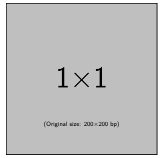


Luaking
Školní zápisník

by

Jaroslav Fait

University of West Bohemia
Faculty of Electrical Engineering

Obsah

Část I

MA I

Table of Contents

Kapitola 1

Všemocná úměra aneb lineární algebra poprvé

Contents

Tuto kapitolu bychom mohli opatřit podtitulem *„To nejnutnější z lineární algebry“*. Dovíme se v ní, co je třeba si představit pod pojmem *„linearita“*, najdeme příklady linearity v geometrii i v přírodovědě (fyzice, chemii, biologii) a formulujeme základní poznatky týkající se řešení soustav lineárních rovnic. Do této oblasti patří i počítání s vektory a maticemi - objekty, které jsou velmi vhodné k vyjádření fyzikálních veličin.

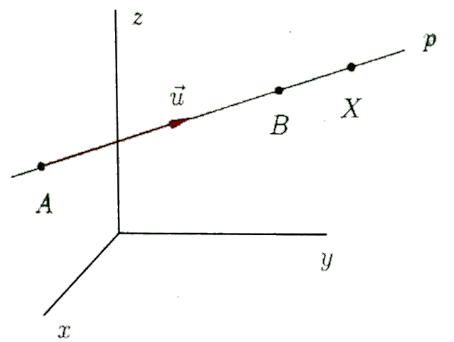
1.1 Lineární rovnice

Co tedy znamená slovo **linearita**? Pochází z latiny, *linea recta = přímka*, česky bychom řekli *přímá úměrnost* nebo jen jednoduše *úměra.*

Nejjednodušší příklady linearity patří do oblasti geometrie - vyjádření *přímek* a *rovin.* Jistě si ze střední školy vzpomínáme, že body těchto útvarů popisujeme jejich souřadnicemi na přímce $\mathbb{R}$, v rovině $\mathbb{R}^2$, v prostoru $\mathbb{R}^3$. Souřadnice bodu v rovině tedy tvoří *uspořádanou dvojici* reálných čísel, v prostoru pak *uspořádanou trojici* reálných čísel. (Pozor, dvojice $[a, b]$ a $[b, a]$ představují různé body.)

Příklad 1.1.1. ***Parametrické vyjádření přímky***
Přímka — *jednorozměrný lineární útvar v jednorozměrném prostoru* $\mathbb{R}^1$, *dvojrozměrném prostoru* $\mathbb{R}^2$, *trojrozměrném prostoru* $\mathbb{R}^3$ *(nebo i n-rozměrném prostoru* $\mathbb{R}^n$*), je určena dvěma body, třeba A a B, nebo ekvivalentně, bodem A a* směrovým *vektorem* $\vec{u}$ *(obr. 1.1). Je-li X obecným bodem na této přímce, je vektor* $\overrightarrow{AX}$ *rovnoběžný, tj.* kolineární, *se směrovým vektorem* $\vec{u}$. *(Jako směrový můžeme samozřejmě použít i vektor* $\overrightarrow{AB}$.*) Vektor* $\overrightarrow{AX}$ *má tedy s vektorem* $\vec{u}$ *stejný směr, lišit se může velikostí nebo orientací. Tuto skutečnost zapíšeme tak, že* $\overrightarrow{AX}$ *je t-násobkem vektorů* $\vec{u}$,

$$\overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{u}.$$



Obrázek 1.1: *Zadáni přímky.* **Musilova2009MA1**

Veličinou t, takzvaným parametrem, *který může nabývat všech reálných hodnot,* $t \in \mathbb{R}$, *dokážeme popsat všechny vektory* $\overrightarrow{AX}$, *jejichž koncový bod X leží na přímce p. Naopak, žádné jiné body X než ty, které leží na přímce p, tuto vlastnost nemají. S označením bodů A, X, resp. vektorů* $\vec{u}$, $\overrightarrow{AX}$ *kartézskými souřadnicemi, resp. složkami*

$$\begin{aligned} A &= (x_A, y_A, z_A), \\ X &= (x, y, z), \\ \vec{u} &= (u_1, u_2, u_3), \\ \overrightarrow{AX} &= (x - x_A, y - y_1 A, z - z_A), \end{aligned}$$

dostáváme ***parametrické vyjádřeni přímky*** *p ve tvaru*

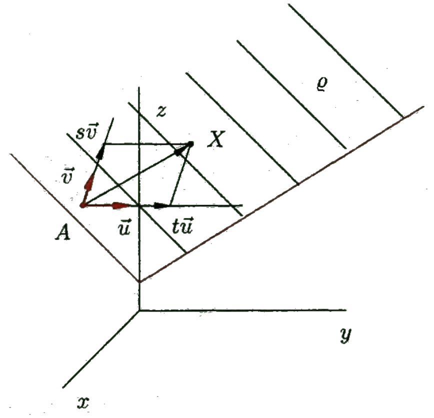
$$p = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{c} x = x_A + tu_1, \\ y = y_A + tu_2, \; t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + tu_3, \end{array} \right\}. \tag{1.1}$$

Vidíme, že kartézské souřadnice bodu na přímce se vůči souřadnicím bodu A mění přímo úměrně v závislosti na hodnotě parametru t, tj. závisí na jeho první mocnině. Příslušná závislost se nazývá **lineární funkcí**.

Obdobně zapíšeme parametrické vyjádření roviny v $\mathbb{R}^3$:

Příklad 1.1.2. ***Parametrická vyjádření roviny****:*
Rovina v trojrozměrném prostoru $\mathcal{R}^3$ *je zadána třemi body A, B a C, které nesmějí ležet v jedné přímce, popřípadě dvěma body A a B a vektorem v nerovnoběžným s* $\overrightarrow{AB}$, *anebo bodem A a dvěma nerovnoběžnými směrovými vektory* $\vec{u}$ *a* $\vec{u}$ *(obr. 1.2). Všechny tyto typy zadání jsou ekvivalentní. Lze volit například* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. *Je-li X libovolným bodem roviny* ϱ, *jsou vektory* $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ *a* $\vec{v}$

***lineárně závislé**. To znamená, že existují taková reálná čísla r a s, že vektor $\overrightarrow{AX}$ lze zapsat jako lineární kombinaci*



Obrázek 1.2: *Zadání roviny.* **Musilova2009MA1**

$$\overrightarrow{AB} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}, \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

Při obdobném zápisu kartézských souřadnic bodů a složek vektorů jako u vyjádření přímky dostaneme parametrické vyjádření roviny ϱ

$$\varrho = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{c} x = x_A + r u_1 + s v_1, \\ y = y_A + r u_2 + s v_2, \\ z = z_A + r u_3 + s v_3, \end{array} r, s \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1.2}$$

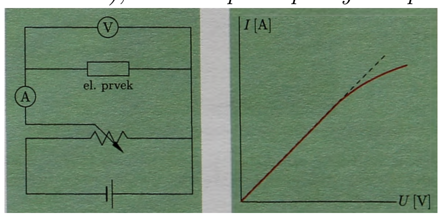
Toto vyjádření obsahuje opět lineární závislost: Souřadnice x, y a z se vůči souřadnicím bodu A mění v závislosti na prvních mocninách parametrů r a s. Můžeme tak hovořit o jakési „vícerozměrné úměře“.

Všimněme si nyní příkladů linearity z oblasti přírodovědy.

Příklad 1.1.3. *Fyzika — Ohmův zákon:*
Z elektřiny víme, že některé vodiče či elektrické prvky se při průchodu elektrického proudu chovají podle zákona linearity: Proud, který jimi protéká, závisí přímo úměrně na přiloženém napětí (obr. 1.3). Platí $I(U) = R^{-1} U$ s konstantou úměrnosti R^{-1}, kde R je elektrický odpor vodiče (prvku).

Pozn. 1: Předpokládáme, že elektrický odpor voltmetru je tak velký, že proud jím procházející je z hlediska přesnosti měření zanedbatelný.

Pozn. 2: Graf závislosti proudu na napětí na obrázku 1.3 může pro vyšší hodnoty napětí vykazovat odchylku od linearity (přímkové závislosti), neboť se prvek při vyšším proudu zahřívá a jeho odpor roste.



Obrázek 1.3: *Chování lineárního vodiče (Ohmův zákon).* **Musilova2009MA1**

Příklad 1.1.4. *Fyzika — speciální typy pohybů:*
Při rovnoměrném pohybu tělesa (ať již přímočarém či křivočarém) je dráha, kterou těleso urazí za dobu t, přímo úměrná velikosti jeho rychlosti v, tj. $s(t) = s_0 + vt$. Při pohybu rovnoměrně zrychleném (zpožděném) je lineární závislost velikosti rychlosti na čase, tj. $v(t) = v_0 \pm at$ při pohybu přímočarém (a je velikost zrychlení), nebo $v(t) = v_0 \pm a_\tau t$ při pohybu křivočarém (a_τ je velikost průmětu zrychlení do směru tečny k trajektorii tělesa — tečného zrychlení).

1.1.1 Soustavy lineárních rovnic a jejich rychlé řešení

Příkladů linearity v přírodě bychom mohli nalézt bezpočet. Vraťme se však k matematice a k problematice uvedené v názvu tohoto odstavce, k soustavám lineárních rovnic. Začněme jednoduchou slovní úlohou ze základní školy:

Příklad 1.1.5. *Jeníček a Mařenka kradli ježibabě perník:*
Dohromady snědli 11 perníkových srdíček. Jeníček jich přitom zkonzumoval o 3 více než Mařenka. Otázka je tradiční — kolik srdíček snědl každý z nich? Označíme-li M počet kousků, které snědla Mařenka a J počet srdíček, na nichž si pochutnal Jenda, můžeme informace zadané v úloze zapsat takto:

$$M + J = 11, \qquad J = M + 3.$$

Řešení není problémem, snadno vidíme, že $M = 4$ a $J = 7$.

O samotné řešení této jednoduché úlohy v tuto chvíli nejde. Pojmenujme si však vztahy, které jsme pro neznámé hodnoty M a J ze zadání úlohy dostali. Neznámé vystupují v rovnicích v první mocnině, tedy *lineárně*. Máme *soustavu dvou rovnic* o dvou neznámých M a J. Úvahu snadno zobecníme: Předpokládejme, že máme neznámé veličiny

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

a máme o nich m informací, které lze zapsat ve tvaru lineárních rovnic (neznámé budou v těchto rovnicích vystupovat v první mocnině),

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{1.3}$$

Soustavu (1.3) nazýváme soustavou m lineárních rovnic o n neznámých. Označme ji jako S a pod tímto označením se k ní budeme vracet. Soubory reálných čísel (a_{ij}) a (b_i), kde $1 < i < m$, $1 \leq j < n$, jsou zadány. Lze je uspořádat do takzvaných **matic**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \overline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Matice $\mathbf{A}$ je typu m/n, má m řádků a n sloupců, i je řádkový index a j je sloupcový index. Matice $\overline{\mathbf{B}}$ je typu $m/1$ (m řádků a jeden sloupec), hovoříme také o sloupcové matici. Soustavu S můžeme zapsat zkráceně pomocí maticového násobení (podrobněji viz později odstavec 1.3):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}, \qquad \text{nebo}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

V tuto chvíli vysvětlíme podstatu maticového násobení jen technicky: Násobit mezi sebou můžeme matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu m/n (levý činitel) a matici $\mathbf{A} = (c_{jk})$ typu n/p (pravý činitel, činitele nelze zaměňovat). Výsledkem je matice $\mathbf{A} = (d_{ik})$ typu m/p, jejíž prvky se počítají podle předpisu

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{jk}. \tag{1.6}$$

Z tohoto obecného předpisu vidíme, že levé strany soustavy S lze interpretovat ve tvaru součinu matice A typu m/n s maticí neznámých typu $(n/1)$, výsledkem je matice pravých stran $\overline{\mathbf{B}}$, která je typu $m/1$. Matice $\mathbf{A}$ se nazývá **maticí soustavy**. Matice, která vznikne jejím *rozšířením* o sloupec pravých stran, tj.

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\overline{\mathbf{B}}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{1.7}$$

je pak **rozšířenou maticí soustavy**. Je-li sloupec pravých stran soustavy tvořen samými nulami, nazývá se soustava **homogenní**, v opačném případě **nehomogenní**. Řešením soustavy S nazýváme každou n-tici $(x_i, x_2, \dots, x_n)$, která soustavu S splňuje. Cílem je najít všechna řešení soustavy S. Abychom řešení nalezli, musíme soustavu upravovat, zjednodušovat. Prováděné úpravy mají vést k jednodušší, avšak ekvivalentní soustavě rovnic, tj. takové, která má naprosto stejný soubor všech řešení jako soustava původní. Takové úpravy nazýváme **ekvivalentními**. Dvě základní, pomocí nichž lze uskutečnit všechny ostatní, jsou

- vynásobení libovolné, například i-té, rovnice libovolným *nenulovým* číslem,
- přičtení i-té rovnice vynásobené libovolným číslem k l-té rovnici.

V soustavě lze samozřejmě také měnit pořadí rovnic. Tato úprava je rovněž ekvivalentní. Nevypisujeme ji však zvlášť proto, že ji lze realizovat pomocí vhodně zvolené posloupnosti základních dvou úprav.

Abychom nemuseli soustavu stále opisovat i s neznámými, provádíme obvykle ekvivalentní úpravy jen s maticí $\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\overline{\mathbf{B}})$ (každý řádek této matice představuje jednu rovnici soustavy S). Může se stát, že soustava má právě *jedno řešení*, jako tomu bylo v úloze o Mařence a Jeníčkovi. Také nemusí mít *řešení žádné*, jako například soustava $x + y = 0$, $x + y = 1$ (součet dvou čísel nemůže nabývat současně dvou různých hodnot). A třeba má také řešení *nekonečně mnoho* (řešením soustavy jedné rovnice o dvou neznámých $x + y = 1$ jsou všechny dvojice tvaru $(x, 1 - x)$, kde x je libovolné). A může mít soustava S třeba právě dvě řešení? Prostřednictvím následujícího příkladu ukážeme metodu, která vede velmi rychle k nalezení všech řešení a umožňuje také vyslovit obecné závěry o jejich vlastnostech a počtu. Jedná se o **Gaussovu eliminační metodu**.

Příklad 1.1.6. *Gaussova eliminační metoda*
Je zadána soustava tří ($m = 3$) rovnic o pěti ($n = 5$) neznámých:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= -6, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 &= 6. \end{aligned}$$

Budeme provádět ekvivalentní úpravy matice B tak, abychom ji zjednodušovali. Ekvivalenci matic budeme označovat znakem $\sim$.

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\overline{\mathbf{B}}) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 1 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right).$$

V prvním řádku je na první pozici jednička. Toho využijeme k snadné „likvidaci", tedy eliminaci, prvních prvků v druhém a třetím řádku pomocí elementárních úprav. Provedeme tyto dvě úpravy: první řádek vynásobený číslem 2 přičteme k druhému řádku, první řádek přičteme ke třetím u řádku. Dostaneme

$$\mathbf{B} \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 6 & -6 & 6 \end{array}\right).$$

Vidíme, že jsme v druhém i třetím řádku dostali na první sloupcové pozici nulu (tučná). (Nuly na dalších pozicích vznikly náhodou, vlivem jednoduchosti zadání.) Nyní vynásobíme druhý i třetí řádek číslem $(1/6)$:

$$\mathbf{B} \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Přestože již nyní vidíme, že soustava nemá řešení (rovnice druhého a třetího řádku zní $x_4 - x_5 = -1$ a $x_4 - x_5 = 1$, takže jim nevyhovuje žádná dvojice čísel (x_4, x_5)), budeme v eliminaci pokračovat. Další úpravy se již týkají pouze druhého a třetího řádku. Druhý řádek vynásobený (-1) přičteme ke třetímu. Pak

$$\mathbf{B} \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Získáváme tak ekvivalentní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0, \\ + x_4 - x_5 &= -1, \\ 0 &= 2. \end{aligned}$$

V poslední rovnici je ihned vidět rozpor - soustava nemá řešení

Na základě výsledného tvaru matice soustavy a rozšířené matice soustavy získané ekvivalentními úpravami soustavy S nyní formulujeme obecné kritérium pro to, aby soustava S měla vůbec nějaké řešení. Matice **A** i **B** se po provedení ekvivalentních úprav dostaly do velmi jednoduchého tvaru, který připomíná schodiště obrácené „vzhůru nohama“, odmyslíme-li si nuly v levé části jednotlivých řádků (následující zápis pouze usnadňuje názornou představu, znak ekvivalence již psát nemůžeme):

$$\mathbf{A} \dots \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} \dots \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ & & & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Všimněme si, že „schodiště“ jsou nepravidelná, pokud jde o šířku schodů, výška všech schodů je však stejná - jeden řádek. Tímto způsobem je dán *schodovitý tvar* matice **A**, resp. **B**. Úzce s ním souvisí důležitá charakteristika matice, která je nezávislá jak na provedených úpravách tak na výsledném schodovitém tvaru. Je to hodnost matice, definovaná takto:

Hodnost matice je počet nenulových řádků jejího schodovitého tvaru.

V našem příkladu je hodnost matice A soustavy S rovna dvěma, hodnost matice rozšířené **B** je rovna třem. Píšeme

$$h(\mathbf{A}) = 2, \qquad h(\mathbf{B}) = 3.$$

Poznámka 1.1.1. *Lze získat schodovitý tvar různými posloupnostmi ekvivalentních úprav je zřejmé. Uvědomme si však, že ani výsledný schodovitý tvar není určen jednoznačně - stačí třeba vynásobit některý řádek dvěma a výsledná matice ekvivalentní s původní je rovněž schodovitá. Poněvadž má matice* **B** *o jeden sloupec více než matice* **A**, *platí vždy* $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{B})$. *V případě* $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{B})$ *pak* $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) - 1$. *Jak názorně ukazuje náš příklad, má pro* $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{B})$ *některá z rovnic ekvivalentní soustavy tvar* $0 = 1$, *soustava tedy nemá řešení. Můžeme tak formulovat kritérium (podmínku nutnou a postačující) řešitelnosti soustavy lineárních rovnic.*

Věta 1.1.1. *(**Frobeniova**): Soustava lineárních rovnic má řešení právě tehdy, je-li hodnost její matice rovna hodnosti matice rozšířené.*

Ihned vidíme, že homogenní soustava má podle této věty řešení vždy, neboť poslední sloupec její rozšířené matice je složen ze samých nul. Skutečně, jedním ze souboru řešení každé homogenní soustavy je n-tice

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0),$$

zvaná **triviální řešení**.

Nyní se vraťme k otázce, jak zjistit, kolik řešení má daná soustava, a jak je všechna popsat. Poslouží nám příklad 1.1.6 v mírné obměně spočívající v záměně koeficientu b_3 z hodnoty 6 na -6.

Příklad 1.1.7. *Ještě jednou Gaussova eliminační metoda*

Je zadána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= -6, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 &= -6. \end{aligned}$$

Rozšířená matice soustavy má nyní tvar

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\overline{\mathbf{B}}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 1 & 5 & -1 & -6 \end{array}\right).$$

Stejné ekvivalentní úpravy jako v příkladu 1.1.6 vedou nyní k výsledku

$$\mathbf{B} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nyní platí $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 2$. *Podle Frobeniovy věty 1.1.1 tedy soustava určitě má řešení. Ekvivalentní soustava má tvar*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0, \\ + x_4 - x_5 &= -1, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnice je identitou a můžeme ji vypustit. Máme pět neznámých a jen dvě nezávislé rovnice. Dvě z neznámých tedy můžeme vyjádřit pomocí zbývajících. Postupujeme „odzadu“, začínáme druhou, jednodušší, rovnicí:

$$\begin{gathered} x_4 = -1 + x_5, \\ x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 + 5x_5 \Rightarrow x_1 = -2x_2 + x_3 + 4x_5 + 1. \end{gathered}$$

Za neznámé vystupující na pravé straně, tj. x_2, x_3 *a* x_5, *můžeme dosazovat cokoli a vždycky se k nějakým hodnotám* x_1 *a* x_4 *dopočítáme. Všechna řešení soustavy* S *proto můžeme zapsat v obecném tvaru*

$$(-2x_2 + x_3 + 4x_5 + 1, x_2, x_3, x_5 - 1, x_5). \tag{1.8}$$

Soubor řešení ve tvaru (1.8) se nazývá obecným řešením soustavy. Jeho jednotlivé prvky, jednotlivá konkrétní řešení soustavy, jsou dány volbou volných neznámých x_2, x_3 a x_5. Také z příkladu 1.1.7 lze učinit obecný závěr:

Věta 1.1.2. *Nechť pro soustavu* m *lineárních rovnic o* n *neznámých platí* $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = h$. *Pak její obecné řešení závisí (lineárně) na* $d = n - h$ *volných neznámých.*

Číslo d se nazývá **dimenze prostoru řešení soustavy**. Tento pojem ještě podrobněji vysvětlíme později.

Nyní již snadno zodpovíme otázku, čím je dána mohutnost souboru řešení soustavy lineárních rovnic, tj. kolik má taková soustava řešení. Možnosti jsou pouze:

- žádné řešení - pro $h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{B})$,
- právě jedno řešení - pro $h = h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$ a současně $h = n$, takže nezbývá žádná volná neznámá,
- nekonečně mnoho řešení - pro $h = h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$ a současně $h < n$, kdy máme k dispozici $d = n - h$ volných neznámých.

Že by tedy třeba měla soustava právě dvě, tři či osmnáct řešení není možné.

Jakési zvláštní postavení můžeme přisoudit homogenním soustavám. Ty mají, jak jsme se již přesvědčili, řešení vždy, alespoň to triviální, složené ze samých nul. Zajímejme se o situaci, kdy má homogenní soustava i jiná, netriviální, řešení. U homogenní soustavy je hodnost její matice vždy shodná s hodností matice rozšířené, $h = h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$. Je-li navíc $h = n$, má podle obecného tvrzení 1.1.2 soustava právě jedno řešení, jímž nutně je řešení triviální. V opačném případě, tj. pro $h < n$, máme opět k dispozici $d = n - h$ volných neznámých, a tedy nekonečně mnoho netriviálních řešení. Všimněme si ještě jedné zajímavosti u homogenní soustavy. Jsou-li dvě n-tice čísel $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ jejím řešením, pak také n-tice vytvořená jako jejich lineární kombinace

$$\alpha \cdot X + \overline{\alpha} \cdot \overline{X} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) + (\overline{\alpha}\,\overline{x}_1, \overline{\alpha}\,\overline{x}_2, \dots, \overline{\alpha}\,\overline{x}_n)$$

kde α a $\overline{\alpha}$ jsou libovolná čísla, je *řešením soustavy*. Možnost tohoto „lineárního kombinování“ připadá samozřejmě v úvahu pro libovolný počet libovolných řešení soustavy. Fyzik by řekl, že soustava vyhovuje principu superpozice. Soustava nehomogenní tu to vlastnost nemá „vinou“ nenulového sloupce pravých stran.

1.1.2 Přímky a roviny - lineární geometrické útvary

Vraťme se ještě na chvíli k linearitě v geometrii a všimněme si problematiky vzájemné polohy přímek a rovin. Procvičíme si na ní mimo jiné i řešení soustav lineárních rovnic. V odstavci 1.1 jsme odvodili parametrické vyjádření přímky a roviny v trojrozměrném prostoru. Nyní se pokusíme z těchto vyjádření vyloučit parametry a získat obecné rovnice přímky a roviny, které již budou obsahovat pouze kartézské souřadnice bodů ležících v příslušné přímce či rovině. Začněme případem roviny.

Příklad 1.1.8. ***Obecná rovnice roviny***
Parametrické rovnice roviny z příkladu 1.1.2 můžeme chápat jako soustavu tří rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} ru_1 + sv_1 &= x - x_A, \\ ru_2 + sv_2 &= y - y_A, \\ ru_3 + sv_3 &= z - z_A, \end{aligned}$$

kde neznámými jsou parametry r a s. Z geometrického významu této soustavy je zřejmé, že pro každý bod $X = (x, y, z)$, který leží v rovině ϱ, bude soustava mít jako řešení právě jednu dvojici parametrů (r, s) (pro body, které v rovině neleží, soustava řešení nemá). Vypočteme parametry r a s například z prvních dvou rovnic. Předpokládejme, že $u_1 \neq 0$, a upravujme matici soustavy:

$$\left(\begin{array}{cc|c} u_1 & v_1 & x - x_A \\ u_2 & v_2 & y - y_A \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} u_1 & v_1 & x - x_A \\ 0 & u_1v_2 - u_2v_1 & (y - y_A)u_1 - (x - x_A)u_2 \end{array}\right).$$

odkud pro $(u_1v_2 — u_2v_1) \neq 0$ dostaneme

$$r = -\frac{(y - y_A)v_1 - (x - x_A)v_2}{u_1v_2 - u_2v_1}, \qquad s = \frac{(y - y_A)u_1 - (x - x_A)u_2}{u_1v_2 - u_2v_1}$$

Dosadíme-li získané hodnoty do třetí rovnice (dá to trochu práce), dostáváme obecnou rovnici roviny ϱ

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{1.9a}$$

$$a = u_2v_3 - u_3v_2, \qquad b = U_3v_1 - u_1v_3, \qquad c = u_1v_2 - u_2v_1, \tag{1.9b}$$

$$d = (u_2v_3 - u_3v_2)x_A - (u_3v_1 - u_1v_3)y_A - (u_1v_2 - u_2v_1)z_A. \tag{1.9c}$$

Při tomto výpočtu vyvstaly některé problémy. Pokusme se je vyřešit:

- *Aby získaná rovnice opravdu představovala nějakou rovinu, musí v ní zůstat alespoň jedna ze souřadnic x, y, z. Alespoň jedno z čísel a, b, c by tedy mělo být nenulové. Dokažte, že tomu tak opravdu je, a využijte při tom skutečnosti, že vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nesmí být rovnoběžné. Co znamená předpoklad $(u_1v_2 - u_2v_1) \neq 0$?*
- *Předpokládali jsme, že $u_1 \neq 0$. Jak budeme postupovat, nebude-li tento předpoklad splněn? Lze v tomto případě použít obecné výrazy získané pro r a s?*

Příklad 1.1.9. ***Obecná rovnice přímky***
Přímku p si snadno představíme jako průsečnici dvou nerovnoběžných rovin ϱ a σ. Jejich rovnice tvoří soustavu, která představuje obecné rovnice přímky

$$\varrho = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0\}, \tag{1.10a}$$
$$\sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\}, \tag{1.10b}$$

Zkusme přijít na to, co musí platit pro koeficienty v rovnicích rovin, aby byly nerovnoběžné. Jedna a táž přímka může být zadána různými dvojicemi nerovnoběžných rovin. Všechny roviny, které přímkou p procházejí, tvoří geometrický útvar zvaný ***svazek rovin prvního druhu****, přímka sama je* ***osou*** *svazku.*

Příklad 1.1.10. ***Vektor rovnoběžný s rovinou***
Ja k poznáme, zda je vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ rovnoběžný s rovinou $ax + by + cz + d = 0$? Pokud vektor $\vec{u}$ s rovinou rovnoběžný je, pak zcela jistě existují v této rovině dva body $A = (x_A, y_A, z_A)$ a $B = (x_B, y_B, z_B)$ tak, že $\overline{AB} = \vec{u} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$. Tyto body splňují rovnici roviny, tj.

$$ax_A + by_A + cz_A + d = 0, \qquad ax_B + by_B + cz_B + d = 0.$$

Odečtením rovnic dostaneme kritérium rovnoběžnosti vektoru s rovinou $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$.

Máme připraveno vše pro řešení otázky vzájemné polohy přímek a rovin.

Příklad 1.1.11. ***Vzájemná poloha tří rovin***
Zapojme geometrickou představivost a uvažujme, jakou vzájemnou polohu mohou mít tři roviny

$$\begin{aligned} \varrho &: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ \sigma &: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ \tau &: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0, \end{aligned}$$

Současně si uvědomme, že předchozí soustava je soustavou lineárních rovnic o neznámých x, y a z, představujících souřadnice společných bodů rovin ϱ, σ a τ. Soustava je charakterizována maticí

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\overline{\mathbf{B}}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -d_3 \end{array}\right). \tag{1.11}$$

Jsou tyto možnosti:

- *Roviny mají společný právě jeden bod. V tomto případě musí mít soustava (1.11) právě jedno řešení, a tedy $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 3$. (Útvar, který by vytvořily všechny roviny procházející tímto bodem, se nazývá **trs rovin prvního druhu**, společný bod je vrchol trsu.)*
- *Roviny mají společnou přímku. Řešení soustavy (1.11) bude v takovém případě závislé na jedné volné neznámé (parametr bodů na společné přímce), takže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 2$. (Útvar, který by vytvořily všechny roviny procházející touto přímkou, jsme před chvílí nazvali **svazkem rovin prvního druhu**, společná přímka je **osou** svazku.)*
- *Roviny jsou totožné. Řešení soustavy (1.11) je popsáno dvěma volnými neznámými (parametry bodů ve společné rovině), je tedy $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 1$.*
- *Roviny nemají společný žádný bod, mají však společný právě jeden směr (představme si například nekonečně dlouhý stan „áčko“, v němž jedna z rovin tvoří podlážku a zbylé dvě jsou stěnami). Společný směr $\vec{u}$ je řešením homogenní soustavy rovnic (příklad 1.1.11)*

$$a_1u_1 + b_1u_2 + c_1u_3 = 0, \tag{1.12}$$
$$a_2u_1 + b_2u_2 + c_2u_3 = 0, \tag{1.13}$$
$$a_3u_1 + b_3u_2 + c_3u_3 = 0. \tag{1.14}$$

  *jejíž řešení musí být popsáno jednou volnou neznámou, tj. $h(\mathbf{A}) = 2$. Původní nehomogenní soustava (1.11) pro společné body rovin však řešení nemá, je tedy $h(\mathbf{B}) = 3$. (Útvar, který by vytvořily všechny roviny obsahující společný směr, se nazývá **trs rovin druhého druhu**.)*
- *Roviny jsou rovnoběžné, nemají však žádný společný bod. Znamená to, že mají společné dva nezávislé směry, řešení homogenní soustavy (1.12) obsahuje dvě volné neznámé a platí $h(\mathbf{A}) = 1$, $h(\mathbf{B}) = 2$.*

Příklad 1.1.12. ***Vzájemná poloha dvou přímek***
Dvě přímky p a q jsou určeny dvěma dvojicemi rovin. Jejich společné body jsou tedy řešením soustavy čtyř lineárních rovnic o třech neznámých (pišme rovnou rozšířenou matici soustavy):

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\overline{\mathbf{B}}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -d_3 \end{array}\right). \tag{1.15}$$

Protože soustava obsahuje rovnice dvojic nerovnoběžných rovin, je $h(\mathbf{A}) > 2$ (zdůvodněte podrobněji). Možnosti vzájemné polohy přímek p (první dvě rovnice) a q (druhé dvě rovnice) jsou tyto:

- *Přímky jsou mimoběžné, nemají tedy žádný společný bod a roviny, které je určují, nemají žádný společný směr. Soustava (1.15) nemá řešení, odpovídající homogenní soustava pak rovněž ne, kromě řešení triviálního. Je tedy $h(\mathbf{A}) = 3$, $h(\mathbf{B}) = 4$.*
- *Přímky jsou různoběžné, mají tedy společný právě jeden bod. Soustava (1.15) má právě jedno řešení, a proto $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 3$.*
- *Přímky jsou rovnoběžné. Nemají tedy žádný společný bod, soustava nemá řešení, ale roviny, které je určují, mají společný směr. To odpovídá situaci $h(\mathbf{A}) = 23$, $h(\mathbf{B}) = 3$.*
- *Přímky jsou totožné. Řešení soustavy je popsáno jednou volnou neznámou, tj. $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 2$*

Příklad 1.1.13. ***Vzájemná poloha přímky a roviny***
Tuto úlohu převeďme na problém vzájemné polohy tří rovin a odpovězme si sami. Společně vyřešíme konkrétní případ. Rozhodněme o vzájemné poloze přímky a roviny, najděme jejich společné body a směry:

$$p: x + y + z + 5 = 0, \qquad 2x + 3y + 6z - 10 = 0$$
$$\varrho: y + 4z + 17 = 0.$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\overline{\mathbf{B}}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & 4 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -37 \end{array}\right).$$

Matice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ jsme upravili do schodovitého tvaru. Vidíme, že $h(\mathbf{A}) = 2$, $h(\mathbf{B}) = 3$. Soustava nemá řešení přímka p a rovina ϱ nemají žádný společný bod. Jediná možnost, jak to zařídit, je, že přímka p je s rovinou ϱ rovnoběžná. Mají společný směr, který je řešením homogenní soustavy o matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Schodovitý tvar matice odpovídá ekvivalentní soustavě rovnic

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0, \qquad u_2 + 4u_3 = 0,$$

jejíž řešení je tvaru $(u_1, u_2, u_3) = (3u_3, -4u_3, u_3)$. Společný směr přímky p a roviny ϱ je tedy určen například směrovým vektorem $(3, -4, 1)$ (pro $u_3 = 1$) nebo kterýmkoli jeho nenulovým násobkem.

1.2 Počítání s čísly

Někdo se jistě pozastaví nad tím, že jej chceme učit počítání s čísly. To přece každý umí už od základní školy! Jenže základní a do značné míry i střední škola nás učí počítat jen s určitým typem čísel - s čísly reálnými. Pravidla pro počítání s nimi se pro „běžné uživatele“ stala natolik rutinní záležitostí, že už o nich vůbec nepřemýšlejí, nehledají v nich zákonitosti, a kdybychom se jich zeptali, kde se tato pravidla vzala, pravděpodobně budou s odpovědí velmi váhat. Pravidla pro jakékoli početní operace totiž skutečně nelze z ničeho odvodit, ta je třeba definovat, samozřejmě tak, aby měla rozumné praktické vlastnosti.

1.2.1 Reálná čísla

U reálných čísel se opravdu dlouho nezdržíme, s těmi snad opravdu každý umí počítat. Všimneme si jen trochu podrobněji struktury množiny všech reálných čísel, **reálné osy** $\mathbb{R}$. Zobrazit reálná čísla na reálné ose, tedy na přímce, umíme proto, že na množině reálných čísel je definováno **úplné uspořádání** „$<$ “:

- Je-li současně $a \leq b$ a $b \leq a$, pak $a = b$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R} \ldots$ **antisymetrie**,
- je-li současně$a \leq b$ a $b \leq c$, pak $a \leq c$ pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R} \ldots$ **tranzitivita**,
- $a \leq a$ pro všechna $a \in \mathbb{R} \ldots$ **reflexivita**,
- platí $a \leq b$ nebo $b \leq a$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R} \ldots$ **úplnost**.

Pro každá dvě čísla a a b tedy dokážeme rozhodnout, zda jsou shodná ($a = b$), nebo zda a je menší ($a < b$) či větší ($a > b$) než b. Platí:

- Je-li současně $a < b$ a $c < d$, pak $a + c < b + d$,
- je-li současně $a < b$ a $c > 0$, pak $ac < bc$,
- je-li současně $a < b$ a $c < 0$, pak $ac > bc$.

Množina reálných čísel obsahuje tyto důležité podmnožiny:

- Množinu přirozených čísel $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Platí princip **úplné indukce**: Je-li $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{N}$ nějaká množina přirozených čísel, která obsahuje číslo 1 a která současně s každým číslem n obsahuje i $n + 1$, pak $\mathbb{M} = \mathbb{N}$.
- Množinu celých čísel $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, m, \ldots\}$.
- Množinu racionálních čísel $\mathbb{Q}$ (zlomky). Racionální čísla lze vyjádřit konečnými desetinnými zlomky (například $p/q = 1/4 = 0{,}25$), nebo nekonečnými periodickými desetinnými zlomky (například $p/q = 4/3 = 1,33 \ldots 33 \ldots = 1,\overline{3}$, $p/q = 24/11 = 2,1818 \ldots 1818 \ldots = 2,\overline{18}$).
- Množinu iracionálních čísel, tj. čísel, která nejsou racionální. Iracionálními čísly jsou neracionální řešení algebraických rovnic, například $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$, nebo $x = -\sqrt{2}$ (čísla algebraická), a čísla typu π, e, atd. (čísla transcendentní). Iracionální čísla jsou vyjádřena nekonečnými neperiodickými desetinnými zlomky, např. $e = 2{,}718\,281\,828\,459\,545 \ldots$. Mezi každými dvěma reálnými čísly leží nekonečně mnoho čísel racionálních i nekonečně mnoho čísel iracionálních.

Pro počítání s reálnými čísly jsou zavedeny základní operace, s nimiž umíme pracovat na základě zkušenosti, sčítání $a + b$, odčítání $a - b$, násobení $a \cdot b$, resp. ab a dělení $a : b$. Ve skutečnosti jsou potřeba jen dvě, neboť odčítání je odvozeno pomocí sčítání a dělení pomocí násobení. Uvědomili jste si někdy základní vlastnosti těchto operací? Možná ne, ale pracujeme s nimi zcela samozřejmě: Odčítání a dělení:

$$a—b = a + (—b), a : b = ab^{-1}, \qquad \text{pokud } b \neq 0.$$

1.2.2 Komplexní čísla

Komplexními čísly rozumíme uspořádané dvojice $[x, y]$ čísel reálných, pro které zavedeme určité operace. Uspořádaností dvojice zde myslíme to, že jedno z čísel (v našem zápisu x) je umístěno na první pozici dvojice a představuje reálnou část čísla z, $x = \mathrm{Re}(z)$, druhé (v našem zápisu y) je na druhé pozici a je imaginární částí čísla z, $y = \mathrm{Im}(z)$. Je tedy obecně $[x, y] \neq [y, x]$. Množinu

1.2.3 Cvičení

1.3 Počítání s maticemi

1.3.1 Základní operace s maticemi a hodnost matic

1.3.2 Hodnost matic

1.3.3 Násobení matic

1.3.4 Čtvercová matice

Algebra matic, tedy počítání s nimi, je v praxi zase jen počítání s čísly, samozřejmě podle specifických pravidel. S maticemi jsme se již setkali v odstavci 1.1, kde jsme jich využili jako vhodné „pomůcky“ při řešení soustav rovnic. Nyní posuneme naše znalosti o nich na poněkud vyšší úroveň. Zavedeme na množině matic *algebraickou strukturu*, která nám umožní s nimi počítat nezávisle na jejich vztahu k nějakým praktickým aplikacím. Víme již, že maticí typu m/n (též obdélníková matice) rozumíme soubor reálných, popřípadě i komplexních čísel uspořádaných do m řádků a n sloupců:

Definice 1.3.1. *Nechť m, n jsou přirozená čísla. Jestliže každé uspořádané dvojici $(m, n) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, m\}$ přiřadíme prvek $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ obdržíme reálnou matici typu m, n nad $\mathbb{R}$. Matici zapisujeme jako*

$$\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

která má právě mn prvků (a_{ij}) uspořádaných do m řádků a n sloupců. Stručně píšeme $\mathbf{A} = (a_{ij})$

Prvky matice jsou označeny indexy udávajícími **řádek** a **sloupec**, v nichž se prvek nalézá. Prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{A}$ se obvykle značí a_{ij}. Potom i-tý řádek matice obsahuje vodorovnou n-tici prvků $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$, kde $i = 1, 2, \ldots, m$ a j-tý sloupec matice obsahuje svislou matici čísel $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$, kde $j = 1, 2, \ldots, n$. Pro $m = n$ se matice nazývá čtvercová n-tého řádu.

Příklad 1.3.1. *Matice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *je čtvercová matice velikosti* 4×4. *Prvek matice* a_{23} *je* 2.

V tabulce 1.1 jsou uvedeny nejčastější typy matic, které se v algebře často vyskytují. Jsou to například matice řádkové, sloupcové, diagonální[1], jednotkové[2], nulové, transponované a symetrické.

Matice téhož typu (m, n) nad $\mathbb{R}$ budeme značit $\mathbb{R}_{m,n}$.

1.3.5 Základní operace s maticemi a hodnost matic

Definice 1.3.2. *Součinem matice* $A \in \mathbb{R}_{mn}$ *a matice* $B \in \mathbb{R}_{np}$, *v uvedeném pořadí, je matice* $C \in \mathbb{R}_{mp}$ *pro kterou platí:*

$$C = AB; \quad C = (cij);$$

kde

$$c_{ij} = \sum_{n}^{k=1} a_{ik} b_{kj}; \quad i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, p.$$

Součin matic A a B je definován právě tehdy, když počet sloupců matice A je roven počtu řádků matice B. Obrázek 1.4a demonstruje jakým způsobem se dostane prvek, který je ve výsledné matici třeba ve druhém řádku a druhém sloupci, násobením druhého řádku levé matice s druhým sloupcem pravé ze zadaných matic. Stejným způsobem získáme hodnotu prvku c_{ij} (viz 1.4b).

Definice 1.3.3. *(Rovnost matic): Matice* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je rovna matici* $\mathbf{B} = (b_{kl})$, *jsou-li matice stejného typu a stejnolehlé prvky se sobě* ***rovnají***, *tj.* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{m,n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}_{m,n}, a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

1.4 Počítání s vektory

Vektory budeme nazývat matice typu $1/n$ a značit je

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Takže počítat s nimi již umíme! (V zápisu složek vektoru je vynechán řádkový index. V případě matice s jedním řádkem, takzvané *řádkové matice*, je totiž zbytečný.) Číslům u_1 až u_n budeme pro tuto chvíli říkat *složky vektoru* $\vec{u}$. Za chvíli tento pojem ještě upřesníme. Celou řadu pojmů, s nimiž jsme se seznámili při počítání s maticemi, můžeme pro vektory přímo použít. Namísto značení $\mathcal{M}(1/n)$ budeme pro prostor vektorů používat symbol $(\mathbb{R}^n)$ nebo $\mathbb{C}^n$ (obvyklý symbol pro množinu uspořádaných n-tic reálných nebo komplexních čísel).

[1] Prvky a_{ii} kde $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$ tvoří hlavní diagonálu. Matice $\mathbf{D}$ je typu m, m, obecně může mít diagonální matice buď ještě další sloupce, v nichž budou samé nuly, anebo další řádky, v nichž budou opět samé nuly.

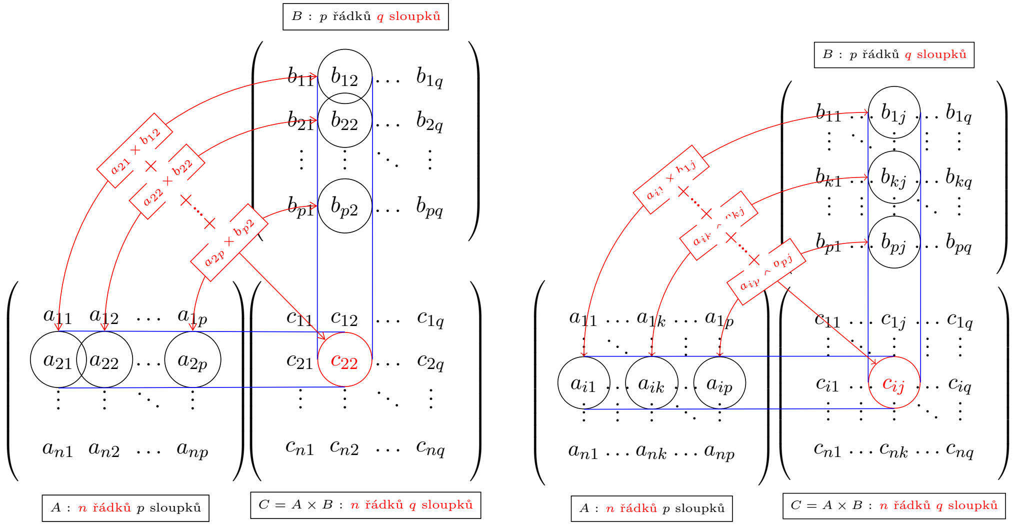
[2] Jestliže $m = n$, pak mluvíme o čtvercové matici řádu m.

Matice	**Zápis**
`řádková` **A**	$a_1, a_2, \dots, a_n$
`sloupcová` **B**	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
`diagonální` **C**	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$
`jednotková` **I**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
`nulová` **0**	$(a_{ij}), \quad a_{ij} = 0 \,\forall\, i, j$
`transponovaná` $\mathbf{D^T}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
`symetrická` **S**	$(a_{ij}), \quad a_{ij} = a_{ji} \,\forall\, i, j$

Tabulka 1.1: *Speciální typy matic*

1.4.1 Součiny vektorů

Kromě základních operací s vektory, tj. sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem, se často používají další operace, které obohacují *strukturu vektorového prostoru.* Zůstaneme u vektorů v trojrozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$ a definujeme si skalární, vektorový a smíšený součin vektorů. Skalární součin vektorů definujeme prostřednictvím geometrické definice jako zobrazení, které uspořádané dvojici vektorů (volných vektorů nebo jejich libovolných umístění) přiřazuje reálný



(a) *1. krok* **(b)** *2. krok*

Obrázek 1.4: *Postup při maticovém násobení*

číslo podle předpisu

$$\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \varphi, \tag{1.17}$$

kde $\varphi = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ je velikost minimálního z obou úhlů mezi vektory $\vec{u}, \vec{v}$.

Příklad 1.4.1. *Vypočteme z definice 1.17 skalární součiny vektorů ortonormální báze $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ a $\vec{e}_3$, spjaté s kartézskou soustavou souřadnic. Připomeňme, že tyto vektory jsou jednotkové a navzájem kolmé.*

- *pro $i \neq j$ $\vec{e}_i\vec{e}_j = 0$, $\sphericalangle\vec{e}_i\vec{e}_j = \dfrac{\pi}{2}$, vektory jsou kolmé,*
- *pro $i = j$ $\vec{e}_i\vec{e}_j = 0$, $\sphericalangle\vec{e}_i\vec{e}_j = 0, |\vec{e}_i| = 1$, vektory jsou jednotkové.*

Pro skalární součiny vektorů ortonormální báze použijeme zkrácené značení

$$\vec{e}_i\vec{e}_j = \delta_{ij}, \tag{1.18}$$

kde δ_{ij} nabývá hodnoty 1 pro $i = j$ a hodnoty 0 pro $i \neq j$. Nazývá se ***Kroneckerovo delta*** **Musilova2009MA1**

Shrneme nyní vlastnosti skalárního součinu. Dokázat bychom je mohli, i když by to mohlo být i velmi pracné, užitím znalostí z goniometrie. Zkuste to alespoň pro jednu z nich! Třeba se vám podaří zvolit si tu nejjednodušší.

Kapitola 2

Limita a spojitost funkce

Contents

2.1 Reálná funkce

S funkcemi se setkáváme na každém kroku nejen ve fyzice a v ostatních přírodních vědách, ale i v každodenním životě. Každá situace, kdy jsou nějaký jev či veličina jednoznačně a nevyhnutelně určeny jinými jevy či veličinami, se dá popsat pomocí funkce[1] funkci sestavit. Snadno například můžeme zjistit, jakou dráhu urazí automobil jedoucí známou rychlostí v závislosti na tom, jak dlouho jede. Nebo dokážeme určit přírůstek našich úspor ve spořitelně v závislosti na době spoření, pokud známe úrokovou míru a její změny. Jindy je naopak skoro nemožné přijít na to, jak taková funkce vypadá, neboť nemáme dostatek informací o parametrech, které do jejího zápisu vstupují. Třeba takovou závislost teploty ovzduší v daném okamžiku na zeměpisné poloze a nadmořské výšce, kterou bychom si mohli představit jako jednu ze samozřejmých součástí předpovědi počasí, bychom asi nesestavili. Popis jevů pomocí funkcí je v každém případě velmi užitečný. Má však svá pravidla, s nimiž se v této kapitole seznámíme. Závisí-li zkoumaný jev nebo veličina na jediné veličině, jejíž hodnoty jsou reálné a buď se mění známým způsobem, nebo si je můžeme dokonce volit, hovoříme o **funkci jedné reálné proměnné**. A lze-li zkoumaný jev nebo veličinu kvantifikovat rovněž pomocí reálných hodnot, jedná se o **reálnou funkci jedné reálné proměnné**. Právě o takových funkcích bude v této kapitole řeč. V aplikacích se budeme věnovat především funkcím, které mají význam ve fyzice a v přírodních vědách. Velmi často půjde o funkce, kde reálnou proměnnou je čas. Jevy v přírodě podléhají totiž principu příčinnosti, a tak lze velké množství veličin popisujících přírodní jevy vyjádřit na základě znalosti přírodních zákonů jako funkce času. **Musilova2009MA1**

2.1.1 Funkce a její graf

V tomto odstavci se naučíme funkce zadávat, počítat s nimi a vyjádřit je velmi přehledným způsobem — jejich *grafem*. Zopakujme, že každou **reálnou funkci**, jejíž definiční obor je podmnožina množiny $\mathbb{R}$, nazýváme **reálnou funkcí jedné reálné proměnné**[2].

Protože *funkce je speciální případ zobrazení*, můžeme všechny pojmy a obecné vlastnosti zobrazení přenést i na funkce. Některé z nich však vzhledem k důležitosti zopakujme, případně doplníme. Na druhé straně budeme studovat také ty vlastnosti, které jsou specifické pro tento speciální druh zobrazení.

Poznámka 2.1.1. *Je-li $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$, jedná se o* ***posloupnost****. (Speciálním případem reálných funkcí jedné reálné proměnné jsou* posloupnosti reálných čísel).

2.1.2 Způsoby zadání funkce

Nejprve funkci definujeme. Předpokládejme, že reálná proměnná, na níž bude záviset náš jev, má dovoleno nabývat hodnot z určité předem stanovené podmnožiny $D \subseteq \mathbb{R}$ reálných čísel. Předpokládejme dále, že podle určitého pravidla, předpisu, dokážeme pro *každou hodnotu* x množiny $\mathcal{D}_f$, tj. $x \in \mathcal{D}_f$, určit *právě jednu* reálnou hodnotu y. Každé hodnotě $x \in D$ tedy nějaké y příslušet *musí*, avšak žádné hodnotě x *nesmíme* přiřadit více hodnot y. Tak vzniká funkce f. Hodnoty x se nazývají hodnotami *nezávisle proměnné* (neboli *argumentu*), hodnoty y hodnotami *závisle proměnné* a f symbolizuje *funkční předpis*. Píšeme

$$f : x \in \mathcal{D}_f \to y = f(x) \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Hodnoty proměnné x nazýváme též *vzory*, odpovídající hodnoty $y = f(x)$ *obrazy*. Množina $\mathcal{D}_f$ je *definičním oborem* funkce f. Zadání definičního oboru je důležitou součástí zadání funkce. Množina H všech takových reálných hodnot y, které jsou obrazem nějakého vzoru,

$$\mathcal{H}_f = \left\{ y \in \mathbb{R} \text{ existuje } x \in \mathcal{D}_f, \text{ tak že } y = f(x) \right\}, \tag{2.2}$$

se nazývá *obor hodnot* funkce f. Hodnotu $f(x)$ nazýváme také *funkční hodnotou* funkce f v bodě x.

$$\mathcal{D}_f \xrightarrow{\;x\;} \boxed{\begin{matrix}\text{funkce}\\ f(x)\end{matrix}} \xrightarrow{\;y\;} \mathcal{H}_f$$

Obrázek 2.1: *Funkce jako „černá skříňka“.* **Musilova2009MA1**

[1] V matematice abstrahujeme při zkoumání funkcionálních závislostí od konkrétní fyzikální povahy proměnných veličin a chápeme je jako „bezrozměrné veličiny“, tedy jako číselné proměnné. Někdy je jednoduché takovou

[2] Místo názvu „reálná funkce jedné reálné proměnné“ budeme pro stručnost používat pouze název „funkce“, pokud nebude řečeno něco jiného

Funkci si podle obrázku 2.1 můžeme představit jako „černou skříňku“, do které vstoupí hodnota (vzor) a vystoupí z ní hodnota $y = f(x)$ (obraz). Množinu uspořádaných dvojic čísel $[x, f(x)]$ nazveme grafem funkce.

Jak zadat předpis f? Lze to udělat kterýmkoli z následujících způsobů, podle vhodnosti nebo snadnosti. Ukážeme jednotlivé možnosti na jednoduchém příkladu, kdy chceme hodnotám proměnné x z množiny $\mathcal{D}_f$ přiřadit jejich druhé mocniny. Zvolme pro náš příklad definiční obor výčtem:

$$\mathcal{D}_f = \{-3, 2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\},$$

a zadáme předpis

- **slovním popisem**: předpis f přiřazuje každé z hodnot $x \in \mathcal{D}_f$ její druhou mocninu,
- **vzorcem**: $y = x^2$ pro $x \in \mathcal{D}_f$ zadává zobrazení

$$f : x \in \mathcal{D}_f \to f(x) = x^2 \in \mathbb{R},$$

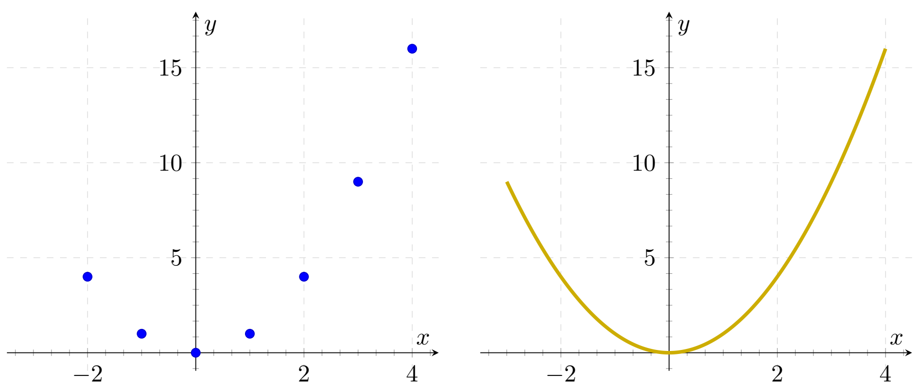
- **tabulkou**: Hodnoty obrazů pro všechny vzory z $\mathcal{D}_f$ vypíšeme do tabulky: Proměnná

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9	16

  x se v tomto případě mění „diskrétně“. Je zřejmé, že tímto způsobem můžeme funkci definovat úplně jen tehdy, je-li definiční obor konečná množina. Tabulku však používáme i v jiných případech, zejména chceme-li vyznačit pomocí ní, některé hodnoty, které nás z nějakého důvodu přednostně zajímají.
- Zadání **grafem**:

$$G_f = \{[x, f(x)] \,|x \in D\} = \{[x, x^2] \,|x \in D\}$$

  tak, že dvojice $[x, f(x)]$ znázorníme jako body v rovině (obr. 2.2a). Z grafu můžeme



(a) **(b)**

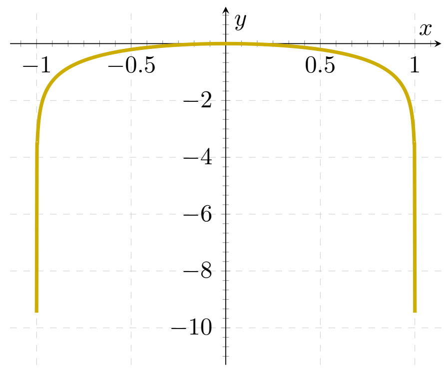
Obrázek 2.2: *Zadání funkce grafem*

  ovšem funkční hodnoty určit pouze přibližně. Pro další matematické zpracování je grafické zadání nejméně vhodné, i když jeho praktický význam například v technických aplikacích nelze popřít.
- Zadání pomocí **rovnice**, jíž je funkce řešením: některé funkce nelze jednoduše zapsat pomocí některého z předchozích způsobů, nebo to alespoň nejde přesně. Lze však zapsat (diferenciální) rovnici, kterou tato funkce splňuje. Jedná se většinou o speciální funkce, jimž se v tomto textu nebudeme věnovat. (Někdy může být taková rovnice představující zadání funkce i velmi jednoduchá. Například dosti známá funkce $\mathrm{erf}(x)$, *error funkce*, velmi úzce souvisí s funkcí $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} e^{-x^2}$. Nelze ji však zapsat vzorcem. Některé její hodnoty v nejčastěji používaném rozsahu proměnné x můžeme najít v rozsáhlých tabulkách, které byly sestaveny pomocí numerických metod.)

Již bylo zmíněno, že zadání definičního oboru je neopominutelnou součástí zadání funkce. Kdybychom například zadali funkci opět předpisem $y = x^2$, avšak za definiční obor stanovili uzavřený interval $D = \{—3, 4\}$, dostali bychom graf na obrázku 2.2b. Jde skutečně o jinou funkci než na obrázku 2.2a. Její úplnou tabulku bychom nedokázali napsat vůbec.

Zobrazovací předpis, kterým je funkce zadána, může být rozmanitý. Nejčastěji a pro účely matematické analýzy nejvhodnější je *analytické zadání vzorcem*, tj. rovnicí tvaru $y = f(x)$ nebo několika takovými rovnicemi platnými pro různé části definičního oboru. Přitom v rovnici $y = f(x)$ je na pravé straně nějaký správně definovaný výraz obsahující nejvýše proměnnou x a nabývající jednoznačné hodnoty pro danou hodnotu proměnné x.

Příklad 2.1.1. *(Definiční obor a obor hodnot funkce): Určíme „co největší“ definiční obor funkce* $y = \log_2\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ *a zjistíme také její obor hodnot.*



Obrázek 2.3: *K příkladu 2.1.1* $y = \log_2\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ **Musilova2009MA1**

Využijeme našich znalostí ze střední školy. Ve hře jsou tři funkce: logaritmus, odmocnina a kvadratická funkce, postupně:

$$y = \log_2 w, \qquad w = \sqrt{u}, \qquad u = 1 - x^2.$$

„Největším“ definičním oborem logaritmu je množina $\mathcal{D}(log) = w\mathbb{R} \mid w > 0$. *Oborem hodnot logaritmu pro* $w \in \mathcal{D}(log)$ *je celá reálná osa. Hodnoty* w *však dostáváme vyčíslením odmocniny, která pro přípustné hodnoty* u, $\mathcal{D}(\sqrt{\ }) = \{u \in \mathbb{R} | u \geq 0\}$, *může nabývat všech nezáporných hodnot, tj. kladných a hodnoty nula (té nabývá pro* $u = 0$*). Hodnotu* $w = 0$ *však nesmíme do logaritmu dosadit, takže hodnotu* $u = 0$ *musíme ihned vyloučit. Hodnoty proměnné* x *musíme omezit tak,*

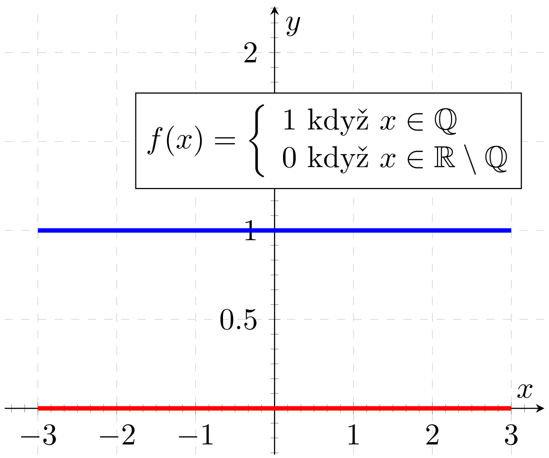
aby kvadratická funkce $u = 1$—x^2 nabývala pouze kladných hodnot. Dostáváme tak definiční obor funkce $y = f(x)$ $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}| - 1 < x < 1\}$, neboli otevřený interval $(—1, 1)$. Pro $x \in \mathcal{D}$ pak funkce $u(x)$ nabývá hodnot v intervalu $\mathcal{H}_u = (0, 1]$ a funkce $\log_2 \sqrt{1 - x^2}$ hodnot v intervalu $\mathcal{H}_u = (-\infty, 0]$, který je tedy jejím oborem hodnot. Graf funkce vidíme na obr. 2.3.

2.1.3 Graf funkce

Jinými slovy, v předchozím odstavci, bylo řečeno, že každé funkci můžeme přiřadit její graf, a že **grafem funkce** $f : A \to \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{R}$, rozumíme množinu všech bodů euklidovské roviny, jejíž souřadnice x, y v dané kartézské soustavě souřadnic vyhovuje rovnice

$$y = f(x). \tag{2.3}$$

Graf funkce může v jednodušších případech posloužit jako prostředek k získání názorné „představy“. Grafy některých funkcí jsou „křivky“, (intuitivním smyslu tohoto slova). Avšak u některých funkcí názorná představa grafu selhává. Vezmeme-li např. Dirichletovu funkci, snadno zjistíme, že její graf nemůžeme sestrojit (obr. 2.4 tedy není grafem funkce, ale pouze pokusem o názorné přiblížení Dirichletovi funkce)



Obrázek 2.4: *Pokus o zobrazení Dirichletovy funkce: „dvě rovnoběžné přímky $y = 0$ a $y = 1$ s nekonečným množstvím mezer“*

Z předchozí kapitoly také víme, že zadat funkci znamená udat její definiční obor a „zobrazovací předpis“, tj pravidlo (formulované slovně či v používaném matematickém jazyku), podle něhož můžeme jednoznačným způsobem rozhodnout, jaká funkční hodnota odpovídá libovolně zvolenému číslu z definičního oboru. Definičním oborem bývá často interval nebo sjednocení intervalů. Není-li definiční obor udán, rozumíme jím množinu všech reálných čísel, pro něž je příslušný předpis definován. Tuto množinu nazýváme **přirozeným** (též maximálním) definičním oborem funkce. Je to tzv. *existenční obor* výrazu, jímž je funkce definována **Brabec1989**

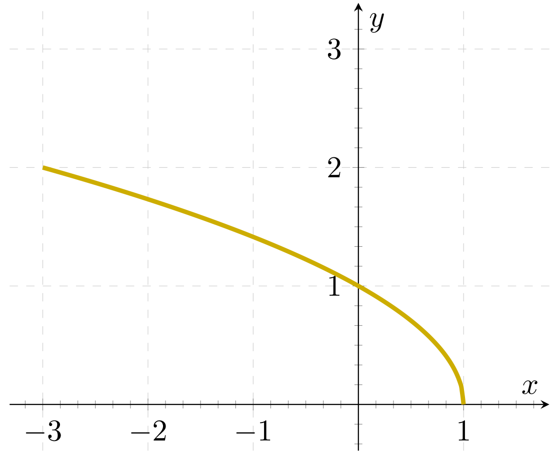
Například funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, můžeme vyjádřit bez udání definičního oboru $\mathbb{R}$ vztahem

$$f : y = x^2,$$

neboť předpis $y = x^2$ má smysl pro každé reálné číslo x. Avšak u funkce $g : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$, je nutné v zápisu funkce definiční obor $\langle 0, 1\rangle$ uvést, píšeme tedy

$$g : y = x^2, \quad x \in \langle 0, 1\rangle.$$

Příklad 2.1.2. *Vzorcem $f(x) = \sqrt{1 - x}$ je dána funkce, jejímž přirozeným oborem je interval $(-\infty, 1\rangle$ (uvažme, že výraz $\sqrt{1 - x}$ je definován v reálném oboru, je-li $1 - x \geq 0$). Graf této funkce je část paraboly, jejíž osou je osa x, viz obr. 2.5.*



Obrázek 2.5: *Graf funkce $y = \sqrt{1 - x}$ je část paraboly, jejíž hlavní osou je osa x*

Příklad 2.1.3. *Funkce je dána vzorcem*

$$f(x) : y = |x|.$$

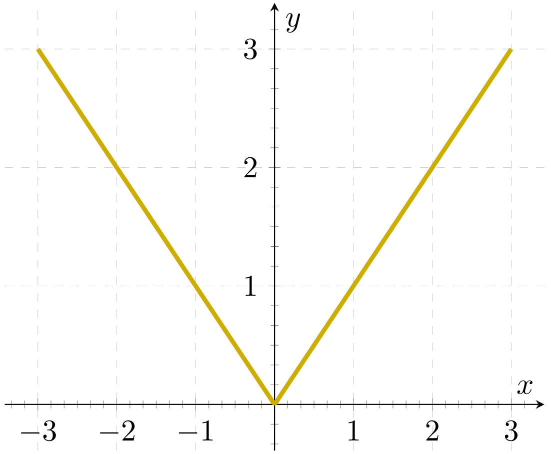
Přirozeným definičním oborem této funkce je množina $\mathbb{R}$. Táž funkce může být dána i vzorcem

$$f(x) : y = \sqrt{x^2},$$

nebo dvěma rovnicemi

$$f(x) : y = \begin{cases} x & \text{je-li } x \geq 0. \\ -x & \text{je-li } x < 0, \end{cases}$$

což je zřejmé, uvědomíme-li si jak je definována absolutní hodnota. Graf funkce je na obr. 2.6.



Obrázek 2.6: *Graf funkce $y = |x|$*

Funkce může být analyticky zadána i jinak než vzorcem $y = f(x)$. Časté je **parametrické vyjadřování**, tj. vyjádření dvojicí rovnic

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ \ t \in J, \tag{2.4}$$

kde φ, ψ jsou funkce definované na množině J (J bývá obvykle interval). Proměnná t se nazývá *parametr*: má zde pomocný význam. Zajímá nás totiž vztah mezi x a y. Rovnice 2.4 definuje relaci $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$:

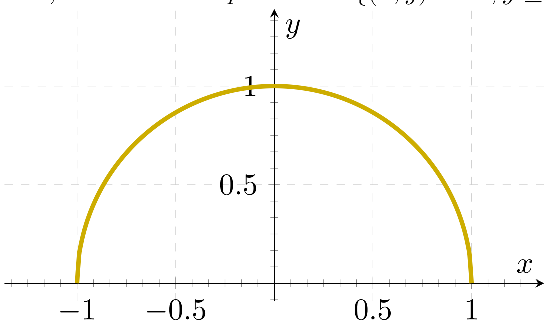
$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \text{existuje } t \in J \text{ tak, že } x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t)\}.$$

Tato relace může být za *určitých podmínek jednoznačná* tj. je funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. V tomto případě říkáme, že funkce f je *definována parametricky rovnicemi 2.4*

Příklad 2.1.4. *Rovnice $x = \cos t,\ \ y = \sin t \quad t \in \langle 0, \pi\rangle$, definují parametricky funkci*

$$f : y = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in \langle -1, 1\rangle, \tag{2.5}$$

jejíž grafem je polokružnice, ležící v horní polorovině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$.



Obrázek 2.7: *Graf funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$ je polokružnice*

Blíže se parametrickým zadáním funkce budeme zabývat v kapitole **??** (Aplikace diferenciálního počtu).

Funkce může být někdy zadána též rovnicí tvaru

$$F(x, y) = 0. \tag{2.6}$$

Přitom F je funkce dvou proměnných, tj. zobrazení z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Kromě rovnice 2.6 může být dána ještě podmínka, aby bod (x, y) patřil k některé množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Rovnicí 2.6 je definována opět jakási relace $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = 0\} \tag{2.7}$$

(případně $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x, y) = 0,\ (x, y) \in M\}$), zajímá nás, kdy tato relace je funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Říkáme pak, že funkce f je dána **implicitně** uvedenou rovnicí 2.6 (příp. rovnicí 2.6 a podmínkou $(x, y) \in M$). Naproti tomu zadání funkce ve tvaru $y = f(x)$ nazýváme **explicitním**.

Příklad 2.1.5.

- *Rovnicí $x + 2y - 3 = 0$ je implicitně definována funkce $f : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.*
- *Rovnicí $x^2 + y^2 = 1$ a podmínkou $y \geq 0$ je definována implicitní funkce z příkladu 2.1.4. Relace $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2 + y^2 = 1\}$ není ovšem jednoznačná, každé hodnotě $x \in (-1, 1)$ odpovídají dvě hodnoty $y : y_1 = \sqrt{1 - x^2}$, $y : y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$. Podmínkou $y \geq 0$ druhou hodnotu vylučujeme. Místo podmínky $y \geq 0$ bychom mohli uvést i jiné podmínky, aby rovnice $x^2 + y^2 = 1$ určovala implicitní funkci.*

Vyšetřování podmínek, při nichž rovnice $F(x, y) = 0$ je definována funkce f, se obvykle provádí metodami matematické analýzy funkce více proměnných.

2.1.4 Vlastnosti funkcí

2.1.4.1 Omezená funkce

Definice 2.1.1. *Funkci f nazýváme shora (zdola) omezenou na množině $A \subset D(f)$, je-li shora (zdola) omezená množina funkčních hodnot $f(A)$. Je-li funkce f omezená shora i zdola na množině A, pak ji nazýváme omezenou na množině A. Je-li $A = D(f)$, nazýváme funkci omezenou. Viz kniha* **Brabec1989**

Funkce f je omezená na množině A, právě když existuje číslo $K > 0$ tak, že platí

$$|f(x)| \leq K \qquad \text{pro každé } x \in A$$

neboli

$$-K \leq f(x) \leq K \qquad \text{pro každé } x \in A.$$

Příklad 2.1.6. *Funkce* $f: y = \dfrac{1}{x^2+1}$ *je omezená. Platí totiž*

$$\left|\frac{1}{x^2+1}\right| = \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \qquad \textit{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Zdola je tato funkce omezena dokonce číslem 0.

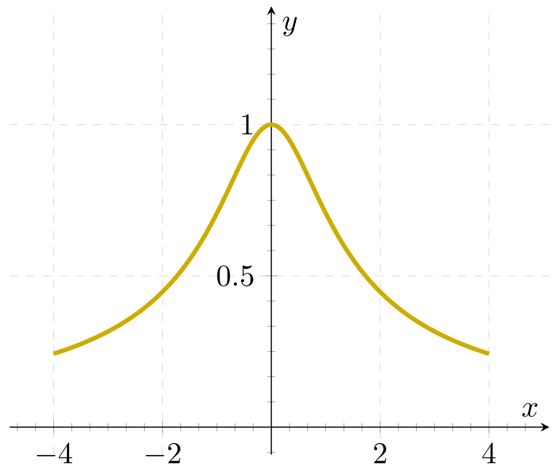
- Je-li funkce f shora omezená na množině A, existuje konečné *supremum* $\sup f(A)$. Toto číslo nazýváme *supremem funkce f na množině A* a označujeme je též $\sup_{x\in A} f(A)$ nebo $\sup\{f(x), x \in A\}$.
- Je-li funkce f zdola omezená na množině A, existuje konečné *infimum* $\inf(A)$, které nazýváme *infimum funkce f na množině A* a označujeme je též $\inf_{x\in A} f(A)$ nebo $\inf\{f(x), x \in A\}$.
- Není-li funkce f shora (zdola) omezená na množině A, pak je ovšem $\sup_{x\in A} f(x) = +\infty$ ($\sup_{x\in A} f(x) = -\infty$).
- Má-li množina $f(A)$ největší (nejmenší) prvek, pak toto číslo nazýváme největší (nejmenší) hodnotou funkce f na množině A (je-li $A = f(f)$, též absolutním maximem, resp. absolutním minimem funkce f) a značíme je $\max_{x\in A} f(x)$ ($\min_{x\in A} f(x)$). V tomto případě existuje takové číslo $x_0 \in A$, že $f(x_0) = \max_{x\in A} f(x)$ ($f(x_0) = \min_{x\in A} f(x)$). Pro všechna $x \in A$ tedy platí $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$). Je zřejmé, že největší (nejmenší) hodnota funkce f na množině A, pokud existuje je současně supremem (infimem) funkce f na A.

Příklad 2.1.7. *Pro funkci z příkladu 2.1.6 platí:*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} = \frac{1}{x^2+1} = \max_{x\in\mathbb{R}} = \frac{1}{x^2+1} = 1;$$
$$\inf_{x\in\mathbb{R}} = \frac{1}{x^2+1} = 0,$$

tato funkce však nenabývá v definičním oboru $\mathbb{R}$ *nejmenší hodnoty, neboť je stále* $\dfrac{1}{x^2+1} > 0$. *To, že infimum je* 0, *dokážeme takto: Zvolíme-li libovolně* $\varepsilon > 0$, *pak snadno zjistíme, že existuje* x, *pro něž* $\dfrac{1}{x^2+1} < \varepsilon$:

$$1 < \varepsilon(x^2+1)$$
$$\frac{1}{\epsilon} < x^2+1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1} < x$$



Obrázek 2.8: *Graf funkce* $f(x): y = \dfrac{1}{1+x^2}$

Neexistuje tedy kladné číslo, jež by bylo dolní mezí množiny funkčních hodnot, takže infimum je 0. *Graf funkce f je na obr. 2.8.*

2.1.4.2 Monotonní funkce

Definice 2.1.2. *Funkci f nazýváme* ***rostoucí (klesající)*** *na množině* $A \subset D(f)$, *jestliže pro každé dva body* $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, *platí* $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). *Funkci f nazýváme* ***neklesající (nerostoucí)*** *na množině* $A \subset D(f)$, *jestliže pro každé dvě body* $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$, *platí* $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). *Rostoucí a klesající funkce (na množině A) se nazývají* ***ryze monotónní*** *(na množině A), neklesající a nerostoucí funkce (na množině A) se nazývají monotónní (na množině A).*

Z definice je zřejmé, že každá rostoucí funkce je zároveň neklesající a každá klesající funkce je zároveň nerostoucí. Ryze monotónní funkce tvoří tedy podmnožinu množiny monotónních funkcí.

Příklad 2.1.8. *Funkce* $y = 2x+1$ *je* ***rostoucí*** *na intervalu* $(-\infty, \infty)$. *Platí totiž:* $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1$.

Příklad 2.1.9. *Funkce y=[x] je* ***neklesající*** *na intervalu* $(-\infty, \infty)$ *(viz příklad **).*

Příklad 2.1.10. *Heavisideova funkce (viz příklad **) je* ***neklesající*** *na intervalu* $(-\infty, \infty)$ *(viz příklad **).*

Příklad 2.1.11. *Funkce* $y = |x|$ *je* ***klesající*** *na intervalu* $(-\infty, 0\rangle$ *a rostoucí na intervalu* $\langle 0, \infty)$.

Definice 2.1.3. *Funkci f nazýváme* ***konstantní*** *na množině A, jestliže pro každé dva body* $x_1, x_2 \in A$, *platí* $f(x_1) = f(x_2)$. *V tom případě existuje reálné číslo k takové, že pro každé* $x \in A$ *je* $f(x) = k$. *Je-li* $k = 0$, *mluvíme o nulové funkci na množině A.*

Výrok „funkce f je konstantní na množině A" zapisujeme též $f(x) =$ konst na A. Funkci konstantní na $\mathbb{R}$ budeme stručně nazývat **konstantní funkcí** nebo krátce **konstantou**. Z textu bude obvykle patrno, interpretujeme-li symbol k jako reálné číslo nebo jako konstantní funkci. Je zřejmé, že konstantní funkce na množině A je zároveň neklesající i nerostoucí na množině A. Toto tvrzení se dá obrátit. Lze snadno dokázat i tuto větu:

Věta 2.1.1. *Funkce f je **rostoucí** na množině A, právě když je neklesající na množině A a na žádné dvoubodové podmnožině $B \subset A$ není konstantní.*

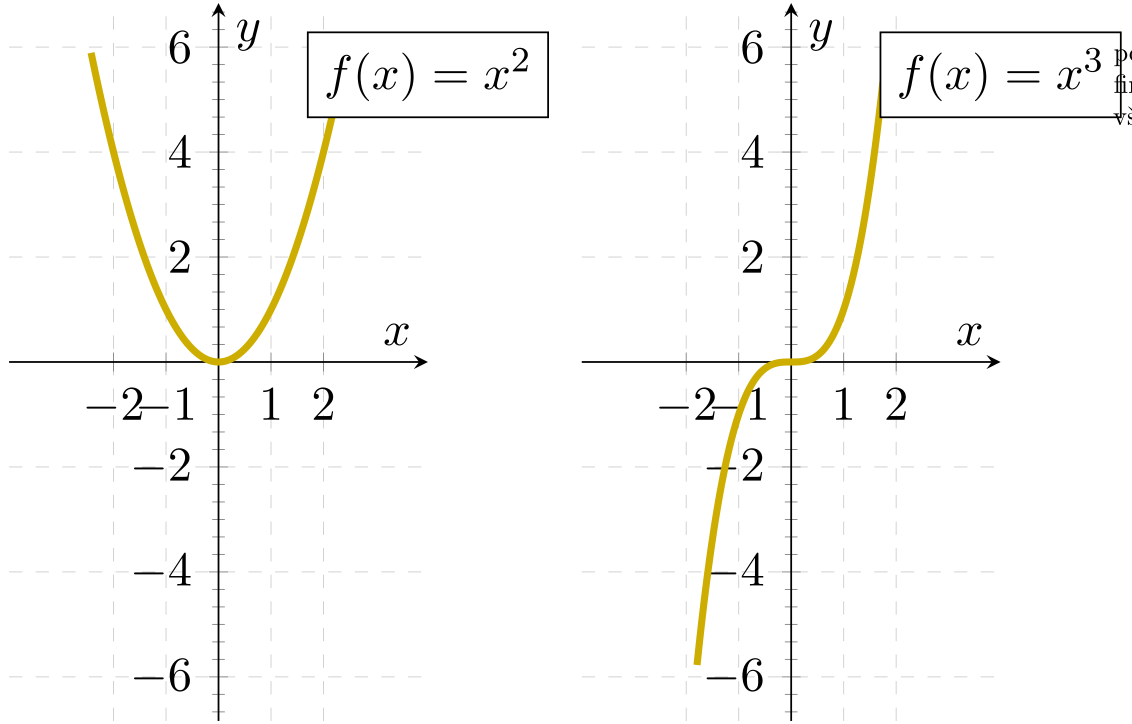
Obdobná tvrzení platí i pro klesající funkce.

2.1.4.3 Sudé a liché funkce

Definice 2.1.4. *Funkce f se nazývá **sudá** jestliže pro každé $x \in D(f)$ je též $-x \in D(f)$ a platí $f(x) = f(-x)$. Funkce f se nazývá **lichá** jestliže pro každé $x \in D(f)$ je též $-x \in D(f)$ a platí $f(-x) = -f(x)$.*

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y (osy funkčních hodnot), graf liché funkce je souměrný podle počátku.

Příklad 2.1.12. *Funkce $f : y = x^2$ je sudá, funkce $g : y = x^3$ je lichá.*



Obrázek 2.9: *Příklad sudé a liché funkce*

Daná funkce nemusí být ovšem ani sudá, ani lichá. Snadno se dokáže tvrzení:

- Je-li sudá funkce f na množině $D(f) \cap \langle 0, \infty)$ rostoucí (klesající), je na množině $D(f) \cap (-\infty, 0\rangle$ klesající (rostoucí).
- Je-li lichá funkce na množině $D(f) \cap \langle 0, \infty)$ rostoucí (klesající), je též na množině $D(f) \cap (-\infty, 0\rangle$ klesající (rostoucí).

2.1.4.4 Periodická funkce

2.1.5 Operace s funkcemi. Uspořádání

Jak s funkcemi počítat? Definujeme základní operace s nimi — *součet funkcí, součin funkcí a násobení funkce reálným číslem*. Předpokládejme, že na definičním oboru $\mathcal{D}$ jsou zadány funkce f a g a reálné číslo α. Pak na tomtéž definičním oboru lze zadat nové funkce

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{D} \ni x &\to \mathcal{F}(x) = f(x) + g(x) \in \mathbb{R} \\ \mathcal{G} : \mathcal{D} \ni x &\to \mathcal{G}(x) = \alpha g(x) \in \mathbb{R} \\ \mathcal{H} : \mathcal{D} \ni x &\to \mathcal{H}(x) = f(x)g(x) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Funkce $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ a $\mathcal{H}$ nazýváme postupně součtem funkcí f a g, α-násobkem funkce f a součinem funkcí f a g. Značíme

$$\mathcal{F} = f + g, \qquad \mathcal{G} = \alpha f, \qquad \mathcal{H} = fg.$$

Všimněme si nyní pravidel pro počítání s funkcemi zadanými na $\mathcal{D}$ a zjistíme, že se velmi podobají pravidlům pro počítání s reálnými čísly. Není divu, vždyt operace s funkcemi jsou definovány prostřednictvím funkčních hodnot, a těmi jsou reálná čísla. Některé důležité odlišnosti však přece jen najdeme. Napřed ale pravidla:

- komutativní zákon pro součet funkcí
$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x) \tag{2.8}$$
- asociativní zákon pro součet funkcí
$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x) \tag{2.9}$$
- existence univerzálního neutrálního prvku O (nulová funkce $O : \mathcal{D} \ni x \to O(x) = 0$)
$$f(x) + O = O + f(x) = f(x) \tag{2.10}$$
- existence právě jednoho opačného prvku k funkci f, přičemž $(-f)(x) = -f(x)$
$$f(x) + (-f(x)) = (-f(x)) + f(x) = O \tag{2.11}$$
- asociativní zákon pro násobení číslem
$$(\alpha_1\alpha_2)f(x) = \alpha_1(\alpha_2 f(x)) \tag{2.12}$$
- 1. distributivní zákon pro násobení číslem
$$\alpha(f(x) + g(x) = \alpha f(x) + \alpha g(x) \tag{2.13}$$

- 2. distributivní zákon pro násobení číslem

$$(\alpha_1 + \alpha_2)f(x) = \alpha_1 f(x) + \alpha_2 f(x) \tag{2.14}$$

- násobení číslem (—1) dává opačný prvek

$$(-1)f(x) = (-f(x)) \tag{2.15}$$

- komutativní zákon pro součin funkcí

$$f(x)g(x) = g(x)f(x) \tag{2.16}$$

- asociativní zákon pro součin funkcí

$$f(x)(g(x)h(x)) = (f(x)g(x))h(x) \tag{2.17}$$

- distributivní zákon zprava pro součin funkcí

$$(f_1(x) + f_2(x))g(x) = f_1(x)g(x) + f_2(x)g(x) \tag{2.18}$$

- distributivní zákon zleva pro součin funkcí

$$f(x)(g_1(x) + g_2(x)) = f(x)g_1(x) + f(x)g_2(x) \tag{2.19}$$

- násobení jednotkovou funkcí $I : \mathcal{D} \ni x \to I(x) = 1$

$$f(x)I = If(x) \tag{2.20}$$

- existence právě jedné *převrácené* funkce k funkci f pro $f(x) \neq 0$ $\quad (f)^{-1} : \bar{D} \ni x \to (f)^{-1}(x) = [f(x)]^{-1}$ kde $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} - \{x \in \mathcal{D} \,|\, f(x) = 0\}$

$$f(x)(f(x))^{-1} = (f(x))^{-1}f(x) = I \tag{2.21}$$

Všimněme si, že funkce $(f)^{-1}$ existuje obecně na užším definičním oboru $\bar{\mathcal{D}}$, než na kterém je definována funkce f. Je totiž třeba vyloučit všechny hodnoty x, pro které $f(x) = 0$ (zákaz dělení nulou). K funkci O tedy převrácená funkce neexistuje vůbec!

Existence opačné a převrácené funkce k f umožňuje definovat *rozdíl* a *podíl* funkcí $f - g = f + (-g)$ a $\dfrac{f}{g} = f(g)^{-1}$, tj.

$$f - g : \mathcal{D} \ni x \;\to\; (f - g)(x) = f(x) + (-g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$\frac{f}{g} : \bar{D} \ni x \;\to\; \left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(g)^{-1}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

kde $\bar{D} = D - \{x \in D \,|\, g(x) = 0\}$

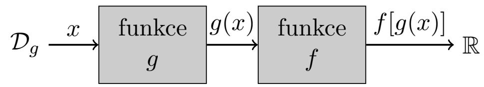
Poznámka 2.1.2. *Pamatujme si označení převrácené funkce jako $(f)^{-1}$, v němž je zápis symbolu f do závorky podstatný. Jde o něco jiného než znamená symbol f^{-1} bez závorky, který rezervujeme pro inverzní funkci v dalším výkladu.*

Poznámka 2.1.3. *Porovnáme-li nyní vlastnosti operací s funkcemi a pravidla pro počítání s reálným čísly, komplexními čísly, maticemi a vektory, můžeme konstatovat, že množina funkcí s operací sčítání funkcí a násobení funkce číslem je* ***vektorovým prostorem****. To je vlastnost, která je s případem čísel, matic a vektorů společná. Vektorový prostor funkcí se však od zmiňovaných vektorových prostorů výrazně liší svou dimenzí (rozměrem). Intuitivně dobře chápeme, co znamená jednorozměrný, dvojrozměrný a trojrozměrný prostor (například $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$). V odstav 1.4 jsme dokonce pracovali v n-rozměrném vektorovém prostoru. Dimenze vektorového prostoru může být i nekonečná — třeba zrovna u funkcí. Obecně jde o pojem poměrně obtížný a budeme se jím důkladně zabývat až v kapitolách věnovaných algebře* **Musilova2009MA1**

Operace s funkcemi jsme definovali a prodiskutovali pro případ, kdy definiční obory funkcí, vstupujících do operace byly stejné. Co když tomu tak nebude? Znamená to, že pak nemůžeme funkce sčítat, násobit, apod.? Předpokládejme, že definičním oborem funkce f je množina $\mathcal{D}_f$ definičním oborem funkce g množina D_g. Pokud jsou tyto obory disjunktní, tj. $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = 0$, můžeme utvořit pouze α-násobek funkce f či g. Sčítat ani násobit funkce f a g nemůžeme neboť hodnota $f(x) + g(x)$ ani $f(x)g(x)$ neexistuje pro žádné x. Pokud je průnik $D = d_f \cap D_g$ oborů $\mathcal{D}_f$ a $\mathcal{D}_g$ neprázdný, stává se definičním oborem funkcí $f + g$ a fg. Platí stejná pravidla jako v předchozí tabulce, pouze s omezením na obor $\mathcal{D}_f$.

2.1.6 Skládání a inverze funkcí

Skládání neboli kompozici funkcí si lze snadno představit opět pomocí „černých skříněk“ (obr. 2.10): Do první skříňky představující předpis g, *vnitřní složku* složené funkce, vstupuje hodnota



Obrázek 2.10: *Skládání funkcí* **Musilova2009MA1**

x z definičního oboru $\mathcal{D}_g$ funkce g. Výstupem je číslo $u = g(x)$, funkční hodnota vnitřní složky v bodě x. Toto číslo smí vstoupit do skříňky představující předpis f, *vnější složku* složené funkce, právě tehdy, je-li prvkem jejího definičního oboru $\mathcal{D}_f$. V takovém případě najdeme na výstupu ze skříňky f hodnotu $y = f(u) = f[g(x)]$. (Jestliže $g(x) \notin \mathcal{D}_f$, není výstup ze skříňky f definován.) Vzniká nový předpis F, kterým se některým bodům definičního oboru $\mathcal{D}_g$, ne všem, ale pouze těm, pro něž $g(x) \in \mathcal{D}_f$, přiřazují hodnoty $f[g(x)]$. Definujme nyní složenou funkci přesněji: Předpokládejme, že jsou zadány funkce

$$g : \mathcal{D}_g \ni x \;\to\; g(x) = u \in \mathbb{R},$$
$$f : \mathcal{D}_f \ni u \;\to\; f(u) = y \in \mathbb{R}.$$

označme

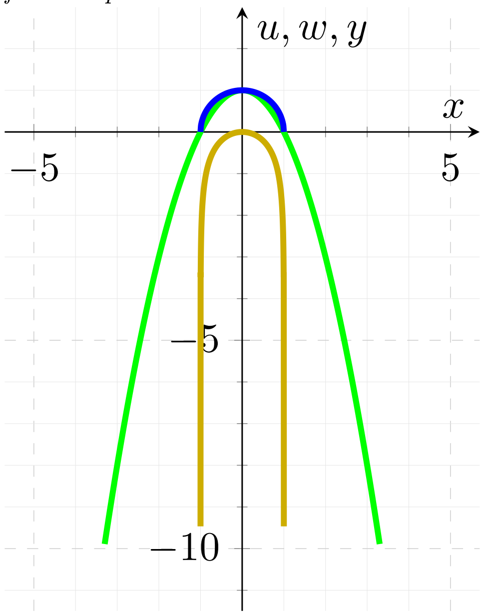
$$\mathcal{D} = \{x | x \in \mathcal{D}_g \text{ a současně } g(x) \in \mathcal{D}_f\}.$$

Pokud $\mathcal{D} = \emptyset$, lze definovat funkci

$$F : \mathcal{D} \ni x \to y = F(x) = f[g(x)] \in \mathbb{R}, \text{ značíme } F = f \circ g.$$

F se nazývá *složením* neboli *kompozicí* funkcí g a f. Zápis $f \circ g$ čteme často také jako „*f po g*“. Skládat lze i větší počet funkcí.

Příklad 2.1.13. *Uvažme funkci z příkladu 2.1.1.*



Obrázek 2.11: *K příkladu 2.1.1* $y = \log_2(\sqrt{1-x^2})$ **Musilova2009MA1**

Ukážeme, jak tato funkce vzniká postupně složením tří funkcí a jak při tom dochází k postupnému omezování definičního oboru. Písmeny $\mathcal{D}$ a H s příslušným indexem budeme značit definiční obory a obory hodnot jednotlivých funkcí.

$$g : \mathbb{R} = \mathcal{D}_g \ni x \to u = g(x) = 1 - x^2 \in \mathcal{H}_g = (-\infty, 1],$$
$$h : [0, \infty) = \mathcal{D}_h \ni u \to w = h(u) = \sqrt{u} \in \mathcal{H}_h = [0, \infty),$$

$$\mathcal{D}_h \cap \mathcal{H}_g = [0, 1] \Rightarrow \mathcal{D}_{h \circ g} = [-1, 1], \mathcal{H}_{h \circ g} = [0, 1],$$

$$f : (0, \infty) = \mathcal{D}_f \ni w \to y = f(w) = \log_2 w \in \mathcal{H}_f = \mathbb{R}$$

$$\mathcal{H}_{h \circ g} \cap \mathcal{D}_f = (0, 1] \Rightarrow \mathcal{D}_F = (-1, 1), \mathcal{H}_F = (-\infty, 0].$$

Je tedy

$$F : \mathcal{D}_F \ni x \to y = F(x) = (f \circ (h \circ g))(x) = fh[g(x)]$$
$$= \log_2 \sqrt{1 - x^2} \in (-\infty, 0].$$

Názorněji než tento zápis ukazuje situaci obrázek 2.11.

Může vzniknout otázka, jak rozpoznáme vnitřní a vnější složku složené funkce. Rozlišit vnitřní a vnější složku třeba u funkcí $\cos(x^2)$ a $(cosx)^2$ není problém. Hned také vidíme, že obecně $f \circ g \neq g \circ f$, i když by definiční obory funkcí na pravé i levé straně měly neprázdný průnik. Jsou však i případy na první pohled méně zřetelné, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 2.1.14. *(Určení vnitřní a vnější složky) Uveďme příklad dvou funkcí $F(x) = \sqrt{x^2}$ a $G(x) = (\sqrt{x})^2$. Liší se tyto funkce, nebo jde o tutéž funkci, jen jinak zapsanou? Vidíme, že platí*

$$\mathcal{D}_F = \mathbb{R}, F(x) = |x| \forall x \in \mathcal{D}_F, \mathcal{H}_F = [0, infty),$$
$$\mathcal{D}_G = [0, \infty), G(x) = x \forall x \in \mathcal{D}_G, \mathcal{H}_G = [0, infty).$$

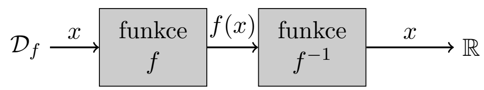
Funkce F a G mají různé definiční obory, ale na jejich průniku dávají stejné funkční hodnoty. Ani zde však obecně nelze pořadí skládání funkcí zaměňovat.

Funkce F a G mají různé definiční obory, ale na jejich průniku dávají stejné funkční hodnoty. Ani zde však obecně nelze pořadí skládání funkcí zaměňovat.

Nyní se pusťme do vybudování pojmu inverzní funkce k funkci f. Představme si, že funkční hodnota $y = f(x)$ zadané funkce

$$f : \mathcal{D}_f \ni x \to f(x) \in \mathcal{H}_f$$

představuje „zakódovanou" informaci o hodnotě x. Položme si otázku, zda a za jakých podmínek dokážeme sestavit „černou skříňku", na jejímž výstupu by se při vstupu obrazu $y = f(x)$ objevila hodnota x. Omezení takové možnosti je názorně vidět na obrázku 2.12. V případě funkce $f(x)$ lze ke všem obrazům $y \in \mathcal{H}_f$ najít vzory, v případě funkce $g(x)$ to možné není, neboť jeden a týž obraz lze získat z několika vzorů. Pro který bychom se tedy měli rozhodnout?

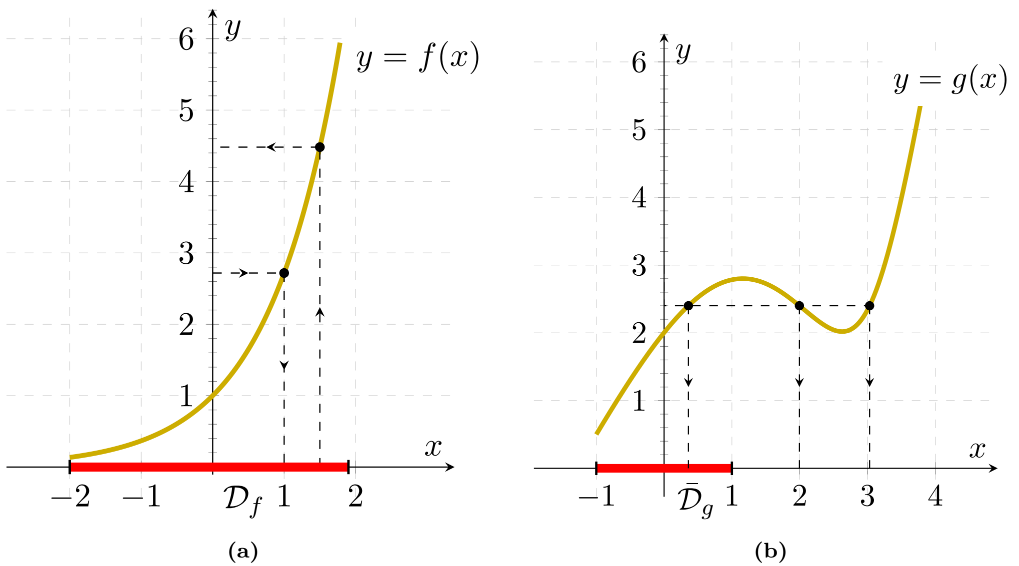


Obrázek 2.12: *Skládání funkcí* **Musilova2009MA1**

Aby bylo možné vzor zpětně identifikovat na základě znalosti obrazu, je třeba, aby funkce f byla *prostá*, tj. aby předpis f přiřazoval každým dvěma různým vzorům $X_1 \neq x_2$ dva různé obrazy $f(x_1) \neq f(x_2)$. Často lze tohoto požadavku docílit tím, že se místo funkce f s definičním oborem $\mathcal{D}_f$ spokojíme s funkcí, která vznikne omezením *(restrikcí)* té původní na „menší" definiční obor, zato však již bude prostá. U funkce g na obrázku 2.13 by tak stačilo omezit definiční obor například na množinu $\mathcal{D}_g$. Než inverzní funkci definujeme, ukažme si způsob jejího nalezení na známém příkladu.

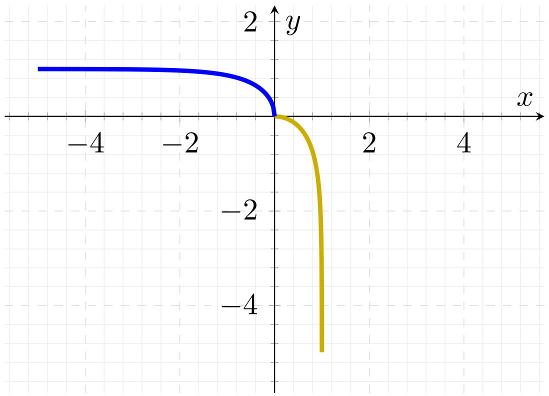
Příklad 2.1.15. *(Nalezení inverzní funkce): Funkci*

$$y = \log_2(\sqrt{1 - x^2})$$



Obrázek 2.13: *K pojmu inverzní funkce*

Jsme již z různých hledisek rozebrali v příkladech 2.1.1 a 2.1.13. Hodí se i nyní.



Obrázek 2.14: *K příkladu 2.1.15* $y = \log_2\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ **Musilova2009MA1**

Na obrázku 2.11 máme dokonce její graf, a tak vidíme, že ***není*** *na svém definičním oboru* $(-1,1)$ ***prostá****. Omezme proto její definiční obor na interval* $\mathcal{D} = [0,1)$*, na němž již prostá je (část grafu vpravo od osy y). Pro danou hodnotu obrazu* $y \in (-\infty, 0]$ *můžeme již jednoznačně určit hodnotu x jednoduchou úpravou:*

$$\begin{aligned} y = \log_2(\sqrt{1-x^2}) &\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 2^y \\ &\Rightarrow x^2 = 1 - 2^{2y} \\ &\Rightarrow x = \sqrt{1-2^{2y}} \end{aligned}$$

Formální záměnou $x \leftrightarrow y$ *dostáváme inverzní funkci k funkci f,*

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{1-2^{2x}}.$$

Grafy obou funkcí jsou na obrázku 2.14.

Ze způsobu konstrukce funkce f^{-1} v předchozím příkladu je vidět, že $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{H}_f$, $\mathcal{H}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$ a graf inverzní funkce je obrazem grafu prosté funkce f při osové symetrii v rovině souřadnicových os vzhledem k ose prvního a třetího kvadrantu. Nyní již definujeme inverzní funkci obecně. Předpokládejme, že funkce $f : \mathcal{D}_f \ni x \to y = f(x) \ni \mathcal{H}_f$ je prostá na svém definičním oboru. Pak existuje funkce f^{-1} definovaná jako

$$f^{-1} : \mathcal{H}_f \ni x \to y = f^{-1}(x) \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x = f(y). \tag{2.22}$$

Funkci f^{-1} nazýváme **inverzní funkcí k funkci** f. Ještě shrneme pravidla pro skládání funkcí a pro inverzní funkce:

- asociativní zákon pro skládání funkcí
$$f(x) \circ (h(x) \circ g(x)) = f(x) \circ h(x) \circ g(x) \tag{2.23}$$
- distributivní zákon zleva
$$f(x) \circ (h(x) + g(x)) = f(x) \circ h(x) + f(x) \circ g(x) \tag{2.24}$$
- existence univerzálního neutrálního prvku O (nulová funkce $O : \mathcal{D} \ni x \to O(x) = 0$)
$$f(x) + O = O + f(x) = f(x) \tag{2.25}$$
- existence právě jednoho opačného prvku k funkci f, přičemž $(-f)(x) = -f(x)$
$$f(x) + (-f(x)) = (-f(x)) + f(x) = O \tag{2.26}$$
- komutativní zákon pro součet funkcí
$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x) \tag{2.27}$$
- asociativní zákon pro součet funkcí
$$(f(x) + g(x) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x) \tag{2.28}$$
- existence univerzálního neutrálního prvku O (nulová funkce $O : \mathcal{D} \ni x \to O(x) = 0$)
$$f(x) + O = O + f(x) = f(x) \tag{2.29}$$

Předchozí vztahy platí na patřičně zúžených definičních oborech funkcí, které do nich vstupují.

2.2 Elementární funkce

Základními elementárními funkcemi nazýváme **PolakMA1**

2.2.1 Goniometrické funkce

- **Základní vzorce pro goniometrické funkce**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R} \tag{2.30}$$
$$|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R} \tag{2.31}$$
$$|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R} \tag{2.32}$$

- **Součtové vzorce**

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha \tag{2.33}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha \tag{2.34}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \tag{2.35}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta \tag{2.36}$$
$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta} \tag{2.37}$$
$$\cot(\alpha\pm\beta) = \frac{1\mp\cot\alpha\cdot\cot\beta}{\cot\alpha\pm\cot\beta} \tag{2.38}$$

Součtové vzorce lze odvodit několika způsoby; jednoduchý způsob důkazu lze provést pomocí skalárního součinu vektorů.

- **Vzorce pro dvojnásobný úhel** 2α
Pro každé $\alpha\in R$ platí:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{2.39}$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{2.40}$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \tag{2.41}$$
$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \tag{2.42}$$

- **Vzorce pro poloviční úhel** $\frac{\alpha}{2}$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{2.43}$$
$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \tag{2.44}$$
$$\left|\tan\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{2.45}$$
$$\left|\cot\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \tag{2.46}$$

Vzorce 2.43 a 2.44 odvodíme pomocí vzorců 2.40 a 2.30:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos 2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\\ \sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{2}\\ \cos^2\frac{\alpha}{2} &= 1-\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}\end{aligned}$$

a dále užijeme vztahu $\sqrt{a^2} = |a|$ (platí pro každé $a\in\mathbb{R}$). Užitím součtových vzorců a toho že, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\pi = 0$ a $\cos\pi = -1$ lze snadno odvodit, že pro každé $\alpha\in R$ platí

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \cos\alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= -\sin\alpha\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\alpha\\ \sin\left(\pi+\alpha\right) &= -\sin\alpha & \cos\left(\pi+\alpha\right) &= -\cos\alpha\\ \sin\left(\pi-\alpha\right) &= \sin\alpha & \cos\left(\pi-\alpha\right) &= -\cos\alpha\end{aligned}$$

Důkaz provedeme pro první z těchto často užitečných vzorců (u ostatních je odvození obdobné):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha = 1\cdot\cos\alpha + 0\cdot\sin\alpha.$$

2.2.2 Zobrazení v jiných strukturách

2.2.3 Cvičení

2.3 Limity všeho druhu

„Limes“ znamená latinsky příční cesta, mez, v přeneseném významu pak hranice, pomezí, atd. V matematice představuje limita hodnotu, ke které se „neomezeně blíží hodnota funkce, jestliže se hodnota proměnné neomezeně blíží zadanému číslu“. Poslední formulace musí být v uvozovkách, protože je i přes svou dobrou názornost velice nepřesná. A takové nepřesnosti nejsou v matematice dovoleny. K čemu vůbec úvaha o limitě je? Stačí přece do funkčního předpisu hodnotu proměnné dosadit a získat funkční hodnotu. Tak jednoduché to ale není. Funkční hodnota pro danou hodnotu proměnné x vůbec nemusí být definována, zato může být definována pro hodnoty velmi blízké. Nebo definována je, ale pro hodnoty proměnné, které jsou k x velmi blízké, jsou funkční hodnoty od $f(x)$ velmi vzdálené. Potřebnost pojmu limita ukážeme na geometrickém a fyzikálním příkladu.

V matematické analýze hraje např. důležitou úlohu podíl **Brabec1989**

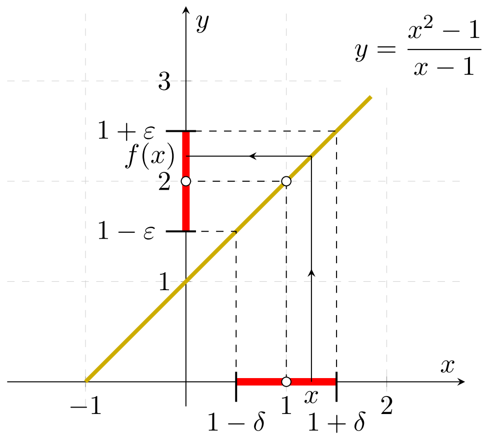
$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}$$

kde φ je daná funkce, a pevný bod. Tento podíl tzv. *přírůstku funkce* $\varphi(x)$—$\varphi(a)$ k přírůstku argumentu x—a může značit např. *průměrnou rychlost pohybu bodu po přímce*, jehož zákon dráhy je dán vztahem $y = \varphi(x)$, kde y je dráha, kterou bod urazí za čas x. Zajímá nás, jak se mění hodnota tohoto podílu — jinak řečeno, jak se mění hodnota funkce f dané vztahem

$$f(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \tag{2.47}$$

když hodnoty argumentu x se blíží k číslu a, což často značíme $x \to a$. V uvedeném fyzikálním významu daného podílu se ptáme, jak se mění průměrná rychlost pohybu, když se časový úsek zkracuje. Je zřejmé, že musí být stále $x \neq a$ a že jmenovatel se blíží k nule; obvykle se blíží k nule i čitatel. Jakých hodnot však nabývá přitom podíl, tj. jaké jsou hodnoty funkce $f(x)$? Než vyslovíme přesnou definici limity, uvedeme ještě pár jednoduchých příkladů.

Příklad 2.3.1. *Nechť $\varphi(x) = x^2$, $a = 1$. Potom $f(x) = (x^2—1)/(x—1)$. Pro $x \neq 1$ je hodnota funkce f rovna $f(x) = (x+1)(x-1)/(x-1) = x+1$. Když $x \to 1$ (přičemž stále $x \neq 1$), pak $f(x) \to 2$ (viz obr. 51). Zároveň je také patrný charakter tohoto blížení: Hodnoty $f(x)$ jsou libovolně blízko číslu 2, jestliže hodnoty proměnné x jsou dostatečně blízké číslu 1. To můžeme říci také takto:*



Obrázek 2.15: *K příkladu 2.3.1* **Brabec1989**

Zvolíme-li libovolně malé okolí bodu 2, pak vždy lze najít okolí bodu 1 takové, že pro každé $x \neq 1$ z tohoto okolí bude ležet hodnota $f(x)$ ve zvoleném okolí čísla 2. Ještě jinak formulováno: K libovolně malému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé x, pro něž $0 < |x—1| \ll \delta$, platí $|f(x)—2| < \varepsilon$ (viz obr. 2.15). O funkci f s touto vlastností říkáme, že má v bodě 1 limitu 2 a píšeme symbolicky $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ nebo $f(x) \to 2$ pro $x \to 1$.

Definičním oborem funkce z příkladu 2.3.1 je tedy množina $\mathcal{D} = \mathbb{R}—1$ (pro $a = 1$ by ve jmenovateli zlomku byla nula). Grafem funkce je tedy přímka s „vynechaným“ bodem $[1, 2]$ (obr. 2.15). V bodě $a = 1$ funkční hodnota není definována. Pokud bychom chtěli rozšířit definiční obor funkce na celou reálnou osu, musíme předepsat, jaké hodnoty má funkce nabývat v bodě $a = 1$. Původní vzorec, jímž je funkce zadána, výpočet hodnoty $f(1)$ neumožňuje. Dodatečné zadání funkční hodnoty, její *dodefinování*, můžeme provést zcela libovolně. Zvolme například $f(1) = 2$. Jiná možnost, jak funkci dodefinovat, je například $f(1) = —1$. Které číslo je ovšem limitou funkce $f(x)$ v bodě $a = 1$? Je to číslo 2, které je v případe $f(x) = x + 1$ její funkční hodnotou? Nebo číslo -1? A nebo nějaká jiná hodnota? Intuice nám napovídá, že je to číslo 2. Když dvojku použijeme pro dodefinování funkce, přetržený graf se „zacelí“. Vidíme, že vezmeme-li dostatečně malý interval proměnné x v blízkosti bodu $a = 1$ můžeme docílit toho, že všechny odpovídající funkční hodnoty $f(x)$ budou ležet tak blízko hodnotě 2, jak si předem určíme. Skutečně, zkusme docílit toho, aby hodnoty $f(x)$ ležely v intervalu $(1{,}99, 2{,}01)$, tj.

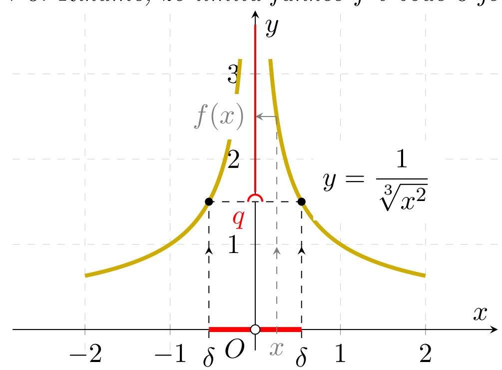
$$1{,}99 < x + 1 < 2{,}01 \Rightarrow 0{,}99 < x < 1{,}01, \qquad x \neq 1.$$

Podařilo se. A kdybychom interval $I(\varepsilon) = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ funkčních hodnot kolem 2 ještě zmenšili, podařilo by se opět najít (o něco menší) interval kolem bodu $a = 1$ tak, aby pro všechny hodnoty x v něm (samozřejmě s případnou výjimkou hodnoty $a = 2$) platilo $f(x) \in I(\varepsilon)$. A takto bychom mohli ε stále zmenšovat. Jak by takový postup dopadl s hodnotou -1, která, jak intuitivně cítíme, limitou funkce v bodě $a = 1$ není, protože je graf funkce od bodu $[-1, 0]$ dost vzdálen? Vezměme třeba interval $(—0{,}5,\ 0{,}5)$ a hledejme hodnoty x obdobně jako v předchozím případě. Požadujeme

$$—0{,}5 < x + 1 < 0{,}5 \Rightarrow —1{,}5 < x < —0{,}5.$$

Tento interval vůbec neobsahuje bod $a = 1$. Dostali jsme se mimo blízkost bodu $a = 1$.

Příklad 2.3.2. *Nechť $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 0$. Pak $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$. Pro $x \neq 0$ je $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Jestliže $x \to 0$, pak hodnoty $f(x)$ neomezeně vzrůstají, protože jmenovatel zlomku se blíží kladnými hodnotami k nule a čitatel je stále roven 1 (viz obr. 2.16). Místo rčení „funkce neomezeně roste“ pro $x \to 0$ říkáme též „funkce se blíží k $+\infty$“ pro $x \to 0$ a píšeme $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ nebo $f(x) \to +\infty$ pro $x \to 0$. Říkáme, že limita funkce f v bodě 0 je rovna $+\infty$.*

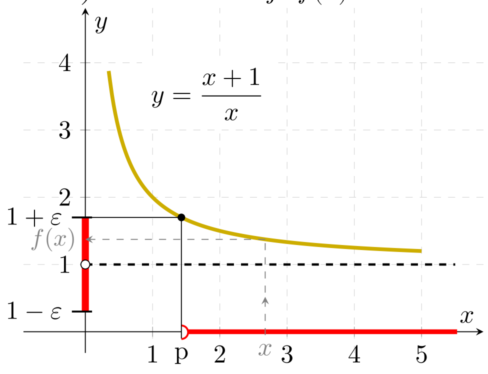


Obrázek 2.16: *K příkladu 2.3.2* **Brabec1989**

Přesně to znamená toto: Zvolíme-li libovolně velké $q > 0$, můžeme nalézt $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \neq 0$, pro něž $|x| < \delta$, platí $f(x) > q$. To lze říci i takto: Zvolíme-li libovolně okolí bodu $+\infty$, existuje okolí bodu 0 tak, že pro každé $x \neq 0$ z tohoto okolí je $f(x)$ ve zvoleném okolí $+\infty$ (viz obr. 2.16).

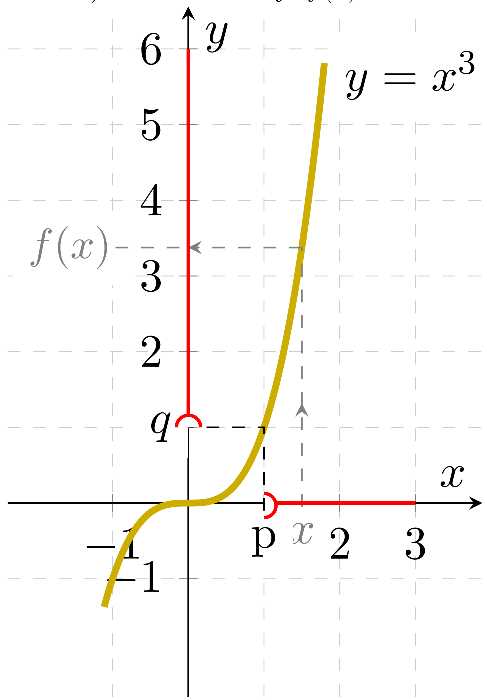
Je třeba říci, že při zkoumání limit funkcí nás nezajímají jen funkce „tvaru“ (2.47), i když tento případ je v diferenciálním počtu velmi častý, jak poznáme v kap. **??**. Někdy nás zajímá i chování funkcí v okolí nevlastních bodů $-\infty$, $+\infty$

Příklad 2.3.3. *Je dána funkce $f : f(x) = \frac{x+1}{x}$. Sledujme její chování, když hodnoty argumentu x budou vzrůstat nade všechny meze neboli, jak říkáme, x se bude blížit k $+\infty$ (což zapisujeme $x \to +\infty$ (viz obr. 2.17). Můžeme psát $f(x) = 1 + 1/x$. Vzrůstají-li neomezeně hodnoty proměnné x, blíží se hodnoty výrazu $1/x$ čím dál tím více nule, takže funkční hodnoty $f(x)$ jsou čím dál tím blíže číslu 1. V tomto případě píšeme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ nebo $f(x) \to 1$ pro $x \to +\infty$ a říkáme, že funkce f má v bodě $+\infty$ limitu rovnou 1. Přesně to znamená toto: Zvolíme-li libovolně malé $\varepsilon > 0$, můžeme nalézt $p > 0$ tak, že pro $x > p$ platí $|f(x)—l| < \varepsilon$. (Viz obr. 2.17.) Můžeme to říci i takto: Zvolíme-li libovolně okolí bodu 1, existuje okolí bodu $+\infty$ tak, že pro každé x (konečné) z tohoto okolí je $f(x)$ ve zvoleném okolí bodu 1.*



Obrázek 2.17: *K příkladu 2.3.3* **Brabec1989**

Příklad 2.3.4. *Je dána funkce $f : f(x) = \frac{x+1}{x}$. Sledujme její chování, když hodnoty argumentu x budou vzrůstat nade všechny meze neboli, jak říkáme, x se bude blížit k $+\infty$ (což zapisujeme $x \to +\infty$ (viz obr. 2.17). Můžeme psát $f(x) = 1 + 1/x$. Vzrůstají-li neomezeně hodnoty proměnné x, blíží se hodnoty výrazu $1/x$ čím dál tím více nule, takže funkční hodnoty $f(x)$ jsou čím dál tím blíže číslu 1. V tomto případě píšeme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ nebo $f(x) \to 1$ pro $x \to +\infty$ a říkáme, že funkce f má v bodě $+\infty$ limitu rovnou 1. Přesně to znamená toto: Zvolíme-li libovolně malé $\varepsilon > 0$, můžeme nalézt $p > 0$ tak, že pro $x > p$ platí $|f(x)—l| < \varepsilon$. (Viz obr. 2.17.) Můžeme to říci i takto: Zvolíme-li libovolně okolí bodu 1, existuje okolí bodu $+\infty$ tak, že pro každé x (konečné) z tohoto okolí je $f(x)$ ve zvoleném okolí bodu 1.*



Obrázek 2.18: *K příkladu 2.3.4* **Brabec1989**

V uvedených případech bychom mohli zkoumat i limity funkcí pro $x \to -\infty$. Všimněme si ještě, že ve všech případech nebylo nutné, aby funkce f byla definována v bodě, ke kterému se blíží hodnoty argumentu, ale bylo zapotřebí, aby funkce f byla definována v bodech libovolně blízkých tomuto bodu. Tomuto požadavku bude vyhověno, jestliže daný bod, v němž zkoumáme limitu, bude *hromadným bodem definičního oboru*. Není ovšem nutné, aby funkce byla definována v celém nějakém *prstencovém okolí uvažovaného bodu*.

Nechť a je bod, blízko kterého se pohybuje hodnota proměnné x. Pro definici limity je důležitý pojem **okolí bodu** a (obr. 2.16). Zvolme kladná čísla δ_1 a δ_2. Nazýváme

2.4 Spojitost funkce

Kapitola 3

Počet Pravděpodobnosti

Contents

Slovo pravděpodobnost používáme velmi často. Jaký však je jeho přesný význam? Jsme přesvědčeni, že pravděpodobnost výhry ve sportce je velmi malá. Ani pravděpodobnost, že se vyplní předpověď počasí, nepovažujeme mnohdy za výraznou. Přesto je mezi oběma příklady obrovský kvantitativní rozdíl. Zkusme význam pojmu pravděpodobnost ukázat pomocí konkrétních číselných příkladů.

- **Příklad se střelcem**: Sportovní střelec střílí na terč série 100 ran. Předpokládejme, že podmínky při střelbě jsou stále stejné. Stejná je zbraň, terč, vzdálenost, povětrnostní podmínky i momentální zdravotní stav střelce. Při hodnocení střelcova „mistrovství“ někdo řekne, že střelec zasáhne terč s pravděpodobností 92%. Jak tomu rozumět? Znamená to, že v souboru sérií výstřelů jsou velmi časté ty, v nichž zasáhl střelec terč 92-krát. Samozřejmě, není řídké, že se objeví i série s 93 nebo 94 zásahy, ale také s 91 nebo 90. Vyloučen není ani případ s úspěšností 96 či 88, a dokonce i stovku bychom mohli zaznamenat. Situace výrazně odlišné od 92 zásahů však budou řídké, a to tím více, čím více se úspěšnost série liší od 92 oběma směry.

- **Příklad se zmetky**: Koupíte si výrobek u firmy, o které je známo, že vyrábí zmetky s pravděpodobností 0,16%? Situaci lze posuzovat obdobně jako úspěšnost střelce. Budeme-li například zkoumat série obsahující 1000 výrobků, bude každá z nich obsahovat „v průměru“ 16% zmetků. Z příkladu se střelcem již zhruba víme, jak posuzovat slovo v průměru.

V této kapitole se budeme pravděpodobnostmi zabývat podrobněji. Zjistíme, že i když se týkají náhodných jevů, platí i pro ně jisté zákonitosti.

3.1 Pravděpodobnost

V úvodních příkladech jsme si vyložili, jak intuitivně chápat pojem pravděpodobnost. Jednalo se v nich o posouzení průměrné úspěšnosti ve velkém souboru operací či úkonů prováděných za stejných podmínek, šlo tedy o jakousi „průměrnou“ pravděpodobnost. Nyní definujeme pravděpodobnost matematicky.

3.1.1 Co se pravdě podobá — definice pravděpodobnosti

Pro definici pravděpodobnosti použijeme pojmu *náhodný pokus*, jehož význam si ukážeme na příkladu. Dobrým příkladem náhodných pokusů je třeba házení mincí, hraní kostkou, výběr karet z balíčku, vidíme-li pouze jejich rub, apod. Budeme třeba házet kostkou. Abychom si situaci zbytečně nekomplikovali, budeme předpokládat, že všechny výsledky hodu kostkou (náhodné pokusy) jsou stejně časté, žádný z nich není nijak preferován[1]. Počet možných výsledků jednotlivého hodu je $N = 6$ (kostka má 6 stěn, na každé je vyznačen odlišný počet ok, tedy 1 až 6). Jednotlivé situace, které mohou nastat, nazýváme náhodnými jevy. Náhodným jevem A tak může být situace *„padne číslo 2“*, jiným náhodným jevem B situace *„padne číslo dělitelné třemi“*, apod. Počet situací, kdy výsledek hodu lze hodnotit tak, že určitý jev nastal, označíme M. Například pro jev A *„padne číslo 2“* je $M(A) = 1$, pro jev B *„padne číslo dělitelné třemi“* je $M(B) = 2$ (počet ok 3 nebo 6). Můžeme také definovat jev O *„nepadne žádné číslo“* ($M(0) = 0$) nebo jev J *„padne jakékoli číslo“* ($M(J) = 6$).

Definice 3.1.1. *Pravděpodobností jevu rozumíme podíl*

$$p = \frac{M}{N} = \frac{\textit{počet případů příznivých}}{\textit{počet případů možných}}. \tag{3.1}$$

Počtem případů možných jsme zkráceně nazvali počet všech možných výsledků náhodného pokusu, počtem případů příznivých pak počet všech takových výsledků pokusu, při nichž daný jev nastal.

Je zřejmé, že hodnota pravděpodobnosti jakéhokoli jevu je nezáporná a může nabývat hodnoty nejvýše 1, tj. $0 < p < 1$. Jev s *nulovou pravděpodobností* se nazývá **nemožný**, jev s *jednotkovou pravděpodobností* je **jistý**. V našem příkladu s kostkou tak dostáváme

$$p(A) = \frac{1}{6}, \qquad p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad p(O) = 0, \qquad p(J) = 1.$$

Příklad 3.1.1. ***Barevné ponožky:***
*V zásuvce jsou ponožky tří barev. Červené (**Č**), zelené (**Z**) a modré (**M**). Je jich tam od každé barvy hodně. Student jde na schůzku a chce si vzít čisté ponožky. Náhle zhasne světlo. Student vytáhne potmě dvě ponožky. Jaká je pravděpodobnost, že ponožky budou mít stejnou barvu? Vyjmenujme případy, které mohou při vytažení dvou ponožek nastat: (**Č+Č**), (**Č+Z**), (**Z+Č**), (**Č+M**), (**M+Č**), (**Z+Z**), (**Z+M**), (**M+Z**), (**M+M**). Je tedy $n = 9$. Příznivé situace jsou tří, (**Č+Č**), (**Z+Z**), (**M+M**). Pravděpodobnost je tedy 1/3. (Převzato z* **Musilova2009MA1***)*

[1] Kostka by tedy měla být homogenní, plocha, na kterou po hodu dopadne, vodorovná, kvalita povrchu všech stěn kostky stejná (žádná stěna by třeba neměla být natřena lepidlem), apod.

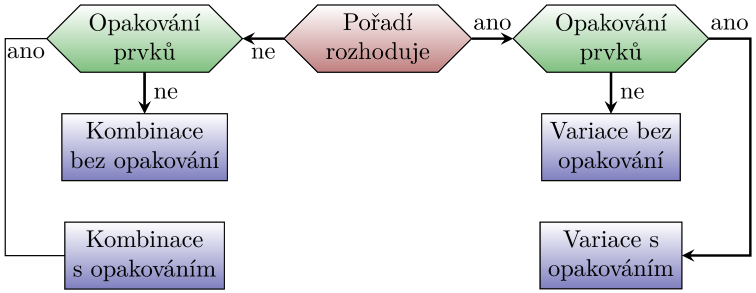
3.1.2 Cifry, kostky, karty - kombinatorické opakování

Příklad s ponožkami byl velmi jednoduchý. Podařilo se nám vyjmenovat všechny případy možné i všechny případy příznivé, neboť obojího bylo docela málo. Daleko běžnější jsou však situace, kdy výčet případů není schůdný. A tehdy potřebujeme **kombinatoriku**.

Nechť $\mathcal{M}$ je n-prvková množina, z níž budeme provádět výběry k prvků podle určitých pravidel. Prvky množiny $\mathcal{M}$ nemusíme nijak konkretizovat. Abychom si však o výběrech a pravidlech pro jejich tvorbu dokázali udělat nějakou názornou představu, je taková konkretizace vhodná. Prvky množiny $\mathcal{M}$: mohou být třeba žáci ve třídě, barvy, hrací karty, apod. Výběry mohou představovat třeba družstva pro odbíjenou, signály tvořené barevnými praporky, možnosti rozdání karet při mariáši, apod. Jednotlivé typy výběrů získaly své názvy právě na základě pravidel stanovených pro jejich vytváření. Rozhodující jsou dvě základní kritéria:

- Je pro tvorbu výběru podstatné pořadí prvků ve výběru či nikoliv?
- Mohou se prvky ve výběru opakovat či nikoliv?

Typy výběrů shrnuje následující diagram:



Obrázek 3.1: *Typy výběrů.* **Musilova2009MA1**

Představuje-li daný výběr například volejbalové družstvo osmi děvčat (šest hráček a dvě náhradnice), které bude reprezentovat v soutěži třídu osmou bé, do níž chodí 25 děvčat a 18 chlapců, jedná se o výběr k—8 prvků z počtu $n = 25$ prvků. Chlapce nelze postavit do družstva volejbalistek. Každý výběr možného družstva bude představovat *kombinaci bez opakování*, neboť pořadí hráček nehraje roli a třeba Aničku Novákovou máme ve třídě jen jednu. Budeme-li však chtít vytvářet z deseti cifer $0, 1, \dots, 9$ trojciferná čísla, pak tyto výběry tří prvků z deseti ($k = 3$, $n = 10$) jsou *variacemi s opakováním*. Čísla 125, 512, 251, 215, 521 a 152 jsou totiž různá, a například 222 je také trojciferné číslo. Kombinace s opakováním bychom mohli vytvářet třeba i při výběru různobarevných ponožek ze zásuvky a konečně *variacemi bez opakování* by mohly být dejme tomu trojbarevné signály ($k = 3$) tvořené trojicemi barevných hadříků vybíraných z n barev (pro $n = 3$ třeba zrovna z těch ponožek). Nyní bychom však rádi věděli, jak pro zadané hodnoty n a k určit počet všech možných výběrů předepsaného typu. Ukážeme si to na příkladech.

Příklad 3.1.2. ***Šance milion:***
„Znáte nějakou jinou hru, kde můžete denně vyhrát milion?“ Tento nebo jiný, obdobně nepříliš vtipný reklamní slogan propaguje v televizi hru, jejímž cílem je uhodnout šestici tažených cifer ve správném pořadí. (Hru raději nehrajte, pravděpodobnost výhry je mizivá.) Tah se provádí následovně: V každém ze šesti bubnů, očíslovaných pořadovými čísly 1 *až* 6*, je připraveno deset míčků opatřených ciframi* $0, 1, \dots, 9$*. Z prvního bubnu se náhodně vylosuje jedna cifra (deset možností). Poté se náhodně vylosuje jedna cifra z druhého bubnu (opět deset možností). Možností vzniku uspořádané dvojice cifer (jedna cifra z prvního a druhá z druhého bubnu) je již sto (každou možnost výsledku u prvního bubnu lze kombinovat s každou možností výsledku z druhého bubnu). Losování pokračuje u třetího, čtvrtého, pátého a šestého bubnu. Celkový počet možností je* $1 \cdot 10^6$*, tedy* ***milion****. (Šance získat výhru, tedy vyhrát milion, je ovšem pouze jedna miliónțina, neboť z milionu možností je pouze jedna skutečně tažena.)*

Zobecněním předchozího příkladu získáváme vzorec pro počet **variací s opakováním** k-té třídy z n prvků. Při tahu totiž záleží na pořadí bubnů a každý buben obsahuje všechny cifry. Výsledky tahů z jednotlivých bubnů se tedy mohou opakovat. Pokud by bubnů bylo k a v každém n různých cifer, dostali bychom pro **variace s opakováním** k**-té třídy z** n **prvků** celkový počet

$$\boxed{V'_k = n^k}. \tag{3.2}$$

Příklad 3.1.3. ***Modifikovaná šance milion:***
Představme si hru z předchozího příkladu upravenou takto: K dispozici bude jen jeden buben s ciframi $0, 1, \dots, 9$*, každá cifra je v bubnu obsažena pouze jednou. Opět máme losovat uspořádanou* ***šestici cifer****. Nyní se však jedná o* ***variace šesté třídy z deseti prvků bez opakování****. S jediným bubnem musíme totiž provést šest losování, přičemž při každém losování ubude z bubnu jedna cifra. Při prvním tahu je deset možností, při druhém již jen devět, atd., při šestém již pouze pět možností. Celkem je tedy* $10 \cdot 9 \cdots 5 = 151\,200$ *možností.*

Uvážíme-li, že v předchozím příkladu je $n = 10$ a $k = 6$, dostáváme pro **počet variací bez opakování** k**-té třídy z** n **prvků** obecný vztah

$$V_k(n) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

neboli

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}\,. \tag{3.3}$$

Poznamenejme, že $n!$ značí **faktoriál**, $n! = n(n—1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Pro nulu definujeme $0! = 1$. Je zřejmé, že při vytváření variací bez opakování musí být $k \leqq n$. Variace bez opakování n-té třídy z n prvků se nazývají **permutace**. Každá z nich představuje určité uspořádání těchto n prvků. Platí

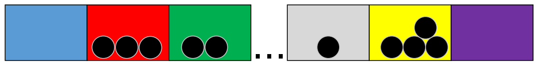
$$\boxed{P(n) = V_n(n) = n!}. \tag{3.4}$$

Nyní odvodíme vzorec pro počet **kombinací** k**-té třídy z** n **prvků bez opakování**. Již jsme si řekli, že *kombinací* rozumíme takový výběr z celkového počtu n prvků, který obsahuje určitých k prvků nezávisle na jejich pořadí. Představme si, že máme k dispozici všechny variace bez opakování k-té třídy ze zmíněných n prvků. Vezměme kteroukoli z nich. Soubor všech variací k-té třídy z n prvků však obsahuje i další variace, lišící se od té naší jen pořadím prvků. Celkem je takových variací (i s tou první) $k!$ a z hlediska kombinací představují totéž. Soubor variací se tak rozpadá na podsoubory, z nichž každý obsahuje $k!$ variací lišících se navzájem pouze pořadím prvků. Každý z těchto podsouborů představuje však jedinou kombinaci. Počet kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování je tedy

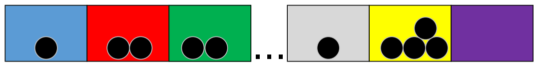
$$\boxed{C(k) = \frac{V_k(n)}{P(k)} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}}. \tag{3.5}$$

Pro odvození vzorce pro **kombinace s opakováním** použijeme opět příkladu.

Příklad 3.1.4. *Kuličky v přihrádkách*:
*Máme kuličky n různých barev, v každé barvě máme tolik kuliček, kolik bude potřeba. Naším úkolem je vytvářet výběry k kuliček. Na **pořadí barev nezáleží**, kuliček jedné barvy může být ve výběru libovolný počet $0 \leqq s \leqq k$. Výběry budeme vytvářet tak, že budeme kuličky dávat do n přihrádek, z nichž každá bude vyhrazena pro určitou barvu. Pokud tedy v daném výběru zrovna nebude třeba modrá kulička, bude přihrádka vyhrazená pro modrou barvu prázdná. Budou-li v daném výběru právě tři červené kuličky, budou umístěny v přihrádce vyhrazené pro červenou barvu. Vidíme, že pokud konkrétním přihrádkám přisoudíme konkrétní barvy, samotné kuličky by již barevné být nemusely, stačily by třeba kuličky skleněné, bezbarvé. Zůstane-li například přihrádka pro modrou barvu prázdná, víme, že daný výběr neobsahuje modrou barvu. Budou-li v přihrádce pro červenou barvu tři (bezbarvé) kuličky, víme, že daný výběr obsahuje červenou barvu třikrát. Příklad takové situace ukazuje následující schéma:*



Náš úkol můžeme přeformulovat takto: Je třeba rozmístit k kuliček do n přihrádek. V každé přihrádce může být obecně s kuliček, kde $0 \leqq s \leqq k$, přitom celkový počet kuliček musí být samozřejmě stále k. Můžeme si představit, že k kuliček máme položených v řadě na polici mezi dvěma pevnými stěnami (krajní svislé čáry v předchozím schématu) a různé způsoby rozmístění kuliček do přihrádek provádíme přemísťováním pohyblivých přepážek. Kdybychom například v předchozím schématu přesunuli druhou svislou čáru, počítáno zleva, až za první kuličku v přihrádce na červenou barvu, dostaneme uspořádání, při němž je v přihrádce na modrou barvu jedna kulička a v přihrádce na červenou barvu dvě kuličky. Tedy takto:



Mezi dvěma krajními pevnými stěnami máme tedy k dispozici k pozic pro kuličky a $(n-1)$ pozic pro pohyblivé přepážky. Celkem tedy $(n+k-1)$ pozic, na které můžeme libovolně rozmísťovat k kuliček a $(n-1)$ přepážek. Do těchto $(n+k-1)$ pozic můžeme umístit k kuliček $C'_k(n)$ způsoby, kde

$$\boxed{C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}}. \tag{3.6}$$

Na zbylé pozice již musíme umístit přepážky. Nebo naopak, nejprve umístíme $(n-1)$ přepážek a potom kuličky. Výsledek je stejný, jak je vidět z předchozího vzorce. Protože jsme vytváření kombinací s opakováním k-té třídy z n prvků převedli na úlohu o rozmísťování kuliček do přihrádek, udává získaný vzorec právě počet takových kombinací. Aby měl vzorec smysl, musí platit $n+k-1 \geqq k$, tedy $n \geqq 1$.

Komu nevyhovuje představa kuliček v přihrádkách a má raději čísla, může uvažovat následovně: Tak jako je každé číslo v desítkové soustavě zapsáno pomocí cifer $0, 1, 2, \dots, 8, 9$, je k jeho zápisu ve dvojkové soustavě potřeba pouze dvou cifer, nuly a jedničky. Představme si nyní přepážku jako jedničku a kuličku jako nulu. Náš úkol zjistit počet všech možných způsobů rozdělení k kuliček do n přihrádek, ohraničených $(n+1)$ přepážkami, můžeme převést na ekvivalentní problém: Kolik dokážeme najít čísel, která jsou ve dvojkové soustavě zapsána právě k nulami a $(n+1)$ jedničkami, požadujeme-li, aby první i poslední cifrou byla jednička? Odpověď je jednoduchá. Máme k dispozici $(n+k+1)$ pozic pro cifry. První a poslední pozice jsou pevně obsazeny jedničkami, volných pozic je tedy pouze $(n+k—1)$. Počet všech různých způsobů, kterými na k z těchto pozic můžeme umístit nuly, je roven počtu kombinací k-té třídy z $(n+k—1)$ prvků. Na zbylé pozice již musíme umístit jedničky. Komplementárně, budeme-li hledat počet všech možných způsobů, jak na $(n—1)$ pozic umístit jedničky, dostaneme shodný výsledek, v souhlasu se vzorcem (3.5).

Příklad 3.1.5. *Obsazování kvantových stavů*:
*Úloha o kuličkách a přihrádkách má přímou aplikaci v **kvantové fyzice**. Představme si, že fyzikální soustava je tvořena K částicemi. Každá částice se nachází v určitém stavu, v němž jí můžeme přisoudit fyzikální charakteristiky, které jsou s tímto stavem spojeny (třeba energii, moment hybnosti, apod.). Jednotlivé stavy jsou pak rozlišitelné právě pomocí těchto charakteristik. Dejme tomu, že přípustných stavů je $n \geqq 1$. Problémem kvantové fyziky je to, že kvantové částice jsou nerozlišitelné. Nepoznáme jednu od druhé. Je to stejné, jako bychom měli k naprosto stejně vypadajících kuliček, které nemáme nijak očíslovány. Záměna dvou částic (nerozlišitelných kuliček) se nepozná, nevede tedy ke změně stavu fyzikální soustavy. Pro hodnoty fyzikálních charakteristik soustavy jako celku je tedy důležité jen to, kolik částic je v každém z přípustných stavů. Musíme se tedy zajímat o to, kolika způsoby lze našich k **nerozlišitelných částic** (kuliček) umístit do n **stavů** (přihrádek). Kvantové částice jsou však dvojího druhu, **fermiony** (například elektrony, neutrony, protony, jádra s lichým počtem nukleonů) a **bosony** (například fotony, mezony, jádra se sudým počtem nukleonů). Rozdíl mezi nimi je ten, že bosony se „dobře snášejí“, a proto jich může být v jednom stavu i více.*

- *Počet možností, jak rozmístit k **bosonů** po n stavech je tedy*

$$N_{boson} = \binom{n+k-1}{k}$$

- *S **fermiony** je tomu jinak. **Pauliho vylučovací princip** jim zakazuje, aby v daném stavu byl více než jeden fermion. Stav může být buď prázdný, nebo obsazen jedním fermionem. V takovém případě musí být $n \geqq k$ a v každé přihrádce může být nejvýše jedna kulička. Situace tak odpovídá **kombinacím bez opakování k-té třídy z n prvků**, tj.*

$$N_{fermion} = \binom{n}{k}$$

Získané kombinatorické vzorce nyní použijeme při řešení základních úloh o pravděpodobnostech. V každé úloze bude důležité

- definovat jev A, jehož pravděpodobnost počítáme,
- určit počet N případů možných, tj. počet všech možných výsledků pokusu, při kterém sledujeme, zda jev A nastal či nenastal,
- určit počet M případů příznivých, tj. počet těch výsledků daného pokusu, při kterých jev A nastal.

Příklad 3.1.6. ***Výhra ve sportce***

Jaká je pravděpodobnost hlavní výhry ve sportce? Všichni víme, že malá, ale máme představu, jak malé toto číslo je? Při sportce se losuje $k = 6$ čísel a jedno dodatkové z celkového počtu $n = 49$ čísel. (Dříve byla čísla spojena s názvy sportů, odtud název „sportka“ .) Na pořadí čísel ve výběru nezáleží, vytažené číslo se do hry nevrací. Jde tedy o ***kombinace bez opakování****. Hlavní výhra požaduje uhodnout všech 6 tažených čísel. Jev A je tedy definován takto:*

- *Jev A: Bude taženo právě oněch 6 čísel, která jsem vsadil. Počet možností, které při tahu sportky mohou nastat (počet případů možných), je* $N = \binom{n}{k} = \binom{49}{6}$*. Hlavní výhru představuje jediná kombinace, počet příznivých případů je proto* $M = 1$*. Pravděpodobnost hlavní výhry ve sportce, tj. pravděpodobnost jevu A, je*

$$p(A) = \frac{M}{N} = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{43!6!}{49!} = \frac{720}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} \simeq 7 \cdot 10^{-8} = 7 \cdot 10^{-6}\ \%$$

  Pravděpodobnost hlavní výhry je velmi malá, sedm milióntin procenta.

- *A o kolik lepší to bude s pravděpodobností některé z vedlejších výher? Tak třeba pátá cena znamená, že je nutné ze šesti tažených čísel uhodnout libovolné tři. Jev A je tedy: Ze šesti čísel, která jsme vsadili, budou v tažené kombinaci obsažena právě tři libovolná z nich. Počet N zůstává stejný jako v předchozí části úlohy. Je třeba jen určit M. Každý příznivý případ vzniká tak, že trojice správných čísel (výběry tří ze šesti) je doplněna trojicí chybných čísel (výběry tří ze čtyřiceti tří). Tedy* $M = \binom{6}{3}\binom{49-6}{3} = \binom{6}{3}\binom{43}{3}$,

$$p(A) = \frac{M}{N} = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \left(\frac{6!}{3! \cdot 3!}\right)\left(\frac{43!}{40! \cdot 3!}\right)\left(\frac{43!6!}{49!}\right)$$
$$= \frac{120 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 720}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 36} \simeq 0{,}018.$$

  Tato pravděpodobnost již zanedbatelná není, na rozdíl od finanční částky, jíž bývá ohodnocena pátá cena. Sázení sportky může domácímu rozpočtu spíše ublížit.

- *Třetí, resp. čtvrtá cena jsou, podobně jako první a pátá, definovány velmi jednoduše. Je třeba uhodnout pět, resp. čtyři ze šesti tažených čísel. V případě druhé ceny hraje roli dodatkové číslo. Druhou cenu získává ten, kdo uhodl pět ze šesti čísel vylosovaných v prvním tahu a ještě navíc číslo dodatkové, které se losuje ze zbylých 43 čísel, jež zůstala po prvním tahu v osudí. Jev A je tedy definován takto:*

  Ze šesti čísel, která jsem vsadil, bude při prvním tahu vylosováno libovolných pět a v druhém tahu bude vylosováno právě to dodatkové číslo, které jsem vsadil. Počet případů příznivých je pouze $M = \binom{6}{5}$*, neboť šestým číslem nemůže být libovolné ze 43 čísel, která nebyla v prvním tahu vylosována, ale musí to být právě číslo dodatkové. Pravděpodobnost jevu A je*

$$p(A) = \frac{M}{N} = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{49}{6}} \simeq 4{,}2 \cdot 10^{-17}.$$

  Pokud bychom jako jev A označili výhru jakékoliv ceny, dostaneme

$$M = \sum_{6}^{k=3}\binom{6}{k}\binom{43}{6-k} + \binom{6}{5}$$
$$= \binom{6}{3}\binom{43}{3} + \binom{6}{4}\binom{43}{2} + \binom{6}{5}\binom{43}{1} + \binom{6}{6}\binom{43}{0} + \binom{6}{5},$$
$$p(A) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3} + \binom{6}{4}\binom{43}{2} + \binom{6}{5}\binom{43}{1} + \binom{6}{6}\binom{43}{0} + \binom{6}{5}}{\binom{49}{6}} =\simeq 0{,}019.$$

  Všimněte si, že tento výsledek je roven součtu pravděpodobností výhry páté, čtvrté, třetí, druhé a hlavní ceny. Později si tento závěr ještě připomeneme.

Příklad 3.1.7. ***Losování karet***

Máme karetní hru mariáš, která obsahuje celkem 32 karet osmi hodnot 7, 8, 9, 10, J (kluk), Q (dáma), K (král), A (eso), každá hodnota je ve čtyřech barvách, červené barvy jsou ♡ (srdce) a ♢ (kára), černé barvy jsou ♠ (piky) a ♣ (kříže). Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném vylosování deseti karet budou mezi nimi:

A právě dvě esa,

B alespoň dvě esa,

C nejvýše dvě esa,

D alespoň šest karet stejné barvy,

E právě dvě dámy a alespoň jeden kluk,

F právě dvě dámy nebo alespoň jeden kluk?

Písmena (A) až (F) představují různé části úlohy a také zároveň definují jevy, jejichž pravděpodobnost počítáme. Jedná se opět o kombinace. Nezáleží totiž na pořadí, v jakém karty vytahujeme. Důležité je jen to, zda jsou vyjmenované karty ve výběru obsaženy. Počet možných výsledků náhodného vylosování deseti karet z dvaatřiceti, tj. počet případů možných, je pro všechny části úlohy stejný,

$$N = \binom{32}{10} = \frac{32 \cdot 31 \cdots 24 \cdot 23}{10 \cdot 9 \cdots 2 \cdot 1} = 64\,512\,240.$$

Počítejme nyní případy příznivé pro jednotlivé jevy A až F a pravděpodobnosti těchto jevů:

$$M(A)=\binom{4}{2}\binom{32-4}{10-2}=\binom{4}{2}\binom{28}{8}=6\cdot\frac{28\cdot 27\cdots 1}{8\cdot 7\cdots 2\cdot 1}=18\,648\,630.$$

Jak jsme k tomuto výsledku došli? Příznivý pro daný jev je každý výběr, v němž jsou obsažena právě dvě esa (libovolných barev) a žádná další esa (význam slova „právě“). Počet výběrů dvou es z celkového počtu čtyř es je $C_2(4)$, *počet výběrů dalších libovolných osmi karet ze zbývající části hry, která vznikne po odstranění es (nechceme, aby v příznivém výběru byla další esa), je* $C_{(10-2)}(32-4)=C_8(28)$. *Každý výběr dvojice es lze kombinovat s každým výběrem zbývajících osmi karet ze zbytku hry, tj.* $M(A)=C_2(4)\cdot C_8(28)$. *A to je právě náš předchozí výsledek. Potom:*

$$p(A)=\frac{M(A)}{N}=\frac{\binom{4}{2}\binom{28}{8}}{\binom{32}{10}}=\frac{18\,648\,630}{64\,512\,240}\simeq 0{,}29$$

Aby nastal jev B, požadujeme, aby v náhodném výběru deseti karet z dvaatřiceti byla alespoň dvě esa. To znamená, že výběr považujeme za příznivý, obsahuje-li dvě esa libovolné barvy a osm libovolných karet jiné hodnoty, nebo obsahuje tři esa libovolné barvy a sedm libovolných karet jiné hodnoty, nebo obsahuje všechna čtyři esa a šest libovolných karet jiné hodnoty, k es (pro $k=2,3,4$*) můžeme ze čtyř es vybrat* $\binom{4}{k}$ *způsoby.* $10-k$ *karet jiné hodnoty pak musíme vybírat pouze z 28 karet (esa je nutno odstranit, aby bylo zaručeno, že „doplňkové“ karty budou mít jinou hodnotu než eso). Výběr zbývajících karet lze učinit* $\binom{28}{10-k}$ *způsoby. Nakonec tedy dostáváme*

$$\begin{aligned}M(B)&=\binom{4}{2}\binom{28}{8}+\binom{4}{3}\binom{28}{7}+\binom{4}{4}\binom{28}{6}\\&=6\cdot\frac{28\cdot 27\cdots 22\cdot 21}{8\cdot 7\cdots 2\cdot 1}+4\cdot\frac{28\cdot 27\cdots 23\cdot 22}{7\cdot 6\cdots 2\cdot 1}+4\cdot\frac{28\cdot 27\cdots 24\cdot 23}{6\cdot 5\cdots 2\cdot 1}=23\,761\,530,\\P(B)&=\frac{M(B)}{N}=\frac{23\,761\,530}{64\,512\,240}\simeq 0{,}37.\end{aligned}$$

Pozn.: Někomu se předchozí výpočet může zdát příliš složitý. Nelze jej nějak zjednodušit? Co kdybychom uvažovali třeba takto: Výběr dvou es již zajistí splnění požadavku. Doplňkové karty tedy již pak můžeme vybírat ze třiceti karet - nebudeme tedy odstraňovat esa, protože budou-li vybrána mezi doplňkovými kartami, požadavek „alespoň dvou es ve výběru“ to nenaruší. Při takové interpretaci bychom dostali

$$M(B)=\binom{4}{2}\binom{30}{8}=6\cdot\frac{30\cdot 29\cdots 24\cdot 23}{8\cdot 7\cdots 2\cdot 1}=35\,117\,550.$$

Vidíme, že vyšlo číslo vyšší než při předchozí úvaze. Co je tedy správně? Správně je první úvaha vedoucí k nižšímu počtu příznivých případů. Při druhé úvaze jsme některé případy započetli vícekrát. Zkuste přijít na to, jak se to stalo. V každém případě vidíme, že kombinatorické úvahy, ať již vypadají jakkoli jednoduše, mohou být zrádné a je třeba dát si na ně pozor.

Jev C podle zadání nastane, obsahuje-li náhodný výběr deseti karet nejvýše dvě esa. Znamená to, že výběr je příznivý, neobsahuje-li žádné eso a obsahuje deset karet jiné hodnoty, nebo obsahuje-li jedno eso a devět karet jiné hodnoty, nebo obsahuje-li dvě esa a osm karet jiné hodnoty. Počet $M(C)$ *určíme analogicky jako* $M(B)$, *ale pro* $k=0,1,2$:

$$\begin{aligned}M(C)&=\binom{4}{0}\binom{28}{10}+\binom{4}{1}\binom{28}{9}+\binom{4}{2}\binom{28}{8}\\&=\cdot\frac{28\cdot 27\cdots 20\cdot 19}{10\cdot 9\cdots 2\cdot 1}+4\cdot\frac{28\cdot 27\cdots 21\cdot 20}{9\cdot 8\cdots 2\cdot 1}+6\cdot\frac{28\cdot 27\cdots 22\cdot 21}{8\cdot 7\cdots 2\cdot 1}=59\,399\,340,\\P(C)&=\frac{M(C)}{N}=\frac{59\,399\,340}{64\,512\,240}\simeq 0{,}92.\end{aligned}$$

Jev D znamená alespoň šest karet stejné barvy (připomeňme, že barvou rozumíme jednu z možností ♡, ♢, ♠, ♣*). Hra obsahuje osm karet od každé barvy. Současně je tedy zřejmé, že karet stejné barvy může být ve výběru nejvýše osm. Výběr je příznivý pro* $k=6,7,8$. *Obdobnou úvahou jako v předchozích případech dostáváme*

$$M=4\cdot\sum_{k=6}^{8}\binom{8}{k}\binom{32-8}{10-k}=1\,255\,984.$$

Faktor 4 před celou sumou se objevuje proto, že nebylo specifikováno, která ze čtyř barev má být zastoupena alespoň šesti kartami. Všechny čtyři možnosti volby barvy jsou tedy příznivé. Pravděpodobnost jevu D je

$$p(D)=\frac{M(D)}{N}=\frac{4\cdot\sum_{k=6}^{8}\frac{8!}{k!(8-k)!}\,\frac{24!}{(10-k)!(14-k)!}}{\binom{32}{10}}=\frac{1\,255\,984}{64\,512\,240}\simeq 0{,}019.$$

Případy (E) a (F) v zadání se liší pouze slůvkem „a“ a „nebo“. Uvidíme, že nejde o slovíčka, ale o podstatný rozdíl.

Aby nastal jev E, požadujeme, aby náhodný výběr deseti karet obsahoval právě dvě dámy a alespoň jednoho kluka. Znamená to, že výběr je příznivý, obsahuje-li dvě dámy libovolné barvy a současně alespoň jednoho kluka libovolné barvy. Příznivé možnosti tedy jsou:

1. *dvě dámy libovolné barvy, jeden kluk libovolné barvy, 7 libovolných karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem* $\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{32-2\cdot 4}{7}=8\,306\,496$ *možností,*
2. *dvě dámy libovolné barvy, dva kluci libovolné barvy, 6 libovolných karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem* $\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{32-2\cdot 4}{6}=4\,845\,456$ *možností,*
3. *dvě dámy libovolné barvy, tři kluci libovolné barvy, 5 libovolných karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem* $\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{32-2\cdot 4}{5}=1\,020\,096$ *možností,*
4. *dvě dámy libovolné barvy, všichni čtyři kluci, 4 libovolné karty, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem* $\binom{4}{2}\binom{4}{4}\binom{32-2\cdot 4}{4}=63\,756$ *možností.*

$$M(E) = \binom{4}{2} \cdot \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} \binom{24}{8-k} = 6 \left[4\binom{24}{7} + 6\binom{24}{6} + 4\binom{24}{5} + \binom{24}{4} \right] = 14\,235\,804,$$

$$p(E) = \frac{M(E)}{N} = \frac{14\,235\,804}{64\,512\,240} \simeq 0{,}22.$$

Aby nastal jev F, požadujeme, aby náhodný výběr deseti karet obsahoval právě dvě dámy nebo alespoň jednoho kluka. Znamená to, že výběr je příznivý, obsahuje-li dvě dámy libovolné barvy a jakékoli další karty, nebo obsahuje alespoň jednoho kluka a jakékoli další karty. Nyní je nutno o všech možnostech pečlivě rozvažovat, abychom některé nezapočítali vícekrát. Pozor, slůvko „nebo“ zde nemá vylučovací význam, připouští se, že mohou být splněny obě podmínky jevu F, tj. jak právě dvě dámy, tak alespoň jeden kluk. Příznivé možnosti jsou

1. *dvě dámy libovolné barvy, žádný kluk, 8 libovolných karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem*
$$\binom{4}{2}\binom{4}{0}\binom{32-2\cdot 4}{8} = 6\binom{24}{8},$$
2. *žádná dáma, k kluků libovolné barvy pro $k = 1, 2, 3, 4$ (alespoň jeden kluk), $10-k$ karet, které nemají hodnotu dám y ani kluka, celkem*
$$\binom{4}{0}\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{32-2\cdot 4}{10-k} = \sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{24}{10-k},$$
3. *jedna dáma libovolné barvy, k kluků libovolné barvy pro $k = 1, 2, 3, 4$ (alespoň jeden kluk), $10-k-1$ karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem*
$$\binom{4}{1}\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{32-2\cdot 4}{10-k-1} = 4\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{24}{9-k},$$
4. *dvě dámy libovolné barvy, k kluků libovolné barvy pro $k = 1, 2, 3, 4$ (alespoň jeden kluk), $10-2-k = 8-k$ karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem*
$$\binom{4}{2}\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{32-2\cdot 4}{10-k-2} = 6\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{24}{8-k},$$
5. *tři dámy libovolné barvy, k kluků libovolné barvy pro $k = 1, 2, 3, 4$ (alespoň jeden kluk), $10-k-3$ karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem*
$$\binom{4}{3}\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{32-2\cdot 4}{10-k-3} = 4\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{24}{7-k},$$
6. *všechny čtyři dámy, k kluků libovolné barvy pro $k = 1, 2, 3, 4$ (alespoň jeden kluk), $10-k-4$ karet, které nemají hodnotu dámy ani kluka, celkem*
$$\binom{4}{4}\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{32-2\cdot 4}{10-k-4} = \sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{24}{6-k},$$

Počet příznivých případů $M(F)$ je dán součtem všech těchto možností, tedy

$$M(F) = \binom{4}{2}\binom{4}{0}\binom{24}{8} + \sum_{s=0}^{4}\binom{4}{s}\left[\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{24}{10-k-s}\right].$$

Všimněme si nyní výsledku. Výraz s dvojitou sumou můžeme přepsat jak

$$\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\left[\sum_{s=0}^{4}\binom{4}{s}\binom{24}{10-k-s}\right].$$

V učebnicích můžeme najít různé vzorce pro kombinační čísla, mezi nimi i vzorec

$$\sum_{s=0}^{p}\binom{p}{s}\binom{r}{q-s} = \binom{r+p}{q} \qquad \textit{pro} \qquad r \geq q,\ q \geq p.$$

(Nebo si jej můžeme sami odvodit — pokuste se o to!) Pro $p = 4$, $r = 24$, $q = 10-k$, $1 \leq k \leq 4$ máme právě náš případ, takže

$$\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\left[\sum_{s=0}^{4}\binom{4}{s}\binom{24}{10-k-s}\right] = \sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{24}{10-k}.$$

Jak můžeme tento výsledek interpretovat? Jedná se o počet případů, kdy náhodný výběr deseti karet z mariášové hry dvaatřiceti karet obsahuje alespoň jednu kartu pevně zvolené hodnoty (v našem případě kluka), bez ohledu na to, kolik obsahuje karet ostatních hodnot. Přidáme-li počet případů, kdy výběr neobsahuje žádného kluka a právě dvě dámy, dostaneme právě počet případů příznivých pro jev F. Př úpravě použijeme ještě jednou vzorce

$$\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{28}{10-k} = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\binom{28}{10-k} - \binom{4}{0}\binom{28}{10} = \binom{32}{10} - \binom{28}{10},$$

$$\begin{aligned}
M(F) &= \binom{4}{2}\binom{4}{0}\binom{24}{8} + \sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\left[\sum_{s=0}^{4}\binom{4}{s}\binom{24}{10-k-s}\right] \\
&= \binom{4}{2}\binom{24}{8} + \sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\binom{28}{10-k} \\
&= \binom{4}{2}\binom{24}{8} + \left[\binom{32}{10} - \binom{28}{10}\right] = \binom{32}{10} - \left[\binom{28}{10} - \binom{4}{2}\binom{24}{8}\right],
\end{aligned}$$

$$p(F) = 1 - \frac{\binom{28}{10} - \binom{4}{2}\binom{24}{8}}{\binom{32}{10}} = 1 - \frac{8\,710\,284}{64\,512\,240} \simeq 0{,}86.$$

Zamysleme se ještě nad interpretací posledního výrazu pro $M(F)$. Od počtu všech možných případů se odečítá hodnota $\binom{28}{10}$ představující počet situací, kdy ve výběru nebude žádný kluk, zmenšená o hodnotu $\binom{4}{2}\binom{24}{8}$, která představuje počet situací, kdy ve výběru budou právě dvě dámy a žádný kluk.

Příklad 3.1.8. ***Sestavování čísel z cifer***
Máme k dispozici libovolný počet cifer $0, 1, \dots, 9$. Kolik k-ciferných čísel z nich můžeme sestavit? Odpověď na tuto otázku každý zná. Dvojciferná jsou čísla od 10 do 99 včetně, je jich tedy $(99 - 10 + 1) = 90$. Trojciferná jsou od 100 do 999 včetně, jejich počet je $(999 - 100 + 1) = 900$, k-ciferná jsou čísla od $100 \dots 0 = 1 \cdot 10^{k-1}$ do $999 \dots 9$ včetně (k devítek), jejich počet je $9 \cdot 10^{k-1}$. Tento výsledek bychom však měli získat i kombinatorickými úvahami. Čísla totiž dostáváme tak, že z deseti cifer $0, 1, \dots, 9$ vytváříme variace k-té třídy s opakováním, musíme však vyjmout ty možnosti, které začínají nulami. Dostáváme

$$
\begin{aligned}
10^k - (9 \cdot 10^{k-2} + 9 \cdot 10^{k-3} + \dots + 9 \cdot 10^1 + +9 \cdot 10^0 + 1) &= 10^k - \frac{10^{k-1} - 1}{10 - 1} - 1 \\
&= 10^k - 10^{k-1} = 9 \cdot 10^{k-1}
\end{aligned}
$$

Jak jsme dostali odečítaný výraz v závorce? Hodnota $9 \cdot 10^{k-2}$ představuje počet těch výběrů cifer (s opakováním), které mají na první pozici pevnou nulu, na druhé pozici kteroukoli nenulovou cifru (9 možností) a na dalších $(k-2)$ pozicích kteroukoli cifru (10^{k-2} možností). Hodnota $9 \cdot 10^{k-3}$ je počet těch výběrů cifer (s opakováním), které mají na prvních dvou pozicích pevné nuly, na třetí pozici kteroukoli nenulovou cifru (9 možností) a na dalších $(k-3)$ pozicích kteroukoli cifru (10^{k-2} možností). A tak dále. Nakonec odečítáme ještě jedničku, která reprezentuje jediný výběr k cifer tvořený samými nulami. Kdybychom se nyní zeptali, jaká je pravděpodobnost, že při náhodném výběru ze souboru jednociferných až n-ciferných čísel vylosujeme třeba k-ciferné číslo, odpovíme si již snadno: Počet případů možných je

$$N(n) = 9 + 90 + \dots + 9 \cdot 10^{n-1} = 9\frac{10^n - 1}{10 - 1} = 10^n - 1$$

počet případů příznivých je $M(n, k) = 9 \cdot 10^{k-1}$. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$p(n, k) = \frac{9 \cdot 10^{k-1}}{10^n - 1}.$$

Zkontrolujme si platnost získaného vzorce pro jednoduché případy, kdy ji snadno určíme přímo. Pro $n = 1$ a $k = 1$ je vylosování jednociferného čísla jevem jistým. A skutečně, náš vzorec dává

$$p(1, 1) = \frac{9 \cdot 10^0}{10^1 - 1} = 1.$$

Pro $n = 2$ máme celkem 99 jednociferných a dvojciferných čísel, z nich jednociferných je devět a dvojciferných 90. Pravděpodobnost vylosování jednociferného čísla by tedy měla vyjít $9/99 = 1/11$ a pravděpodobnost vylosování čísla dvojciferného $90/99 = 10/11$. Z našeho obecného vzorce dostáváme

$$p(2, 1) = \frac{9 \cdot 10^0}{10^2 - 1} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}. \qquad p(2, 2) = \frac{9 \cdot 10^1}{10^2 - 1} = \frac{90}{99} = \frac{10}{11}.$$

Jistým jevem je, že vylosujeme nějaké číslo. Skutečně také

$$\sum_{k=1}^{n} p(n, k) = \frac{9}{10^n - 1} \frac{10^n - 1}{10 - 1} = 1.$$

3.1.3 Sčítání a násobení - základní počty s pravděpodobnostmi

Někdy je třeba určit pravděpodobnosti jevů, které jsou nějakým způsobem „složeny“ z jevů jednodušších. Uvažujme například o jevech A a B, jejichž pravděpodobnosti známe a označíme je $p(A)$ a $p(B)$. Definujme nové jevy C a D takto:

$$C = A \text{ a } B, \qquad D = A \text{ nebo } B.$$

Vzniká přirozená otázka, zda můžeme na základě znalosti pravděpodobností $p(A)$ a $p(B)$ určit pravděpodobnosti $p(C)$ a $p(D)$. Ukazuje se, že za jistých předpokladů ano. Jako obvykle nám napoví příklady.

Příklad 3.1.9. ***Hody kostkou a mincí - jev*** C
Označme jako jev A „Při náhodném hodu kostkou padne šestka.“ a jako jev B „Při náhodném hodu mincí padne hlava.“ Platí

$$
\begin{aligned}
N(A) &= 6 \qquad M(A) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad p(A) = \frac{1}{6} \\
N(B) &= 2 \qquad M(B) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad p(B) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

*Jev C je definován jako A **a** B, tj. „Při náhodném provedení současného hodu kostkou a mincí padne na kostce šestka a na minci hlava.“ Počítejme pravděpodobnost $p(C)$. Jevy A a B jsou **nezávislé**, to znamená, že výsledek hodu kostkou neovlivní výsledek hodu mincí a naopak. Počet možných výsledků současného hodu kostkou a mincí je*

$$N(C) = N(A \text{ a } B) = N(A)N(B) = 12.$$

Každý možný výsledek hodu kostkou je totiž možno kombinovat s každým možným výsledkem hodu mincí. Označme výsledky hodu mincí jako $\mathcal{A}$ (hlava neboli avers) a opačný výsledek jako $\mathcal{R}$. (orel neboli revers). Výčet možných výsledků současného hodu kostkou a mincí je

kostka	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
mince	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$

Příznivý případ je pouze jeden, tj. situace, kdy se výsledek 6 na kostce kombinuje s výsledkem $\mathcal{A}$ na minci

$$M(C) = M(A)M(B) = 1.$$

$$p(C) = \frac{M(C)}{N(C)} = \frac{M(A)M(B)}{N(A)N(B)} = \frac{M(A)}{N(A)} \cdot \frac{M(B)}{N(B)} = p(A)p(B).$$

Z příkladu intuitivně chápeme, co jsou to nezávislé jevy, a usuzujeme, že obecně platí

Věta 3.1.1. ***(Násobení pravděpodobností)****: Pravděpodobnost současného výskytu dvou nezávislých jevů A a B (jev C) je rovna součinu jejich pravděpodobností, tj.*

$$p(A \text{ a } B) = p(A)p(B) \qquad \textit{pro A a B neslučitelné} \tag{3.7}$$

Pokusme se o přesnější definici nezávislých jevů a o odvození vztahu (3.7). Označme jako N_A množinu všech možných výsledků pokusu, při němž může nastat jev A, a obdobně N_B množinu všech možných výsledků pokusu, při němž může nastat jev B. V předchozím příkladu je $N_A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $N_B = \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$. Jako N_C označme množinu všech možných výsledků pokusu, při němž může nastat současně jev A i jev B. Jevy A a B nazveme nezávislé, jestliže platí $N_C = N_A \times N_B$ (kartézský součin množin). Označíme-li obdobně $M_A \subseteq N_A$ a, $M_B \subseteq N_B$ a $M_C \subseteq N_C$ podmnožiny příznivých výsledků pro jednotlivé jevy, je zřejmé, že také $M_C = M_A \times M_B$. Počty prvků jednotlivých množin označíme $N(A)$, $N(B)$, $N(C)$ (počty možných případů) a $M(A)$, $M(B)$, $M(C)$ (počty příznivých případů). O konečných množinách víme, že mohutnost (počet prvků) kartézského součinu množin je rovna součinu mohutností jednotlivých činitelů v tomto kartézském součinu. Proto

$$N(C) = N(A)N(B), \qquad M(C) = M(A)M(B).$$

Odtud

$$p(C) = \frac{M(C)}{N(C)} = \frac{M(A)M(B)}{N(A)N(B)} = p(A)p(B).$$

Platnost tohoto vzorce lze zobecnit na nezávislé jevy A_1, A_2 až A_k s pravděpodobnostmi $p(A_1)$, $p(A_2)$ až $p(A_k)$. Pravděpodobnost jevu $C = (A_1 \text{ a } A_2 \text{ a } \ldots \text{ a } A_K)$ pak je

$$p(C) = p(A_1)p(A_2)\cdots p(A_k).$$

Příklad 3.1.10. *Hody kostkou trochu jinak - jev D*
*Označme nyní jako jev A „Při hodu kostkou padne šestka.“ a jako jev B „Při hodu kostkou padne pětka.“ Jev D nechť je definován jako $D = (A \text{ nebo } B)$, tj. „Při hodu kostkou padne šestka nebo pětka.“ Pravděpodobnosti jevů A a B jsou $p(A) = p(B) = 1/6$. Jevy A a B jsou přitom **neslučitelné** (též vylučující se). Nemůže totiž padnout pětka a šestka současně. Platí*

$$\begin{aligned} &N(A) = N(B) = N(D) = N = 6 \\ &M(A) = M(B) = 1 \qquad M(D) = M(A) + M(B) = 2, \\ &p(D) = \frac{M(D)}{N(D)} = \frac{M(A)+M(B)}{N} = \frac{M(A)}{N} + \frac{M(B)}{N} = p(A) + p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Je vidět, že opět směřujeme k obecnému tvrzení:

Věta 3.1.2. ***(Sčítání pravděpodobností)**: Pravděpodobnost jevů A nebo B (jev C) pro neslučitelné (vylučující se) jevy A a B rovna součtu pravděpodobností jevů A nebo B.*

$$p(A \text{ nebo } B) = p(A) + p(B) \qquad \text{pro } A \text{ a } B \text{ nezávislé} \tag{3.8}$$

Opět se pokusme o přesnější definici neslučitelných jevů a o odvození vztahu (3.8). Označme, obdobně jako v předchozí úvaze o nezávislých jevech, množiny N_A, N_B, N_D možných výsledků, při nichž mohou nastat jevy A, B, D. Předpokládejme, že $N_A = N_B$. Pak $N_A = N_B = N_D$, a tedy $N(A) = N(B) = N(D) = N$. Jako M_A, resp. M_B, resp. M_D označme podmnožiny výsledků, při nichž nastane jev A, resp. B, resp. D. Zřejmě $M_D = M_A \cup M_B$. Pro počet prvků množiny M_D platí

$$M(D) = M(A) + M(B) - M(AaB).$$

Pravděpodobnost jevu D je pak

$$p(D) = \frac{M(D)}{N(D)} = \frac{M(A) + M(B) - M(AaB)}{N} = p(A) + p(B) - p(A \text{ a } B).$$

Jevy A a B se nazývají **neslučitelné**, neboli *vylučující se*, je-li $M_A \cap M_B = 0$. V takovém případě je ovšem $M(A \text{ a } B) = 0$, a tedy

$$p(A \text{ nebo } B) = p(A) + p(B).$$

Zobecněním na k jevů A_1 až A_k po dvou neslučitelných dostáváme

$$p(A_1 \text{ nebo } \cdots \text{ nebo } A_k) = p(A_2) + p(A_2) + \cdots + p(A_k).$$

Mají-li po dvou neslučitelné jevy A_1 až A_k tu vlastnost, že při daném pokusu musí nastat právě jeden z nich, říkáme, že tvoří **úplný systém jevů**. Součet jejich pravděpodobností je roven jedné.

Jev se nazývá **opačný** k jevu A, jestliže nastává právě tehdy, když jev A nenastává. Z této definice je vidět, že jevy a A jsou *neslučitelné*. Na druhé straně je zřejmé, že jev (A nebo) je jevem **jistým**, nastává vždy. Jeho pravděpodobnost je tedy 1. Odtud

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A). \tag{3.9}$$

Jev A a jev $\overline{A}$ k němu opačný tvoří úplný systém.

Na závěr odstavce ještě jeden prakticky důležitý příklad.

Příklad 3.1.11. *Bernoulliův pokus*
Bernoulliův pokus spočívá v tom, že n-krát nezávisle provedeme určitý pokus, například hod mincí. (V terminologii teorie pravděpodobnosti nazýváme každé takové provedení opakováním pokusu.) Sledujeme, v kolika případech z těchto n opakování nastal daný jev (například jev A — padne hlava). Výsledek opakování pokusu, při kterém daný jev nastal, nazveme zdarem, výsledek, kdy nastal jev opačný, nezdarem. Dejme tomu, že pravděpodobnost zdaru je p. (Pro případ padnutí hlavy na minci je $p = 1/2$.) Pravděpodobnost nezdaru je pak $(l - p)$. (V případě hodů mincí je $(1—p) = 1/2$.) Zajímáme se o to, jaká je pravděpodobnost $P(x)$, že při n opakováních pokusu docílíme x-krát zdaru, x přitom můžeme předem volit libovolně v rozmezí $0 \le x \le n$. V případě hodů mincí jistě dokážeme předem odhadnout, že pravděpodobnosti $P(0)$ a $P(n)$, tj. pravděpodobnosti toho, že nepadne hlava vůbec nebo že padne hlava vždy, budou při větším počtu opakování pokusu malé a budou se blížit nule tím více, čím větší bude n. Naopak bychom se mohli domnívat, že pravděpodobnost $P(n/2)$, tj. že padne hlava v polovině opakování pokusu, by měla být při velkém počtu n blízká 100 %. Správnost tohoto našeho předběžného odhadu však posoudíme teprve poté, co si odvodíme obecný vzorec pro $P(x)$. Budeme možná překvapeni. Zvolme nejprve pevně, při kterých konkrétních opakováních pokusu má dojít ke zdaru (například při prvních x). Při ostatních pak požadujeme nezdar. Protože jevy

$$\begin{aligned} A_1 &: \textit{Při prvním opakování dojde ke zdaru.} \\ A_2 &: \textit{Při druhém opakování dojde ke zdaru.} \\ \ldots &: \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_x &: \textit{Při } x\textit{-tém opakování dojde ke zdaru.} \\ \overline{A}_{x+1} &: \textit{Při } (x+1)\textit{-tém opakování dojde k nezdaru.} \\ \ldots &: \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{A}_n &: \textit{Při posledním } n\textit{-tém opakování dojde k nezdaru,} \end{aligned}$$

jsou nezávislé, je pravděpodobnost jevu

- *B_1: Při každém z prvních x opakování dojde ke zdaru a současně při každém z dalších $(n—x)$ opakování dojde k nezdaru, rovna součinu pravděpodobností*

$$p(B_1) = p(A_1)p(A_2)\cdots p(A_x)p(\overline{A}_{x+1})\cdots p(\overline{A}_n) = p^x(1-p)^{n-x}.$$

Nám však jde o pravděpodobnost následujícího jevu

- *B: Právě při x opakováních pokusu (bez ohledu na to, kterých) dojde ke zdaru a současně při každém ze zbývajících opakování pokusu dojde k nezdaru.*

Možností výběru x opakování, při kterých dojde ke zdaru, je $N(x) = \binom{n}{x}$. Pokud bychom očíslovali jednotlivé výběry $j = 1, 2, \cdots, N(x)$, dostaneme odpovídající jevy $B_1, \cdots, B_{N(x)}$ Pravděpodobnost každého z nich je stejná a rovna pravděpodobnosti jevu B_1, který jsme popsali před chvílí. Tyto jevy jsou po dvou neslučitelné a jev B znamená, že nastane právě jeden (kterýkoli) z nich. Pro jeho pravděpodobnost tedy platí, podle pravidla pro součet pravděpodobností po dvou neslučitelných jevů,

$$p(B) = P(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}. \tag{3.10}$$

Zkusme nyní prověřit správnost našeho odhadu týkajícího se hodů mincí:

$$P(0) = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0} = \frac{1}{2^n} \qquad P(n) = \binom{n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n} = \frac{1}{2^n}$$

Vidíme, že náš odhad byl správný. Obě pravděpodobnosti klesají s rostoucím počtem opakování pokusu k nule. Pro jediné opakování pokusu, tj. $n = 1$, jsou obě rovny jedné polovině, a to bychom jistě také měli očekávat.

Pro n sudé nyní počítejme $P(n/2)$. Položme $n = 2m$:

$$P(m) = \binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-m} = \frac{(2m)!}{m!m!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

m	1	2	3	5	10
$P(m)$	0,500	0,375	0,313	0,246	0,176

*Tady se zdá, že nás naše intuice při odhadu pravděpodobnosti $P(n/2)$ zklamala. Tendence hodnot $P(n/2)$ je pro rostoucí n klesající. Pravděpodobnost je největší pro $n = 2$, a to právě padesátiprocentní! Zkusme ještě odhad pro velká n pomocí **Stirlingova vzorce**. Podle něj pro velká n platí*

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \tag{3.11}$$

Použijeme-li jej pro výpočet $P(m)$, dostáváme

$$P(m) \simeq \frac{\left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}\sqrt{4\pi m}}{\left(\frac{m}{e}\right)^m\left(\frac{m}{e}\right)^m\left(\sqrt{2\pi m}\right)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \longrightarrow 0$$

pro velká m. Kde jsme se tedy zmýlili? Ze zkušenosti víme, že budeme-li házet mincí mnohokrát, je prakticky jisté, že hlava skutečně padne zhruba v polovině případů! Problém spočívá ve slovíčku zhruba. Pravděpodobnost $P(m)$ pro $n = 2m$ se však týká jevu, kdy hlava padne přesně v polovině případů. A ta samozřejmě bude tím menší, čím větší je počet posuzovaných hodů mincí. Při zvyšujícím se počtu n opakování pokusu totiž roste i počet jednotlivých možností volby x a n a každou z nich tak „připadne“ menší pravděpodobnost. (Součet pravděpodobností přes všechna přípustná x musí být roven jedné.) Později, v odstavci **??***, uvidíme, že jsme nevědomky místo pravděpodobnosti odhadovali střední hodnotu náhodné veličiny.*

Položme si ještě poslední otázku v souvislosti s Bernoulliovým pokusem: Jaká je pravděpodobnost, že alespoň při jednom z n opakování pokusu nastane zdar? Pokud si po předchozím neúspěchu s intuitivními odhady ještě trochu věříme, můžeme předpovídat, že tato pravděpodobnost poroste s počtem opakování pokusu n a pro velmi velká n se bude blížit jedné. Musíme ji ale spočítat. Někdo, kdo nečetl předchozí text příliš pečlivě, by mohl navrhnout jednoduchou úvahu: Pravděpodobnost zdaru při každém opakování pokusu je p, pravděpodobnost, že nastane zdar při alespoň jednom z nich tedy musí být, podle pravidla pro sčítání pravděpodobností, np. Úvaha je sice jednoduchá, ale zcela chybná. Vidíme to již ze skutečnosti, že při pevné hodnotě p a dostatečně velkém n může hodnota np překročit jedničku, a to nemůže žádná pravděpodobnost udělat. Kde se málo pozorný čtenář dopustil chyby, když chtěl sčítat pravděpodobnosti zdaru při jednotlivých opakováních? Neuvědomil si, že pravidlo součtu pravděpodobností jednotlivých jevů A_1 až A_k při výpočtu pravděpodobnosti jevu (A_1 nebo A_2 nebo $\cdots$ nebo A_k) může použít jedině pro jevy po dvou neslučitelné. Zdar při některém z opakování pokusu však nevylučuje možnost zdaru při jiném pokusu. Pravidlo tedy bylo použito nesprávně. Pravděpodobnost zdaru při alespoň jednom opakování pokusu snadno vypočteme pomocí jevu opačného. Opačný jev znamená, že nenastane zdar ani při jednom opakování pokusu. Jednotlivá opakování jsou nezávislá, proto je pravděpodobnost nezdarů při všech opakováních rovna součinu pravděpodobností při jednotlivých z nich, tj. $(1-p)^n$. Pravděpodobnost zdaru při alespoň jednom opakováni je pak doplňkem do jedničky, tedy $1-(1-p)^n$. Je vidět, že je tím větší, čím je větší n, a její limita pro $n \to \infty$ je rovna jedné. A to je výsledek, který jsme předpověděli.

3.1.4 Pravděpodobnější, než bychom čekali - podmíněná pravděpodobnost

Kdysi se objevila, jako nepříliš dobrý vtip, úvaha o pravděpodobnosti bomby na palubě letadla: Řekněme, že pravděpodobnost, že některý z pasažérů letadla má s sebou bombu, je jedna tisícina. Pravděpodobnost, že dva pasažéři nezávisle na sobě budou mít bombu, je pak pouze jedna milióntina ($10^{-3} \cdot 10^{-3} = 10^{-6}$). Vezmu-li si tedy s sebou do letadla svou vlastní bombu, kterou ovšem nehodlám uvést do chodu, snížím tím pravděpodobnost druhé bomby na palubě na onu jednu milióntinu. Nezabývejme se nyní tím, že již první úvaha o jedné milióntině je v podstatě nesprávná, i když pro případ, že pravděpodobnost p, že konkrétní pasažér bude mít bombu, je velmi malá, dává správný přibližný výsledek. Klíčová chyba je v úvaze, že snížení pravděpodobnosti bomby na palubě můžeme napomoci vlastní bombou v zavazadle. Tato úvaha nerespektuje totiž **pojem podmíněné pravděpodobnosti**, který si nyní na příkladu vyložíme.

Příklad 3.1.12. ***Jak nekoupit zmetek***

Do finále soutěže o „šmejd roku“ se dostaly dva podniky, „Hvizd, s.r.o.“ a „Svist, a.s.“, které zásobují trh zábavnou pyrotechnikou. První z nich kryje požadavky trhu ze 70 %, druhý ze zbývajících 30 %. “Zjistilo se, že 83 % ze všech výrobků Hvizdu je vadných (nebouchají, když je to třeba, zejména však bouchají, když se to nejméně očekává). V případě Svistu je zmetků pouze 63 %. Porota soutěže rozhodla, že cenu dostane ten z obou podniků, jehož ředitel zodpoví správně následující otázky:

1. *Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zakoupená rachejtle bude fungovat tak, jak má?*