jevy A až F a pravděpodobnosti těchto jevů:

$$M(A) = \binom{4}{2}\binom{32-4}{10-2} = \binom{4}{2}\binom{28}{8} = 6\cdot\frac{28\cdot 27\cdots 1}{8\cdot 7\cdots 2\cdot 1} = 18\,648\,630.$$

Jak jsme k tomuto výsledku došli? Příznivý pro daný jev je každý výběr, v němž jsou obsažena právě dvě esa (libovolných barev) a žádná další esa (význam slova „právě"). Počet výběrů dvou es z celkového počtu čtyř es je $C_2(4)$, počet výběrů dalších libovolných osmi karet ze zbývající části hry, která vznikne po odstranění es (nechceme, aby v příznivém výběru byla další esa), je $C_{(10-2)}(32-4) = C_8(28)$. Každý výběr dvojice es lze kombinovat s každým výběrem zbývajících osmi karet ze zbytku hry, tj. $M(A) = C_2(4)\cdot C_8(28)$. A to je právě náš předchozí výsledek. Potom:

$$p(A) = \frac{M(A)}{N} = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{8}}{\binom{32}{10}} = \frac{18\,648\,630}{64\,512\,240} \simeq 0{,}29$$

Aby nastal jev B, požadujeme, aby v náhodném výběru deseti karet z dvaatřiceti byla alespoň dvě esa. To znamená, že výběr považujeme za příznivý, obsahuje-li dvě esa libovolné barvy a osm libovolných karet jiné hodnoty, nebo obsahuje tři esa libovolné barvy a sedm libovolných karet jiné hodnoty, nebo obsahuje všechna čtyři esa a šest libovolných karet jiné hodnoty, k es (pro $k = 2, 3, 4$) můžeme ze čtyř es vybrat $\binom{4}{k}$ způsoby. $10-k$ karet jiné hodnoty pak musíme vybírat pouze z 28 karet (esa je nutno odstranit, aby bylo zaručeno, že „doplňkové" karty budou mít jinou hodnotu než eso). Výběr zbývajících karet lze učinit $\binom{28}{10-k}$ způsoby. Nakonec tedy dostáváme

$$\begin{aligned} M(B) &= \binom{4}{2}\binom{28}{8} + \binom{4}{3}\binom{28}{7} + \binom{4}{4}\binom{28}{6} \\ &= 6\cdot\frac{28\cdot 27\cdots 22\cdot 21}{8\cdot 7\cdots 2\cdot 1} + 4\cdot\frac{28\cdot 27\cdots 23\cdot 22}{7\cdot 6\cdots 2\cdot 1} + 4\cdot\frac{28\cdot 27\cdots 24\cdot 23}{6\cdot 5\cdots 2\cdot 1} = 23\,761\,530, \\ P(B) &= \frac{M(B)}{N} = \frac{23\,761\,530}{64\,512\,240} \simeq 0{,}37. \end{aligned}$$

Pozn.: Někomu se předchozí výpočet může zdát příliš složitý. Nelze jej nějak zjednodušit? Co kdybychom uvažovali třeba takto: Výběr dvou es již zajistí splnění požadavku. Doplňkové karty tedy již pak můžeme vybírat ze třiceti karet - nebudeme tedy odstraňovat esa, protože budou-li vybrána mezi doplňkovými kartami, požadavek „alespoň dvou es ve výběru" to nenaruší. Při takové interpretaci bychom dostali

$$M(B) = \binom{4}{2}\binom{30}{8} = 6\cdot\frac{30\cdot 29\cdots 24\cdot 23}{8\cdot 7\cdots 2\cdot 1} = 35\,117\,550.$$

Vidíme, že vyšlo číslo vyšší než při předchozí úvaze. Co je tedy správně? Správně je první úvaha vedoucí k nižšímu počtu příznivých případů. Při druhé úvaze jsme některé případy započetli vícekrát. Zkuste přijít na to, jak se to stalo. V každém případě vidíme, že kombinatorické úvahy, ať již vypadají jakkoli jednoduše, mohou být zrádné a je třeba dát si na ně pozor.

Jev C podle zadání nastane, obsahuje-li náhodný výběr deseti karet nejvýše dvě esa. Znamená to, že výběr je příznivý, neobsahuje-li žádné eso a obsahuje deset karet jiné hodnoty, nebo obsahuje-li jedno eso a devět karet jiné hodnoty, nebo obsahuje-li dvě esa a osm karet jiné hodnoty. Počet $M(C)$ určíme analogicky jako $M(B)$, ale pro $k = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} M(C) &= \binom{4}{0}\binom{28}{10} + \binom{4}{1}\binom{28}{9} + \binom{4}{2}\binom{28}{8} \\ &= \cdot\frac{28\cdot 27\cdots 20\cdot 19}{10\cdot 9\cdots 2\cdot 1} + 4\cdot\frac{28\cdot 27\cdots 21\cdot 20}{9\cdot 8\cdots 2\cdot 1} + 6\cdot\frac{28\cdot 27\cdots 22\cdot 21}{8\cdot 7\cdots 2\cdot 1} = 59\,399\,340, \\ P(C) &= \frac{M(C)}{N} = \frac{59\,399\,340}{64\,512\,240} \simeq 0{,}92. \end{aligned}$$

Jev D znamená alespoň šest karet stejné barvy (připomeňme, že barvou rozumíme jednu z možností $\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\clubsuit$). Hra obsahuje osm karet od každé barvy. Současně je tedy zřejmé, že karet stejné barvy může být ve výběru nejvýše osm. Výběr je příznivý pro $k = 6, 7, 8$. Obdobnou úvahou jako v předchozích případech dostáváme

$$M = 4\cdot\sum_{k=6}^{8}\binom{8}{k}\binom{32-8}{10-k} = 1\,255\,984.$$

Faktor 4 před celou sumou se objevuje proto, že nebylo specifikováno, která ze čtyř barev má být zastoupena alespoň šesti kartami. Všechny čtyři možnosti volby barvy jsou tedy příznivé. Pravděpodobnost jevu D je

$$p(D) = \frac{M(D)}{N} = \frac{4\cdot\sum_{k=6}^{8}\frac{8!}{k!(8-k)!}\frac{24!}{(10-k)!(14-k)!}}{\binom{32}{10}} = \frac{1\,255\,984}{64\,512\,240} \simeq 0{,}019.$$

Případy (E) a (F) v zadání se liší pouze slůvkem „a" a „nebo". Uvidíme, že nejde o slovíčka, ale o podstatný rozdíl.

Aby nastal jev E, požadujeme, aby náhodný výběr deseti karet obsahoval právě dvě dámy a alespoň jednoho kluka. Znamená to, že výběr je příznivý, obsahuje-li dvě dámy libovolné barvy a současně alespoň jednoho kluka libovolné barvy. Příznivé možnosti tedy jsou:

1. *dvě dámy libovolné barvy, jeden kluk libovolné barvy, 7 libovolných karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem $\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{32-2\cdot 4}{7} = 8\,306\,496$ možností,*
2. *dvě dámy libovolné barvy, dva kluci libovolné barvy, 6 libovolných karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem $\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{32-2\cdot 4}{6} = 4\,845\,456$ možností,*
3. *dvě dámy libovolné barvy, tři kluci libovolné barvy, 5 libovolných karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem $\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{32-2\cdot 4}{5} = 1\,020\,096$ možností,*
4. *dvě dámy libovolné barvy, všichni čtyři kluci, 4 libovolné karty, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem $\binom{4}{2}\binom{4}{4}\binom{32-2\cdot 4}{4} = 63\,756$ možností.*

$$M(E) = \binom{4}{2} \cdot \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} \binom{24}{8-k} = 6\left[4\binom{24}{7} + 6\binom{24}{6} + 4\binom{24}{5} + \binom{24}{4}\right] = 14\,235\,804,$$

$$p(E) = \frac{M(E)}{N} = \frac{14\,235\,804}{64\,512\,240} \simeq 0{,}22.$$

Aby nastal jev F, požadujeme, aby náhodný výběr deseti karet obsahoval právě dvě dámy nebo alespoň jednoho kluka. Znamená to, že výběr je příznivý, obsahuje-li dvě dámy libovolné barvy a jakékoli další karty, nebo obsahuje alespoň jednoho kluka a jakékoli další karty. Nyní je nutno o všech možnostech pečlivě rozvažovat, abychom některé nezapočítali vícekrát. Pozor, slůvko „nebo“ zde nemá vylučovací význam, připouští se, že mohou být splněny obě podmínky jevu F, tj. jak právě dvě dámy, tak alespoň jeden kluk. Příznivé možnosti jsou

1. *dvě dámy libovolné barvy, žádný kluk, 8 libovolných karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem*
$$\binom{4}{2}\binom{4}{0}\binom{32-2\cdot 4}{8} = 6\binom{24}{8},$$
2. *žádná dáma, k kluků libovolné barvy pro $k = 1, 2, 3, 4$ (alespoň jeden kluk), $10 - k$ karet, které nemají hodnotu dám y ani kluka, celkem*
$$\binom{4}{0}\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{32-2\cdot 4}{10-k} = \sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{24}{10-k},$$
3. *jedna dáma libovolné barvy, k kluků libovolné barvy pro $k = 1, 2, 3, 4$ (alespoň jeden kluk), $10 - k - 1$ karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem*
$$\binom{4}{1}\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{32-2\cdot 4}{10-k-1} = 4\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{24}{9-k},$$
4. *dvě dámy libovolné barvy, k kluků libovolné barvy pro $k = 1, 2, 3, 4$ (alespoň jeden kluk), $10 - 2 - k = 8 - k$ karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem*
$$\binom{4}{2}\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{32-2\cdot 4}{10-k-2} = 6\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{24}{8-k},$$
5. *tři dámy libovolné barvy, k kluků libovolné barvy pro $k = 1, 2, 3, 4$ (alespoň jeden kluk), $10-k-3$ karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem*
$$\binom{4}{3}\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{32-2\cdot 4}{10-k-3} = 4\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{24}{7-k},$$
6. *všechny čtyři dámy, k kluků libovolné barvy pro $k = 1, 2, 3, 4$ (alespoň jeden kluk), $10 - k - 4$ karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem*
$$\binom{4}{4}\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{32-2\cdot 4}{10-k-4} = \sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{24}{6-k},$$

Počet příznivých případů $M(F)$ je dán součtem všech těchto možností, tedy

$$M(F) = \binom{4}{2}\binom{4}{0}\binom{24}{8} + \sum_{s=0}^{4}\binom{4}{s}\left[\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{24}{10-k-s}\right].$$

Všimněme si nyní výsledku. Výraz s dvojitou sumou můžeme přepsat jak

$$\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\left[\sum_{s=0}^{4}\binom{4}{s}\binom{24}{10-k-s}\right].$$

V učebnicích můžeme najít různé vzorce pro kombinační čísla, mezi nimi i vzorec

$$\sum_{s=0}^{p}\binom{p}{s}\binom{r}{q-s} = \binom{r+p}{q} \qquad \textit{pro} \qquad r \geq q,\ q \geq p.$$

(Nebo si jej můžeme sami odvodit — pokuste se o to!) Pro $p = 4$, $r = 24$, $q = 10-k$, $1 \leq k \leq 4$ máme právě náš případ, takže

$$\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\left[\sum_{s=0}^{4}\binom{4}{s}\binom{24}{10-k-s}\right] = \sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{24}{10-k}.$$

Jak můžeme tento výsledek interpretovat? Jedná se o počet případů, kdy náhodný výběr deseti karet z mariášové hry dvaatřiceti karet obsahuje alespoň jednu kartu pevně zvolené hodnoty (v našem případě kluka), bez ohledu na to, kolik obsahuje karet ostatních hodnot. Přidáme-li počet případů, kdy výběr neobsahuje žádného kluka a právě dvě dámy, dostaneme právě počet případů příznivých pro jev F. Př úpravě použijeme ještě jednou vzorce

$$\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{28}{10-k} = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\binom{28}{10-k} - \binom{4}{0}\binom{28}{10} = \binom{32}{10} - \binom{28}{10},$$

$$\begin{aligned}
M(F) &= \binom{4}{2}\binom{4}{0}\binom{24}{8} + \sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\left[\sum_{s=0}^{4}\binom{4}{s}\binom{24}{10-k-s}\right] \\
&= \binom{4}{2}\binom{24}{8} + \sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{28}{10-k} \\
&= \binom{4}{2}\binom{24}{8} + \left[\binom{32}{10} - \binom{28}{10}\right] = \binom{32}{10} - \left[\binom{28}{10} - \binom{4}{2}\binom{24}{8}\right],
\end{aligned}$$

$$p(F) = 1 - \frac{\binom{28}{10} - \binom{4}{2}\binom{24}{8}}{\binom{32}{10}} = 1 - \frac{8\,710\,284}{64\,512\,240} \simeq 0{,}86.$$

Zamysleme se ještě nad interpretací posledního výrazu pro $M(F)$. Od počtu všech možných případů se odečítá hodnota $\binom{28}{10}$ představující počet situací, kdy ve výběru nebude žádný kluk, zmenšená o hodnotu $\binom{4}{2}\binom{24}{8}$, která představuje počet situací, kdy ve výběru budou právě dvě dámy a žádný kluk.

Příklad 1.1.8. *Sestavování čísel z cifer*
Máme k dispozici libovolný počet cifer $0, 1, \dots, 9$. Kolik k-ciferných čísel z nich můžeme sestavit? Odpověď na tuto otázku každý zná. Dvojciferná jsou čísla od 10 do 99 včetně, je jich tedy $(99 - 10 + 1) = 90$. Trojciferná jsou od 100 do 999 včetně, jejich počet je $(999 - 100 + 1) = 900$, k-ciferná jsou čísla od $100\dots0 = 1 \cdot 10^{k-1}$ do $999\dots9$ včetně (k devítek), jejich počet je $9 \cdot 10^{k-1}$. Tento výsledek bychom však měli získat i kombinatorickými úvahami. Čísla totiž dostáváme tak, že z deseti cifer $0, 1, \dots, 9$ vytváříme variace k-té třídy s opakováním, musíme však vyjmout ty možnosti, které začínají nulami. Dostáváme

$$10^k -$$

Jak jsme dostali odečítaný výraz v závorce? Hodnota $9 \cdot 10^{k-2}$ představuje počet těch výběrů cifer (s opakováním), které mají na první pozici pevnou nulu, na druhé pozici kteroukoli nenulovou cifru (9 možností) a na dalších $(k-2)$ pozicích kteroukoli cifru (10^{k-2} možností). Hodnota $9 \cdot 10^{k-3}$ je počet těch výběrů cifer (s opakováním), které mají na prvních dvou pozicích pevné nuly, na třetí pozici kteroukoli nenulovou cifru (9 možností) a na dalších $(k-3)$ pozicích kteroukoli cifru (10^{k-2} možností). A tak dále. Nakonec odečítáme ještě jedničku, která reprezentuje jediný výběr k cifer tvořený samými nulami. Kdybychom se nyní zeptali, jaká je pravděpodobnost, že při náhodném výběru ze souboru jednociferných až n-ciferných čísel vylosujeme třeba k-ciferné číslo, odpovíme si již snadno: Počet případů možných je

$$N(n) =$$

počet případů příznivých je $M(n, k) = 9 \cdot 10^{k-1}$. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$p(n, k)$$

Zkontrolujme si platnost získaného vzorce pro jednoduché případy, kdy ji snadno určíme přímo. Pro $n = 1$ a $k = 1$ je vylosování jednociferného čísla jevem jistým. A skutečně, náš vzorec dává

1.1.3 Sčítání a násobení - základní počty s pravděpodobnostmi

Někdy je třeba určit pravděpodobnosti jevů, které jsou nějakým způsobem „složeny“ z jevů jednodušších. Uvažujme například o jevech A a B, jejichž pravděpodobnosti známe a označíme je $p(A)$ a $p(B)$. Definujme nové jevy C a D takto:

$$C = A \text{ a } B, \qquad D = A \text{ nebo } B.$$

Vzniká přirozená otázka, zda můžeme na základě znalosti pravděpodobností $p(A)$ a $p(B)$ určit pravděpodobnosti $p(C)$ a $p(D)$. Ukazuje se, že za jistých předpokladů ano. Jako obvykle nám napoví příklady.

Odkazy

[1] J. Musilová, P. Musilová a V. učení technické v Brně, *Matematika I: pro porozumnění i praxi : netradiční výklad tradičních témat vysokoškolské matematiky*. VUTIUM, 2009, s. 339, ISBN: 9788021436312. WWW: `http://books.google.fr/books?id=vH5lQwAACAAJ` (cit. na s. 5, 6).

Část II

MA II

Table of Contents

Kapitola 2

Vícerozměrná linearita aneb lineární algebra podruhé

Contents

V kapitole **??** dílu I jsme se seznámili s elegantní dámou lineární algebrou. Pomocí jejích pravidel jsme nejen řešili soustavy lineárních rovnic, ale také počítali s maticemi a vektory. Zatímco operace s maticemi, a koneckonců i řešení lineárních rovnic pomocí matic bychom mohli chápat jako užitečnou ekvilibristiku s číselnými soubory, za počítáním s vektory se zdálo být přece jen něco hlubšího a závažnějšího. Vázané vektory pro nás totiž byly orientovanými úsečkami v trojrozměrném euklidovském prostoru, v němž bylo definováno měření délek a úhlů. Volné vektory pak byly množinami stejně velkých a souhlasně rovnoběžných orientovaných úseček. Jednalo se tedy o *geometrické objekty*. Každý vektor byl určen svou velikostí a směrem. Směr byl přitom zadán například pomocí úhlů mezi daným vektorem a vybranými směry, které byly předem pevně zvoleny. Mohli jsme s vektory provádět základní algebraické operace, jimiž jsou sčítání vektorů a násobení vektoru číslem, podle pravidel zavedených pro (v tomto případě řádkové) matice. S vektory v trojrozměrném prostoru jsme mohli velmi pohodlně počítat jako s trojicemi čísel. Na druhé straně jsme vektory vyjadřovali jako lineární kombinace jiných vektorů, tvořících v prostoru všech vektorů *bázi*. Koeficienty lineární kombinace, která představovala zápis daného vektoru ve zvolené bázi, byly jeho *složkami* v této bázi. Při změně báze se změnily složky vektoru, vektor sám však nikoliv. Vektor je stále sám sebou, jen se v různých bázích jinak tváří - projeví se jinou trojicí čísel. Protože se však při změně báze změní složky vektoru přesně definovaným způsobem (vzpomeňte na transformační vztahy), dokážeme jej vždy rozpoznat. Tuto vlastnost, *invarianci vůči volbě báze*, mají všechny geometrické objekty. A je to právě algebra, která nám umožňuje tyto objekty reprezentovat číselnými soubory a také tak s nimi počítat. Jde-li navíc o objekty řídící se lineárními pravidly. jakými jsou například distributivní zákony, je počítání s nimi, v rámci *lineární algebry*, zvláště jednoduché. Oceníme to zejména v prostorech vyšší dimenze, než je náš běžný euklidovský prostor. Při počítání s vektory v trojrozměrném prostoru, kde umíme měřit délky a úhly a kde platí trigonometrická pravidla, bychom se bez rutinních algebraických procedur ještě třeba obešli. Už ale například ve čtyřrozměrném časoprostoru, v němž se odehrávají všechny přírodní jevy a v němž je třeba formulovat fyzikální zákony, však pro měření délek a úhlů platí jiná pravidla, než jsou obvyklá v běžném, tj. trojrozměrném euklidovském, prostoru. Například tam neplatí čtyřrozměrná verze Pythagorovy věty. A někdy je příroda dokonce tak nepřívětivá, že nás nutí pracovat i s prostory vícerozměrnými. Například jedna z velmi účinných teorií pro výklad chování elementárních částic, teorie strum, je založena na geometrii prostoru jedenáctirozměrného. A v takových dimenzích jsme už s jakkoli vynikající geometrickou představivostí v koncích. Tehdy se vděčně obracíme k metodám algebry. V této kapitole, jak její název napovídá, půjde o algebru lineární

2.1 Prostory s vektory

V kapitole **??** jsme pracovali s číselnými maticemi typu m/n, tj. soubory čísel uspořádaných v m řádcích a n sloupcích, a zavedli jsme pro ně operaci součtu a násobení číslem. Zjistili jsme, že pro sčítání matic a násobení matice číslem platí určitá pravidla. (Jejich souhrn je uveden v samém závěru odstavce **??**. V odstavci **??** jsme zase počítali s vektory. Ty měly jednou *konkrétní podobu* řádkových matic s pravidly pro jejich sčítání a násobení číslem, podruhé, v trojrozměrném prostoru, naopak *konkrétní podobu* orientovaných úseček, resp. množin, které byly orientovanými úsečkami vytvořeny, generovány. Zavedli jsme tenkrát konkrétní způsob sčítání vektorů a násobení vektoru číslem pomocí geometrických operací. Součet dvou vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ znamenal, že jsme podle zcela určitého pravidla, pravidla vektorového rovnoběžníka přiřadili uspořádané dvojici $[\vec{u}, \vec{v}]$ třetí vektor $\vec{u} + \vec{v}$, násobek vektoru a čísla byl opět vektor $\alpha\vec{u}$, který jsme přiřadili dvojici $[\alpha, \vec{u}]$ tvořené číslem a vektorem. Uvedli jsem, že pravidla pro tyto *geometrické* operace jsou shodná s pravidly pro počítání s maticemi a lze je dokázat i geometrickými postupy. Množinu volných vektorů generovaných orientovanými úsečkami spolu s uvedenými dvěma operacemi jsme nazvali **vektorovým prostorem**. Šlo tedy o zcela odlišné množiny základních objektů a zcela odlišným způsobem definované operace, pro které se však dala dokázat tatáž pravidla. Nyní se podíváme na problém definice vektorového prostoru obecněji a poněkud „opačně“. Budeme pracovat s *nosnou množinou* V, a přitom nebude podstatné, jak konkrétně vypadají její prvky. Ani je nebudeme označovat šipkami (u šipek ze zvyku zůstaneme pouze v případě orientovaných úseček v $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, nebo vektorů s fyzikálním významem). Dále přibereme do hry množinu všech komplexních čísel $\mathbb{C}$, popřípadě jen množinu všech reálných čísel $\mathbb{R}$ a definujeme dvě operace (*zobrazení*):

$$V \times V \ni [a, b] \longrightarrow c \in V, \qquad \mathbb{C} \times V \ni [\alpha, a] \longrightarrow d \in V. \tag{2.1}$$

Prvek c nazýváme *součet* prvků a a b a značíme jej $c = a + b$ prvek d je α-*násobek* prvku a a značíme $d = \alpha a$. Zobrazení uvedená ve vztazích (2.1) však nebudou moci být úplně libovolná. Budeme požadovat, aby měla určité vlastnosti, konkrétně ty, které jsou uvedeny pro matice na konci odstavce **??**. Teprve pak řekneme, že množina V spolu s operacemi (2.1) splňujícími potřebné požadavky je vektorovým prostorem. Vidíme, že takto naše uvažování výrazně posuneme na abstraktní úroveň. Bude lhostejné, co jsou prvky nosné množiny, bude nepodstatné, jak konkrétně jsou definovány operace sčítání prvků a násobení prvku číslem. Důležité bude jen to, aby abstraktní operace s abstraktními prvky splňovaly konkrétní pravidla. Než však k definici vektorového prostoru přistoupíme, všimneme si ještě některých jiných struktur s jednou nebo dvěma operacemi, které samy do oblasti lineární algebry nepatří, ale mohou být užitečné pro definici vektorového prostoru, popřípadě mají významné fyzikální aplikace.

2.1.1 Algebraické struktury s jednou operací, hlavně grupy

Při zavádění operací s vektory jsme zcela automaticky využívali toho, že umíme počítat s reálnými, popřípadě i s komplexními čísly. Skutečnost, že čísla umíme sčítat, násobit a provádět s nimi řadu dalších operací, považujeme za tak přirozenou a samozřejmou, že nad ní vůbec nepřemýšlíme. Již samotné operace sčítání a násobení vytvářejí na množině čísel velmi bohatou **algebraickou strukturu**. Tento pojem si nyní přiblížíme.

Algebraickou strukturu s jednou operací získáme, vezmeme-li v úvahu první ze zobrazení (2.1), nosnou množinu označíme tentokrát podle zvyku G:

$$G \times G \ni [a,b] \longrightarrow a+b \in G, \qquad \text{nebo} \qquad G \times G \ni [a,b] \longrightarrow a \cdot b \in G. \tag{2.2}$$

Pokud použijeme první možnosti označení této operace, hovoříme o operaci *sčítání* a *aditivní* struktuře, v případě druhé možnosti o operaci *násobení* a *multiplikativní* struktuře. Toto terminologické rozlišení nemá obecně žádný hlubší význam. Je spíše otázkou zvyklosti a souvisí především s algebraickou strukturou číselných množin, kterou běžně používáme, aniž o ní přemýšlíme (čísla sčítá a násobí školák, obchodník i účetní a o nějaké abstraktní struktuře nic netuší).

Zobrazení (2.2) samo o sobě, aniž na ně klademe další požadavky (podstatné je pouze to, že dvěma prvkům nosné množiny přiřadí prvek *téže množiny*), definuje nejjednodušší algebraickou strukturu s jednou operací, zvanou **grupoid**. Grupoid není pro fyzikální aplikace příliš užitečný, ale je základem pro konstrukci zajímavějších a užitečnějších struktur. Přidáme-li k definici grupoidu požadavek *asociativity* zobrazení $G \times G \ni [a,b] \longrightarrow a+b \in G$ (nebo $G \times G \ni [a,b] \longrightarrow a \cdot b \in G$)

$$(a+b)+c = a+(b+c), \qquad \text{nebo} \qquad (a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c) \tag{2.3}$$

pro libovolné prvky $a,b,c \in G$, stane se množina G spolu s operací „+“, nebo „·“ **pologrupou**. I pologrupa je z hlediska fyzikálních aplikací poněkud chudá, další požadavek na zobrazení (2.2) z ní však již učiní strukturu v matematice i fyzice nepostradatelnou, grupu. Pologrupa, ve které existuje prvek $0_G \in G$ a současně ke každému prvku $a \in G$ existuje prvek $(-a) \in G$ tak, že platí

$$a + 0_G = 0_G + a = a, \qquad a+(-a) = (-a)+a = 0_G, \tag{2.4}$$

se nazývá **aditivní grupou**. Prvek 0_G je univerzální pro celou grupu (žádný jiný s touto vlastností v grupě G není) a nazývá se *neutrální prvek grupy* neboli **nula**, prvek $(-a)$ je **opačný** k prvku a. Pro dané a je určen jednoznačně. V případě operace násobení mají vlastnosti 2.4 tvar

$$a \cdot e_G = e_G \cdot a = a, \qquad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e_G, \tag{2.5}$$

a G se nazývá **multiplikativní grupou**. Prvek e_G je opět univerzální pro celou grupu a nazývá se **neutrální** prvek grupy, neboli *jednička*, prvek a^{-1} je **inverzní** k prvku a.

Každá operace 2.2 v množině G, která splňuje vztahy asociativity 2.3 a vztahy specifikující nulu a opačný prvek, nebo jedničku a inverzní prvek typu 2.4, nebo 2.5, představuje *grupovou operaci* bez ohledu na to, podobá-li se spíše sčítání, nebo spíše násobení, či dokonce něčemu jinému, například skládání zobrazení. Má-li grupa konečný počet prvků, nazývá se tento počet jejím *řádem*.

Příklad 2.1.1. *Kolik nul má (aditivní) grupa?*
Jak dokážeme, že má grupa právě jednu nulu? Co když předchozímu tvrzení nebudeme věřit? Můžeme se o jeho pravdivosti přesvědčit? Ten, kdo mu nevěří, si může třeba představit, že grupa má nuly dvě. Označme je 0_G a $\overline{0}_G$. Vztah 2.4 platí pro libovolný prvek grupy, proto $0_G + \overline{0}_G = 0_G$ (to jsme brali $a = 0_G$ a $\overline{0}_G$ považovali za nulu) a současně $0_G + \overline{0}_G = \overline{0}_G$ (nyní zase byl prvek 0_G v roli nuly a $a = \overline{0}_G$). Je vidět, že $0_G = \overline{0}_G$. Nula je tedy skutečně jen jedna. Podobnou úvahu můžeme provést pro jedničku multiplikativní grupy. Platí tedy tvrzení:

Neutrální prvek grupy je určen jednoznačně.

Stejně tak bychom mohli mít pochybnosti o tom, že opačný prvek k danému $a \in G$ je jen jeden. Předpokládejme, že b a c jsou dva opačné prvky k a. Platí $a + b = 0_G$. Přičteme k této rovnosti c zleva, tj. $c + a + b = c$. Protože však $c + a = 0_G$, dostáváme $b = c$ a tedy:

Opačný (resp. inverzní) prvek k libovolně zvolenému prvku grupy je určen jednoznačně.

V úvodu odstavce jsme se zmínili o tom, že množiny reálných a komplexních čísel získají zavedením běžných operací sčítání a násobení jistou algebraickou strukturu. Všimněme si jich nyní podrobněji.

Příklad 2.1.2. *Algebraická struktura a kupecké počty*
Uvažujme o množině reálných čísel $G = \mathbb{R}$ tak, jako bychom je uměli jen sčítat. Násobení si zatím nevšímejme. Sčítání reálných čísel je zobrazení typu prvního vztahu v 2.2, které bezpochyby splňuje požadavky 2.3 a 2.4. Neutrálním prvkem $0_{\mathbb{R}}$ je „obyčejná“ nula, opačným prvkem k číslu a je $-a$, položené na reálné ose symetricky k a vzhledem k nule. Množina reálných čísel s operací sčítání je tedy aditivní grupou. Pro operaci sčítání dokonce platí něco navíc - komutativní zákon

$$a+b = b+a \qquad \textit{pro libovolné} \qquad a,b \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Grupu s komutativním zákonem nazýváme grupou komutativní *nebo také* ***abelovskou****.*

Množina reálných čísel s operací sčítání je komutativní grupou.

Nyní se místo na sčítání zaměřme na násobení reálných čísel a znovu posuďme vlastnosti grupy. Násobení reálných čísel je zobrazením typu druhého vztahu v 2.2 a splňuje požadavek asociativnosti 2.3. Dále je zřejmé, že číslo $e_{\mathbb{R}}$ („obyčejná“ jednička) vyhovuje prvnímu požadavku ve vztazích 2.5. Potíž je s požadavkem druhým. Inverzní prvek najdeme jen k nenulovým číslům. Nula inverzní prvek nemá. Tato zdánlivá drobnost je příčinou toho, že ***množina reálných čísel s operací násobení není grupou****.*

Příklad 2.1.3. *Algebraická struktura na množině komplexních čísel*
Množina $\mathbb{C}$ komplexních čísel je kartézským součinem reálných os, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tedy množinou uspořádaných dvojic $[a,b]$ čísel reálných. Značíme $z = [a,b]$. Reálné číslo $a = \mathrm{Re}(z)$ je reálnou částí komplexního čísla z a reálné číslo $b = \mathrm{Im}(z)$ částí imaginární. *Operace sčítání a násobení komplexních čísel jsou definovány takto:*

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni [[a_1,b_1],[a_2,b_2]] \longrightarrow [a_1,b_1]+[a_2,b_2] = [a_1+a_2, b_1+b_2] \in \mathbb{C},$$
$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni [[a_1,b_1],[a_2,b_2]] \longrightarrow [a_1,b_1]\cdot[a_2,b_2] = [a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1] \in \mathbb{C}.$$

Množina komplexních čísel s operací součtu je komutativní grupou.

Jejím neutrálním prvkem je číslo $0_{\mathbb{C}} = [0,0]$, *opačným prvkem k číslu* $z = [a,b]$ *je* $-z = [-a,-b]$. *Při operaci násobení je neutrálním prvkem číslo [1,0], prvkem inverzním k číslu* $z = [a,b] \neq 0_{\mathbb{C}}$ *je*

$$z^{-1} = \left[\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right].$$

K číslu $0_{\mathbb{C}} = [0,0]$ *však inverzní prvek opět neexistuje. Množina komplexních čísel* ***není grupou vzhledem k násobení****.*

O podmnožině $H \subset C$ grupy G s operací sčítání nebo násobení zúženou na H, která je sama grupou, hovoříme jako o **podgrupě** grupy G. Například množina reálných čísel zapsaných ve tvaru $z = [a,0]$ se sčítáním je podgrupou množiny komplexních čísel. Koho grupy nebaví a chce se rychle prokousat k vektorovým prostorům, které jsou koneckonců hlavní náplní našeho příběhu o lineární algebře, může zbytek tohoto odstavce přeskočit. Ale byla by to škoda, grupy jsou opravdu zajímavé.

Příklad 2.1.4. *Struktura aditivní grupy na podmnožinách reálné osy*

Některé významné podmnožiny reálné osy mají svá zavedená označení. $\mathbb{N}$ *je množina přirozených čísel.* $\mathbb{Z}$ *množina celých čísel a* $\mathbb{Q}$ *množina racionálních čísel. Můžeme se zajímat o to, zda při zúžení definičního oboru operace sčítání na* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, *popřípadě* $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, *budou tyto množiny stále ještě grupami. Ihned vidíme, že množina přirozených čísel grupou nebude, neboť neobsahuje nulu ani záporná čísla, která jsou v grupě* $\mathbb{R}$. *opačnými prvky k číslům kladným. Tímto nedostatkem netrpí množiny celých a racionálních čísel, které tedy budou grupami.*

Příklad 2.1.5. *Grupy některých číselných objektů*

Komutativní grupou je například množina číselných matic typu m/m *(osazených reálnými nebo komplexními čísly) s obvyklým sčítáním matic. Není divu sčítání matic se děje po jednotlivých prvcích, které jsou čísly. Komutativní grupou je i množina všech funkcí reálné proměnné* $\mathscr{F}(\mathbb{R})$, *v níž je sčítání definováno „bod po bodu“*

$$\mathscr{F}(\mathbb{R}) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}) \ni [f,g] \longrightarrow f+g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}), \qquad kde\ (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. *Ve výsledku jde totiž opět jen o počítaní s čísly. Je zřejmé, že proměnná by mohla být i komplexní. Na množině všech reálných funkcí jedné reálné proměnné s definičním oborem* $\mathbb{R}$ *máme z kapitoly* **??** *definovanou operaci skládání funkcí. Tato operace je asociativní, funkce* $f(x) = x$ *(identita) hraje roli neutrálního prvku. Radost nám kazí pouze ty funkce, ke kterým neexistuje funkce inverzní s definičním oborem* $\mathbb{R}$, *tj. funkce, které nejsou prosté nebo jejich oborem hodnot není celé* $\mathbb{R}$. *Vezmeme-li v úvahu pouze podmnožinu prostých funkcí s oborem hodnot* $\mathbb{R}$, *vytváří na ni operace skládání strukturu (nekomutativní) grupy.*

Posuďme nyní algebraickou strukturu množiny čtvercových matic typu n/n *s operaci maticového násobení. Operace je zobrazením, které má tvar druhého vztahu v (2.2), asociativní zákon (2.3) rovněž platí. Jednotková matice hraje roli prvku* e_G, *avšak inverzní prvek existuje pouze k regulárním maticím. Množina matic typu* n/n *s operaci maticového násobení tedy není grupou. Pokud bychom se však omezili pouze na podmnožinu matic regulárních, potíž s inverzním prvkem odpadne.*

Množina regulárních čtvercových matic typu n/n *s operaci násobení je (nekomutativní) grupou.*

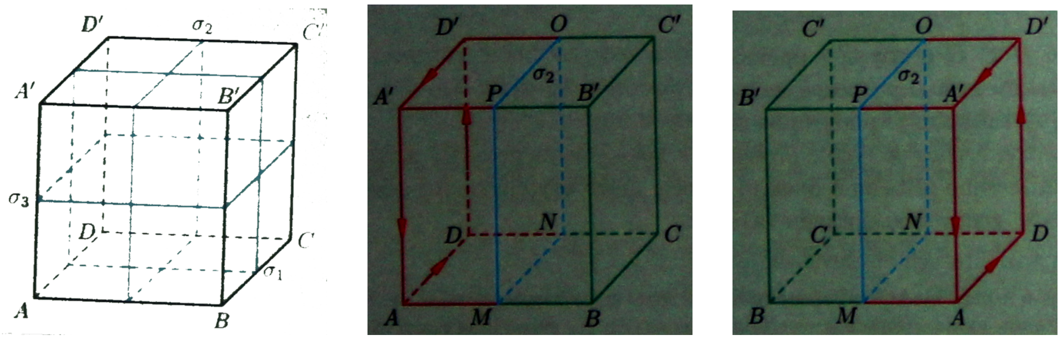
Tato grupa, ke které se později ještě vrátíme, je velmi důležitá ve fyzikálních teoriích.

Příklad 2.1.6. *Grupy nemusí být tvořeny jen čísly*

Operace sčítání nebo násobení si umíme velmi dobře představit, provádíme-li je standardním způsobem s čísly. Definice algebraických struktur jsou však obecné a zahrnují i jiné možnosti. Představme si například krychli, se kterou provádíme operace symetrie. *Jsou to všechna taková přemístění krychle z počáteční do koncové polohy, která „se nepoznají“. Znamená to, že krychle vypadá v koncové poloze stejně jako ve výchozí. Pokud bychom při přemísťování zavřeli oči, nepoznali bychom že někdo mezitím s krychlí hýbal. Přemístění jsou několikerých typů a definují* ***prvky symetrie*** *krychle. Abychom si je mohli názorně ukázat na obrázcích, označíme vrcholy, popřípadě jiné důležité body krychle písmeny. V některých ukázkách také použijeme hrací kostku. Prvky symetrie krychle můžeme roztřídit do následujících typů:*

- ***zrcadlení vzhledem k rovině symetrie*** *- existuje rovina, jejíž body zůstávají při přemístění v klidu,*
- ***rotace kolem osy symetrie*** *- existuje přímka (osa), jejíž body zůstávají při přemístění v klidu,*
- ***středová inverze*** *- existuje právě jeden bod (střed inverze), který při přemístění zůstává v klidu,*
- ***identita*** *- přemístění do téže polohy, v klidu jsou všechny body krychle*

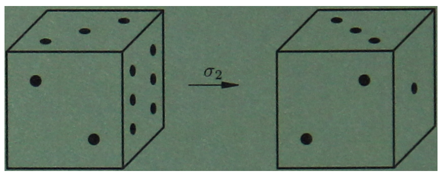
Jednotlivé typy prvků symetrie jsou znázorněny na obrázcích 2.1 až 4.15. Na obrázku 2.1a jsou vyznačeny tři symetrie krychle, σ_1, σ_2 *a* σ_3. *Zkuste najít a nakreslit další. Druhý z obrázku 4.1. znázorňuje situaci při zrcadlení vzhledem k rovině* σ_2. *Pro klasickou herní kostku pak operaci zrcadlení ilustruje obrázek 4.2.*



(a) *roviny symetrie* **(b)** *vzor* **(c)** *obraz*

Obrázek 2.1: *Prvky symetrie krychle - zrcadlení* **Musilova2012MA2**

Kolik existuje os symetrie krychle? Zkuste procvičit svou prostorovou představivost a zamyslet se nad touto otázkou sami ještě dříve, než se podíváte na obrázky. Vezměte si k tomu třeba libovolnou hrací kostku. (Pozor, rozmístění teček na vaší kostce může být jiné, než na té naší, podle které jsou nakresleny obrázky.) Na obrázku 4.3 jsou vyznačeny tři osy symetrie o_1^4, o_2^4, o_3^4*.Prvkem symetrie je otočení kolem kterékoli z nich o jedenkrát, dvakrát nebo třikrát* 90° *při čtvrtém otočeni o* 90° *přejde krychle do původní polohy. Osy se proto nazývají čtyřčetné (vyznačeno horním indexem). Obrázek 4.4 znázorňuje konkrétní situaci při otočení o úhel* 270° *kolem osy o, zatímco obrázek 4.5 ukazuje toto otočení pro klasickou herní kostku.*



Obrázek 2.2: *Prvky symetrie hrací kostky - zrcadlení.* **Musilova2012MA2**

Další čtyři osy symetrie odpovídají tělesovým úhlopříčkám krychle a jsou znázorněny na obrázku 4.6. Jsou označeny symboly o_1^3, o_2^3, o_3^3 *a* o_4^3 *a nazývají se trojčetné (víte proč?).*

Obrázky 4.7 a 4.8 odpovídají konkrétnímu otočení kolem osy o_3^3 *o úhel* $270°$.

Dalších šest os symetrie najdeme v obrázku 4.9. Každá z nich vždy prochází bodem S *(průsečíkem tělesových úhlopříček) a spojuje středy protilehlých hran. Tyto dvojčetné osy jsou označeny symboly* o_1^2, o_2^2, o_3^2, o_4^2, o_5^2, o_6^2. *Konkrétní příklad otočení kolem osy* o_1^2 *o úhel* $180\deg$ *ilustrují obrázky 4.10 a 4.11. Obrázky 4.12 a 4.13 znázorňují středovou inverzi a obrázky 4.14 a 4.15 identitu.*

Přemístění můžeme ***skládat****, tzn. postupně provádět . Polohy, ve kterých (neoznačená) krychle vypadá stejné, nazveme ekvivalentní. Označme* A *určitou polohu krychle a* $\mathcal{P}_A$ *množinu všech přemístění krychle mezi kteroukoli dvojici poloh ekvivalentních poloze* A. *Operaci skládání přemístění definujeme takto: Nechť* $\varrho \ni \mathcal{P}_A$ *je přemístění krychle z polohy* B *do polohy* C *a* $\psi \ni \mathcal{P}_A$ *její přemístění z polohy* C *do polohy* D. *Označme jako* $\psi \circ \varrho$ *přemístění,které vznikne postupným provedením nejprve* φ *a potom* ψ. *Vzniká tak zobrazení*

$$\mathcal{P}_A \times \mathcal{P}_A \ni [\varphi, \psi] \longrightarrow \psi \circ \varphi \in \mathcal{P}_A,$$

která je typu (2.2). Asociativní zákon (2.3) je splněn, identita (přesunutí do téže polohy) je neutrálním prvkem, zpětné přemístění z polohy C *do* B *je inverzním prvkem k přemístění* φ. *Množina* $\mathcal{P}_A$ *s operací skládání přemístění je grupou. Není však grupou komutativní, jak ukazují obrázky (4.16, 4.17 a 4.18). Tato grupa má velmi zajímavé vlastnosti. Na rozdíl od všech předchozích příkladů grup je počet jejich prvků konečný. Navíc každá z prvků symetrie krychle definuje jistou podgrupu grupy* $\mathcal{P}_A$. *Vezměme například trojčetnou osu symetrie* o_3^3 *zadanou tělesovou úhlopříčkou* BD' *na obrázcích 4.6 a 4.7. Přemístění, která s touto osou souvisejí, jsou všechny rotace kolem ní o úhel, který je celistvým násobkem úhlu* $120°$. *Patří sem i identita,* $\mathcal{P}_A$. *Všimněme si, že každý prvek této podgrupy můžeme dostat pomocí skládání jediného prvku sama se sebou. Tímto jediným prvkem je rotace kolem osy* o_3^3 *o úhel* $120°$. *Grupa s takovou vlastností se nazývá* ***cyklická****. Zkuste zjistit, které další cyklické podgrupy obsahuje grupa operací symetrie krychle.*

Pozn.: Obecně se grupa G *nazývá cyklická, jestliže je tvaru*

$$G = \{a, a^2 \dots a^{n-1}, a^n = e_G\}.$$

Číslo n *je rovno řádu grupy. Cyklické grupy se významně uplatní například v krystalografii.*

A uvědomme si ještě, o co zajímavější ale složitější, by naše úvahy byly, kdybychom se zajímali o grupu operací symetrie ***Rubikovy kostky****!*

2.1.2 Algebraické struktury se dvěma operacemi, hlavně pole

2.1.3 Co je to vektorový prostor?

2.2 Lineární zobrazení vektorových prostorů