

Obsah

I. MA I	2
II. MA II	26
III. FYZ I	31
IV. FYZ II	44
V. TEMP	45

Část I

MA I

Table of Contents

1. Všemocná úměra aneb lineární algebra poprvé	4
2. Limita a spojitost funkce	13

Všemocná úměra aneb lineární algebra poprvé

Contents

1.1. Lineární rovnice	4
1.2. Počítání s čísly	9
1.3. Počítání s maticemi	10
1.4. Počítání s vektory	11
Seznam literatury	12

Tuto kapitolu bychom mohli opatřit podtitulem „*To nejnútnejší z lineární algebry*“. Dovíme se v ní, co je třeba si představit pod pojmem „*linearita*“, najdeme příklady linearity v geometrii i v přírodovědě (fyzice, chemii, biologii) a formulujeme základní poznatky týkající se řešení soustav lineárních rovnic. Do této oblasti patří i počítání s vektory a maticemi - objekty, které jsou velmi vhodné k vyjádření fyzikálních veličin.

1.1. Lineární rovnice

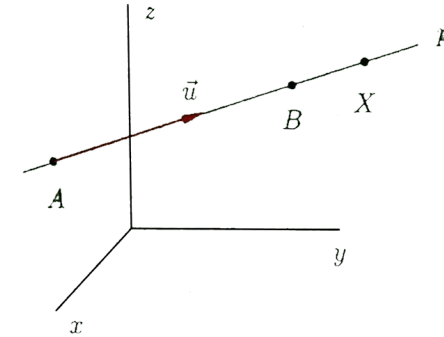
Co tedy znamená slovo **linearita**? Pochází z latiny, *linea recta* = *přímka*, česky bychom řekli *přímá úměrnost* nebo jen jednoduše *úměra*.

Nejjednodušší příklady linearity patří do oblasti geometrie - vyjádření *přímek* a *rovin*. Jistě si ze střední školy vzpomínáme, že body těchto útvarů popisujeme jejich souřadnicemi na přímce \mathbb{R} , v rovině \mathbb{R}^2 , v prostoru \mathbb{R}^3 . Souřadnice bodu v rovině tedy tvoří *uspořádanou dvojici* reálných čísel, v prostoru pak *uspořádanou trojici* reálných čísel. (Pozor, dvojice $[a, b]$ a $[b, a]$ představují různé body.)

Příklad 1.1.1. Parametrické vyjádření přímky

Přímka — *jednorozměrný lineární útvar v jednorozměrném prostoru \mathbb{R}^1 , dvojrozměrném prostoru \mathbb{R}^2 , trojrozměrném prostoru \mathbb{R}^3 (nebo i n -rozměrném prostoru \mathbb{R}^n), je určena dvěma body, třeba A a B , nebo ekvivalentně, bodem A a směrovým vektorem \vec{u} (obr. 3.1). Je-li X obecným bodem na této přímce, je vektor \overrightarrow{AX} rovnoběžný, tj. kolineární, se směrovým vektorem \vec{u} . (Jako směrový můžeme samozřejmě použít i vektor \overrightarrow{AB} .) Vektor \overrightarrow{AX} má tedy s vektorem \vec{u} stejný směr, lišit se může velikostí nebo orientací. Tuto skutečnost zapíšeme tak, že \overrightarrow{AX} je t -násobkem vektorů \vec{u} ,*

$$\overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{u}.$$



Obrázek 1.1.: Zadání přímky. [1, s. 1]

Veličinou t , takzvaným parametrem, který může nabývat všech reálných hodnot, $t \in \mathbb{R}$, dokážeme popsat všechny vektory \overrightarrow{AX} , jejichž koncový bod X leží na přímce p . Naopak, žádné jiné body X než ty, které leží na přímce p , tuto vlastnost nemají. S označením bodů A , X , resp. vektorů \vec{u} , \overrightarrow{AX} kartézskými souřadnicemi, resp. složkami

$$A = (x_A, y_A, z_A),$$

$$X = (x, y, z),$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3),$$

$$\overrightarrow{AX} = (x - x_A, y - y_A, z - z_A),$$

dostáváme **parametrické vyjádření přímky p ve tvaru**

$$p = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x = x_A + tu_1, \\ y = y_A + tu_2, \\ z = z_A + tu_3, \end{array} t \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.1)$$

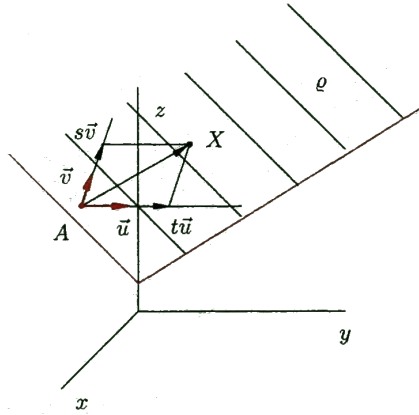
Vidíme, že kartézské souřadnice bodu na přímce se vůči souřadnicím bodu A mění přímo úměrně v závislosti na hodnotě parametru t , tj. závisí na jeho první mocnině. Příslušná závislost se nazývá **lineární funkcí**.

Obdobně zapíšeme parametrické vyjádření roviny v \mathbb{R}^3 :

Příklad 1.1.2. Parametrická vyjádření roviny:

Rovina v trojrozměrném prostoru \mathbb{R}^3 je zadána třemi body A , B a C , které nesmějí ležet v jedné přímce, popřípadě dvěma body A a B a vektorem v nerovnoběžném s \overrightarrow{AB} , anebo bodem A a dvěma nerovnoběžnými směrovými vektory \vec{u} a \vec{v} (obr. 1.2). Všechny tyto typy zadání jsou ekvivalentní. Lze volit například $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Je-li X libovolným bodem roviny ρ , jsou vektory \overrightarrow{AX} , \vec{u} a \vec{v}

lineárně závislé. To znamená, že existují taková reálná čísla r a s , že vektor \overrightarrow{AX} lze zapsat jako lineární kombinaci



Obrázek 1.2.: Zadání roviny. [1, s. 3]

$$\overrightarrow{AB} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Při obdobném zápisu kartézských souřadnic bodů a složek vektorů jako u vyjádření přímky dostaneme parametrické vyjádření roviny ϱ

$$\varrho = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{aligned} x &= x_A + ru_1 + sv_1, \\ y &= y_A + ru_2 + sv_2, \\ z &= z_A + ru_3 + sv_3, \end{aligned} r, s \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.2)$$

Toto vyjádření obsahuje opět lineární závislost: Souřadnice x , y a z se vůči souřadnicím bodu A mění v závislosti na prvních mocninách parametrů r a s . Můžeme tak hovořit o jakési „více-rozměrné úměře“.

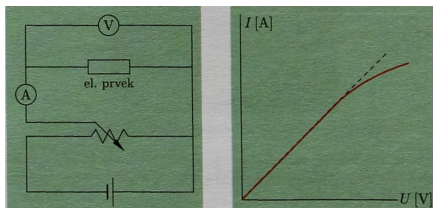
Všimněme si nyní příkladů linearity z oblasti přírodovědy.

Příklad 1.1.3. Fyzika — Ohmův zákon:

Z elektřiny víme, že některé vodiče či elektrické prvky se při průchodu elektrického proudu chovají podle zákona linearity: Proud, který jimi protéká, závisí přímo úměrně na přiloženém napětí (obr. 1.3). Platí $I(U) = R^{-1}U$ s konstantou úměrnosti R^{-1} , kde R je elektrický odpor vodiče (prvku).

Pozn. 1: Předpokládáme, že elektrický odpor voltmetru je tak velký, že proud jím procházející je z hlediska přesnosti měření zanedbatelný.

Pozn. 2: Graf závislosti proudu na napětí na obrázku 1.3 může pro vyšší hodnoty napětí vykazovat odchylku od linearity (přímkové závislosti), neboť se prvek při vyšším proudu zahřívá a jeho odpor roste.



Obrázek 1.3.: Chování lineárního vodiče (Ohmův zákon). [1, s. 15]

Příklad 1.1.4. Fyzika — speciální typy pohybů:

Při rovnoměrném pohybu tělesa (ať již přímočarém či křivočarém) je dráha, kterou těleso urazí za dobu t , přímo úměrná velikosti jeho rychlosti v , tj. $s(t) = s_0 + vt$. Při pohybu rovnoměrně zrychleném (zpožděném) je lineární závislost velikosti rychlosti na čase, tj. $v(t) = v_0 \pm at$ při pohybu přímočarém (a je velikost zrychlení), nebo $v(t) = v_0 \pm a_\tau t$ při pohybu křivočarém (a_τ je velikost průmětu zrychlení do směru tečny k trajektorii tělesa — tečného zrychlení).

1.1.1. Soustavy lineárních rovnic a jejich rychlé řešení

Příkladů linearity v přírodě bychom mohli nalézt bezpočet. Vraťme se však k matematice a k problematice uvedené v názvu tohoto odstavce, k soustavám lineárních rovnic. Začneme jednoduchou slovní úlohou ze základní školy:

Příklad 1.1.5. Jeníček a Mařenka kradli ježibabě perník:

Dohromady snědli 11 perníkových srdíček. Jeníček jich přitom zkonzumoval o 3 více než Mařenka. Otázka je tradiční — kolik srdíček snědl každý z nich? Označíme-li M počet kousků, které snědla Mařenka a J počet srdíček, na nichž si pochutnal Jenda, můžeme informace zadané v úloze zapsat takto:

$$M + J = 11, \quad J = M + 3.$$

Řešení není problémem, snadno vidíme, že $M = 4$ a $J = 7$.

O samotné řešení této jednoduché úlohy v tuto chvíli nejde. Pojmenujme si však vztahy, které jsme pro neznámé hodnoty M a J ze zadání úlohy dostali. Neznámé vystupují v rovnicích v první mocnině, tedy lineárně. Máme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých M a J . Úvahu snadno zobecníme: Předpokládejme, že máme neznámé veličiny

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a máme o nich m informací, které lze zapsat ve tvaru lineárních rovnic (neznámé budou v těchto rovnicích vystupovat v první mocnině),

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots = \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \quad (1.3)$$

Soustavu (1.3) nazýváme soustavou m lineárních rovnic o n neznámých. Označme ji jako S a pod tímto označením se k ní budeme vracet. Soubory reálných čísel (a_{ij}) a (b_i) , kde $1 < i < m$, $1 \leq j < n$, jsou zadány. Lze je uspořádat do takzvaných **matic**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Matice \mathbf{A} je typu m/n , má m řádků a n sloupců, i je řádkový index a j je sloupcový index. Matice $\overline{\mathbf{B}}$ je typu $m/1$ (m řádků a jeden sloupec), hovoříme také o sloupcové matici. Soustavu S můžeme zapsat zkráceně pomocí maticového násobení (podrobněji viz později odstavec 1.3):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad \text{nebo}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

V tuto chvíli vysvětlíme podstatu maticového násobení jen technicky: Násobit mezi sebou můžeme matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu m/n (levý činitel) a matici $\mathbf{A} = (c_{jk})$ typu n/p (pravý činitel, činitele nelze zaměňovat). Výsledkem je matice $\mathbf{A} = (d_{ik})$ typu m/p , jejíž prvky se počítají podle předpisu

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot c_{jk}. \tag{1.6}$$

Z tohoto obecného předpisu vidíme, že levé strany soustavy S lze interpretovat ve tvaru součinu matice A typu m/n s maticí neznámých typu $(n/1)$, výsledkem je matice pravých stran $\overline{\mathbf{B}}$, která je typu $m/1$. Matice \mathbf{A} se nazývá **maticí soustavy**. Matice, která vznikne jejím *rozšířením* o sloupec pravých stran, tj.

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\overline{\mathbf{B}}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \tag{1.7}$$

je pak **rozšířenou maticí soustavy**. Je-li sloupec pravých stran soustavy tvořen samými nulami, nazývá se soustava **homogenní**, v opačném případě **nehomogenní**. Řešením soustavy S nazýváme každou n -tici (x_i, x_2, \dots, x_n) , která soustavu S splňuje. Cílem je najít všechna řešení soustavy S . Abychom řešení našli, musíme soustavu upravovat, zjednodušovat. Prováděné úpravy mají vést k jednodušší, avšak ekvivalentní soustavě rovnic, tj. takové, která má naprosto stejný soubor všech řešení jako soustava původní. Takové úpravy nazýváme **ekvivalentními**. Dvě základní, pomocí nichž lze uskutečnit všechny ostatní, jsou

- vynásobení libovolné, například i -té, rovnice libovolným *nenulovým* číslem,
- přičtení i -té rovnice vynásobené libovolným číslem k l -té rovnici.

V soustavě lze samozřejmě také měnit pořadí rovnic. Tato úprava je rovněž ekvivalentní. Nevypisujeme ji však zvlášť proto, že ji lze realizovat pomocí vhodně zvolené posloupnosti základních dvou úprav.

Abychom nemuseli soustavu stále opisovat i s neznámými, provádíme obvykle ekvivalentní úpravy jen s maticí $\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\overline{\mathbf{B}})$ (každý řádek této matice představuje jednu rovnici soustavy

S). Může se stát, že soustava má právě *jedno řešení*, jako tomu bylo v úloze o Mařence a Jeníčkovi. Také nemusí mít *řešení žádné*, jako například soustava $x + y = 0$, $x + y = 1$ (součet dvou čísel nemůže nabývat současně dvou různých hodnot). A třeba má také řešení *nekonečně mnoho* (řešením soustavy jedné rovnice o dvou neznámých $x + y = 1$ jsou všechny dvojice tvaru $(x, 1 - x)$, kde x je libovolné). A může mít soustava S třeba právě dvě řešení? Prostřednictvím následujícího příkladu ukážeme metodu, která vede velmi rychle k nalezení všech řešení a umožňuje také vyslovit obecné závěry o jejich vlastnostech a počtu. Jedná se o **Gaussovu eliminační metodu**.

Příklad 1.1.6. Gaussova eliminační metoda

Je zadána soustava tří ($m = 3$) rovnic o pěti ($n = 5$) neznámých:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= -6, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 &= 6. \end{aligned}$$

Budeme provádět ekvivalentní úpravy matice B tak, abychom ji zjednodušovali. Ekvivalenci matic budeme označovat znakem \sim .

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\overline{\mathbf{B}}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 1 & 5 & -1 & 6 \end{array} \right).$$

V prvním řádku je na první pozici jednička. Toho využijeme k snadné „likvidaci“, tedy eliminaci, prvních prvků v druhém a třetím řádku pomocí elementárních úprav. Provedeme tyto dvě úpravy: první řádek vynásobený číslem 2 přičteme k druhému řádku, první řádek přičteme ke třetímu řádku. Dostaneme

$$\mathbf{B} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 6 & -6 & 6 \end{array} \right).$$

Vidíme, že jsme v druhém i třetím řádku dostali na první sloupcové pozici nulu (tučná). (Nuly na dalších pozicích vznikly náhodou, vlivem jednoduchosti zadání.) Nyní vynásobíme druhý i třetí řádek číslem $(1/6)$:

$$\mathbf{B} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Přestože již nyní vidíme, že soustava nemá řešení (rovnice druhého a třetího řádku znějí $x_4 - x_5 = -1$ a $x_4 - x_5 = 1$, takže jim nevyhovuje žádná dvojice čísel (x_4, x_5)), budeme v eliminaci pokračovat. Další úpravy se již týkají pouze druhého a třetího řádku. Druhý řádek vynásobený (-1) přičteme ke třetímu. Pak

$$\mathbf{B} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Získáváme tak ekvivalentní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0, \\ + x_4 - x_5 &= -1, \\ 0 &= 2. \end{aligned}$$

V poslední rovnici je ihned vidět rozpor - soustava nemá řešení

Na základě výsledného tvaru matice soustavy a rozšířené matice soustavy získané ekvivalentními úpravami soustavy S nyní formulujeme obecné kritérium pro to, aby soustava S měla vůbec nějaké řešení. Matice \mathbf{A} i \mathbf{B} se po provedení ekvivalentních úprav dostaly do velmi jednoduchého tvaru, který připomíná schodiště obrácené „vzhůru nohama“, odmyslíme-li si nuly v levé části jednotlivých řádků (následující zápis pouze usnadňuje názornou představu, znak ekvivalence již psát nemůžeme):

$$\mathbf{A} \dots \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 \\ & & & 1 & -1 \end{array} \right), \quad \mathbf{B} \dots \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ & & & 1 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Všimněme si, že „schodiště“ jsou nepravidelná, pokud jde o šířku schodů, výška všech schodů je však stejná - jeden řádek. Tímto způsobem je dán *schodovitý tvar* matice \mathbf{A} , resp. \mathbf{B} . Úzce s ním souvisí důležitá charakteristika matice, která je nezávislá jak na provedených úpravách tak na výsledném schodovitém tvaru. Je to hodnota matice, definovaná takto:

Hodnota matice je počet nenulových řádků jejího schodovitého tvaru.

V našem příkladu je hodnota matice A soustavy S rovna dvěma, hodnota matice rozšířené \mathbf{B} je rovna třem. Píšeme

$$h(\mathbf{A}) = 2, \quad h(\mathbf{B}) = 3.$$

Poznámka 1.1.1. Lze získat schodovitý tvar různými posloupnostmi ekvivalentních úprav je zřejmé. Uvědomme si však, že ani výsledný schodovitý tvar není určen jednoznačně - stačí třeba vynásobit některý řádek dvěma a výsledná matice ekvivalentní s původní je rovněž schodovitá. Poněvadž má matice \mathbf{B} o jeden sloupec více než matice \mathbf{A} , platí vždy $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{B})$. V případě $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{B})$ pak $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) - 1$. Jak názorně ukazuje náš příklad, má pro $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{B})$ některá z rovnic ekvivalentní soustavy tvar $0 = 1$, soustava tedy nemá řešení. Můžeme tak formulovat kritérium (podmínku nutnou a postačující) řešitelnosti soustavy lineárních rovnic.

Věta 1.1.1. (Frobeniova): Soustava lineárních rovnic má řešení právě tehdy, je-li hodnota její matice rovna hodnotě matice rozšířené.

Ihned vidíme, že homogenní soustava má podle této věty řešení vždy, neboť poslední sloupec její rozšířené matice je složen ze samých nul. Skutečně, jedním ze souboru řešení každé homogenní soustavy je n -tice

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0),$$

zvaná **triviální řešení**.

Nyní se vraťme k otázce, jak zjistit, kolik řešení má daná soustava, a jak je všechna popsat. Poslouží nám příklad 1.1.6 v mírně obměně spočívající v záměně koeficientu b_3 z hodnoty 6 na -6 .

Příklad 1.1.7. Ještě jednou Gaussova eliminační metoda

Je zadána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= -6, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 &= -6. \end{aligned}$$

Rozšířená matice soustavy má nyní tvar

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 1 & 5 & -1 & -6 \end{array} \right).$$

Stejně ekvivalentní úpravy jako v příkladu 1.1.6 vedou nyní k výsledku

$$\mathbf{B} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Nyní platí $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 2$. Podle Frobeniovy věty 1.1.1 tedy soustava určitě má řešení. Ekvivalentní soustava má tvar

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0, \\ + x_4 - x_5 &= -1, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnice je identitou a můžeme ji vypustit. Máme pět neznámých a jen dvě nezávislé rovnice. Dvě z neznámých tedy můžeme vyjádřit pomocí zbývajících. Postupujeme „odzadu“, začínáme druhou, jednodušší, rovnicí:

$$\begin{aligned} x_4 &= -1 + x_5, \\ x_1 &= -2x_2 + x_3 - x_4 + 5x_5 \Rightarrow x_1 = -2x_2 + x_3 + 4x_5 + 1. \end{aligned}$$

Za neznámé vystupující na pravé straně, tj. x_2 , x_3 a x_5 , můžeme dosazovat cokoli a vždycky se k nějakým hodnotám x_1 a x_4 dopočítáme. Všechna řešení soustavy S proto můžeme zapsat v obecném tvaru

$$(-2x_2 + x_3 + 4x_5 + 1, x_2, x_3, x_5 - 1, x_5). \quad (1.8)$$

Soubor řešení ve tvaru (1.8) se nazývá obecným řešením soustavy. Jeho jednotlivé prvky, jednotlivá konkrétní řešení soustavy, jsou dána volbou volných neznámých x_2 , x_3 a x_5 . Také z příkladu 1.1.7 lze učinit obecný závěr:

Věta 1.1.2. Nechť pro soustavu m lineárních rovnic o n neznámých platí $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = h$. Pak její obecné řešení závisí (lineárně) na $d = n - h$ volných neznámých.

Číslo d se nazývá **dimenze prostoru řešení soustavy**. Tento pojem ještě podrobněji vysvětlíme později.

Nyní již snadno zodpovíme otázku, čím je dána mohutnost souboru řešení soustavy lineárních rovnic, tj. kolik má taková soustava řešení. Možnosti jsou pouze:

- žádné řešení - pro $h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{B})$,
- právě jedno řešení - pro $h = h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$ a současně $h = n$, takže nezbývá žádná volná neznámá,
- nekonečně mnoho řešení - pro $h = h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$ a současně $h < n$, kdy máme k dispozici $d = n - h$ volných neznámých.

Že by tedy třeba měla soustava právě dvě, tři či osmnáct řešení není možné.

Jakési zvláštní postavení můžeme přisoudit homogenním soustavám. Ty mají, jak jsme se již přesvědčili, řešení vždy, alespoň to triviální, složené ze samých nul. Zajímejme se o situaci, kdy má homogenní soustava i jiná, netriviální, řešení. U homogenní soustavy je hodnost její matice vždy shodná s hodnotí matice rozšířené, $h = h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$. Je-li navíc $h = n$, má podle obecného tvrzení 1.1.2 soustava právě jedno řešení, jímž nutně je řešení triviální. V opačném případě, tj. pro $h < n$, máme opět k dispozici $d = n - h$ volných neznámých, a tedy nekonečně mnoho netriviálních řešení. Všimněme si ještě jedné zajímavosti u homogenní soustavy. Jsou-li dvě n -tice čísel $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ jejím řešením, pak také n -tice vytvořená jako jejich lineární kombinace

$$\alpha \cdot X + \overline{\alpha} \cdot \overline{X} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) + (\overline{\alpha} \overline{x}_1, \overline{\alpha} \overline{x}_2, \dots, \overline{\alpha} \overline{x}_n)$$

kde α a $\overline{\alpha}$ jsou libovolná čísla, je řešením soustavy. Možnost tohoto „lineárního kombinování“ připadá samozřejmě v úvahu pro libovolný počet libovolných řešení soustavy. Fyzik by řekl, že soustava vyhovuje principu superpozice. Soustava nehomogenní tu to vlastnost nemá „vinou“ nenulového sloupce pravých stran.

1.1.2. Přímký a roviny - lineární geometrické útvary

Vraťme se ještě na chvíli k linearitě v geometrii a všimněme si problematiky vzájemné polohy přímek a rovin. Procvičíme si na ní mimo jiné i řešení soustav lineárních rovnic. V odstavci 1.1 jsme odvodili parametrické vyjádření přímky a roviny v trojrozměrném prostoru. Nyní se pokusíme z těchto vyjádření vyloučit parametry a získat obecné rovnice přímky a roviny, které již budou obsahovat pouze kartézské souřadnice bodů ležících v příslušné přímce či rovině. Začněme případem roviny.

Příklad 1.1.8. Obecná rovnice roviny

Parametrické rovnice roviny z příkladu 1.1.2 můžeme chápat jako soustavu tří rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned}ru_1 + sv_1 &= x - x_A, \\ru_2 + sv_2 &= y - y_A, \\ru_3 + sv_3 &= z - z_A,\end{aligned}$$

kde neznámými jsou parametry r a s . Z geometrického významu této soustavy je zřejmé, že pro každý bod $X = (x, y, z)$, který leží v rovině ϱ , bude soustava mít jako řešení právě jednu dvojici parametrů (r, s) (pro body, které v rovině neleží, soustava řešení nemá). Vypočteme parametry r a s například z prvních dvou rovnic. Předpokládejme, že $u_1 \neq 0$, a upravujme matici soustavy:

$$\left(\begin{array}{cc|c}u_1 & v_1 & x - x_A \\u_2 & v_2 & y - y_A\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}u_1 & v_1 & x - x_A \\0 & u_1v_2 - u_2v_1 & (y - y_A)u_1 - (x - x_A)u_2\end{array}\right).$$

odkud pro $(u_1v_2 - u_2v_1) \neq 0$ dostaneme

$$r = -\frac{(y - y_A)v_1 - (x - x_A)u_2}{u_1v_2 - u_2v_1}, \quad s = \frac{(y - y_A)u_1 - (x - x_A)u_2}{u_1v_2 - u_2v_1}$$

Dosadíme-li získané hodnoty do třetí rovnice (dá to trochu práce), dostáváme obecnou rovnici roviny ϱ

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{1.9a}$$

$$a = u_2v_3 - u_3v_2, \quad b = U_3v_1 - u_1v_3, \quad c = u_1v_2 - u_2v_1, \tag{1.9b}$$

$$d = (u_2v_3 - u_3v_2)x_A - (u_3v_1 - u_1v_3)y_A - (u_1v_2 - u_2v_1)z_A. \tag{1.9c}$$

Při tomto výpočtu vyvstaly některé problémy. Pokusme se je vyřešit:

- Aby získaná rovnice opravdu představovala nějakou rovinu, musí v ní zůstat alespoň jedna ze souřadnic x, y, z . Alespoň jedno z čísel a, b, c by tedy mělo být nenulové. Dokažte, že tomu tak opravdu je, a využijte při tom skutečnosti, že vektory \vec{u} a \vec{v} nesmí být rovnoběžné. Co znamená předpoklad $(u_1v_2 - u_2v_1) \neq 0$?
- Předpokládali jsme, že $u_1 \neq 0$. Jak budeme postupovat, nebude-li tento předpoklad splněn? Lze v tomto případě použít obecné výrazy získané pro r a s ?

Příklad 1.1.9. Obecná rovnice přímky

Přímku p si snadno představíme jako průsečnici dvou nerovnoběžných rovin ϱ a σ . Jejich rovnice tvoří soustavu, která představuje obecné rovnice přímky

$$\varrho = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0\}, \tag{1.10a}$$

$$\sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\}, \tag{1.10b}$$

Zkusme přijít na to, co musí platit pro koeficienty v rovnicích rovin, aby byly nerovnoběžné. Jedna a táž přímka může být zadána různými dvojicemi nerovnoběžných rovin. Všechny roviny, které přímkou p procházejí, tvoří geometrický útvar zvaný **svazek rovin prvního druhu**, přímka sama je **osou svazku**.

Příklad 1.1.10. Vektor rovnoběžný s rovinou

Ja k poznáme, zda je vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ rovnoběžný s rovinou $ax + by + cz + d = 0$? Pokud vektor \vec{u} s rovinou rovnoběžný je, pak zcela jistě existují v této rovině dva body $A = (x_A, y_A, z_A)$ a $B = (x_B, y_B, z_B)$ tak, že $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$. Tyto body splňují rovnici roviny, tj.

$$ax_A + by_A + cz_A + d = 0, \quad ax_B + by_B + cz_B + d = 0.$$

Odečtením rovnic dostaneme kritérium rovnoběžnosti vektoru s rovinou $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$.

Máme připraveno vše pro řešení otázky vzájemné polohy přímek a rovin.

Příklad 1.1.11. Vzájemná poloha tří rovin

Zapojme geometrickou představivost a uvažujme, jakou vzájemnou polohu mohou mít tři roviny

$$\begin{aligned}\varrho : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \\ \sigma : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0, \\ \tau : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0,\end{aligned}$$

Současně si uvědomme, že předchozí soustava je soustavou lineárních rovnic o neznámých x , y a z , představujících souřadnice společných bodů rovin ϱ , σ a τ . Soustava je charakterizována maticí

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\overline{\mathbf{B}}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -d_3 \end{array} \right). \tag{1.11}$$

Jsou tyto možnosti:

- Roviny mají společný právě jeden bod. V tomto případě musí mít soustava (1.11) právě jedno řešení, a tedy $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 3$. (Útvar, který by vytvořily všechny roviny procházející tímto bodem, se nazývá **trs rovin prvního druhu**, společný bod je vrchol trsu.)
- Roviny mají společnou přímku. Řešení soustavy (1.11) bude v takovém případě závislé na jedné volné neznámé (parametr bodů na společné přímce), takže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 2$. (Útvar, který by vytvořily všechny roviny procházející touto přímkou, jsme před chvílí nazvali **svazkem rovin prvního druhu**, společná přímka je **osou** svazku.)
- Roviny jsou totožné. Řešení soustavy (1.11) je popsáno dvěma volnými neznámými (parametry bodů ve společné rovině), je tedy $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 1$.
- Roviny nemají společný žádný bod, mají však společný právě jeden směr (představme si například nekonečně dlouhý stan „áčko“, v němž jedna z rovin tvoří podlažku a zbylé dvě jsou stěnami). Společný směr \vec{u} je řešením homogenní soustavy rovnic (příklad 1.1.11)

$$a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3 = 0, \tag{1.12}$$

$$a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3 = 0, \tag{1.13}$$

$$a_3 u_1 + b_3 u_2 + c_3 u_3 = 0. \tag{1.14}$$

jejíž řešení musí být popsáno jednou volnou neznámou, tj. $h(\mathbf{A}) = 2$. Původní nehomogenní soustava (1.11) pro společné body rovin však řešení nemá, je tedy $h(\mathbf{B}) = 3$. (Útvar, který by vytvořily všechny roviny obsahující společný směr, se nazývá **trs rovin druhého druhu**.)

- Roviny jsou rovnoběžné, nemají však žádný společný bod. Znamená to, že mají společné dva nezávislé směry, řešení homogenní soustavy (1.12) obsahuje dvě volné neznámé a platí $h(\mathbf{A}) = 1$, $h(\mathbf{B}) = 2$.

Příklad 1.1.12. Vzájemná poloha dvou přímek

Dvě přímky p a q jsou určeny dvěma dvojicemi rovin. Jejich společné body jsou tedy řešením soustavy čtyř lineárních rovnic o třech neznámých (píšme rovnou rozšířenou matici soustavy):

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\overline{\mathbf{B}}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -d_3 \end{array} \right). \tag{1.15}$$

Protože soustava obsahuje rovnice dvojic nerovnoběžných rovin, je $h(\mathbf{A}) > 2$ (zdůvodněte podrobněji). Možnosti vzájemné polohy přímek p (první dvě rovnice) a q (druhé dvě rovnice) jsou tyto:

- Přímky jsou mimoběžné, nemají tedy žádný společný bod a roviny, které je určují, nemají žádný společný směr. Soustava (1.15) nemá řešení, odpovídající homogenní soustava pak rovněž ne, kromě řešení triviálního. Je tedy $h(\mathbf{A}) = 3$, $h(\mathbf{B}) = 4$.

- Přímky jsou různoběžné, mají tedy společný právě jeden bod. Soustava (1.15) má právě jedno řešení, a proto $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 3$.
- Přímky jsou rovnoběžné. Nemají tedy žádný společný bod, soustava nemá řešení, ale roviny, které je určují, mají společný směr. To odpovídá situaci $h(\mathbf{A}) = 23$, $h(\mathbf{B}) = 3$.
- Přímky jsou totožné. Řešení soustavy je popsáno jednou volnou neznámou, tj. $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 2$

Příklad 1.1.13. Vzájemná poloha přímky a roviny

Tuto úlohu převedme na problém vzájemné polohy tří rovin a odpovězme si sami. Společně vyřešíme konkrétní případ. Rozhodněme o vzájemné poloze přímky a roviny, najdeme jejich společné body a směry:

$$p : x + y + z + 5 = 0, \qquad 2x + 3y + 6z - 10 = 0$$

$$\varrho : y + 4z + 17 = 0.$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\overline{\mathbf{B}}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -17 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & 4 & -17 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -37 \end{array} \right).$$

Matice \mathbf{A} i \mathbf{B} jsme upravili do schodovitého tvaru. Vidíme, že $h(\mathbf{A}) = 2$, $h(\mathbf{B}) = 3$. Soustava nemá řešení přímka p a rovina ϱ nemají žádný společný bod. Jediná možnost, jak to zařídit, je, že přímka p je s rovinou ϱ rovnoběžná. Mají společný směr, který je řešením homogenní soustavy o matici

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Schodovitý tvar matice odpovídá ekvivalentní soustavě rovnic

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0, \qquad u_2 + 4u_3 = 0,$$

jejíž řešení je tvaru $(u_1, u_2, u_3) = (3u_3, -4u_3, u_3)$. Společný směr přímky p a roviny ϱ je tedy určen například směrovým vektorem $(3, -4, 1)$ (pro $u_3 = 1$) nebo kterýmkoli jeho nenulovým násobkem.

1.2. Počítání s čísly

Někdo se jistě pozastaví nad tím, že jej chceme učit počítání s čísly. To přece každý umí už od základní školy! Jenže základní a do značné míry i střední škola nás učí počítat jen s určitým typem čísel - s čísly reálnými. Pravidla pro počítání s nimi se pro „běžné uživatele“ stala natolik rutinní záležitostí, že už o nich vůbec nepřemýšlejí, nehledají v nich zákonitosti, a kdybychom se jich zeptali, kde se tato pravidla vzala, pravděpodobně budou s odpovědí velmi váhat. Pravidla pro jakékoli početní operace totiž skutečně nelze z ničeho odvodit, ta je třeba definovat, samozřejmě tak, aby měla rozumné praktické vlastnosti.

1.2.1. Reálná čísla

U reálných čísel se opravdu dlouho nezdržíme, s těmi snad opravdu každý umí počítat. Všimneme si jen trochu podrobněji struktury množiny všech reálných čísel, **reálné osy** \mathbb{R} . Zobrazit reálná čísla na reálné ose, tedy na přímce, umíme proto, že na množině reálných čísel je definováno **úplné uspořádání** „ $<$ “:

- Je-li současně $a \leq b$ a $b \leq a$, pak $a = b$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$... **antisymetrie**,
- je-li současně $a \leq b$ a $b \leq c$, pak $a \leq c$ pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$... **tranzitivita**,
- $a \leq a$ pro všechna $a \in \mathbb{R}$... **reflexivita**,
- platí $a \leq b$ nebo $b \leq a$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$... **úplnost**.

Pro každá dvě čísla a a b tedy dokážeme rozhodnout, zda jsou shodná ($a = b$), nebo zda a je menší ($a < b$) či větší ($a > b$) než b . Platí:

- Je-li současně $a < b$ a $c < d$, pak $a + c < b + d$,
- je-li současně $a < b$ a $c > 0$, pak $ac < bc$,
- je-li současně $a < b$ a $c < 0$, pak $ac > bc$.

Množina reálných čísel obsahuje tyto důležité podmnožiny:

- Množinu přirozených čísel $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$. Platí princip **úplné indukce**: Je-li $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{N}$ nějaká množina přirozených čísel, která obsahuje číslo 1 a která současně s každým číslem n obsahuje i $n + 1$, pak $\mathbb{M} = \mathbb{N}$.
- Množinu celých čísel $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, m, \dots\}$.
- Množinu racionálních čísel \mathbb{Q} (zlomky). Racionální čísla lze vyjádřit konečnými desetinnými zlomky (například $p/q = 1/4 = 0,25$), nebo nekonečnými periodickými desetinnými zlomky (například $p/q = 4/3 = 1,33\dots33\dots = 1,\overline{3}$, $p/q = 24/11 = 2,1818\dots1818\dots = 2,\overline{18}$).
- Množinu iracionálních čísel, tj. čísel, která nejsou racionální. Iracionálními čísly jsou neracionální řešení algebraických rovnic, například $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$, nebo $x = -\sqrt{2}$ (čísla algebraická), a čísla typu π , e , atd. (čísla transcendentní). Iracionální čísla jsou vyjádřena nekonečnými neperiodickými desetinnými zlomky, např. $e = 2,718\,281\,828\,459\,545\dots$. Mezi každými dvěma reálnými čísly leží nekonečně mnoho čísel racionálních i nekonečně mnoho čísel iracionálních.

Pro počítání s reálnými čísly jsou zavedeny základní operace, s nimiž umíme pracovat na základě zkušenosti, sčítání $a + b$, odčítání $a - b$, násobení $a \cdot b$, resp. ab a dělení $a : b$. Ve skutečnosti jsou potřeba jen dvě, neboť odčítání je odvozeno pomocí sčítání a dělení pomocí násobení. Uvědomili jste si někdy základní vlastnosti těchto operací? Možná ne, ale pracujeme s nimi zcela samozřejmě: Odčítání a dělení:

$$a - b = a + (-b), a : b = ab^{-1}, \quad \text{pokud } b \neq 0.$$

1.2.2. Komplexní čísla

Komplexními čísly rozumíme uspořádané dvojice $[x, y]$ čísel reálných, pro které zavedeme určité operace. Uspořádaností dvojice zde myslíme to, že jedno z čísel (v našem zápisu x) je umístěno na první pozici dvojice a představuje reálnou část čísla z , $x = \text{Re}(z)$, druhé (v našem zápisu y) je na druhé pozici a je imaginární částí čísla z , $y = \text{Im}(z)$. Je tedy obecně $[x, y] \neq [y, x]$. Množinu

1.2.3. Cvičení

1.3. Počítání s maticemi

1.3.1. Základní operace s maticemi a hodnost matic

1.3.2. Hodnost matic

1.3.3. Násobení matic

1.3.4. Čtvercová matice

Algebra matic, tedy počítání s nimi, je v praxi zase jen počítání s čísly, samozřejmě podle specifických pravidel. S maticemi jsme se již setkali v odstavci 1.1, kde jsme jich využili jako vhodné „pomůcky“ při řešení soustav rovnic. Nyní posuneme naše znalosti o nich na poněkud vyšší úroveň. Zavedeme na množině matic *algebraickou strukturu*, která nám umožní s nimi počítat nezávisle na jejich vztahu k nějakým praktickým aplikacím. Víme již, že maticí typu m/n (též obdélníková matice) rozumíme soubor reálných, popřípadě i komplexních čísel uspořádaných do m řádků a n sloupců:

Definice 1.3.1. *Necht m, n jsou přirozená čísla. Jestliže každé uspořádané dvojici $(m, n) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ přiřadíme prvek $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ obdržíme reálnou matici typu m, n nad \mathbb{R} . Matici zapisujeme jako*

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

která má právě mn prvků (a_{ij}) uspořádaných do m řádků a n sloupců. Stručně píšeme $\mathbf{A} = (a_{ij})$

Prvky matice jsou označeny indexy udávajícími **řádek** a **sloupec**, v nichž se prvek nalézá. Prvek v i -tém řádku a j -tém sloupci matice \mathbf{A} se obvykle značí a_{ij} . Potom i -tý řádek matice obsahuje vodorovnou n -tici prvků $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$, kde $i = 1, 2, \dots, m$ a j -tý sloupec matice obsahuje svislou matici čísel $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$, kde $j = 1, 2, \dots, n$. Pro $m = n$ se matice nazývá čtvercová n -tého řádu.

Příklad 1.3.1. Matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je čtvercová matice velikosti 4×4 . Prvek matice a_{23} je 2.

V tabulce 1.1 jsou uvedeny nejčastější typy matic, které se v algebře často vyskytují. Jsou to například matice řádkové, sloupcové, diagonální¹, jednotkové², nulové, transponované a symetrické.

Matice téhož typu (m, n) nad \mathbb{R} budeme značit $\mathbb{R}_{m,n}$.

1.3.5. Základní operace s maticemi a hodnost matic

Definice 1.3.2. Součinem matice $A \in \mathbb{R}_{mn}$ a matice $B \in \mathbb{R}_{np}$, v uvedeném pořadí, je matice $C \in \mathbb{R}_{mp}$ pro kterou platí:

$$C = AB; \quad C = (c_{ij});$$

kde

$$c_{ij} = \sum_n^{k=1} a_{ik}b_{kj}; \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p.$$

Součin matic A a B je definován právě tehdy, když počet sloupců matice A je roven počtu řádků matice B . Obrázek 1.4a demonstruje jakým způsobem se dostane prvek, který je ve výsledné matici třeba ve druhém řádku a druhém sloupci, násobením druhého řádku levé matice s druhým sloupcem pravé ze zadaných matic. Stejným způsobem získáme hodnotu prvku c_{ij} (viz 1.4b).

Definice 1.3.3. (Rovnost matic): Matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je rovna matici $\mathbf{B} = (b_{kl})$, jsou-li matice stejného typu a stejnohlé prvky se sobě **rovnají**, tj. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{m,n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}_{m,n}, a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

1.4. Počítání s vektory

Vektory budeme nazývat matice typu $1/n$ a značit je

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Takže počítat s nimi již umíme! (V zápisu složek vektoru je vynechán řádkový index. V případě matice s jedním řádkem, takzvané *řádkové matice*, je totiž zbytečný.) Číslům u_1 až u_n budeme pro tuto chvíli říkat *složky vektoru* \vec{u} . Za chvíli tento pojem ještě upřesníme. Celou řadu pojmů, s nimiž jsme se seznámili při počítání s maticemi, můžeme pro vektory přímo použít. Namísto značení $\mathcal{M}(1/n)$ budeme pro prostor vektorů používat symbol (\mathbb{R}^n) nebo \mathbb{C}^n (obvyklý symbol pro množinu uspořádaných n -tic reálných nebo komplexních čísel).

¹Prvky a_{ii} kde $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$ tvoří hlavní diagonálu. Matice \mathbf{D} je typu m, m , obecně může mít diagonální matice buď ještě další sloupce, v nichž budou samé nuly, anebo další řádky, v nichž budou opět samé nuly.

²Jestliže $m = n$, pak mluvíme o čtvercové matici řádu m .

Matice	Zápis
řádková \mathbf{A}	a_1, a_2, \dots, a_n
sloupcová \mathbf{B}	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
diagonální \mathbf{C}	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$
jednotková \mathbf{I}	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
nulová $\mathbf{0}$	$(a_{ij}), \quad a_{ij} = 0 \, \forall i, j$
transponovaná \mathbf{D}^T	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
symetrická \mathbf{S}	$(a_{ij}), \quad a_{ij} = a_{ji} \, \forall i, j$

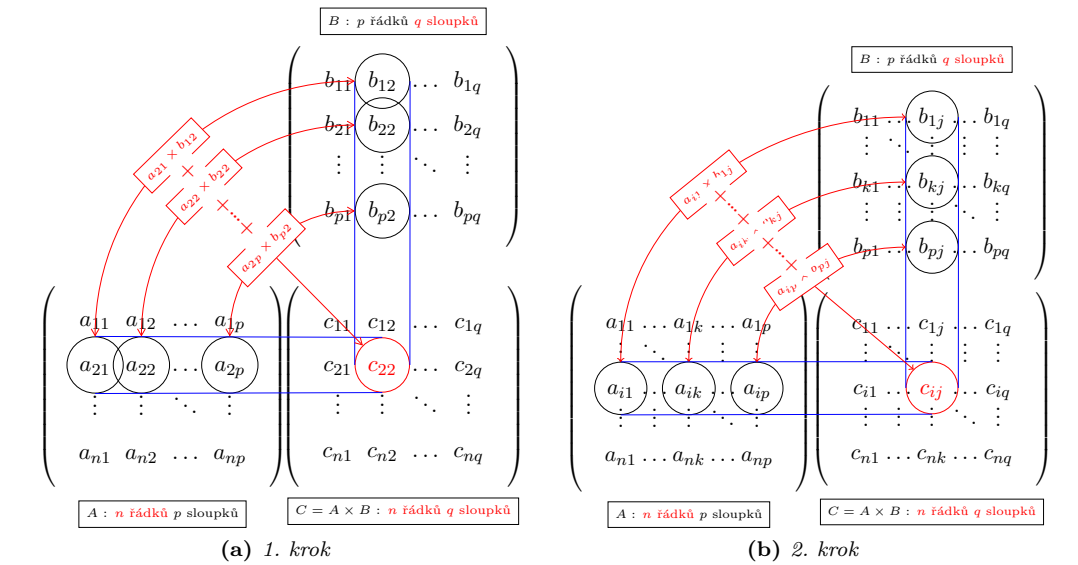
Tabulka 1.1.: Speciální typy matic

1.4.1. Součiny vektorů

Kromě základních operací s vektory, tj. sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem, se často používají další operace, které obohacují *strukturu vektorového prostoru*. Zůstaneme u vektorů v trojrozměrném prostoru \mathbb{R}^3 a definujeme si skalární, vektorový a smíšený součin vektorů. Skalární součin vektorů definujeme prostřednictvím geometrické definice jako zobrazení, které uspořádané dvojici vektorů (volných vektorů nebo jejich libovolných umístění) přiřazuje reálný

Seznam literatury

[1] J. Musilová a P. Musilová, *Matematika I: pro porozumění i praxi : netradiční výklad tradičních témat vysokoškolské matematiky*. VUTIUM, 2009, s. 339, ISBN: 978-80-214-3631-2. WWW: <http://books.google.fr/books?id=vH5lQwAACAAJ> (cit. na s. 4, 5, 12).



Obrázek 1.4.: Postup při maticovém násobení

číslo podle předpisu

$$\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \varphi,$$

kde $\varphi = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ je velikost minimálního z obou úhlů mezi vektory \vec{u}, \vec{v} .

Příklad 1.4.1. Vypočteme z definice 1.17 skalární součiny vektorů ortonormální báze \vec{e}_1, \vec{e}_2 a \vec{e}_3 , spjaté s kartézskou soustavou souřadnic. Připomeňme, že tyto vektory jsou jednotkové a navzájem kolmé.

- pro $i \neq j$ $\vec{e}_i\vec{e}_j = 0, \sphericalangle\vec{e}_i\vec{e}_j = \frac{\pi}{2}$, vektory jsou kolmé,
- pro $i = j$ $\vec{e}_i\vec{e}_j = 0, \sphericalangle\vec{e}_i\vec{e}_j = 0, |\vec{e}_i| = 1$, vektory jsou jednotkové.

Pro skalární součiny vektorů ortonormální báze použijeme zkrácené značení

$$\vec{e}_i\vec{e}_j = \delta_{ij},$$

kde δ_{ij} nabývá hodnoty 1 pro $i = j$ a hodnoty 0 pro $i \neq j$. Nazývá se **Kroneckerovo delta** [1, s. 40].

Shrneme nyní vlastnosti skalárního součinu. Dokázat bychom je mohli, i když by to mohlo být i velmi pracné, užitím znalostí z goniometrie. Zkuste to alespoň pro jednu z nich! Třeba se vám podaří zvolit si tu nejjednodušší.

Limita a spojitost funkce

Contents

2.1. Reálná funkce	13
2.2. Elementární funkce	21
2.3. Limity všeho druhu	22
2.4. Spojitost funkce	24
Seznam literatury	25

2.1. Reálná funkce

S funkcemi se setkáváme na každém kroku nejen ve fyzice a v ostatních přírodních vědách, ale i v každodenním životě. Každá situace, kdy jsou nějaký jev či veličina jednoznačně a nevyhnutelně určeny jinými jevy či veličinami, se dá popsat pomocí funkce¹ funkci sestavit. Snadno například můžeme zjistit, jakou dráhu urazí automobil jedoucí známou rychlostí v závislosti na tom, jak dlouho jede. Nebo dokážeme určit přírůstek našich úspor ve spořitelně v závislosti na době spoření, pokud známe úrokovou míru a její změny. Jindy je naopak skoro nemožné přijít na to, jak taková funkce vypadá, neboť nemáme dostatek informací o parametrech, které do jejího zápisu vstupují. Třeba takovou závislost teploty ovzduší v daném okamžiku na zeměpisné poloze a nadmořské výšce, kterou bychom si mohli představit jako jednu ze samozřejmých součástí předpovědi počasí, bychom asi nesestavili. Popis jevů pomocí funkcí je v každém případě velmi užitečný. Má však svá pravidla, s nimiž se v této kapitole seznámíme. Závisí-li zkoumaný jev nebo veličina na jediné veličině, jejíž hodnoty jsou reálné a buď se mění známým způsobem, nebo si je můžeme dokonce volit, hovoříme o **funkci jedné reálné proměnné**. A lze-li zkoumaný jev nebo veličinu kvantifikovat rovněž pomocí reálných hodnot, jedná se o **reálnou funkci jedné reálné proměnné**. Právě o takových funkcích bude v této kapitole řeč. V aplikacích se budeme věnovat především funkcím, které mají význam ve fyzice a v přírodních vědách. Velmi často půjde o funkce, kde reálnou proměnnou je čas. Jevy v přírodě podléhají totiž principu příčinnosti, a tak lze velké množství veličin popisujících přírodní jevy vyjádřit na základě znalosti přírodních zákonů jako funkce času. [1, s. 53]

¹V matematice abstrahujeme při zkoumání funkcionálních závislostí od konkrétní fyzikální povahy proměnných veličin a chápeme je jako „bezrozměrné veličiny“, tedy jako číselné proměnné. Někdy je jednoduché takovou

2.1.1. Funkce a její graf

V tomto odstavci se naučíme funkce zadávat, počítat s nimi a vyjádřit je velmi přehledným způsobem — jejich *grafem*. Zopakujeme, že každou **reálnou funkci**, jejíž definiční obor je podmnožina množiny \mathbb{R} , nazýváme **reálnou funkcí jedné reálné proměnné**².

Protože *funkce je speciální případ zobrazení*, můžeme všechny pojmy a obecné vlastnosti zobrazení přenést i na funkce. Některé z nich však vzhledem k důležitosti zopakujeme, případně doplníme. Na druhé straně budeme studovat také ty vlastnosti, které jsou specifické pro tento speciální druh zobrazení.

Poznámka 2.1.1. *Je-li $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$, jedná se o **posloupnost**. (Speciálním případem reálných funkcí jedné reálné proměnné jsou posloupnosti reálných čísel).*

2.1.2. Způsoby zadání funkce

Nejprve funkci definujeme. Předpokládejme, že reálná proměnná, na níž bude záviset náš jev, má dovoleno nabývat hodnot z určité předem stanovené podmnožiny $D \subseteq \mathbb{R}$ reálných čísel. Předpokládejme dále, že podle určitého pravidla, předpisu, dokážeme pro *každou hodnotu x množiny \mathcal{D}_f* , tj. $x \in \mathcal{D}_f$, určit *právě jednu* reálnou hodnotu y . Každé hodnotě $x \in D$ tedy nějaké y příslušet *musí*, avšak žádné hodnotě x *nesmíme* přiřadit více hodnot y . Tak vzniká funkce f . Hodnoty x se nazývají hodnotami *nezávisle proměnné* (neboli *argumentu*), hodnoty y hodnotami *závisle proměnné* a f symbolizuje *funkční předpis*. Píšeme

$$f : x \in \mathcal{D}_f \rightarrow y = f(x) \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Hodnoty proměnné x nazýváme též *vzory*, odpovídající hodnoty $y = f(x)$ *obrazy*. Množina \mathcal{D}_f je *definičním oborem* funkce f . Zadání definičního oboru je důležitou součástí zadání funkce. Množina H všech takových reálných hodnot y , které jsou obrazem nějakého vzoru,

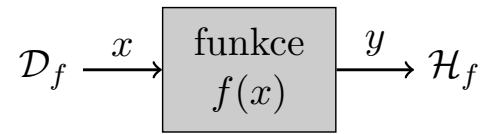
$$\mathcal{H}_f = \{y \in \mathbb{R} \text{ existuje } x \in \mathcal{D}_f, \text{ tak že } y = f(x)\}, \quad (2.2)$$

se nazývá *obor hodnot* funkce f . Hodnotu $f(x)$ nazýváme také *funkční hodnotou* funkce f v bodě x .

Funkci si podle obrázku 2.1 můžeme představit jako „černou skříňku“, do které vstoupí hodnota (vzor) a vystoupí z ní hodnota $y = f(x)$ (obraz). Množinu uspořádaných dvojic čísel $[x, f(x)]$ nazveme grafem funkce.

Jak zadat předpis f ? Lze to udělat kterýmkoli z následujících způsobů, podle vhodnosti nebo snadnosti. Ukážeme jednotlivé možnosti na jednoduchém příkladu, kdy chceme hodnotám

²Místo názvu „reálná funkce jedné reálné proměnné“ budeme pro stručnost používat pouze název „funkce“, pokud nebude řečeno něco jiného



Obrázek 2.1.: Funkce jako „černá skříňka“. [1, s. 54]

proměnné x z množiny \mathcal{D}_f přiřadit jejich druhé mocniny. Zvolme pro náš příklad definiční obor výčtem:

$$\mathcal{D}_f = \{-3, 2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\},$$

a zadáme předpis

- **slovním popisem:** předpis f přiřazuje každé z hodnot $x \in \mathcal{D}_f$ její druhou mocninu,
- **vzorcem:** $y = x^2$ pro $x \in \mathcal{D}_f$ zadává zobrazení

$$f : x \in \mathcal{D}_f \rightarrow f(x) = x^2 \in \mathbb{R},$$

- **tabulkou:** Hodnoty obrazů pro všechny vzory z \mathcal{D}_f vypíšeme do tabulky: Proměnná

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9	16

x se v tomto případě mění „diskrétně“. Je zřejmé, že tímto způsobem můžeme funkci definovat úplně jen tehdy, je-li definiční obor konečná množina. Tabulku však používáme i v jiných případech, zejména chceme-li vyznačit pomocí ní, některé hodnoty, které nás z nějakého důvodu přednostně zajímají.

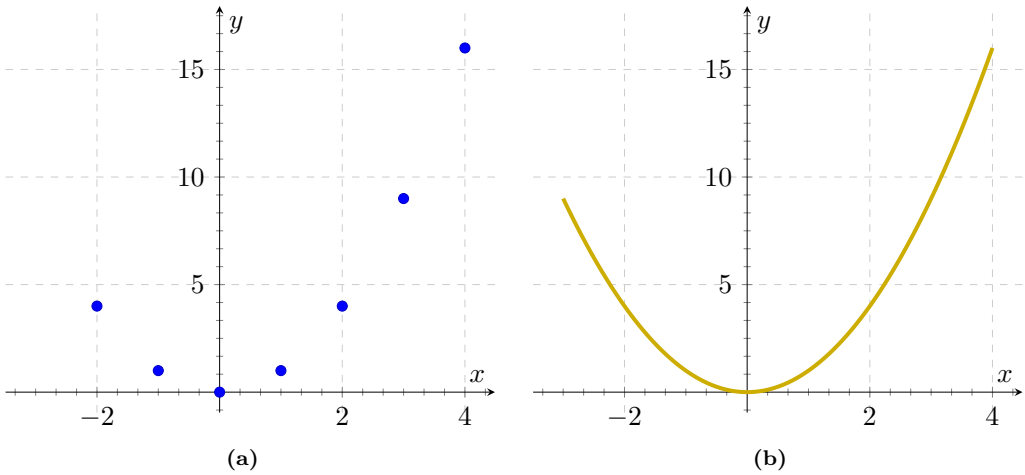
- **Zadání grafem:**

$$G_f = \{[x, f(x)] \mid x \in D\} = \{[x, x^2] \mid x \in D\}$$

tak, že dvojice $[x, f(x)]$ znázorníme jako body v rovině (obr. 2.2a). Z grafu můžeme ovšem funkční hodnoty určit pouze přibližně. Pro další matematické zpracování je grafické zadání nejméně vhodné, i když jeho praktický význam například v technických aplikacích nelze popřít.

- **Zadání pomocí rovnice**, již je funkce řešením: některé funkce nelze jednoduše zapsat pomocí některého z předchozích způsobů, nebo to alespoň nejde přesně. Lze však zapsat (diferenciální) rovnici, kterou tato funkce splňuje. Jedná se většinou o speciální funkce, jimž se v tomto textu nebudeme věnovat. (Někdy může být taková rovnice představující zadání funkce i velmi jednoduchá. Například dosti známá funkce $\operatorname{erf}(x)$, *error funkce*, velmi úzce souvisí s funkcí $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}e^{-x^2}$. Nelze ji však zapsat vzorcem. Některé její hodnoty v nejčastěji používaném rozsahu proměnné x můžeme najít v rozsáhlých tabulkách, které byly sestaveny pomocí numerických metod.)

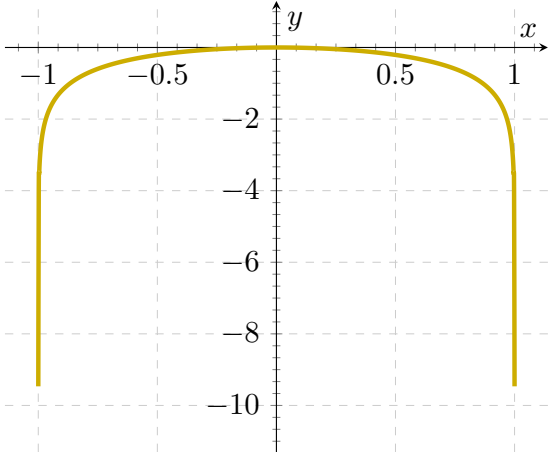
Již bylo zmíněno, že zadání definičního oboru je neopominutelnou součástí zadání funkce. Kdybychom například zadali funkci opět předpisem $y = x^2$, avšak za definiční obor stanovili uzavřený interval $D = \{-3, 4\}$, dostali bychom graf na obrázku 2.2b. Jde skutečně o jinou funkci než na obrázku 2.2a. Její úplnou tabulku bychom nedokázali napsat vůbec.



Obrázek 2.2.: Zadání funkce grafem

Zobrazovací předpis, kterým je funkce zadána, může být rozmanitý. Nejčastěji a pro účely matematické analýzy nejvhodnější je *analytické zadání vzorcem*, tj. rovnicí tvaru $y = f(x)$ nebo několika takovými rovnicemi platnými pro různé části definičního oboru. Přitom v rovnici $y = f(x)$ je na pravé straně nějaký správně definovaný výraz obsahující nejvýše proměnnou x a nabývající jednoznačné hodnoty pro danou hodnotu proměnné x .

Příklad 2.1.1. (*Definiční obor a obor hodnot funkce*): Určíme „co největší“ definiční obor funkce $y = \log_2(\sqrt{1-x^2})$ a zjistíme také její obor hodnot.



Obrázek 2.3.: K příkladu 2.1.1 $y = \log_2(\sqrt{1-x^2})$ [1, s. 57]
Využijeme našich znalostí ze střední školy. Ve hře jsou tři funkce: logaritmus, odmocnina a kvadratická funkce, postupně:

$$y = \log_2 w, \quad w = \sqrt{u}, \quad u = 1 - x^2.$$

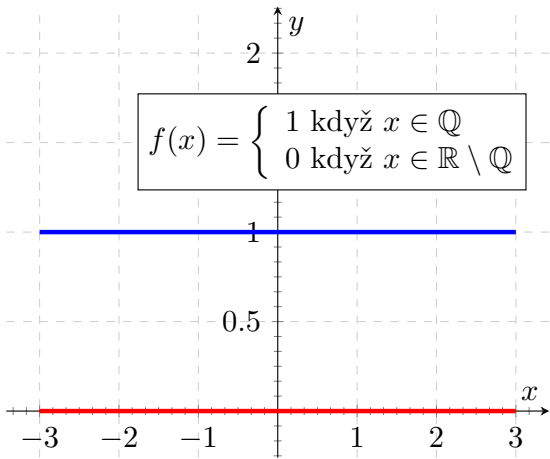
„Největším“ definičním oborem logaritmu je množina $\mathcal{D}(\log) = w\mathbb{R} \mid w > 0$. Oborem hodnot logaritmu pro $w \in \mathcal{D}(\log)$ je celá reálná osa. Hodnoty w však dostáváme vyčíslením odmocniny, která pro přípustné hodnoty u , $\mathcal{D}(\sqrt{}) = \{u \in \mathbb{R} \mid u \geq 0\}$, může nabývat všech nezáporných hodnot, tj. kladných a hodnoty nula (té nabývá pro $u = 0$). Hodnotu $w = 0$ však nesmíme do logaritmu dosadit, takže hodnotu $u = 0$ musíme ihned vyloučit. Hodnoty proměnné x musíme omezit tak, aby kvadratická funkce $u = 1 - x^2$ nabývala pouze kladných hodnot. Dostáváme tak definiční obor funkce $y = f(x)$ $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$, neboli otevřený interval $(-1, 1)$. Pro $x \in \mathcal{D}$ pak funkce $u(x)$ nabývá hodnot v intervalu $\mathcal{H}_u = (0, 1]$ a funkce $\log_2 \sqrt{1 - x^2}$ hodnot v intervalu $\mathcal{H}_u = (-\infty, 0]$, který je tedy jejím oborem hodnot. Graf funkce vidíme na obr. 2.3.

2.1.3. Graf funkce

Jinými slovy, v předchozím odstavci, bylo řečeno, že každé funkci můžeme přiřadit její graf, a že **grafem funkce** $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, rozumíme množinu všech bodů euklidovské roviny, jejíž souřadnice x , y v dané kartézské soustavě souřadnic vyhovuje rovnice

$$y = f(x).$$
(2.3)

Graf funkce může v jednodušších případech posloužit jako prostředek k získání názorné „představy“. Grafy některých funkcí jsou „křivky“, (intuitivním smyslu tohoto slova). Avšak u některých funkcí názorná představa grafu selhává. Vezmeme-li např. Dirichletovu funkci, snadno zjistíme, že její graf nemůžeme sestrojít (obr. 2.4 tedy není grafem funkce, ale pouze pokusem o názorné přiblížení Dirichletovi funkce)



Obrázek 2.4.: Pokus o zobrazení Dirichletovy funkce: „dvě rovnoběžné přímky $y = 0$ a $y = 1$ s nekonečným množstvím mezer“

Z předchozí kapitoly také víme, že zadat funkci znamená udát její definiční obor a „zobrazovací předpis“, tj pravidlo (formulované slovně či v používaném matematickém jazyku), podle něhož můžeme jednoznačným způsobem rozhodnout, jaká funkční hodnota odpovídá libovolně zvolenému číslu z definičního oboru. Definičním oborem bývá často interval nebo sjednocení intervalů. Není-li definiční obor udán, rozumíme jím množinu všech reálných čísel,

pro něž je příslušný předpis definován. Tuto množinu nazýváme **přirozeným** (též maximálním) definičním oborem funkce. Je to tzv. *existenční obor* výrazu, jímž je funkce definována [2, s. 84].

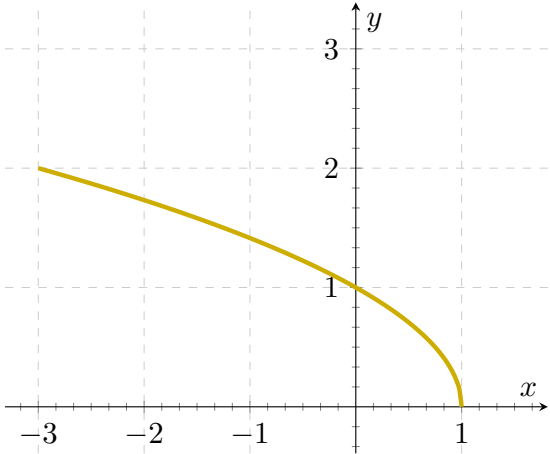
Například funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, můžeme vyjádřit bez udání definičního oboru \mathbb{R} vztahem

$$f : y = x^2,$$

neboť předpis $y = x^2$ má smysl pro každé reálné číslo x . Avšak u funkce $g : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, je nutné v zápisu funkce definiční obor $\langle 0, 1 \rangle$ uvést, píšeme tedy

$$g : y = x^2, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Příklad 2.1.2. Vzorcem $f(x) = \sqrt{1 - x}$ je dána funkce, jejímž přirozeným oborem je interval $(-\infty, 1)$ (uvažme, že výraz $\sqrt{1 - x}$ je definován v reálném oboru, je-li $1 - x \geq 0$). Graf této funkce je část paraboly, jejíž osou je osa x , viz obr. 2.5.



Obrázek 2.5.: Graf funkce $y = \sqrt{1 - x}$ je část paraboly, jejíž hlavní osou je osa x

Příklad 2.1.3. Funkce je dána vzorcem

$$f(x) : y = |x|.$$

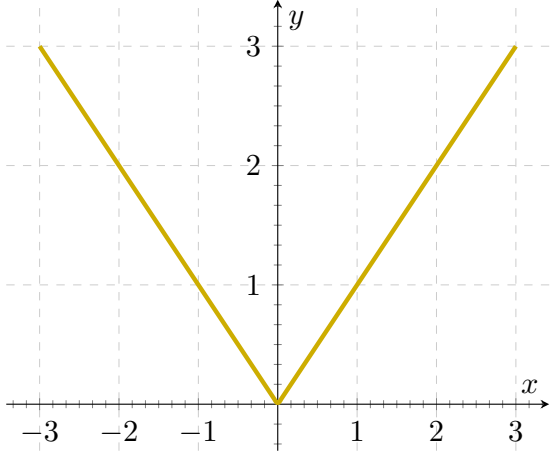
Přirozeným definičním oborem této funkce je množina \mathbb{R} . Táž funkce může být dána i vzorcem

$$f(x) : y = \sqrt{x^2},$$

nebo dvěma rovnicemi

$$f(x) : y = \begin{cases} x & \text{je-li } x \geq 0, \\ -x & \text{je-li } x < 0, \end{cases}$$

což je zřejmé, uvědomíme-li si jak je definována absolutní hodnota. Graf funkce je na obr. 2.6.



Obrázek 2.6.: Graf funkce $y = |x|$

Funkce může být analyticky zadána i jinak než vzorcem $y = f(x)$. Časté je **parametrické vyjadřování**, tj. vyjádření dvojicí rovnic

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in J, \tag{2.4}$$

kde φ, ψ jsou funkce definované na množině J (J bývá obvykle interval). Proměnná t se nazývá *parametr*: má zde pomocný význam. Zajímá nás totiž vztah mezi x a y . Rovnice 2.4 definuje relaci $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$:

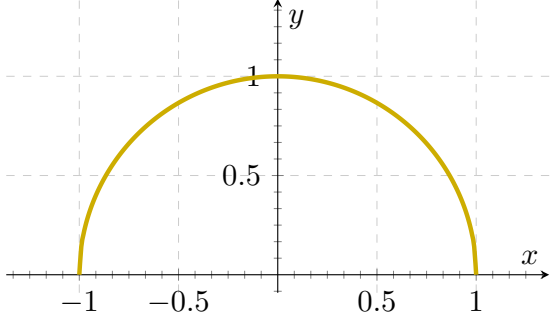
$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \text{ existuje } t \in J \text{ tak, že } x = \varphi(t), \ y = \psi(t)\}.$$

Tato relace může být za *určitých podmínek jednoznačná* tj. je funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} . V tomto případě říkáme, že funkce f je *definována parametricky rovnicemi 2.4*

Příklad 2.1.4. Rovnice $x = \cos t, \ y = \sin t \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$, definují parametricky funkci

$$f : y = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle, \tag{2.5}$$

jejíž grafem je polokružnice, ležící v horní polorovině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$.



Obrázek 2.7.: Graf funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$ je polokružnice

Blíže se parametrickým zadáním funkce budeme zabývat v kapitole ?? (Aplikace diferenciálního počtu).

Funkce může být někdy zadána též rovnicí tvaru

$$F(x, y) = 0. \tag{2.6}$$

Přitom F je funkce dvou proměnných, tj. zobrazení z $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Kromě rovnice 2.6 může být dána ještě podmínka, aby bod (x, y) patřil k některé množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Rovnici 2.6 je definována opět jakási relace $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = 0\} \tag{2.7}$$

(případně $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ F(x, y) = 0, \ (x, y) \in M\}$), zajímá nás, kdy tato relace je funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} . Říkáme pak, že funkce f je dána **implicitně** uvedenou rovnicí 2.6 (příp. rovnicí 2.6 a podmínkou $(x, y) \in M$). Naproti tomu zadání funkce ve tvaru $y = f(x)$ nazýváme **explicitním**.

Příklad 2.1.5.

- Rovnicí $x + 2y - 3 = 0$ je implicitně definována funkce $f : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.
- Rovnicí $x^2 + y^2 = 1$ a podmínkou $y \geq 0$ je definována implicitní funkce z příkladu 2.1.4. Relace $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ x^2 + y^2 = 1\}$ není ovšem jednoznačná, každé hodnotě $x \in (-1, 1)$ odpovídají dvě hodnoty $y : y_1 = \sqrt{1 - x^2}, \ y : y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$. Podmínkou $y \geq 0$ druhou hodnotu vylučujeme. Místo podmínky $y \geq 0$ bychom mohli uvést i jiné podmínky, aby rovnice $x^2 + y^2 = 1$ určovala implicitní funkci.

Vyšetřování podmínek, při nichž rovnice $F(x, y) = 0$ je definována funkce f , se obvykle provádí metodami matematické analýzy funkce více proměnných.

2.1.4. Vlastnosti funkcí

2.1.4.1. Omezená funkce

Definice 2.1.1. Funkci f nazýváme *shora (zdola) omezenou na množině $A \subset D(f)$* , je-li *shora (zdola) omezená množina funkčních hodnot $f(A)$* . Je-li funkce f omezená shora i zdola na množině A , pak ji nazýváme *omezenou na množině A* . Je-li $A = D(f)$, nazýváme funkci *omezenou*. Viz kniha [2, s. 87]

Funkce f je omezená na množině A , právě když existuje číslo $K > 0$ tak, že platí

$$|f(x)| \leq K \quad \text{pro každé } x \in A$$

neboli

$$-K \leq f(x) \leq K \quad \text{pro každé } x \in A.$$

Příklad 2.1.6. Funkce $f : y = \frac{1}{x^2 + 1}$ je omezená. Platí totiž

$$\left| \frac{1}{x^2 + 1} \right| = \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Zdola je tato funkce omezena dokonce číslem 0.

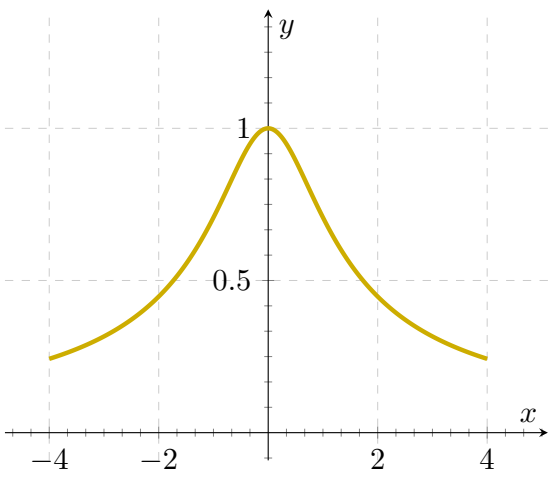
- Je-li funkce f shora omezená na množině A , existuje konečné *supremum* $\sup f(A)$. Toto číslo nazýváme *supremem funkce f na množině A* a označujeme je též $\sup_{x \in A} f(A)$ nebo $\sup\{f(x), x \in A\}$.
- Je-li funkce f zdola omezená na množině A , existuje konečné *infimum* $\inf(A)$, které nazýváme *infimum funkce f na množině A* a označujeme je též $\inf_{x \in A} f(A)$ nebo $\inf\{f(x), x \in A\}$.
- Není-li funkce f shora (zdola) omezená na množině A , pak je ovšem $\sup_{x \in A} f(x) = +\infty$ ($\sup_{x \in A} f(x) = -\infty$).
- Má-li množina $f(A)$ největší (nejmenší) prvek, pak toto číslo nazýváme největší (nejmenší) hodnotou funkce f na množině A (je-li $A = f(f)$, též absolutním maximem, resp. absolutním minimem funkce f) a značíme je $\max_{x \in A} f(x)$ ($\min_{x \in A} f(x)$). V tomto případě existuje takové číslo $x_0 \in A$, že $f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$ ($f(x_0) = \min_{x \in A} f(x)$). Pro všechna $x \in A$ tedy platí $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$). Je zřejmé, že největší (nejmenší) hodnota funkce f na množině A , pokud existuje je současně supremem (infimem) funkce f na A .

Příklad 2.1.7. Pro funkci z příkladu 2.1.6 platí:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 1} &= \max_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 1} = 1; \\ \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 1} &= 0, \end{aligned}$$

tato funkce však nenabývá v definičním oboru \mathbb{R} nejmenší hodnoty, neboť je stále $\frac{1}{x^2 + 1} > 0$. To, že infimum je 0, dokážeme takto: Zvolíme-li libovolně $\varepsilon > 0$, pak snadno zjistíme, že existuje x , pro něž $\frac{1}{x^2 + 1} < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} 1 &< \varepsilon(x^2 + 1) \\ \frac{1}{\varepsilon} &< x^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} < x \end{aligned}$$



Obrázek 2.8.: Graf funkce $f(x) : y = \frac{1}{1+x^2}$

Neeexistuje tedy kladné číslo, jež by bylo dolní mezí množiny funkčních hodnot, takže infimum je 0. Graf funkce f je na obr. 2.8.

2.1.4.2. Monotonní funkce

Definice 2.1.2. Funkci f nazýváme **rostoucí (klesající)** na množině $A \subset D(f)$, jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Funkci f nazýváme **neklesající (nerostoucí)** na množině $A \subset D(f)$, jestliže pro každé dvě body $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). Rostoucí a klesající funkce (na množině A) se nazývají **ryze monotónní** (na množině A), neklesající a nerostoucí funkce (na množině A) se nazývají **monotónní** (na množině A).

Z definice je zřejmé, že každá rostoucí funkce je zároveň neklesající a každá klesající funkce je zároveň nerostoucí. Ryze monotónní funkce tvoří tedy podmnožinu množiny monotónních funkcí.

Příklad 2.1.8. Funkce $y = 2x + 1$ je **rostoucí** na intervalu $(-\infty, \infty)$. Platí totiž: $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1$.

Příklad 2.1.9. Funkce $y = [x]$ je **neklesající** na intervalu $(-\infty, \infty)$ (viz příklad **).

Příklad 2.1.10. Heavisideova funkce (viz příklad **) je **neklesající** na intervalu $(-\infty, \infty)$ (viz příklad **).

Příklad 2.1.11. Funkce $y = |x|$ je **klesající** na intervalu $(-\infty, 0)$ a rostoucí na intervalu $\langle 0, \infty)$.

Definice 2.1.3. Funkci f nazýváme **konstantní** na množině A , jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in A$, platí $f(x_1) = f(x_2)$. V tom případě existuje reálné číslo k takové, že pro každé $x \in A$ je $f(x) = k$. Je-li $k = 0$, mluvíme o nulové funkci na množině A .

Výrok „funkce f je konstantní na množině A “ zapisujeme též $f(x) = \text{konst}$ na A . Funkci konstantní na \mathbb{R} budeme stručně nazývat **konstantní funkcí** nebo krátce **konstantou**. Z textu bude obvykle patrné, interpretujeme-li symbol k jako reálné číslo nebo jako konstantní funkci. Je zřejmé, že konstantní funkce na množině A je zároveň neklesající i nerostoucí na množině A . Toto tvrzení se dá obrátit. Lze snadno dokázat i tuto větu:

Věta 2.1.1. *Funkce f je **rostoucí** na množině A , právě když je **neklesající** na množině A a na žádné dvoubodové podmnožině $B \subset A$ není konstantní.*

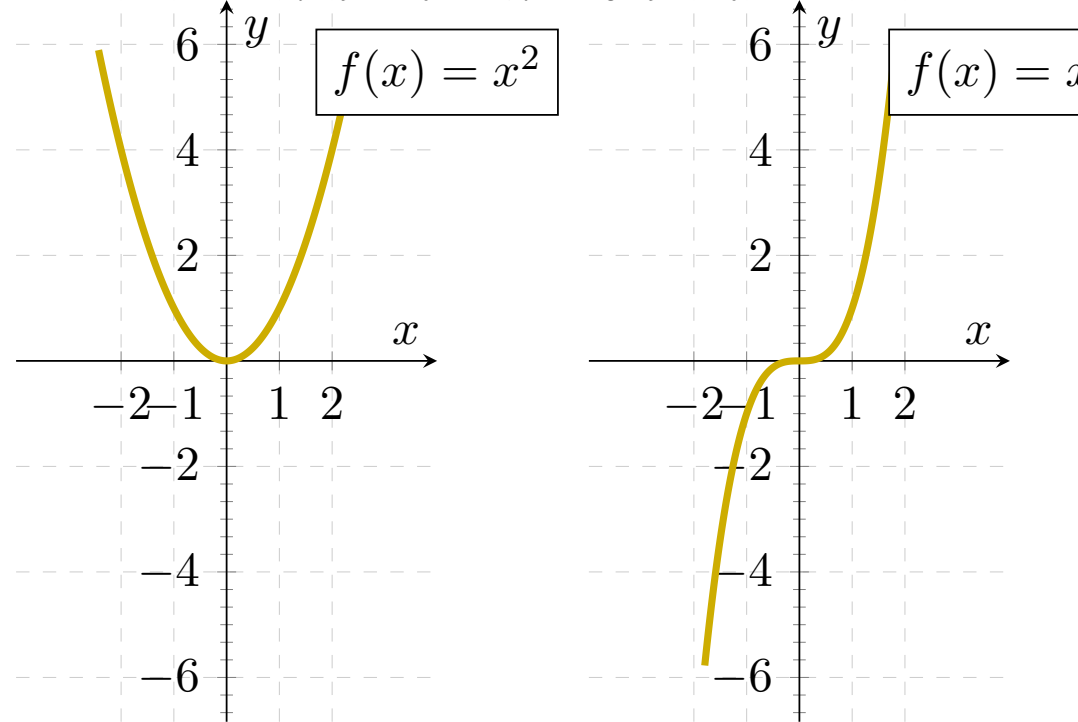
Obdobná tvrzení platí i pro klesající funkce.

2.1.4.3. Sudé a liché funkce

Definice 2.1.4. *Funkce f se nazývá **sudá** jestliže pro každé $x \in D(f)$ je též $-x \in D(f)$ a platí $f(x) = f(-x)$. Funkce f se nazývá **lichá** jestliže pro každé $x \in D(f)$ je též $-x \in D(f)$ a platí $f(-x) = -f(x)$.*

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y (osy funkčních hodnot), graf liché funkce je souměrný podle počátku.

Příklad 2.1.12. *Funkce $f : y = x^2$ je sudá, funkce $g : y = x^3$ je lichá.*



Obrázek 2.9.: Příklad sudé a liché funkce

Daná funkce nemusí být ovšem ani sudá, ani lichá. Snadno se dokáže tvrzení:

- Je-li sudá funkce f na množině $D(f) \cap \langle 0, \infty \rangle$ rostoucí (klesající), je na množině $D(f) \cap (-\infty, 0)$ klesající (rostoucí).
- Je-li lichá funkce na množině $D(f) \cap \langle 0, \infty \rangle$ rostoucí (klesající), je též na množině $D(f) \cap (-\infty, 0)$ klesající (rostoucí).

2.1.4.4. Periodická funkce

2.1.5. Operace s funkcemi. Uspořádání

Jak s funkcemi počítat? Definujeme základní operace s nimi — *součet funkcí, součin funkcí a násobení funkce reálným číslem*. Předpokládejme, že na definičním oboru \mathcal{D} jsou zadány funkce f a g a reálné číslo α . Pak na tomtéž definičním oboru lze zadat nové funkce

$$\mathcal{F} : \mathcal{D} \ni x \rightarrow \mathcal{F}(x) = f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$$
$$\mathcal{G} : \mathcal{D} \ni x \rightarrow \mathcal{G}(x) = \alpha g(x) \in \mathbb{R}$$
$$\mathcal{H} : \mathcal{D} \ni x \rightarrow \mathcal{H}(x) = f(x)g(x) \in \mathbb{R}$$

Funkce \mathcal{F} , \mathcal{G} a \mathcal{H} nazýváme postupně součtem funkcí f a g , α -násobkem funkce f a součinem funkcí f a g . Značíme

$$\mathcal{F} = f + g, \quad \mathcal{G} = \alpha f, \quad \mathcal{H} = fg.$$

Všimněme si nyní pravidel pro počítání s funkcemi zadanými na \mathcal{D} a zjistíme, že se velmi podobají pravidlům pro počítání s reálnými čísly. Není divu, vždyť operace s funkcemi jsou definovány prostřednictvím funkčních hodnot, a těmi jsou reálná čísla. Některé důležité odlišnosti však přece jen najdeme. Napřed ale pravidla:

- komutativní zákon pro součet funkcí

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$
(2.8)

- asociativní zákon pro součet funkcí

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$
(2.9)

- existence univerzálního neutrálního prvku O (nulová funkce $O : \mathcal{D} \ni x \rightarrow O(x) = 0$)

$$f(x) + O = O + f(x) = f(x)$$
(2.10)

- existence právě jednoho opačného prvku k funkci f , přičemž $(-f)(x) = -f(x)$

$$f(x) + (-f(x)) = (-f(x)) + f(x) = O$$
(2.11)

- asociativní zákon pro násobení číslem

$$(\alpha_1 \alpha_2) f(x) = \alpha_1 (\alpha_2 f(x))$$
(2.12)

- 1. distributivní zákon pro násobení číslem

$$\alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$$
(2.13)

- 2. distributivní zákon pro násobení číslem

$$(\alpha_1 + \alpha_2)f(x) = \alpha_1 f(x) + \alpha_2 f(x) \quad (2.14)$$

- násobení číslem (-1) dává opačný prvek

$$(-1)f(x) = (-f(x)) \quad (2.15)$$

- komutativní zákon pro součin funkcí

$$f(x)g(x) = g(x)f(x) \quad (2.16)$$

- asociativní zákon pro součin funkcí

$$f(x)(g(x)h(x)) = (f(x)g(x))h(x) \quad (2.17)$$

- distributivní zákon zprava pro součin funkcí

$$(f_1(x) + f_2(x))g(x) = f_1(x)g(x) + f_2(x)g(x) \quad (2.18)$$

- distributivní zákon zleva pro součin funkcí

$$f(x)(g_1(x) + g_2(x)) = f(x)g_1(x) + f(x)g_2(x) \quad (2.19)$$

- násobení jednotkovou funkcí $I : \mathcal{D} \ni x \rightarrow I(x) = 1$

$$f(x)I = If(x) \quad (2.20)$$

- existence právě jedné *převrácené* funkce k funkci f pro $f(x) \neq 0 \quad (f)^{-1} : \bar{\mathcal{D}} \ni x \rightarrow (f)^{-1}(x) = [f(x)]^{-1}$ kde $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} - \{x \in \mathcal{D} \mid f(x) = 0\}$

$$f(x)(f(x))^{-1} = (f(x))^{-1}f(x) = I \quad (2.21)$$

Všimněme si, že funkce $(f)^{-1}$ existuje obecně na užším definičním oboru $\bar{\mathcal{D}}$, než na kterém je definována funkce f . Je totiž třeba vyloučit všechny hodnoty x , pro které $f(x) = 0$ (zákaz dělení nulou). K funkci O tedy převrácená funkce neexistuje vůbec!

Existence opačné a převrácené funkce k f umožňuje definovat *rozdí*l a *podíl* funkcí $f - g = f + (-g)$ a $\frac{f}{g} = f(g)^{-1}$, tj.

$$\begin{aligned} f - g : \mathcal{D} \ni x &\rightarrow (f - g)(x) = f(x) + (-g)(x) = f(x) - g(x), \\ \frac{f}{g} : \bar{\mathcal{D}} \ni x &\rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(g)^{-1}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned}$$

kde $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} - \{x \in \mathcal{D} \mid g(x) = 0\}$

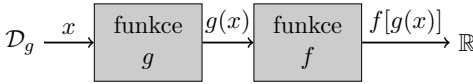
Poznámka 2.1.2. Pamatujme si označení *převrácené funkce* jako $(f)^{-1}$, v němž je zápis symbolu f do závorky podstatný. Jde o něco jiného než znamená symbol f^{-1} bez závorky, který rezervujeme pro *inverzní funkci* v dalším výkladu.

Poznámka 2.1.3. Porovnáme-li nyní vlastnosti operací s funkcemi a pravidla pro počítání s reálným čísly, komplexními čísly, maticemi a vektory, můžeme konstatovat, že množina funkcí s operací sčítání funkcí a násobení funkce číslem je **vektorovým prostorem**. To je vlastnost, která je s případem čísel, matic a vektorů společná. Vektorový prostor funkcí se však od zmiňovaných vektorových prostorů výrazně liší svou dimenzí (rozměrem). Intuitivně dobře chápeme, co znamená jednorozměrný, dvojrozměrný a trojrozměrný prostor (například \mathbb{R}^1 , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3). V odstav 1.4 jsme dokonce pracovali v n -rozměrném vektorovém prostoru. Dimenze vektorového prostoru může být i nekonečná — třeba zrovna u funkcí. Obecně jde o pojem poměrně obtížný a budeme se jím důkladně zabývat až v kapitolách věnovaných algebře [1, s. 58].

Operace s funkcemi jsme definovali a prodiskutovali pro případ, kdy definiční obory funkcí, vstupujících do operace byly stejné. Co když tomu tak nebude? Znamená to, že pak nemůžeme funkce sčítat, násobit, apod.? Předpokládejme, že definičním oborem funkce f je množina \mathcal{D}_f definičním oborem funkce g množina \mathcal{D}_g . Pokud jsou tyto obory disjunktní, tj. $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = \emptyset$, můžeme utvořit pouze α -násobek funkce f či g . Sčítat ani násobit funkce f a g nemůžeme neboť hodnota $f(x) + g(x)$ ani $f(x)g(x)$ neexistuje pro žádné x . Pokud je průnik $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ oborů \mathcal{D}_f a \mathcal{D}_g neprázdný, stává se definičním oborem funkcí $f + g$ a fg . Platí stejná pravidla jako v předchozí tabulce, pouze s omezením na obor \mathcal{D}_f .

2.1.6. Skládání a inverze funkcí

Skládání neboli kompozici funkcí si lze snadno představit opět pomocí „černých skříněk“ (obr. 2.10): Do první skřínky představující předpis g , *vnitřní složku* složené funkce, vstupuje hodnota



Obrázek 2.10.: Skládání funkcí [1, s. 59]

x z definičního oboru \mathcal{D}_g funkce g . Výstupem je číslo $u = g(x)$, funkční hodnota vnitřní složky v bodě x . Toto číslo smí vstoupit do skřínky představující předpis f , *vnější složku* složené funkce, právě tehdy, je-li prvkem jejího definičního oboru \mathcal{D}_f . V takovém případě najdeme na výstupu ze skřínky f hodnotu $y = f(u) = f[g(x)]$. (Jestliže $g(x) \notin \mathcal{D}_f$, není výstup ze skřínky f definován.) Vzniká nový předpis F , kterým se některým bodům definičního oboru \mathcal{D}_g , ne všem, ale pouze těm, pro něž $g(x) \in \mathcal{D}_f$, přiřazují hodnoty $f[g(x)]$. Definujme nyní složenou funkci přesněji: Předpokládejme, že jsou zadány funkce

$$g : \mathcal{D}_g \ni x \rightarrow g(x) = u \in \mathbb{R},$$

$$f : \mathcal{D}_f \ni u \rightarrow f(u) = y \in \mathbb{R}.$$

označme

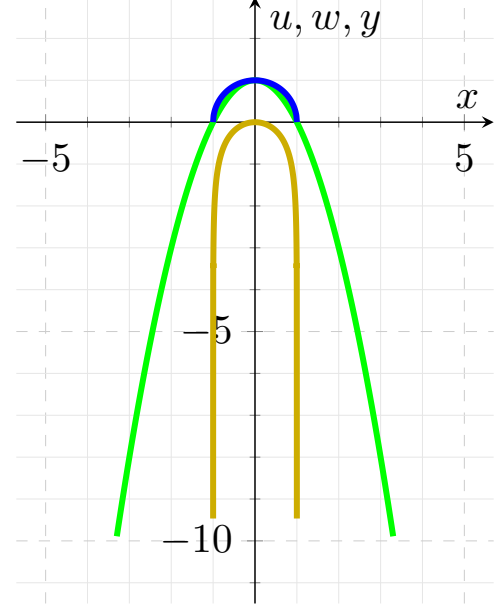
$$\mathcal{D} = \{x \mid x \in \mathcal{D}_g \text{ a současně } g(x) \in \mathcal{D}_f\}.$$

Pokud $\mathcal{D} = \emptyset$, lze definovat funkci

$$F : \mathcal{D} \ni x \rightarrow y = F(x) = f[g(x)] \in \mathbb{R}, \text{ značíme } F = f \circ g.$$

F se nazývá *složením* neboli *kompozicí* funkcí g a f . Zápis $f \circ g$ čteme často také jako „ f po g “. Skládat lze i větší počet funkcí.

Příklad 2.1.13. Uvažme funkci z příkladu 2.1.1.



Obrázek 2.11.: K příkladu 2.1.1 $y = \log_2(\sqrt{1-x^2})$ [1, s. 57]
Ukážeme, jak tato funkce vzniká postupně složením tří funkcí a jak při tom dochází k postupnému omezování definičního oboru. Písmeny \mathcal{D} a \mathcal{H} s příslušným indexem budeme značit definiční obory a obory hodnot jednotlivých funkcí.

$$g : \mathbb{R} = \mathcal{D}_g \ni x \rightarrow u = g(x) = 1 - x^2 \in \mathcal{H}_g = (-\infty, 1],$$
$$h : [0, \infty) = \mathcal{D}_h \ni u \rightarrow w = h(u) = \sqrt{u} \in \mathcal{H}_h = [0, \infty),$$
$$\mathcal{D}_h \cap \mathcal{H}_g = [0, 1] \Rightarrow \mathcal{D}_{h \circ g} = [-1, 1], \mathcal{H}_{h \circ g} = [0, 1],$$
$$f : (0, \infty) = \mathcal{D}_f \ni w \rightarrow y = f(w) = \log_2 w \in \mathcal{H}_f = \mathbb{R}$$
$$\mathcal{H}_{h \circ g} \cap \mathcal{D}_f = (0, 1] \Rightarrow \mathcal{D}_F = (-1, 1), \mathcal{H}_F = (-\infty, 0].$$

Je tedy

$$\begin{aligned} F : \mathcal{D}_F \ni x \rightarrow y = F(x) &= (f \circ (h \circ g))(x) = fh[g(x)] \\ &= \log_2 \sqrt{1-x^2} \in (-\infty, 0]. \end{aligned}$$

Názorněji než tento zápis ukazuje situaci obrázek 2.11.

Může vzniknout otázka, jak rozpoznáme vnitřní a vnější složku složené funkce. Rozlišit vnitřní a vnější složku třeba u funkcí $\cos(x^2)$ a $(\cos x)^2$ není problém. Hned také vidíme, že obecně $f \circ g \neq g \circ f$, i když by definiční obory funkcí na pravé i levé straně měly neprázdný průnik. Jsou však i případy na první pohled méně zřetelné, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 2.1.14. (Určení vnitřní a vnější složky) Uvedme příklad dvou funkcí $F(x) = \sqrt{x^2}$ a $G(x) = (\sqrt{x})^2$. Liší se tyto funkce, nebo jde o tutéž funkci, jen jinak zapsanou? Vidíme, že platí

$$\mathcal{D}_F = \mathbb{R}, F(x) = |x| \forall x \in \mathcal{D}_F, \mathcal{H}_F = [0, \infty),$$
$$\mathcal{D}_G = [0, \infty), G(x) = x \forall x \in \mathcal{D}_G, \mathcal{H}_G = [0, \infty).$$

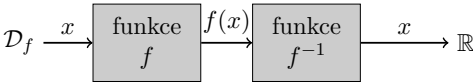
Funkce F a G mají různé definiční obory, ale na jejich průniku dávají stejné funkční hodnoty. Ani zde však obecně nelze pořadí skládání funkcí zaměňovat.

Funkce F a G mají různé definiční obory, ale na jejich průniku dávají stejné funkční hodnoty. Ani zde však obecně nelze pořadí skládání funkcí zaměňovat.

Nyní se pustíme do vybudování pojmu inverzní funkce k funkci f . Představme si, že funkční hodnota $y = f(x)$ zadané funkce

$$f : \mathcal{D}_f \ni x \rightarrow f(x) \in \mathcal{H}_f$$

představuje „zakódovanou“ informaci o hodnotě x . Položme si otázku, zda a za jakých podmínek dokážeme sestavit „černou skříňku“, na jejímž výstupu by se při vstupu obrazu $y = f(x)$ objevila hodnota x . Omezení takové možnosti je názorně vidět na obrázku 2.12. V případě funkce $f(x)$ lze ke všem obrazům $y \in \mathcal{H}_f$ najít vzory, v případě funkce $g(x)$ to možné není, neboť jeden a týž obraz lze získat z několika vzorů. Pro který bychom se tedy měli rozhodnout?

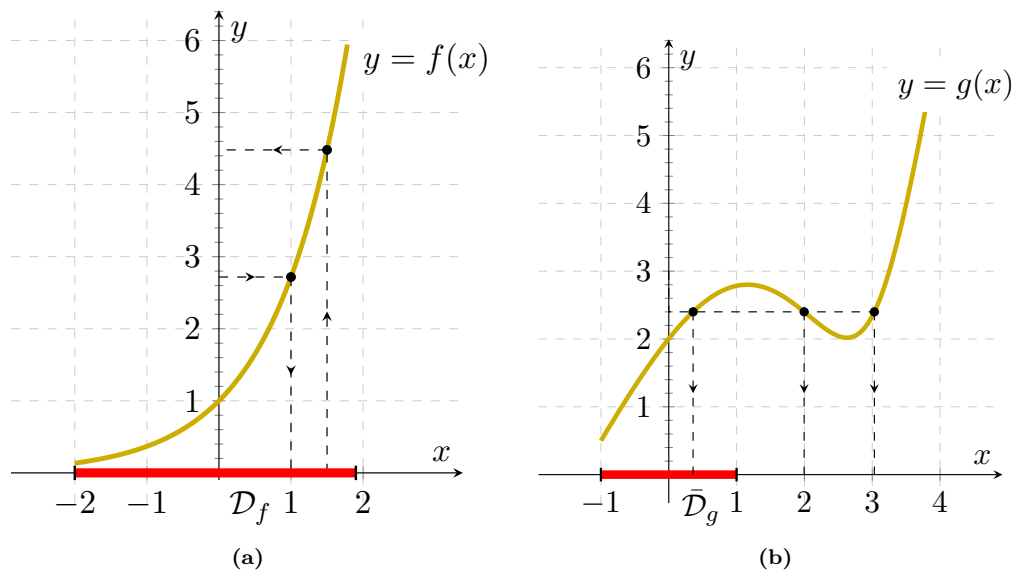


Obrázek 2.12.: Skládání funkcí [1, s. 61]

Aby bylo možné vzor zpětně identifikovat na základě znalosti obrazu, je třeba, aby funkce f byla *prostá*, tj. aby předpis f přiřazoval každým dvěma různým vzorům $X_1 \neq x_2$ dva různé obrazy $f(x_1) \neq f(x_2)$. Často lze tohoto požadavku docílit tím, že se místo funkce f s definičním oborem \mathcal{D}_f spokojíme s funkcí, která vznikne omezením (*restrikcí*) té původní na „menší“ definiční obor, zato však již bude prostá. U funkce g na obrázku 2.13 by tak stačilo omezit definiční obor například na množinu \mathcal{D}_g . Než inverzní funkci definujeme, ukažme si způsob jejího nalezení na známém příkladu.

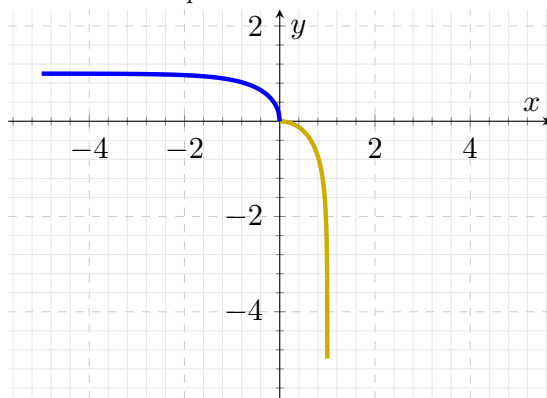
Příklad 2.1.15. (Nalezení inverzní funkce): Funkci

$$y = \log_2(\sqrt{1-x^2})$$



Obrázek 2.13.: K pojmu inverzní funkce

Jsme již z různých hledisek rozebrali v příkladech 2.1.1 a 2.1.13. Hodí se i nyní.

Obrázek 2.14.: K příkladu 2.1.15 $y = \log_2(\sqrt{1-x^2})$ [1, s. 62]

Na obrázku 2.11 máme dokonce její graf, a tak vidíme, že **není** na svém definičním oboru $(-1, 1)$ **prostá**. Omezme proto její definiční obor na interval $\mathcal{D} = [0, 1)$, na němž již prostá je (část grafu vpravo od osy y). Pro danou hodnotu obrazu $y \in (-\infty, 0]$ můžeme již jednoznačně určit hodnotu x jednoduchou úpravou:

$$\begin{aligned} y = \log_2(\sqrt{1-x^2}) &\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 2^y \\ &\Rightarrow x^2 = 1 - 2^{2y} \\ &\Rightarrow x = \sqrt{1 - 2^{2y}} \end{aligned}$$

Formální záměnou $x \leftrightarrow y$ dostáváme inverzní funkci k funkci f ,

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{1 - 2^{2x}}.$$

Grafy obou funkcí jsou na obrázku 2.14.

Ze způsobu konstrukce funkce f^{-1} v předchozím příkladu je vidět, že $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{H}_f$, $\mathcal{H}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$ a graf inverzní funkce je obrazem grafu prosté funkce f při osové symetrii v rovině souřadnicových os vzhledem k ose prvního a třetího kvadrantu. Nyní již definujeme inverzní funkci obecně. Předpokládejme, že funkce $f : \mathcal{D}_f \ni x \rightarrow y = f(x) \in \mathcal{H}_f$ je prostá na svém definičním oboru. Pak existuje funkce f^{-1} definovaná jako

$$f^{-1} : \mathcal{H}_f \ni x \rightarrow y = f^{-1}(x) \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x = f(y). \quad (2.22)$$

Funkci f^{-1} nazýváme **inverzní funkcí k funkci f** . Ještě shrneme pravidla pro skládání funkcí a pro inverzní funkce:

- asociativní zákon pro skládání funkcí

$$f(x) \circ (h(x) \circ g(x)) = f(x) \circ h(x) \circ g(x) \quad (2.23)$$

- distributivní zákon zleva

$$f(x) \circ (h(x) + g(x)) = f(x) \circ h(x) + f(x) \circ g(x) \quad (2.24)$$

- existence univerzálního neutrálního prvku O (nulová funkce $O : \mathcal{D} \ni x \rightarrow O(x) = 0$)

$$f(x) + O = O + f(x) = f(x) \quad (2.25)$$

- existence právě jednoho opačného prvku k funkci f , přičemž $(-f)(x) = -f(x)$

$$f(x) + (-f(x)) = (-f(x)) + f(x) = O \quad (2.26)$$

- komutativní zákon pro součet funkcí

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x) \quad (2.27)$$

- asociativní zákon pro součet funkcí

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \quad (2.28)$$

- existence univerzálního neutrálního prvku O (nulová funkce $O : \mathcal{D} \ni x \rightarrow O(x) = 0$)

$$f(x) + O = O + f(x) = f(x) \quad (2.29)$$

Předchozí vztahy platí na patřičně zúžených definičních oborech funkcí, které do nich vstupují.

2.2. Elementární funkce

Základními elementárními funkcemi nazýváme [3, s. 10]:

2.2.1. Goniometrické funkce

- **Základní vzorce pro goniometrické funkce**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(2.30)

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(2.31)

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(2.32)

- **Součtové vzorce**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

(2.33)

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

(2.34)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

(2.35)

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

(2.36)

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

(2.37)

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \cot \alpha \cdot \cot \beta}{\cot \alpha \pm \cot \beta}$$

(2.38)

Součtové vzorce lze odvodit několika způsoby; jednoduchý způsob důkazu lze provést pomocí skalárního součinu vektorů.

- **Vzorce pro dvojnásobný úhel 2α**

Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

(2.39)

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

(2.40)

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

(2.41)

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

(2.42)

- **Vzorce pro poloviční úhel $\frac{\alpha}{2}$**

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

(2.43)

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

(2.44)

$$\left| \tan \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

(2.45)

$$\left| \cot \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

(2.46)

Vzorce 2.43 a 2.44 odvodíme pomocí vzorců 2.40 a 2.30:

$$\cos \alpha = \cos 2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

a dále užijeme vztahu $\sqrt{a^2} = |a|$ (platí pro každé $a \in \mathbb{R}$). Užitím součtových vzorců a toho že, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \pi = 0$ a $\cos \pi = -1$ lze snadno odvodit, že pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha$$

$$\sin (\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin (\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

Důkaz provedeme pro první z těchto často užitečných vzorců (u ostatních je odvození obdobné):

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha = 1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha.$$

2.2.2. Zobrazení v jiných strukturách

2.2.3. Cvičení

2.3. Limity všeho druhu

„Limes“ znamená latinsky příční cesta, mez, v přeneseném významu pak hranice, pomezí, atd. V matematice představuje limita hodnotu, ke které se „neomezeně blíží hodnota funkce, jestliže se hodnota proměnné neomezeně blíží zadanému číslu“. Poslední formulace musí být v uvozovkách, protože je i přes svou dobrou názornost velice nepřesná. A takové nepřesnosti nejsou v matematice dovoleny. K čemu vůbec úvaha o limitě je? Stačí přece do funkčního předpisu hodnotu proměnné dosadit a získat funkční hodnotu. Tak jednoduché to ale není. Funkční hodnota pro danou hodnotu proměnné x vůbec nemusí být definována, zato může být definována pro hodnoty velmi blízké. Nebo definována je, ale pro hodnoty proměnné, které jsou k x velmi blízké, jsou funkční hodnoty od $f(x)$ velmi vzdálené. Potřebnost pojmu limita ukážeme na geometrickém a fyzikálním příkladu.

V matematické analýze hraje např. důležitou úlohu podíl [2, s. 117]

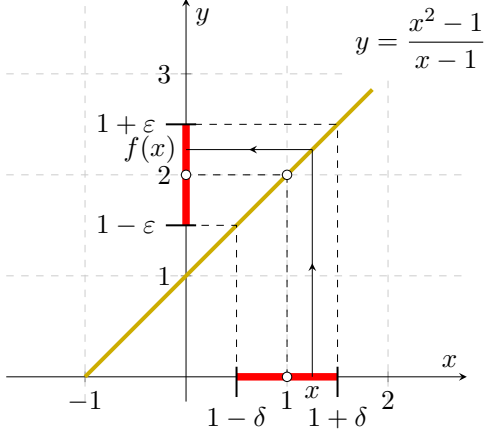
$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}$$

kde φ je daná funkce, a pevný bod. Tento podíl tzv. *přírůstku funkce* $\varphi(x) - \varphi(a)$ k přírůstku argumentu $x - a$ může značit např. *průměrnou rychlost pohybu bodu po přímce*, jehož zákon dráhy je dán vztahem $y = \varphi(x)$, kde y je dráha, kterou bod urazí za čas x . Zajímá nás, jak se mění hodnota tohoto podílu — jinak řečeno, jak se mění hodnota funkce f dané vztahem

$$f(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \quad (2.47)$$

když hodnoty argumentu x se blíží k číslu a , což často značíme $x \rightarrow a$. V uvedeném fyzikálním významu daného podílu se ptáme, jak se mění průměrná rychlost pohybu, když se časový úsek zkracuje. Je zřejmé, že musí být stále $x \neq a$ a že jmenovatel se blíží k nule; obvykle se blíží k nule i čítec. Jakých hodnot však nabývá přitom podíl, tj. jaké jsou hodnoty funkce $f(x)$? Než vyslovíme přesnou definici limity, uvedeme ještě pár jednoduchých příkladů.

Příklad 2.3.1. Necht $\varphi(x) = x^2$, $a = 1$. Potom $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. Pro $x \neq 1$ je hodnota funkce f rovna $f(x) = (x + 1)(x - 1)/(x - 1) = x + 1$. Když $x \rightarrow 1$ (přičemž stále $x \neq 1$), pak $f(x) \rightarrow 2$ (viz obr. 51). Zároveň je také patrný charakter tohoto blížení: Hodnoty $f(x)$ jsou libovolně blízko číslu 2, jestliže hodnoty proměnné x jsou dostatečně blízké číslu 1. To můžeme říci také takto:



Obrázek 2.15.: K příkladu 2.3.1 [2, s. 118]

Zvolíme-li libovolně malé okolí bodu 2, pak vždy lze najít okolí bodu 1 takové, že pro každé $x \neq 1$ z tohoto okolí bude ležet hodnota $f(x)$ ve zvoleném okolí čísla 2. Ještě jinak formulováno: K libovolně malému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé x , pro něž $0 < |x - 1| < \delta$, platí $|f(x) - 2| < \varepsilon$ (viz obr. 2.15). O funkci f s touto vlastností říkáme, že má v bodě 1 limitu 2 a píšeme symbolicky $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ nebo $f(x) \rightarrow 2$ pro $x \rightarrow 1$.

Definičním oborem funkce z příkladu 2.3.1 je tedy množina $\mathcal{D} = \mathbb{R} - 1$ (pro $a = 1$ by ve jmenovateli zlomku byla nula). Grafem funkce je tedy přímka s „vynechaným“ bodem $[1, 2]$ (obr. 2.15). V bodě $a = 1$ funkční hodnota není definována. Pokud bychom chtěli rozšířit definiční obor funkce na celou reálnou osu, musíme předepsat, jaké hodnoty má funkce nabývat v bodě $a = 1$. Původní vzorec, jímž je funkce zadána, výpočet hodnoty $f(1)$ neumožňuje. Dodatečné zadání funkční hodnoty, její *dodefinování*, můžeme provést zcela libovolně. Zvolme například $f(1) = 2$. Jiná možnost, jak funkci dodefinovat, je například $f(1) = -1$. Které číslo

je ovšem limitou funkce $f(x)$ v bodě $a = 1$? Je to číslo 2, které je v případě $f(x) = x + 1$ její funkční hodnotou? Nebo číslo -1 ? A nebo nějaká jiná hodnota? Intuice nám napovídá, že je to číslo 2. Když dvojku použijeme pro dodefinování funkce, přetržený graf se „zacelí“. Vidíme, že vezmeme-li dostatečně malý interval proměnné x v blízkosti bodu $a = 1$ můžeme docílit toho, že všechny odpovídající funkční hodnoty $f(x)$ budou ležet tak blízko hodnotě 2, jak si předem určíme. Skutečně, zkusme docílit toho, aby hodnoty $f(x)$ ležely v intervalu $(1,99, 2,01)$, tj.

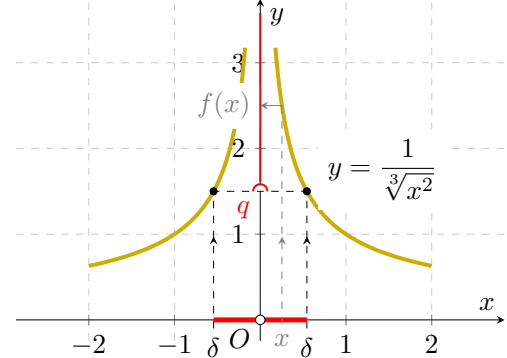
$$1,99 < x + 1 < 2,01 \Rightarrow 0,99 < x < 1,01, \quad x \neq 1.$$

Podařilo se. A kdybychom interval $I(\varepsilon) = (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ funkčních hodnot kolem 2 ještě zmenšili, podařilo by se opět najít (o něco menší) interval kolem bodu $a = 1$ tak, aby pro všechny hodnoty x v něm (samozřejmě s případnou výjimkou hodnoty $a = 2$) platilo $f(x) \in I(\varepsilon)$. A takto bychom mohli ε stále zmenšovat. Jak by takový postup dopadl s hodnotou -1 , která, jak intuitivně cítíme, limitou funkce v bodě $a = 1$ není, protože je graf funkce od bodu $[-1, 0]$ dost vzdálen? Vezmeme třeba interval $(-0,5, 0,5)$ a hledejme hodnoty x obdobně jako v předchozím případě. Požadujeme

$$-0,5 < x + 1 < 0,5 \Rightarrow -1,5 < x < -0,5.$$

Tento interval vůbec neobsahuje bod $a = 1$. Dostali jsme se mimo blízkost bodu $a = 1$.

Příklad 2.3.2. Necht $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 0$. Pak $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$. Pro $x \neq 0$ je $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Jestliže $x \rightarrow 0$, pak hodnoty $f(x)$ neomezeně vzrůstají, protože jmenovatel zlomku se blíží kladnými hodnotami k nule a čítec je stále roven 1 (viz obr. 2.16). Místo rčení „funkce neomezeně roste“ pro $x \rightarrow 0$ říkáme též „funkce se blíží k $+\infty$ “ pro $x \rightarrow 0$ a píšeme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ nebo $f(x) \rightarrow +\infty$ pro $x \rightarrow 0$. Říkáme, že limita funkce f v bodě 0 je rovna $+\infty$.

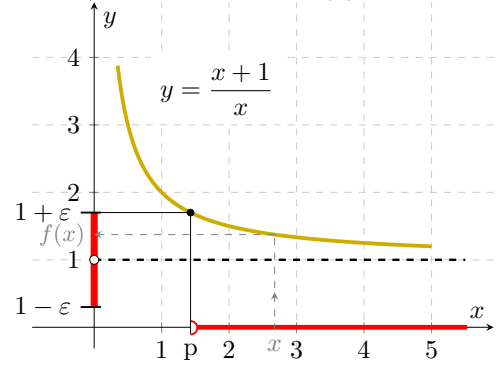


Obrázek 2.16.: K příkladu 2.3.2 [2, s. 118]

Přesně to znamená toto: Zvolíme-li libovolně velké $q > 0$, můžeme nalézt $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \neq 0$, pro něž $|x| < \delta$, platí $f(x) > q$. To lze říci i takto: Zvolíme-li libovolně okolí bodu $+\infty$, existuje okolí bodu 0 tak, že pro každé $x \neq 0$ z tohoto okolí je $f(x)$ ve zvoleném okolí $+\infty$ (viz obr. 2.16).

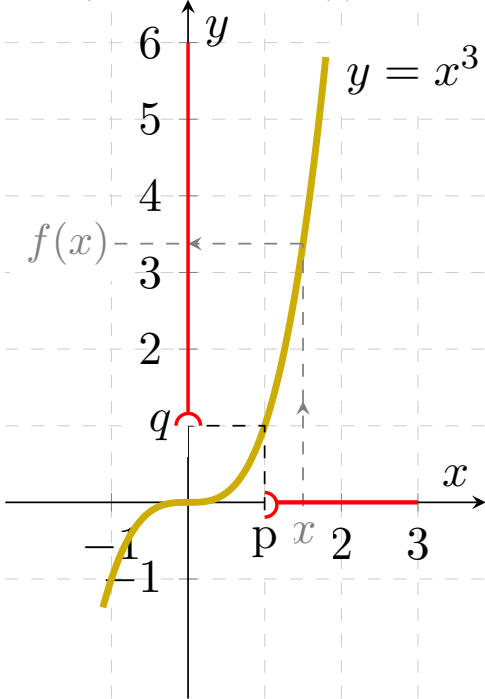
Je třeba říci, že při zkoumání limit funkcí nás nezajímají jen funkce „tvaru“ (2.47), i když tento případ je v diferenciálním počtu velmi častý, jak poznáme v kap. ???. Někdy nás zajímá i chování funkcí v okolí nevlastních bodů $-\infty, +\infty$

Příklad 2.3.3. Je dána funkce $f : f(x) = \frac{x+1}{x}$. Sledujme její chování, když hodnoty argumentu x budou vzrůstat nade všechny meze neboli, jak říkáme, x se bude blížit k $+\infty$ (což zapisujeme $x \rightarrow +\infty$ (viz obr. 2.17). Můžeme psát $f(x) = 1 + 1/x$. Vzrůstají-li neomezeně hodnoty proměnné x , blíží se hodnoty výrazu $1/x$ čím dál tím více nule, takže funkční hodnoty $f(x)$ jsou čím dál tím blíže číslu 1. V tomto případě píšeme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nebo $f(x) \rightarrow 1$ pro $x \rightarrow +\infty$ a říkáme, že funkce f má v bodě $+\infty$ limitu rovnou 1. Přesně to znamená toto: Zvolíme-li libovolně malé $\varepsilon > 0$, můžeme nalézt $p > 0$ tak, že pro $x > p$ platí $|f(x) - 1| < \varepsilon$. (Viz obr. 2.17.) Můžeme to říci i takto: Zvolíme-li libovolně okolí bodu 1, existuje okolí bodu $+\infty$ tak, že pro každé x (konečné) z tohoto okolí je $f(x)$ ve zvoleném okolí bodu 1.



Obrázek 2.17.: K příkladu 2.3.3 [2, s. 119]

$+\infty$ tak, že pro každé x (konečné) z tohoto okolí je $f(x)$ ve zvoleném okolí bodu 1.



Obrázek 2.18.: K příkladu 2.3.4 [2, s. 119]

V uvedených případech bychom mohli zkoumat i limity funkcí pro $x \rightarrow -\infty$. Všimněme si ještě, že ve všech případech nebylo nutné, aby funkce f byla definována v bodě, ke kterému se blíží hodnoty argumentu, ale bylo zapotřebí, aby funkce f byla definována v bodech libovolně blízkých tomuto bodu. Tomuto požadavku bude vyhověno, jestliže daný bod, v němž zkoumáme limitu, bude *hromadným bodem definičního oboru*. Není ovšem nutné, aby funkce byla definována v celém nějakém *prstencovém okolí uvažovaného bodu*.

Nechť a je bod, blízko kterého se pohybuje hodnota proměnné x . Pro definici limity je důležitý pojem **okolí bodu** a (obr. 2.16). Zvolme kladná čísla δ_1 a δ_2 . Nazýváme

2.4. Spojitost funkce

Seznam literatury

[1] J. Musilová a P. Musilová, *Matematika I: pro porozumění i praxi : netradiční výklad tradičních témat vysokoškolské matematiky*. VUTIUM, 2009, s. 339, ISBN: 978-80-214-3631-2. WWW: <http://books.google.fr/books?id=vH51QwAACAAJ> (cit. na s. 13, 14, 19–21).

[2] J. Brabec, F. Martan a Z. Rozenský, *Matematická analýza*. SNTL/ALFA, 1989, s. 488 (cit. na s. 15, 16, 22–24).

Příklad 2.3.4. Je dána funkce $f : f(x) = \frac{x+1}{x}$. Sledujme její chování, když hodnoty argumentu x budou vzrůstat nade všechny meze neboli, jak říkáme, x se bude blížit k $+\infty$ (což zapisujeme $x \rightarrow +\infty$ (viz obr. 2.17). Můžeme psát $f(x) = 1 + 1/x$. Vzrůstají-li neomezeně hodnoty proměnné x , blíží se hodnoty výrazu $1/x$ čím dál tím více nule, takže funkční hodnoty $f(x)$ jsou čím dál tím blíže číslu 1. V tomto případě píšeme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nebo $f(x) \rightarrow 1$ pro $x \rightarrow +\infty$ a říkáme, že funkce f má v bodě $+\infty$ limitu rovnou 1. Přesně to znamená toto: Zvolíme-li libovolně malé $\varepsilon > 0$, můžeme nalézt $p > 0$ tak, že pro $x > p$ platí $|f(x) - 1| < \varepsilon$. (Viz obr. 2.17.) Můžeme to říci i takto: Zvolíme-li libovolně okolí bodu 1, existuje okolí bodu

[3] J. Polák, *Matematická analýza I*. ZČU - FAV, 1998, ISBN: 80-7082-466-2 (cit. na s. 21).

Část II

MA II

Table of Contents

3. Vícerozměrná linearita aneb lineární algebra podruhé	28
---	----

Vícerozměrná linearita aneb lineární algebra podruhé

Contents

3.1. Prostory s vektory	28
Seznam literatury	30

V kapitole 1 dílu I jsme se seznámili s elegantní dámou lineární algebrou. Pomocí jejích pravidel jsme nejen řešili soustavy lineárních rovnic, ale také počítali s maticemi a vektory. Zatímco operace s maticemi, a koneckonců i řešení lineárních rovnic pomocí matic bychom mohli chápat jako užitečnou ekvilibristiku s číselnými soubory, za počítáním s vektory se zdálo být přece jen něco hlubšího a závažnějšího. Vázané vektory pro nás totiž byly orientovanými úsečkami v trojrozměrném euklidovském prostoru, v němž bylo definováno měření délek a úhlů. Volné vektory pak byly množinami stejně velkých a souhlasně rovnoběžných orientovaných úseček. Jednalo se tedy o *geometrické objekty*. Každý vektor byl určen svou velikostí a směrem. Směr byl přitom zadán například pomocí úhlů mezi daným vektorem a vybranými směry, které byly předem pevně zvoleny. Mohli jsme s vektory provádět základní algebraické operace, jimiž jsou sčítání vektorů a násobení vektoru číslem, podle pravidel zavedených pro (v tomto případě řádkové) matice. S vektory v trojrozměrném prostoru jsme mohli velmi pohodlně počítat jako s trojicemi čísel. Na druhé straně jsme vektory vyjadřovali jako lineární kombinace jiných vektorů, tvořících v prostoru všech vektorů *bázi*. Koeficienty lineární kombinace, která představovala zápis daného vektoru ve zvolené bázi, byly jeho *složkami* v této bázi. Při změně báze se změnily složky vektoru, vektor sám však nikoliv. Vektor je stále sám sebou, jen se v různých bázích jinak tváří - projeví se jinou trojicí čísel. Protože se však při změně báze změnil složky vektoru přesně definovaným způsobem (vzpomeňte na transformační vztahy), dokážeme jej vždy rozpoznat. Tuto vlastnost, *invarianci vůči volbě báze*, mají všechny geometrické objekty. A je to právě algebra, která nám umožňuje tyto objekty reprezentovat číselnými soubory a také tak s nimi počítat. Jde-li navíc o objekty řídící se lineárními pravidly, jakými jsou například distributivní zákony, je počítání s nimi, v rámci *lineární algebry*, zvláště jednoduché. Oceníme to zejména v prostorech vyšší dimenze, než je náš běžný euklidovský prostor. Při počítání s vektory v trojrozměrném prostoru, kde umíme měřit délky a úhly a kde platí trigonometrická pravidla, bychom se bez rutinních algebraických procedur ještě třeba obešli. Už ale například ve čtyřrozměrném časoprostoru, v němž se odehrávají všechny přírodní jevy a v němž je třeba formulovat fyzikální zákony, však pro měření délek a úhlů platí jiná pravidla, než jsou obvyklá v běžném, tj. trojrozměrném euklidovském, prostoru. Například tam neplatí čtyřrozměrná verze Pythagorovy věty. A někdy je příroda dokonce tak nepřívětivá, že nás nutí pracovat i s prostory vícerozměrnými. Například jedna z velmi účinných teorií pro výklad chování elementárních částic, teorie strun, je založena na geometrii prostoru jedenácti-rozměrného. A v takových dimenzích jsme už s jakkoli vynikající geometrickou představivostí v koncích.

Tehdy se vděčně obracíme k metodám algebry. V této kapitole, jak její název napovídá, půjde o algebru lineární

3.1. Prostory s vektory

V kapitole 1 jsme pracovali s číselnými maticemi typu m/n , tj. soubory čísel uspořádaných v m řádcích a n sloupcích, a zavedli jsme pro ně operaci součtu a násobení číslem. Zjistili jsme, že pro sčítání matic a násobení matice číslem platí určitá pravidla. (Jejich souhrn je uveden v samém závěru odstavce 1.3.3. V odstavci 1.4 jsme zase počítali s vektory. Ty měly jednu *konkrétní podobu* řádkových matic s pravidly pro jejich sčítání a násobení číslem, podruhé, v trojrozměrném prostoru, naopak *konkrétní podobu* orientovaných úseček, resp. množin, které byly orientovanými úsečkami vytvořeny, generovány. Zavedli jsme tenkrát konkrétní způsob sčítání vektorů a násobení vektoru číslem pomocí geometrických operací. Součet dvou vektorů \vec{u} a \vec{v} znamenal, že jsme podle zcela určitého pravidla, pravidla vektorového rovnoběžníka přiřadili uspořádané dvojici $[\vec{u}, \vec{v}]$ třetí vektor $\vec{u} + \vec{v}$, násobek vektoru a čísla byl opět vektor $\alpha\vec{u}$, který jsme přiřadili dvojici $[\alpha, \vec{u}]$ tvořené číslem a vektorem. Uvedl jsem, že pravidla pro tyto *geometrické* operace jsou shodná s pravidly pro počítání s maticemi a lze je dokázat i geometrickými postupy. Množinu volných vektorů generovaných orientovanými úsečkami spolu s uvedenými dvěma operacemi jsme nazvali **vektorovým prostorem**. Šlo tedy o zcela odlišné množiny základních objektů a zcela odlišným způsobem definované operace, pro které se však dala dokázat tatáž pravidla. Nyní se podíváme na problém definice vektorového prostoru obecněji a poněkud „opačně“. Budeme pracovat s *nosnou množinou* V , a přitom nebude podstatné, jak konkrétně vypadají její prvky. Ani je nebudeme označovat šipkami (u šipek ze zvyku zůstaneme pouze v případě orientovaných úseček v \mathbb{R}^1 , \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 , nebo vektorů s fyzikálním významem). Dále přibereme do hry množinu všech komplexních čísel \mathbb{C} , popřípadě jen množinu všech reálných čísel \mathbb{R} a definujeme dvě operace (*zobrazení*):

$$V \times V \ni [a, b] \longrightarrow c \in V, \quad \mathbb{C} \times V \ni [\alpha, a] \longrightarrow d \in V. \quad (3.1)$$

Prvek c nazýváme *součet* prvků a a b a značíme jej $c = a + b$ prvek d je α -*násobek* prvku a a značíme $d = \alpha a$. Zobrazení uvedená ve vztazích (3.1) však nebudou moci být úplně libovolná. Budeme požadovat, aby měla určité vlastnosti, konkrétně ty, které jsou uvedeny pro matice na konci odstavce 1.3.3. Teprve pak řekneme, že množina V spolu s operacemi (3.1) splňujícími potřebné požadavky je vektorovým prostorem. Vidíme, že takto naše uvažování výrazně posuneme na abstraktní úroveň. Bude lhostejné, co jsou prvky nosné množiny, bude nepodstatné, jak konkrétně jsou definovány operace sčítání prvků a násobení prvku číslem. Důležité bude jen to, aby abstraktní operace s abstraktními prvky splňovaly konkrétní pravidla. Než však k definici vektorového prostoru přistoupíme, všimneme si ještě některých jiných

struktur s jednou nebo dvěma operacemi, které samy do oblasti lineární algebry nepatří, ale mohou být užitečné pro definici vektorového prostoru, popřípadě mají významné fyzikální aplikace.

3.1.1. Algebraické struktury s jednou operací, hlavně grupy

Při zavádění operací s vektory jsme zcela automaticky využívali toho, že umíme počítat s reálnými, popřípadě i s komplexními čísly. Skutečnost, že čísla umíme sčítat, násobit a provádět s nimi řadu dalších operací, považujeme za tak přirozenou a samozřejmou, že nad ní vůbec nepřemýšlíme. Již samotné operace sčítání a násobení vytvářejí na množině čísel velmi bohatou **algebraickou strukturu**. Tento pojem si nyní přiblížíme.

Algebraickou strukturu s jednou operací získáme, vezmeme-li v úvahu první ze zobrazení (3.1), nosnou množinu označíme tentokrát podle zvyku G :

$$G \times G \ni [a, b] \longrightarrow a + b \in G, \quad \text{nebo} \quad G \times G \ni [a, b] \longrightarrow a \cdot b \in G. \quad (3.2)$$

Pokud použijeme první možnosti označení této operace, hovoříme o operaci *sčítání* a *aditivní* strukturu, v případě druhé možnosti o operaci *násobení* a *multiplikativní* strukturu. Toto terminologické rozlišení nemá obecně žádný hlubší význam. Je spíše otázkou zvyklosti a souvisí především s algebraickou strukturou číselných množin, kterou běžně používáme, aniž o ní přemýšlíme (čísla sčítá a násobí školák, obchodník i účetní a o nějaké abstraktní strukturu nic netuší).

Zobrazení (3.2) samo o sobě, aniž na ně klademe další požadavky (podstatné je pouze to, že dvěma prvkům nosné množiny přiřadí prvek *téže množiny*), definuje nejjednodušší algebraickou strukturu s jednou operací, zvanou **grupoid**. Grupoid není pro fyzikální aplikace příliš užitečný, ale je základem pro konstrukci zajímavějších a užitečnějších struktur. Přidáme-li k definici grupoidu požadavek *asociativity* zobrazení $G \times G \ni [a, b] \longrightarrow a + b \in G$ (nebo $G \times G \ni [a, b] \longrightarrow a \cdot b \in G$)

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad \text{nebo} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad (3.3)$$

pro libovolné prvky $a, b, c \in G$, stane se množina G spolu s operací „+“, nebo „·“ **pologrupou**. I pologrupa je z hlediska fyzikálních aplikací poněkud chudá, další požadavek na zobrazení (3.2) z ní však již učiní strukturu v matematice i fyzice nepostradatelnou, grupu. Pologrupa, ve které existuje prvek $0_G \in G$ a současně ke každému prvku $a \in G$ existuje prvek $(-a) \in G$ tak, že platí

$$a + 0_G = 0_G + a = a, \quad a + (-a) = (-a) + a = 0_G, \quad (3.4)$$

se nazývá **aditivní grupou**. Prvek 0_G je univerzální pro celou grupu (žádný jiný s touto vlastností v grupě G není) a nazývá se *neutrální prvek grupy* neboli **nula**, prvek $(-a)$ je **opačný** k prvku a . Pro dané a je určen jednoznačně. V případě operace násobení mají vlastnosti 3.4 tvar

$$a \cdot e_G = e_G \cdot a = a, \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e_G, \quad (3.5)$$

a G se nazývá **multiplikativní grupou**. Prvek e_G je opět univerzální pro celou grupu a nazývá se **neutrální** prvek grupy, neboli *jednička*, prvek a^{-1} je **inverzní** k prvku a .

Každá operace 3.2 v množině G , která splňuje vztahy asociativity 3.3 a vztahy specifikující nulu a opačný prvek, nebo jedničku a inverzní prvek typu 3.4, nebo 3.5, představuje *grupovou operaci* bez ohledu na to, podobá-li se spíše sčítání, nebo spíše násobení, či dokonce něčemu

jinému, například skládání zobrazení. Má-li grupa konečný počet prvků, nazývá se tento počet jejím *řádem*.

Příklad 3.1.1. Kolik nul má (aditivní) grupa?

Jak dokážeme, že má grupa právě jednu nulu? Co když předchozímu tvrzení nebudeme věřit? Můžeme se o jeho pravdivosti přesvědčit? Ten, kdo mu nevěří, si může třeba představit, že grupa má nuly dvě. Označme je 0_G a $\bar{0}_G$. Vztah 3.4 platí pro libovolný prvek grupy, proto $0_G + \bar{0}_G = 0_G$ (to jsme brali $a = 0_G$ a $\bar{0}_G$ považovali za nulu) a současně $0_G + \bar{0}_G = \bar{0}_G$ (nyní zase byl prvek 0_G v roli nuly a $a = \bar{0}_G$). Je vidět, že $0_G = \bar{0}_G$. Nula je tedy skutečně jen jedna. Podobnou úvahu můžeme provést pro jedničku multiplikativní grupy. Platí tedy tvrzení:

Neutrální prvek grupy je určen jednoznačně.

Stejně tak bychom mohli mít pochybnosti o tom, že opačný prvek k danému $a \in G$ je jen jeden. Předpokládejme, že b a c jsou dva opačné prvky k a . Platí $a + b = 0_G$. Přičteme k této rovnosti c zleva, tj. $c + a + b = c$. Protože však $c + a = 0_G$, dostáváme $b = c$ a tedy:

Opačný (resp. inverzní) prvek k libovolně zvolenému prvku grupy je určen jednoznačně.

V úvodu odstavce jsme se zmínili o tom, že množiny reálných a komplexních čísel získají zavedením běžných operací sčítání a násobení jistou algebraickou strukturu. Všimněme si jich nyní podrobněji.

Příklad 3.1.2. Algebraická struktura a kupecké počty

Uvažujme o množině reálných čísel $G = \mathbb{R}$ tak jako bychom je uměli jen sčítat. Násobení si zatím neušímejme. Sčítání reálných čísel je zobrazení typu prvního vztahu v 3.2, které bezpochyby splňuje požadavky 3.3 a 3.4. Neutrálním prvkem $0_{\mathbb{R}}$ je „obyčejná“ nula, opačným prvkem k číslu a je $-a$, položené na reálné ose symetricky k a vzhledem k nule. Množina reálných čísel s operací sčítání je tedy aditivní grupou. Pro operaci sčítání dokonce platí něco navíc - komutativní zákon

$$a + b = b + a \quad \text{pro libovolné } a, b \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

*Grupu s komutativním zákonem nazýváme grupou komutativní nebo také **abelovskou**.*

Množina reálných čísel s operací sčítání je komutativní grupou.

*Nyní se místo na sčítání zaměříme na násobení reálných čísel a znovu posuďme vlastnosti grupy. Násobení reálných čísel je zobrazením typu druhého vztahu v 3.2 a splňuje požadavek asociativnosti 3.3. Dále je zřejmé, že číslo $e_{\mathbb{R}}$ („obyčejná“ jednička) vyhovuje prvnímu požadavku ve vztazích 3.5. Potíž je s požadavkem druhým. Inverzní prvek najdeme jen k nenulovým číslům. Nula inverzní prvek nemá. Tato zdánlivá drobnost je příčinou toho, že **množina reálných čísel s operací násobení není grupou**.*

Příklad 3.1.3. Algebraická struktura na množině komplexních čísel

Množina \mathbb{C} komplexních čísel je kartézským součinem reálných os, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tedy množinou uspořádaných dvojic $[a, b]$ čísel reálných. Značíme $z = [a, b]$. Reálné číslo $a = \text{Re}(z)$ je reálnou částí komplexního čísla z a reálné číslo $b = \text{Im}(z)$ částí imaginární. Operace sčítání a násobení komplexních čísel jsou definovány takto:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni [[a_1, b_1], [a_2, b_2]] &\longrightarrow [a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2] \ni \mathbb{C}, \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni [[a_1, b_1], [a_2, b_2]] &\longrightarrow [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] = [a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1] \ni \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Množina komplexních čísel s operací součtu je komutativní grupou.

Jejím neutrálním prvkem je číslo $0_{\mathbb{C}} = [0, 0]$, opačným prvkem k číslu $z = [a, b]$ je $-z = [-a, -b]$. Při operaci násobení je neutrálním prvkem číslo $[1, 0]$, prvkem inverzním k číslu $z = [a, b] \neq 0_{\mathbb{C}}$ je

$$z^{-1} = \left[\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right].$$

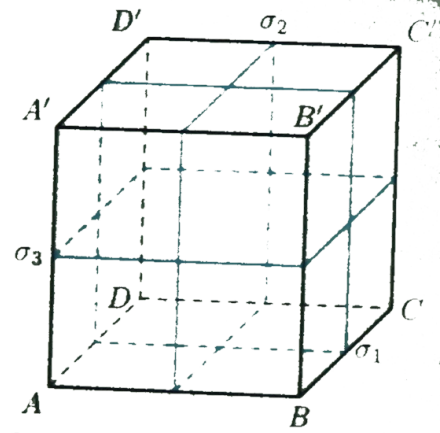
K číslu $0_{\mathbb{C}} = [0, 0]$ však inverzní prvek opět neexistuje. Množina komplexních čísel **není** grupou vzhledem k násobení.

Příklad 3.1.4. Struktura aditivní grupy na podmnožinách reálné osy

O podmnožině $H \subset C$ grupy G s operací sčítání nebo násobení zúženou na H , která je sama grupou, hovoříme jako o **podgrupě** grupy G . Například množina reálných čísel zapsaných ve tvaru $z = [a, 0]$ se sčítáním je podgrupou množiny komplexních čísel. Koho grupy nebaví a chce se rychle prokousat k vektorovým prostorům, které jsou koneckonců hlavní náplní našeho příběhu o lineární algebře, může zbytek tohoto odstavce přeskočit. Ale byla by to škoda, grupy jsou opravdu zajímavé.

Příklad 3.1.5. Grupy některých číselných objektů

Příklad 3.1.6. Grupy nemusí být tvořeny jen čísla



Obrázek 3.1.: Zadání přímky. [1, s. 6]

Seznam literatury

[1] J. Musilová a P. Musilová, *Matematika II: pro porozumění i praxi : netradiční výklad tradičních témat vysokoškolské matematiky*. VUTIUUM, 2012, s. 341, ISBN: 978-80-214-4071-5 (cit. na s. 30).

Část III

FYZ I

Table of Contents

1. Základy fyziky	33
-------------------	----

Základy fyziky

Fyzika je jako sex, může přinést praktické výsledky, ale to není důvod, proč to děláme.

Richard P. Feynmann

Contents

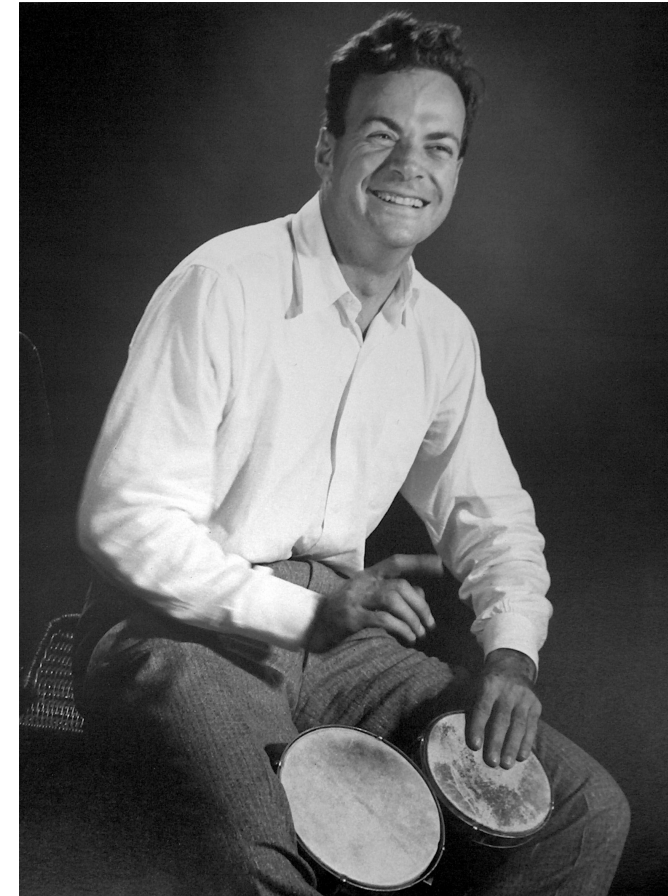
1.1. Jak studovat fyziku	33
1.2. Nejzákladnější myšlenky fyziky	38
1.3. Hlavní etapy vývoje	39
1.4. Fyzika před rokem 1920	40
1.5. Kvantová Fyzika	42
1.6. Jádra a Částice	43
Seznam literatury	43

Možná se zeptáte, zda není možné při vyučování fyziky na první straně uvést základní zákony a potom ukázat, co z nich vyplývá v nejrůznějších situacích. Tak se postupuje v euklidovské geometrii, kde se postulují axiomy, ze kterých se odvodí všechny možné závěry. (Protože se vám nelíbí pětileté studium fyziky, chtěli byste seji naučit za pět minut?) Takovýmto způsobem však nemůžeme postupovat ze dvou důvodů. Především, zatím neznáme všechny základní zákony - oblast toho, co bychom ještě měli poznat, se nám stále zvětšuje. Dále, přesná formulace fyzikálních zákonů zahrnuje mnoho neobvyklých myšlenek, jejichž vyjádření si vyžaduje vyšší matematiku. Proto je nutná značná předběžná příprava jen k tomu, abychom rozuměli, co znamenají slova. Není tedy možné postupovat tímto způsobem. *Učit se můžeme pouze postupně, kousek po kousku.*

1.1. Jak studovat fyziku

Každý kousek nebo část celku, který představuje příroda, je vždy jen přiblížením k úplné pravdě; přesněji k úplné pravdě, pokud ji známe. Ve skutečnosti vše, co víme, je jen určitým druhem aproximace, protože víme, že ještě neznáme všechny zákony. Proto se věci musíme učit jen proto, abychom se je znovu odnaučili, nebo, což je pravděpodobnější, abychom si naše znalosti o nich opravovali.

Princip vědy, téměř její definice, je následující: Prověrkou všech našich vědomostí je experiment. Experiment je jediné kritérium vědecké „pravdy“. Jenže co je zdrojem našich vědomostí? Odkud pocházejí zákony, které prověřujeme? Samotný experiment nám pomáhá odvozovat zákony v tom smyslu, že nám poskytuje náznaky, pokyny. Navíc je však potřebná představivost,



Obrázek 1.1.: *Richard P. Feynmann* *11. května 1918 - †15. února 1988, americký fyzik, který patřil k největším fyzikům 20. století

aby z těchto náznaků mohla vzniknout velká zobecnění - abychom v nich odhadli nádherný, jednoduchý, ale neobyčejný obraz a potom experimentem prověřili správnost našeho odhadu. Tento proces představivosti je tak těžký, že si fyzici rozdělili práci - teoretičtí fyzici představivosti, dedukcí a odhadem odvozují nové zákony, ale neexperimentují; experimentální fyzici dělají pokusy a přitom také uplatňují představivost, dedukci a odhad.

Řekli jsme, že přírodní zákony jsou přibližné: že nejdříve nacházíme „nesprávné“ a až po-

tom „správné“. Jak však může být experiment „nesprávný“? Především z velmi jednoduchého důvodu - náš přístroj není v pořádku a my jsme to nepozorovali. Takové chyby se však zjišťují lehce. Odhlédneme-li od těchto drobností, jak může být výsledek experimentu nesprávný? Jen v důsledku nepřesnosti. Například, hmotnost předmětu se zdá být neměnná; rotující káča má stejnou hmotnost jako káča v klidu. Tak byl objeven „zákon“: hmotnost je konstantní, nezávislá na rychlosti. O tomto „zákonu“ se zjistilo, že je nesprávný. Ukázalo se, že hmotnost roste s rychlostí, ale k značnému růstu jsou potřebné rychlosti blízké rychlosti světla. Správný zákon zní: je-li rychlost tělesa menší než 100 km s^{-1} , je hmotnost konstantní s přesností na jednu milióntinu. V takové aproximativní podobě je tento zákon správný. Někdo by si mohl myslet, že prakticky není rozdíl mezi starým a novým zákonem. To je i není pravda. Pro běžné rychlosti je jistě možné zapomenout na to, o čem jsme mluvili a používat jednoduchý zákon konstantní hmotnosti jako dobré přiblížení. Při velkých rychlostech se však dopustíme chyby, a to tím větší, čím větší je rychlost

Ostatně, nejzajímavější je to, že z filozofického hlediska je tento aproximativní zákon zcela nesprávný. Náš celkový obraz o světě musíme změnit, i kdyby se hmotnost měnila jen nepatrně. Toto je svérázný znak filozofie nebo myšlenek stojících v pozadí zákonů. Někdy i velmi malý efekt vyžaduje hlubokou změnu našich názorů.

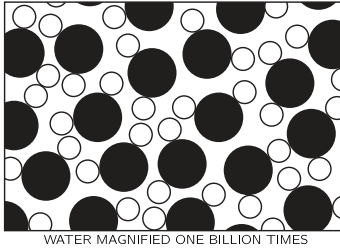
Čemu tedy máme dát přednost? Máme podat správné, ale nezvyklé zákony s jejich cizím a obtížným pojetím jako je například teorie relativity, čtyřrozměrný prostoročas a podobné? Nebo máme nejdříve vysvětlit jednoduchý zákon „konstantní hmotnosti“, který je pouze přibližný, ale nevyžaduje náročné představy? První způsob je více vzrušující, nádhernější a zábavnější, ale s druhým se jednodušeji začíná a představuje první krok ke skutečnému porozumění správného zákona. Tento problém se vždy znovu objevuje při vyučování fyziky. V různých etapách ho musíme řešit různými způsoby, ale vždy je vhodné se zajímat, do jaké míry je přesné to, co teď víme, jak to souvisí s dalším a jak se to může změnit, budeme-li vědět víc.

Nyní přejdeme k náčrtu nebo k všeobecné mapě našeho chápání současné vědy (zejména fyziky, ale i jiných věd, které s ní souvisejí). Když se později soustředíme na konkrétní problém, budeme mít představu o jeho pozadí, o tom, proč je zajímavý a jak zapadá do celkové struktury. Jaký je tedy náš celkový obraz světa? [1, s. 16]

1.1.1. Látka se stává z atomů

Kdyby při nějaké katastrofě zanikly všechny vědecké poznatky a dalším generacím by měla zůstat jen jediná věta, které tvrzení by při nejmenším počtu slov obsahovalo nejbohatší informaci? Takovým kandidátem je **atomová hypotéza** - tj. že všechny věci se skládají z atomů malých částic, jež jsou v neustálém pohybu, a vzájemně se přitahují, když jsou od sebe trochu vzdálené, ale odpuzují se, když jsou těsně u sebe. V této jediné větě, jak uvidíme, je obsaženo nesmírné množství informací o světě. Je k tomu třeba jen trochu představivosti a uvažování.

Abychom ilustrovali sílu myšlenky o atomu, představme si kapku vody o rozměru 0,5 cm. Podíváme-li se na ni zblízka, neuvidíme nic jiného, než vodu - klidnou, souvislou vodu. I když kapku zvětšíme tím nejlepším optickým mikroskopem, přibližně dvoutisíckrát, a kapka bude měřit deset metrů, tedy stejně jako velká místnost, i tehdy budeme stále vidět relativně klidnou vodu. Jen tu a tam v ní budou plavat jakési malé fotbalové míče. Tyto velmi zajímavé objekty jsou trepky. Tady se můžeme zastavit a



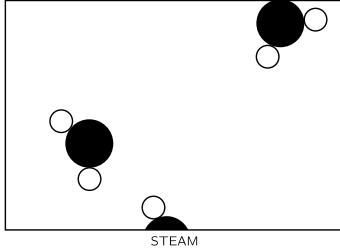
zajímat se o trepky, o jejich třepotající se řasičky, o jejich kroutící se těla a nepokračovat ve zvětšování. Nebo můžeme zvětšit trepky tak, abychom viděli i do nich). Trepy jsou však předmětem biologie. Proto si jich teď nebudeme všimnat, ale zahledíme se ještě pozorněji na vodu při dalším dvoutisícinásobném zvětšení. Ted měří kapka vody dvacet kilometrů a při pozorném sledování je vidět jakési hemžení - cosi, co už nevypadá klidně, ale připomíná dav na fotbalové tribuně při pohledu z velké vzdálenosti. Abychom zjistili, co je to za hemžení, zvětšíme kapku ještě 250krát a potom uvidíme něco podobného jako na obr. 1.2. Tento obrázek představuje vodu při zvětšení miliardkrát, je však v několika směrech idealizovaný. Především částice jsou zakreslené zjednodušeně - s ostrými okraji, což neodpovídá skutečnosti. Dále kvůli jednoduchosti jsou částice zakreslené v dvojrozměrném uspořádání, ačkoli se ve skutečnosti pohybují ve všech třech směrech. Všimněme si, že jsou tam dva druhy částic znázorněných kroužky, které představují atomy kyslíku (černé) a vodíku (bílé) a že na každý atom kyslíku se vážou dva atomy vodíku. Každá skupinka skládající se z atomu kyslíku a dvou atomů vodíku se nazývá **molekulou**. Obrázek je zjednodušený i v tom, že skutečné částice v přírodě se ustavičně kolébají a poskakují, obracejí se a točí jedna okolo druhé. Je třeba si to představit spíše jako *dynamický a nějako statický obrázek*. Další věcí, kterou není možné vystihnout na obrázku, je skutečnost, že částice „drží pohromadě“ — přitahují se, jedna za sebou táhne druhou atd. Je možné říci, že jsou jakoby „slepené dohromady“. Na druhé straně se částice netlačí jedna přes druhou. Kdybyste se pokusili přitlačit dvě z nich příliš těsně k sobě, odpudily by se.

Atomy mají poloměr $1 \cdot 10^{-10}$ m až $2 \cdot 10^{-10}$ m. Jejich velikost si můžeme pamatovat i jinak: zvětšíme-li jablko na velikost Země, budou atomy v jablku tak velké, jak bylo původně jablko.

Představme si teď tuto velkou kapku vody s jejími hemžícími se částicemi, jež přilnuly k sobě a honí jedna druhou. Voda udržuje svůj objem; nerozpadne se na části díky vzájemné přitažlivosti molekul. Je-li tato kapka na šikmé ploše, kde se může hýbat z místa na místo, voda poteče. Nestane se však, že by jednoduše zmizela. Věci se nerozpadají na části právě díky přitažlivosti molekul. *Hemživý pohyb částic je to, co chápeme jako teplo*: zvýšíme-li teplotu, zvětšíme pohyb. Zahříváme-li vodu, pohyb roste a roste i vzdálenost mezi částicemi, až nastane okamžik, kdy přitažlivost mezi molekulami je už nestačí udržet pohromadě. Částice přestanou být vzájemně svázané a rozlétají se od sebe. Zvyšováním teploty tak získáváme *vodní páru*.

Na obr. 1.3 vidíme páru. V jednom směru tento obrázek páry selhává: při našem zvětšení za normálního atmosférického tlaku připadá jen velmi málo molekul na celý pokoj, takže na tak malém obrázku určitě nebudou tři molekuly. Většina plošek této velikosti nebude obsahovat žádnou molekulu - na našem obrázku jsou náhodou dvě a část z třetí molekuly (abychom tam neměli prázdné místo). V případě páry vidíme podobu molekul jasněji než v případě vody. Pro jednoduchost jsou molekuly zakresleny tak, že atomy vodíku svírají úhel 120° . Ve skutečnosti má tento úhel hodnotu $105^\circ 3'$ a vzdálenost mezi středem vodíku a středem kyslíku je $9,57 \cdot 10^{-11}$ m. Tuto molekulu tedy velmi dobře známe.

Všimněme si jedné vlastnosti vodní páry nebo jiných plynů. Molekuly budou tím, že se vzdálily jedna od druhé, narážet na stěny. Představme si místnost s určitým počtem (tak kolem sta) neustále poskakujících tenisových míčků. Když míčky narážejí na stěnu, odtlačují ji



Obrázek 1.3.: Pára [1, s. 18]

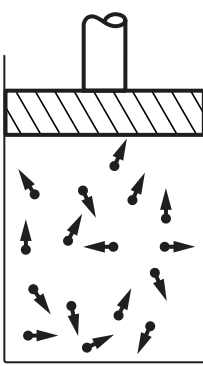
a stěnu proto musíme upevnit. Plyn působí přerušovanou silou, kterou naše nedokonalé smysly (jejich citlivost nevzrostla miliardkrát) vnímají jako *stálý tlak*. Abychom plyn udrželi, musíme na něj působit tlakem z opačné strany. Obr. 1.4 znázorňuje běžnou nádobu na udržování plynu, kterou najdeme v každé učebnici: **válec s pístem**. Teď nám nezáleží na tom, jaký je ve skutečnosti tvar molekul vody, a proto je kvůli jednoduchosti znázorníme jako tenisové míčky nebo body. Jsou v neustálém pohybu a pohybují se na všechny strany. Na spodek *pístu* jich neustále naráží tolik, že na něj musíme působit určitou silou dolů, aby ho molekuly nevytlačily z válce. Tuto *silu* nazýváme **tlakem** (přesněji, *tlak násobený plochou dává sílu*). Je jasné, že síla je úměrná ploše pístu, protože zvětšíme-li plochu a přitom nezměníme počet molekul v kubickém centimetru, pak vzroste počet srážek s pístem tolikrát, kolikrát se zvětšila jeho plocha.

Nyní *zdvojnásobme* v této nádobě počet molekul, takže se zdvojnásobí jejich hustota, ale ponechme jim stejnou rychlost, tj. *stejnou teplotu*. Pak můžeme dost přesně říci, že se zdvojnásobil počet srážek a jelikož je každá právě tak „energická“ jako dříve, tlak je úměrný hustotě. Uvážíme-li skutečnou povahu meziatomových sil, můžeme očekávat mírný pokles tlaku jako projev zvýšené přitažlivosti mezi atomy a mírný vzrůst související s objemem, který zaujímají. Přesto však, pokud je hustota dostatečně nízká, tj. atomů není příliš mnoho, můžeme s dostatečnou přesností říci, že *tlak je úměrný hustotě*.

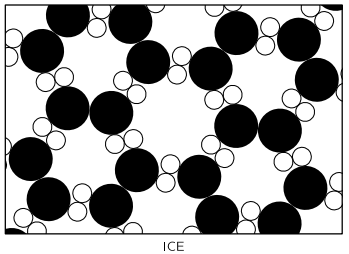
Snadno pochopíme i něco jiného. *Zvyšujeme-li teplotu* bez změny hustoty plynu, tj. když zvětšujeme rychlost atomů, co se stane s tlakem? Atomy narážejí do pístu *silněji*, neboť se pohybují rychleji a navíc, narážejí častěji. Proto tlak vzrůstá. Vidíte, jak jednoduché jsou myšlenky atomové teorie.

Podívejme se na jinou situaci. Předpokládejme, že se píst *pohybuje dovnitř*, takže atomy jsou pomalu stlačovány do menšího prostoru. Co se stane, naráží-li atom do pohybujícího se pístu? Je jasné, že při takové srážce *získá rychlost*. Můžeme si to vyzkoušet na ping-pongovém míčku: po úderu pálkou míček odletí od páčky rychleji, než k ní přiletěl. Ve zvláštním případě, není-li atom v pohybu a píst na něj naráží, atom se začne určitě pohybovat. Atomy jsou při návratu od pístu „teplejší“, než byly před nárazem na píst. Proto všechny atomy, které jsou v nádobě, získají na rychlosti. To znamená, že při pomalém *stlačení plynu jeho teplota vzrůstá*. Když plyn pomalu *stlačujeme*, jeho teplota *vzrůstá* a když plyn pomalu *rozpínáme*, jeho teplota *klesá*.

Vraťme se k naší kapce vody a podívejme se na ni z jiného pohledu. Snižme teplotu naší kapky. Předpokládejme, že hemžení molekul vody postupně slábne. Víme, že mezi atomy působí přitažlivé síly, které způsobí, že molekuly už nebudou moci tak snadno pohybovat. Obr. 1.5 znázorňuje, co se stane při velmi nízkých teplotách: molekuly jsou vázány v nové struktuře, vytváří se **led**. Takové schematické znázornění ledu není správné, neboť je dvojrozměrné. Situaci však vystihuje kvalitativně. Je pozoruhodné, že každý atom má v této látce určité místo. Rozmístíme-li atomy na jednom konci kapky podle určitého pravidla, pak v důsledku pevné struktury meziatomových vazeb vznikne určité uspořádání atomů i na druhém konci kapky, vzdáleném (v našem měřítku) několik kilometrů.



Obrázek 1.4.: Píst [1, s. 18]



Obrázek 1.5.: Led [1, s. 19]

Proto, držíme-li ledový rampouch za jeden konec, jeho druhý konec bude při lámání klást odpor, chová se jinak než voda, ve které je pravidelná struktura rozrušena intenzivním pohybem atomů v rozličných směrech. Rozdíl mezi pevnými látkami a kapalinami spočívá v tom, že atomy pevné látky jsou *uspořádány* zvláštním způsobem. Toto uspořádání se nazývá **krystalická struktura**. I tehdy, kdy jde o velmi vzdálené atomy, nepozorujeme nic náhodného v jejich polohách. Poloha atomu na jednom konci krystalu je určena polohou atomu na druhém konci, i když se mezi nimi nacházejí miliony jiných atomů. Obr. 1.5 znázorňuje vymyšlené uspořádání ledu a ačkoli správně vystihuje mnohé vlastnosti ledu, neodpovídá skutečnému uspořádání. Jedním ze správných rysů je existence části *hexagonální symetrie*. Můžeme se o tom přesvědčit: otočíme-li obrázek o 120°, dostaneme stejné seskupení. Taková symetrie ledu je příčinou šestihhranného tvaru sněhových vloček. Další informací, kterou je možné vytušit z obrázku 1.5, je *zmenšování objemu ledu při tání*. Znázorněná struktura ledu, stejně tak jako skutečná, obsahuje *mnoho dutin*. Když se struktura rozpadne, tyto dutiny mohou být *zaplněny* molekulami. *Většina jednoduchých látek, s výjimkou vody a liteřiny, zvětšují při tání svůj objem, neboť atomy jsou v pevných krystalech těsně seskupeny a při tání potřebují více prostoru na kmitání*. Otevřené struktury se však při tání zhroutí - podobně jako led.

I když má led pevnou krystalickou strukturu, jeho teplota se může měnit - v ledu je zásoba tepla. Chceme-li, můžeme toto množství tepla změnit. Jaké je teplo, které se nachází v ledu? Atomy ledu *nejsou* v klidu, poskakují a kmitají. Ačkoli v krystalu existuje určité uspořádání - struktura - všechny atomy kmitají, „na místě“. Zvyšujeme-li teplotu, budou kmitat se stále větší amplitudou, až opustí svá místa. Tento jev nazýváme **táním**. Snižujeme-li teplotu, kmity slábnou a při teplotě *absolutní nuly* jsou *nejslabší*, ne však nulové. Toto nejmenší množství pohybu, který přísluší atomům, nestačí na roztání látky - až na jednu výjimku: *hélium*. V héliu se při ochlazování také zpomaluje pohyb atomů na nejmenší možnou míru, ale i při teplotě absolutní nuly brání tento pohyb zmrznutí hélia. Hélium nezmrzne, pokud nevytvoříme tak veliký tlak, abychom atomy stlačili k sobě. Při velkém tlaku můžeme dosáhnout toho, že hélium ztuhne.

1.1.2. Atomové procesy

Dosud jsme si všímali stavby pevných látek, kapalin a plynů z atomového hlediska. Jenže atomová hypotéza charakterizuje i procesy, a proto si všimněme některých procesů z atomového hlediska. Nejdříve budeme hovořit o procesech, které se odehrávají na povrchu vody. Co se vlastně děje na vodním povrchu? Úlohu si zkomplikujeme - bude tak blíže skutečnosti - předpokladem, že nad vodním povrchem se nachází vzduch. Obr. 1.6 takovou situaci znázorňuje. Tak jako předtím vidíme molekuly vody, které tvoří kapalinu, ale vidíme i povrch vody. Nad povrchem vidíme různé molekuly. Jsou tam především *molekuly vody* v podobě vodní páry, kterou je možné pozorovat vždy nad kapalnou vodou (pára a voda jsou v rovnováze, o které pohovoříme později). Dále tam nalezneme jiné molekuly, dvojice atomů kyslíku tvořící *molekulu kyslíku* a dvojice atomů dusíku tvořící *molekulu dusíku*. Vzduch se skládá téměř výhradně z dusíku, kyslíku, vodní páry a menšího množství oxidu uhličitého, argonu a jiných příměsí. Nad povrchem vody se nachází vzduch — plyn obsahující jisté množství vodní páry. Nyní si všimněme, co se odehrává na obrázku. Molekuly vody se neustále pohybují. Občas některá z molekul, nacházejících se v blízkosti povrchu, naráží na jinou molekulu trochu silněji než obvykle a vyskočí nad povrch. Na obrázku takovýto děj *přímo* neuvidíme, neboť vše je na něm nehybné. Můžeme si však představit, že jedna molekula za druhou v důsledku srážek opouští vodu - voda mizí, *vypařuje* se. Když nádobu *přikryjeme*, objevíme po nějakém čase

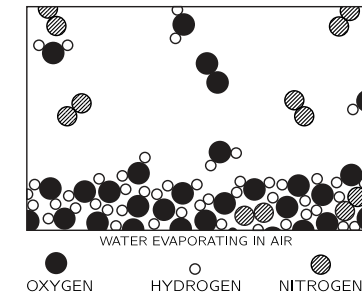
velké množství molekul vody mezi molekulami vzduchu. Čas od času některá z těchto molekul vody vletí zpět do vody a zůstává v ní. To, co jsme považovali za mrtvé a nezajímavé - přikrytý pohár vody, který snad dvacet let stál na jednom místě - v sobě skrývá stále probíhající zajímavý **dynamický proces**. Náš nedokonalý zrak nepozoruje žádnou změnu, ale při miliardovém zvětšení bychom viděli, jak se vše mění: jedny molekuly opouštějí povrch a druhé se vracejí.

Proč nepozorujeme tyto změny my? Protože do vody se vrací právě tolik molekul, kolik z ní odešlo. Navenek se „nic neděje“. Když odkryjeme nádobu, odfoukneme vlhký vzduch pryč a nahradíme ho suchým vzduchem, nezmění se počet z vody vylétajících molekul (neboť závisí pouze na pohybu ve vodě), ale velmi se změní počet molekul do vody se vracějících, protože nad vodou je mnohem méně molekul. Molekul, které opouštějí vodu, je víc než molekul, které se do ní vracejí; voda se vypařuje. Chceme-li tedy, aby se voda vypařovala, zapneme ventilátor!

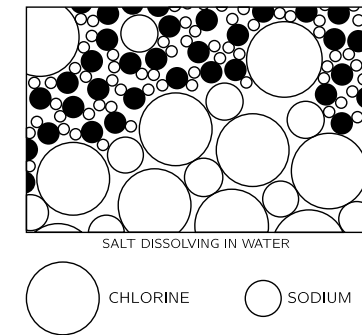
Zůstává ještě otázka: Které molekuly opouštějí vodu? Molekula opustí vodu, když náhodně získá malé množství dodatečné energie, kterou potřebuje na to, aby překonala přitažlivé působení svých sousedů. Protože ty molekuly, které opouštějí vodu, mají větší než průměrnou energii, budou se molekuly, které ve vodě zůstávají, v průměru pohybovat méně. Při vypařování se tedy kapalina postupně *ochlazuje*. Je samozřejmé, že když molekula páry sestoupí ze vzduchu do vody, objeví se silné přitahování, když molekula dosahuje povrchu vody. Důsledkem toho je zrychlení přicházející molekuly a s tím spojený vznik tepla. *Můžeme tedy říci, že s odchodem molekul odchází a s příchodem molekul přichází teplo*. Když jsou oba procesy vyrovnány, voda svou teplotu nemění. Foukáme-li na vodu, aby odpařování převládalo nad zkapalňováním, voda se ochlazuje. Proto, chcete-li ochladit polévku, foukejte na ni!

Musíme si však uvědomit, že procesy, o kterých jsme hovořili, probíhají ve skutečnosti složitěji. Při unikání vody do vzduchu čas od času některá z molekul kyslíku nebo dusíku vnikne do vody a „ztratí se“ mezi jejími molekulami. Vzduch se tedy rozpouští ve vodě. Molekuly kyslíku a dusíku pronikají do vody, která pak obsahuje vzduch. Když z nádoby náhle odstraníme vzduch, budou molekuly vzduchu unikat z vody rychleji, než do ní vnikají, což způsobí vystupování bublinek. Tato skutečnost je velmi nepříjemná pro potápěče.

Nyní si všimněme dalšího procesu. Obr. 1.7 znázorňuje, jak se podle atomové představy rozpouští pevná látka ve vodě. Co se stane, vložíme-li krystal soli do vody? Sůl je pevná látka, krystal, organizované seskupení „atomů soli“. Na obr. 1.8 je znázorněna trojrozměrná struktura kuchyňské soli, chloridu sodného. Máme-li být přesní, musíme říct, že krystal není tvořen atomy, ale ionty. Ionť je atom, který má několik elektronů navíc, nebo několik elektronů ztratil. V krystalu soli nalézáme *ionty chlóru* (atomy chlóru s přebytečným elektronem) a *ionty sodíku* (atomy sodíku zbavené jednoho elektronu). Ionťy jsou v krystalu vzájemně vázány elektrickou přitažlivostí, ale ve vodě se některé z nich pod vlivem přitažlivosti záporného kyslíku a klad-



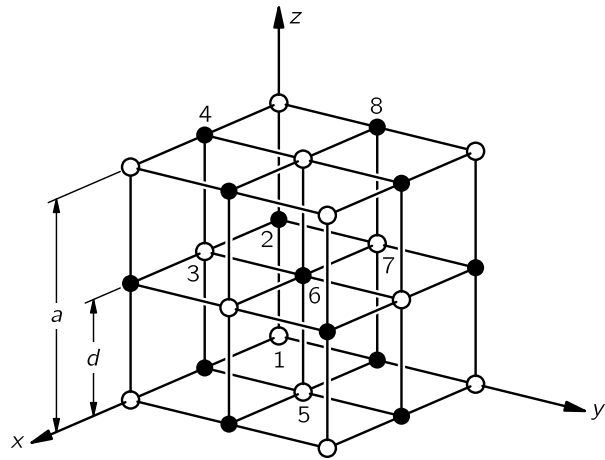
Obrázek 1.6.: Voda vypařující se do vzduchu [1, s. 21].



Obrázek 1.7.: Voda vypařující se do vzduchu [1, s. 21].

Crystal	●	○	a (Å)
Rocksalt	Na	Cl	5.64
	K	Cl	6.28
	Ag	Cl	5.54
Sylvine	Mg	O	4.20
	Pb	S	5.97
	Pb	Se	6.14
	Pb	Te	6.34

(a)



Nearest neighbor
distance $d = a/2$

(b)

Obrázek 1.8.: Vzdálenost nejbližších sousedů $d = \frac{a}{2}$ [1, s. 22]

ného vodíku začnou uvolňovat. Na obrázku 1.7 vidíme uvolňující se ionť chlóru a jiné atomy plavající ve vodě ve formě ionťů. Tento obrázek je pečlivě zakreslený. Všimněme si například, že vodíkové konce molekul vody obvykle obklopují ionť chlóru a u ionťu sodíku zpravidla nalézáme kyslíkový konec, neboť sodíť je kladný a kyslíkový konec molekuly vody je záporný a tyto se elektricky přitahují. Můžeme podle tohoto obrázku říci, jestli se sůl rozpouští ve vodě, nebo *krystalizuje* z vody? Samozřejmě, že *nemůžeme*, neboť zatím co jedny atomy opouštějí krystal, jiné se k němu připojují. Takovýťto proces je - podobně jako vypařování - *dynamický* všechno závisí na tom, je-li ve vodě více nebo méně soli, než je třeba k rovnováze. Rovnováhou rozumíme takovou situaci, kdy počet atomů opouštějících krystal je roven počtu atomů do krystalu se vracějících. Když sůl ve vodě téměř není, vstupuje do vody více atomů, než vystupuje a sůl se rozpouští. Když je, naopak, „atomů soli“ příliš mnoho, do krystalu se vrací

více atomů, než ho opouští a sůl krystalizuje.

Zmínili jsme se o tom, že představa *molekuly* látky je pouze přibližná a je opodstatněná jen pro určitou třídu látek. Je jasné, že v případě vody jsou její tři atomy skutečně svázané, ale v případě pevného chloridu sodného už to tak jasné není. V takovém případě jde o uspořádání sodíkových a chlorových iontů do krychlové mřížky a neexistuje přirozený způsob jejich uspořádání do „molekul soli“.

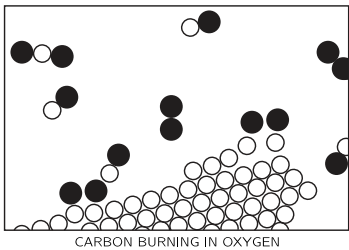
Vratme se ještě k naší diskuzi o *rozpouštění a srážení*. Zvýšíme-li teplotu roztoku soli, vzroste počet atomů, které sůl opouštějí a vzroste i počet atomů, které se do soli vracejí. Ukazuje se, že obecně je velmi těžké předpovědět, jak se ten proces realizuje, proběhne-li rozpouštění rychleji nebo pomaleji. S rostoucí teplotou se většina látek rozpouští lépe, ale některé látky se rozpouštějí hůře.

1.1.3. Chemické reakce

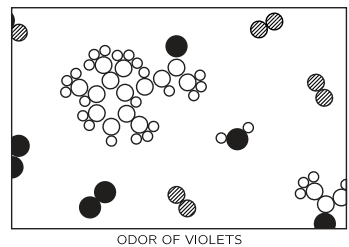
Ve všech procesech, o nichž jsem dosud hovořili, neměnily atomy a ionty své partnery. Za určitých okolností však může dojít ke změně atomových kombinací, vytvoří se nové molekuly. Taková situace je znázorněna na obr. 1.9.

Proces, ve kterém dochází k přeskupení atomových partnerů, nazýváme **chemickou reakcí**. Ostatní dosud uvažované procesy nazýváme **fyzikálními procesy**. Mezi uvedenými dvěma druhy, procesů však neexistuje ostrá hranice. Příroda se nestará o naše názvosloví a pokračuje i nadále ve svém díle. Uvedený obrázek má znázornit hoření uhlíku v kyslíku. Kyslík se vyznačuje tím, že jeho dva atomy jsou velmi pevně svázané. (Proč nejsou svázané tři nebo dokonce čtyři atomy? Toto je jedna ze zvláštností atomových procesů. Atomy jsou velmi svérázné: upřednostňují určité partnery, určité směry apod. Úlohou fyziky je analyzovat, proč chtějí právě to, co chtějí. V každém případě dva atomy kyslíku, nasycené a šťastné, tvoří molekulu.)

Předpokládejme, že atomy uhlíku vytvářejí pevný krystal - grafit nebo diamant (diamant může shořet ve vzduchu). Uvažujme situaci, kdy se molekula kyslíku dostane k uhlíku. Každý její atom zachytí atom uhlíku a odletí v novém seskupení - „uhlík-kyslík“. Toto seskupení představuje molekulu plynu nazývaného *oxid uhelnatý*. Jeho chemické označení je CO. Je to velmi jednoduché: písmena „CO“ jsou vlastně obrazem jeho molekuly. Jenže uhlík váže kyslík o mnoho silněji než kyslík váže kyslík nebo uhlík váže uhlík. Proto v tomto procesu může kyslík přicházet s malou energií, ale kyslík a uhlík se spojí velmi „energicky“ a uvolněnou energii pohltí okolní atomy. Tak se vytváří velké množství pohybové, kinetické energie. Myslíme tím samozřejmě **hoření**; spojením uhlíku a kyslíku získáváme *teplo*. Teplo se obvykle projevuje formou pohybu molekul horkého plynu, ale za určitých okolností ho může být tak mnoho, že způsobuje světlo. Tak vzniká **plamen**.



Obrázek 1.9.: Uhlík hořící v kyslíku [1, s. 23]



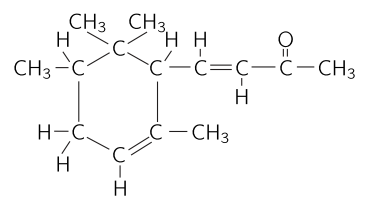
Obrázek 1.10.: Vůně fialek [1, s. 24]

Kromě toho, *oxid uhelnatý* není zcela uspokojen. Je možné, aby k sobě připojil další atom kyslíku a tak dostaneme mnohem složitější reakci, ve které se kyslík spojuje s uhlíkem a současně dochází ke srážce s molekulou oxidu uhelnatého. Kyslíkový atom se připojí k CO a v konečném důsledku vytvoří molekulu složenou z jednoho uhlíku a dvou kyslíků. Tato molekula má označení CO₂ a nazývá se *oxid uhličitý*. Spalujeme-li uhlík ve velmi malém množství kyslíku a reakce probíhá velmi rychle (např. v motoru automobilu, kde je výbuch tak rychlý, že se nestačí vytvořit oxid uhličitý), vzniká velké množství oxidu uhelnatého. V mnoha takových přeskupeních atomů se uvolňuje velké množství energie, vznikají výbuchy, plamen apod., podle druhu reakce. Chemici studovali takové seskupení atomů a zjistili, že každá látka představuje určitý druh *uspořádání atomů*.

K objasnění této myšlenky si zvolme jiný příklad. Ocitneme-li se na louce rozkvetlé fialkami, víme, co je to za „vůni“. Je to určitý druh molekul nebo seskupení atomů, které se dostalo do našeho nosu. Jak se nám to stalo? To je dost jednoduché! Jestliže vůně je jistý druh molekul, tím nejrozmanitějším způsobem poletujících a srážejících se ve vzduchu, pak se může náhodou dostat i do nosu. Tyto molekuly se určitě nesazily dostat právě do našeho nosu. Jsou jen bezmocnou částí strkajícího se zástupu molekul, jehož kousek se na svém bezcílném putování dostal do našeho nosu.

Chemici mohou i takové zvláštní molekuly, jako je vůně fialek, podrobit analýze a říci nám *přesné uspořádání* jejich atomů v prostoru. Víme, že molekula oxidu uhličitého je *přímá a symetrická*: O–C–O (lze to snadno zjistit i fyzikálními metodami). I pro mnohem složitější seskupení atomů, jako jsou ty, se kterými pracuje chemie, můžeme zdoluhavým, pozoruhodným procesem, připomínajícím práci detektiva, zjistit tvar seskupení. Obr. 1.10 znázorňuje vzduch v blízkosti fialky: ve vzduchu opět nalézáme dusík, kyslík a vodní páru. (Odkud se vzala vodní pára? Fialka je vlhká, protože všechny rostliny odpařují vodu.) Vidíme však i „monstrum“ složené z uhlíkových, vodíkových a kyslíkových atomů, které vytvořily zcela určité, zvláštní seskupení. Je to mnohem složitější seskupení než v případě oxidu uhličitého. Naneštěstí do obrázku nemůžeme zakreslit všechno, co o něm po chemické stránce víme, neboť seskupení všech atomů je trojrozměrné, zatímco náš obrázek je pouze dvojrozměrný. Šest uhlíků vytváří ne plochý, ale „zvrátněný“ prstenec. Všechny úhly a vzdálenosti známe. Chemický vzorec je jen obrázkem takové molekuly. Když chemik napíše vzorec na tabuli, snaží se „nakreslit“ dvojrozměrný obraz molekuly. Například, vidíme „prstenec“ šesti uhlíků a na jednom konci visící „řetěz“ uhlíků, na něm kyslík druhý od konce, tři vodíky vázané na tento uhlík, dva uhlíky a tři vodíky vázané nahoře atd.

Jak chemik zjistí, o jaké uspořádání jde? Smíchá obsah dvou lahvíček a když se směs zbarví červeně, ví, že látka obsahuje jeden vodík a dva uhlíky vázané na určité místo molekuly. Zbarví-li se směs modře, je to úplně jinak. To je organická chemie - jeden z nejfantastičtějších kousků detektivní práce. Aby objevil uspořádání atomů v neobyčejně komplikovaných útvech, chemik sleduje, co se děje při smíchání dvou rozdílných látek. Fyzik by nikdy zcela neuvěřil, že chemik ví, o čem mluví při popisu uspořádání atomů. Jenže asi před dvaceti lety se objevila fyzikální metoda umožňující v některých případech pozorovat molekuly (ne tak složité, jako je molekula vůně fialky, ale takové, které obsahují části této molekuly). Touto metodou je možné lokalizovat každý atom, a to ne sledováním zbarvení směsi, ale měřením skutečné polohy atomů. A světe, div se! Ukázalo se, že chemici měli téměř



Obrázek 1.11.: Strukturální vzorec vůně fialky (α-ion) [1, s. 24]

vždy pravdu. Zjistilo se, že vůně fialky obsahuje tři málo se lišící molekuly, jejichž rozdílnost spočívá pouze v jiném uspořádání vodíkových atomů.

Jedním z problémů chemie je tvorba chemického názvosloví. Každé molekule musíme najít jméno! Toto jméno musí ukazovat nejen její tvar, ale musí vyjadřovat i to, že tu je kyslíkový atom, tam vodíkový - musí říkat, kde přesně ten který atom je. Takto pochopíme, že chemické názvy musí být složité, aby byly-úplné. Název fialkové vůně má v podobě prozrazující strukturu následující znění: 4-(2,2,3,6 tetrametyl-5-cyklohexanyl)-3-buten-2-on. Teď chápeme obtíže, se kterými chemici zápolí a rovněž chápeme příčinu tak dlouhých názvů. Není to proto, že by chemici chtěli být záhadnými, ale je to proto, že bojují s velmi obtížným problémem popisu molekuly slovy.

Jak víme, že atomy existují? Používáme k tomu trik, o kterém jsme se již zmínili: *předpokládáme* jejich existenci a všechny výsledky, jeden po druhém, vycházejí tak, jak by měly, kdyby se látka skládala z atomů. Existují i přímější důkazy. Příkladem takového důkazu je následující skutečnost. Atomy jsou tak malé, že je nemůžeme vidět pomocí *světelného mikroskopu* - dokonce ani pomocí *elektronového mikroskopu*. (Světelným mikroskopem je možné vidět jen věci mnohonásobně větší.) Atomy jsou však v neustálém pohybu a když vložíme do vody nějaký míček, který je mnohem větší než atomy, bude poskakovat. Bude se chovat podobně, jak se chová velký míč postrkovaný při hře velkého množství lidí. Lidé postrkují míč různými směry a ten se pohybuje po hřišti nepravidelně. Právě tak se bude pohybovat „velký míč“ ve vodě, neboť v různých okamžicích na něj budou z různých stran dopadat nestejné údery. Proto při sledování velmi malých částíček (koloidů) ve vodě pomocí výborného mikroskopu pozorujeme jejich neustálé poskakování jako následek toho, že jsou bombardovány atomy. Tento jev se nazývá **Brounův pohyb**.

Další důkaz existence atomů můžeme vidět ve *struktuře krystalů*. V mnoha případech souhlasí struktury odvozené na základě rentgenové analýzy svými prostorovými „tvary“ s formami samotných přírodních krystalů. Úhly mezi různými krystalickými „stěnami“ souhlasí s přesností na úhlové vteřiny s úhly určenými za předpokladu, že krystal je tvořen mnoha „vrstvami“ atomů.

Vše se skládá z atomů. To je klíčová hypotéza. Například v celé biologii je nejdůležitější hypotézou to, že vše, co dělají živočichové, dělají atomy. Jinými slovy, v živých věcech není nic, co by nemohlo být pochopeno z pohledu, že se skládají z atomů podléhajících fyzikálním zákonům. To nebylo vždy známo: k formulování této hypotézy bylo třeba mnoha experimentů i teoretických úvah. Dnes je tato hypotéza uznávána a je nejužitečnější teorií pro vytváření nových myšlenek v oblasti biologie.

Jestliže kousek oceli nebo kousek soli skládající se z uspořádaných atomů může mít tak zajímavé vlastnosti, jestliže voda - která není ničím jiným než těmi malými kapkami stejnými na celé Zemi - může tvořit vlny a pěnu, hučet příbojem a vytvářet podivné tvary omýváním břehů, jestliže toto všechno, celý život vodního proudu nemůže být ničím jiným než hromada atomů, co víc je ještě možné? Jestliže namísto uspořádání atomů podle určitého, stále opakovaného vzoru, nebo jestliže namísto tvorby malých, ale složitých shluků, jako je vůně fialky, seskupíme atomy v každém místě jinak, různé druhy atomů seskupíme různými způsoby tak, aby se nic neopakovalo, o co úžasněji se může takováto věc chovat? Je možné, že „věci“, které se před vámi procházejí a baví se s vámi, jsou velké shluky těchto atomů velmi složitým způsobem seskupené, takže pouhá naše představivost nestačí předpovědět jejich chování? Jestliže říkáme, že jsme shlukem atomů, nemyslíme tím, že jsme jen shlukem atomů, protože takový shluk atomů, který se nikdy neopakuje, může vypadat právě tak jako to, co vidíme v zrcadle.

1.2. Nejzákladnější myšlenky fyziky

V této kapitole jsou zachyceny *nejzákladnější myšlenky*, s nimiž se ve fyzice setkáváme - bude pojednáváno o tom, jaká je v současnosti představa o povaze věcí. Nebude však hovořeno o tom, jak se poznala správnost těchto představ - o těchto detailech bude pojednáváno později, až přijde ten pravý čas.

Věci, o něž se ve fyzice zajímáme, se ukazují množstvím projevů a atributů. Stojíme-li například na břehu a hledíme na moře, vidíme vodu, na vodě pěnu, nad mořem oblaka, slunce, modrou oblohu a vůbec světlo, slyšíme zvuk, nárazy vln, svištění větru, cítíme vzduch. Na břehu je písek a skály, a každá má jinou tvrdost a pevnost, barvu a složení. Jsou tam zvířata a vodní tráva, je tam hlad i nemoc a na břehu je pozorovatel se svými myšlenkami a snad i štěstím. Každé jiné místo v přírodě se vyznačuje podobnou pestrostí věcí a vlivů, podobnou složitostí. Naše zvědavost nás nutí klást otázky, hledat souvislosti a chápat mnohotvárnost věcí jako následek snad relativně malého počtu nejjednodušších věcí a sil působících nekonečně rozmanitě.

Klademe si otázku: Je písek jiný než skály? Není snad písek nic jiného, než velký počet velmi malých kamínků? Je Měsíc velká skála? Kdybychom porozuměli tomu, co jsou skály, znamená to, že bychom pochopili i podstatu písku a Měsíce? Co je to vítr? Jsou to nárazy vzduchu podobné nárazům vody na břeh? Jaké společné rysy mají rozličné druhy pohybu? Co mají společného různé druhy zvuku? Kolik různých barev existuje? A tak dále. Takovým způsobem se snažíme postupně analyzovat všechny věci. Dáváme do souvislostí věci, které na první pohled vzájemně nesouvisí. Děláme to s nadějí, že se nám podaří redukovat počet rozličných věcí a tak je lépe poznat.

Před několika sty lety vznikla metoda hledání částečných odpovědí na uvedené otázky. *Pozorování, usuzování a experiment* vytvářejí to, co nazýváme *vědeckou metodou*. Budeme se muset omezit jen na holý popis našich představ o tom, co se nazývá *základní fyzikou* nebo základními myšlenkami, které vznikly aplikováním vědecké metody.

Co to znamená něco „pochopit“? Můžeme si představit, že to složité nahromadění pohyblivých se věcí, které vytvářejí „svět“, je šachová hra bohů a my vystupujeme jako diváci, kteří neznají pravidla hry, ale je jim dovoleno hru *pozorovat*. Samozřejmě, pozorujeme-li dostatečně dlouho, můžeme nakonec pochytit několik pravidel. *Pravidla hry* představují to, co chápeme jako *základní fyziku*. I kdybychom znali všechna pravidla, nemuseli bychom ještě rozumět každému kroku hry, protože je příliš složitá a možnosti našeho rozumu omezené. Hrajete-li šachy, jistě víte, že je jednoduché naučit se všechna pravidla, ale i tak je velmi těžké zvolit ten správný tah nebo pochopit záměry protihráče. Stejně je to i s přírodou, jen mnohem těžší. Máme však možnost najít alespoň všechna pravidla. Zatím je všechna neznáme. (Každou chvíli se objevuje něco takového jako rošáda, kterou ještě neznáme.) Nejen, že neznáme všechna pravidla, ale pomocí těch, která známe, umíme jen velmi málo vysvětlit. Je tomu tak proto, že téměř všechny situace jsou ohromně složité a známá pravidla nám neumožní sledovat všechny obraty hry, nemluvě o předvídaní dalších kroků. Musíme se proto omezit na základnější otázku pravidel hry. Naučíme-li se pravidla, budeme to považovat za „pochopení“ světa.

Jak můžeme rozhodnout, zda pravidla, která vlastně jen „odhadujeme“, jsou skutečně správná, když nemůžeme dokonale analyzovat hru? Existují zhruba tři způsoby. Především nám příroda může poskytnout (nebo my si od přírody vynutíme) jednoduché situace skládající se z malého počtu částí, umožňující přesnou předpověď budoucího dění, a tím i zkoušku pravidel. (V rohu šachovnice zůstalo jen málo figurek, jejichž tahy již umíme přesně určit)

Druhý způsob zkoušky pravidel spočívá v jejich použití k odvození obecnějších pravidel. Na-

příklad, střelec se na šachovnici pohybuje úhlopříčně. Odtud je možné usuzovat na skutečnost, že určitý střelec bude vždy na bílém poli. Odhlédneme-li od podrobností, můžeme prověřovat naše pravidlo o pohybu uvedeného střelce tak, že sledujeme, jestli se vždy nachází na bílém poli. Po dlouhém čase se samozřejmě může stát, že se náhle objeví na černém poli (v průběhu hry byl vzat, ale jeden pěšec došel na konec šachovnice a proměnil se na střelce na černém poli). Tak to bývá i ve fyzice. Dlouho používáme pravidlo, které ve všech směrech dobře vyhovuje, ačkoliv neznáme detaily, a potom najednou objevíme *nové pravidlo*. Z hlediska základů fyziky probíhají nejzajímavější jevy na nových místech, na místech, kde pravidla neplatí a ne tam, kde pravidla *platí*. To je způsob, jakým objevujeme nová pravidla.

Třetí ze způsobů, kterými se můžeme přesvědčit o správnosti našich myšlenek, je poměrně hrubý, ale snad nejúčinnější. Je to způsob přibližného odhadu. Ačkoliv nejsme schopni říci, proč Aljehin *táhl právě tou figurkou*, můžeme v *hrubých rysech* chápat, že seskupuje figurky okolo krále, aby ho chránil, protože za daných okolností je to nejrozumnější. Podobně je to i s naším chápáním přírody. Často ji více či méně chápeme, aniž bychom byli schopni znát význam tahu *každé jednotlivé figurky*.

Zpočátku se přírodní jevy hrubě rozdělovaly do tříd jako teplo, elektřina, mechanika, magnetismus, vlastnosti látek, chemické děje, světlo nebo optika, rentgenové paprsky, jaderná fyzika, gravitace, mezonové jevy atd. Cílem je však pochopení *celé přírody* jako různých aspektů *jednoho souboru* jevů. Úkolem základní teoretické fyziky dneška je *nalezení zákonů stojících za experimentem a sjednocení uvedených tříd*. Historicky se nám vždy podařilo sloučit je, ale postupem času se objevovaly nové věci. Když jsme si již vytvořili ucelenou představu, objevily se najednou rentgenové paprsky. Když se i tento jev dostal do jednotného schématu, objevily se mezony. Proto v každém stádiu hry vypadá situace dost chaoticky. Mnohé se objasnilo z jednotného hlediska, ale ještě stále je mnoho volných konců nitek, o nichž nevíme, kam patří. Takový je dnes stav věcí a my se ho pokusíme popsat.

Všimněme si v historii několika příkladů uvedeného sjednocování. Uvažujme nejdříve *teplo a mechaniku*. Jsou-li atomy v pohybu, obsahuje systém tím více tepla, čím více pohybu v něm je, takže *teplo a všechny tepelné efekty je možné vyjádřit pomocí zákonů mechaniky*. Dalším úžasným sjednocením bylo objevení souvislosti mezi *elektrínou, magnetizmem* a světlem, o nichž se zjistilo, že jsou různými aspekty stejné věci, kterou dnes nazýváme *elektromagnetické pole*. Dále chemické děje, rozmanité vlastnosti různých látek a chování atomových částic byly sjednoceny do *kvantové chemie*.

Zůstává zde však otázka, zda bude možné vše sjednotit tak, abychom mohli prohlásit, že svět představuje rozmanité aspekty jediné věci? To nikdo neví. Víme pouze, že na naší cestě vpřed se nám daří spojovat fragmenty, přičemž vždy nalézáme cosi, co nezapadá do obecného obrazu, a proto se opět pokoušíme doplnit skládačku. Nevíme, zda tato skládačka má konečný počet částí a zda má tato hra vůbec hranice. Dozvíme se to až tehdy, když složíme výsledný obraz, jestli ho vůbec kdy složíme. Chtěli bychom však ukázat, kam až tento proces sjednocování pokročil a jaká je dnešní situace při objasňování základních jevů pomocí co nejmenšího počtu principů. Jednodušeji řečeno: **z čeho jsou složeny věci a kolik je těch stavebních prvků?** [2, s. 27]

1.3. Hlavní etapy vývoje

Fyzika prošla dlouhým historickým vývojem a znalost tohoto vývoje pomáhá lépe pochopit logiku soustavy fyzikálních poznatků a dokonce docházet k poznatkům novým. V krátkosti dějiny fyziky můžeme rozdělit na tři hlavní etapy:

- Stará fyzika - od starověku do počátku 17. století (orientačně do roku 1600).
- Klasická fyzika - 1600 – 1900.
- Moderní fyzika - 1900 – dosud.

Starou fyziku nemůžeme považovat za vědu ve vlastním smyslu, i když se dobrala celé řady významných vědeckých poznatku. První z nich znali již staří Sumerové, Babyloňané, Egypťané a Číňané. Šlo zejména o poznatky astronomické a geometrické (Pythagorova veta) a také o metody měření některých fyzikálních veličin (délka, hmotnost, čas). Fyzika ve starém Řecku byla jako součást filosofie převážně spekulativní a tento charakter si pod vlivem aristotelismu udržela, až do počátku novověku. Skutečný fyzikální výzkum prováděli až helenističtí Řekové, kdy se centrem vědy a kultury antického světa stala Alexandrie. V Alexandrii studoval největší fyzik starověku Archimédes, který dospěl k důležitým poznatkům o statické rovnováze těles a plování těles a v matematice se těsně přiblížil objevu diferenciálního a integrálního počtu. Alexandrijští Řekové znali také zákon odrazu světla (nikoli lomu) a prováděli první měření teploty. Poznatky antiky byly středověké Evropě zprostředkovány Araby, kteří se též intenzivně zabývali optikou (Alhazen) a určováním měrné hmotnosti látek. Zatímco ve středověku byly hlavní přírodovědné poznatky čerpány z Euklidových "Základu" (geometrie), "Almagestu" Klaudia Ptolemaia (geocentrický výklad astronomie sluneční soustavy) a spisu Aristotelových (mj. "Fysika"), vešly práce Archimédovy v Evropě ve známost až teprve začátkem novověku. Ve starověku a středověku však fyzika neprováděla systematické experimenty, nevyužívala matematický aparát k popisu přírodních jevů a neměla ani přesně definovány základní pojmy (rychlost, zrychlení, síla apod.) Zrod fyziky jako vědy se datuje začátkem 17. století. Na základě astronomických výzkumu Keplerových (1571-1630) a pozemských mechanických experimentů Galileových (1564-1642) mohl Isaac Newton (1643-1727) vytvořit první fyzikální teorii, klasickou mechaniku, využívající matematický aparát diferenciálního a integrálního počtu. Newton přišel s koncepcí všeobecné gravitace a ukázal, že není přehradu mezi nebeskou a pozemskou fyzikou, že síla, která udržuje planety na jejich drahách kolem Slunce je táž jako síla, která nutí jablko padat k zemi. Základní Newtonovo dílo z r. 1687 nese název "Matematické základy přírodní filosofie" ("Philosophiae naturalis principia mathematica") a představuje pravděpodobně nejvýznamnější vědeckou knihu, která byla kdy napsána. Newton se zabýval též optikou a rozpracoval teorii rozkladu bílého světla do spektra. V té době byl již zásluhou Snellovou a Descartovou znám i zákon lomu světla. Z roku 1600 pochází první vědecký spis o elektřině a magnetismu od anglického lékaře a fyzika Gilberta. Výzkumem těchto jevů se v následujících stoletích zabývala celá řada fyziků (Coulomb, Volta, Oersted, Ampère a další). Tento výzkum pak završil Faraday (1791-1867) svým objevem zákona elektromagnetické indukce a svou koncepcí siločár elektromagnetického pole. Úlohu Newtona elektromagnetismu pak sehrál James Clerk Maxwell (1831-1879), který ve svém "Traktátě o elektřině a magnetismu" z r. 1873 sestavil slavné Maxwellovy rovnice popisující vlastnosti elektromagnetického pole. Maxwell zároveň teoreticky zdůvodnil elektromagnetickou povahu světla a ukázal, že jevy spojené s vlastnostmi elektrického náboje ("elektřina"), elektrického proudu ("galvanismus"), magnetického pole a světla (optika), jsou jedné a téže elektromagnetické povahy. V

devatenáctém století byl tak dovršen výzkum mechanických jevů a elektromagnetismu a klasická fyzika tím završena. V přírodě tedy existovaly pouze dvě síly, dva způsoby vzájemné interakce mezi částicemi: gravitační a elektromagnetická. Mezi nimi se však projevoval určitý rozpor. Jak Newtonovy tak Maxwellovy rovnice platí v libovolné inerciální vztažné soustavě. Při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé se však Newtonovy rovnice transformují pomocí tzv. Galileiho transformací a Maxwellovy rovnice pomocí Lorentzových transformací. Fyzika se tak rozdvojila, mechanické a elektromagnetické děje se zdály být neslučitelné. Kromě toho existovaly některé experimenty, jejichž výsledek nedokázala klasická fyzika vysvětlit: průběh spektra rovnovážného elektromagnetického záření (tzv. záření absolutně černého tělesa) a pokus Michelsonův, který svědčil o neexistenci světelného éteru. Tyto zdánlivě nepodstatné rozpory vyústily ve 20. století ve vznik moderní fyziky, tj. fyziky kvantové a relativistické. Právě koncem roku 1900 vyslovil Planck tzv. kvantovou hypotézu, jíž vysvětlil záření absolutně černého tělesa, a v r. 1905 publikoval Einstein práci o speciální teorii relativity. V ní překlenul rozpor mezi Newtonovou a Maxwellovou fyzikou a fyziku opět sjednotil. Předpoklad o existenci světelného éteru se teorií relativity stal zbytečným. V roce 1916 vytvořil Einstein i obecnou teorii relativity jako moderní teorii gravitace. Gravitační síly podle této teorie souvisejí se zakřivením prostoročasu. Jak speciální, tak obecná teorie relativity přecházejí při rychlostech objektu podstatně menších než je rychlost světla ve vakuu a při slabých gravitačních polích v teorii Newtonovu. Přelom 19. a 20. století je též poznamenán objevem radioaktivity a vznikem jaderné fyziky, která tak významným způsobem zasáhla do života celého lidstva. V jaderné fyzice se uplatní další dvě přírodní síly - tzv. silná, která udržuje nukleony v atomových jádrech a slabá, která se projevuje při radioaktivní přeměně beta za vzniku neutrin. Moderní fyzika odhalila v kosmickém záření a pomocí urychlovačů obrovské množství částic, jejichž vlastnosti studuje a snaží se je utřídit a vysvětlit. Mezi všemi těmito částicemi působí čtyři základní síly přírody: gravitační, elektromagnetická, silná a slabá. V nedávné době se podařilo prokázat, že i elektromagnetická a slabá interakce jsou téže podstaty a tvoří jedinou sílu elektroslabou. V průběhu historie fyziky od Newtona a Maxwella k dnešku tak probíhá úsilí o sjednocování interakcí, které pokračuje i dnes. Fyzika se pokouší prokázat, že i silná a elektroslabá interakce jsou téže povahy, a že k nim konečně přistupuje i síla gravitační. Tím by vznikla idea jediné přírodní síly sjednocující všechny přírodní jevy a děje. Fyzika ovšem nemůže k takovému závěru dojít pouhým uvažováním, musí matematicky vypracovat a zdůvodnit příslušnou teorii a její závěry experimentálně ověřit. To vede ke snaze budovat stále větší a větší urychlovače a také k intenzivnímu výzkumu jevů v kosmu. Sjednocování interakcí má totiž těsnou návaznost na vývoj vesmíru podle hypotézy o tzv. "velkém tresku". Právě v počátcích vývoje vesmíru by se měly všechny čtyři (resp. tři) interakce uplatňovat rovnocenným způsobem a teprve v průběhu dalšího vývoje a rozpínání vesmíru se postupně oddělovat. Tak jako počátky vzniku vědecké fyziky v 17. století jsou spjaty s astronomickými pozorováními sluneční soustavy, je i dnes fyzika stále více propojena s astrofyzikou. Vesmír zůstává největší fyzikální laboratoří.

1.4. Fyzika před rokem 1920

Je dost těžké začít hned se současnými představami, a proto se podívejme, jak se jevil svět v roce 1920 a potom na tomto obrázku něco změníme. Naše představa světa byla před rokem 1920 následující: „Scénou“, na které vystupuje vesmír, je *trojrozměrný geometrický prostor* popsany ještě Eukleidem a věci se mění v prostředí, které nazýváme časem. Prvky vystupující

na scéně jsou *částice*, například atomy, které mají určité vlastnosti. Především vlastnost setrvačnosti: pohybuje-li se částice, zachová si pohyb v původním směru, pokud na ni nepůsobí *síly*. Druhým prvkem jsou tedy síly, o nichž se tehdy předpokládalo, že jsou dvojího druhu. K prvním, velmi složitému druhu, patřila síla vzájemného působení, která udržovala atomy v jejich různých kombinacích komplikovaným způsobem a byla zodpovědná za to, jestli se sůl při zvyšování teploty rozpouští rychleji nebo pomaleji. Druhou známou silou byla interakce dalekého dosahu - hladké a klidné přitahování. Tato síla, měnící se nepřímo úměrně čtverci vzdálenosti, byla nazvána *gravitací*. Její zákon byl známý a byl velmi jednoduchý. Proč věci zůstávají v pohybu, když se už začaly pohybovat, nebo proč existuje gravitační zákon, bylo, samozřejmě, neznámé.

Zabýváme se popisem přírody. Z tohoto hlediska je plyn a právě tak všechna hmota myriádou pohybujících se částic. Takto se dostávají do souvislosti mnohé věci, které jsme viděli na mořském břehu. *Tlak* pochází od *srážek atomů* se stěnami nebo s čímkoliv jiným; atomy pohybující se převážně jedním směrem vytvářejí vítr; *chaotické vnitřní pohyby* představují *teplo*. Známe vlny zvýšené hustoty, kde se shromáždilo příliš mnoho částic, které při rozletu stlačují další shluky částic a pohyb se tak předává dál. Tyto vlny vyšší hustoty představují *í zvuk*. Pochopení tolika věcí je možno považovat za úžasný úspěch. O některých z těchto věcí jsme hovořili v předcházející kapitole.

Jaké druhy částic existují? Tehdy předpokládali, že je jich 92. Nakonec bylo objeveno 92 různých druhů atomů. Měly různá jména podle svých chemických vlastností.

Byl tu ještě problém *povahy sil krátkého dosahu*. Proč uhlík přitahuje jeden kyslík, případně dva, ale ne víc? Jaký je mechanismus vzájemného působení mezi atomy? Je to gravitace? Na tuto otázku musíme odpovědět záporně, protože gravitace je na to příliš slabá. Představme si však sílu podobnou gravitaci, měnící se nepřímo úměrně čtverci vzdálenosti, ale mnohem silnější a odlišnou ještě v jednom směru. V případě *gravitace jde vždy o přitahování*. Představme si však, že existují dva druhy „věcí“ a tato nová síla (samozřejmě elektrické povahy) má tu vlastnost, že věci stejného druhu se odpuzují a věci různého druhu se přitahují. „Předmět“, jenž je nositelem tohoto silného vzájemného působení, se nazývá *náboj*.

K čemu jsme došli? Předpokládejme, že máme dvě věci různého druhu, jež se vzájemně přitahují (plus a minus) a které drží těsně u sebe. Předpokládejme, že v určité vzdálenosti od uvedených dvojice máme další náboj. Bude tento náboj pocítovat přitažlivost? Mají-li první dva náboje stejnou velikost, neměl by pocítit *prakticky žádnou přitažlivost*, protože přitahování jedním nábojem a odpuzování druhým nábojem se vykompenzují. Ve velkých vzdálenostech je tedy síla velmi malá. Když třetí náboj *hodně přiblížíme* k prvním dvěma, objeví se přitahování, protože odpuzování stejných nábojů a přitahování různých se snaží oddálit stejné náboje a přiblížit různé. Odpuzování bude nakonec *slabší* než přitahování. To je příčina, proč atomy, které se skládají z kladných a záporných elektrických nábojů, na sebe téměř nepůsobí (zanedbáme-li gravitaci), jsou-li od sebe dost vzdáleny. Když se ale přiblíží, mohou „*vidět jeden do druhého*“, přeskupit své náboje a velmi silně vzájemně působit. Podstatou interakce mezi atomy je *elektrické* působení. Tato síla je tak velká, že všechny plusy a minusy se obvykle dostávají do tak těsné kombinace, jak je to jen možné. Všechny věci, včetně nás samotných, se skládají z drobných, velmi silně interagujících kladných a záporných částic, které jsou velmi přesně vyvážené. Na okamžik je možné náhodou odstranit několik minusů nebo plusů (obvykle je jednodušší odstranit minusy), v tu chvíli jsou elektrické síly *nevyvážené* a můžeme pozorovat působení elektrické přitažlivosti.

Abychom si vytvořili představu o tom, o kolik je elektrické působení silnější než gravitace, představme si dvě zrnka písku, která mají jeden milimetr v průměru a jsou vzdálená třicet

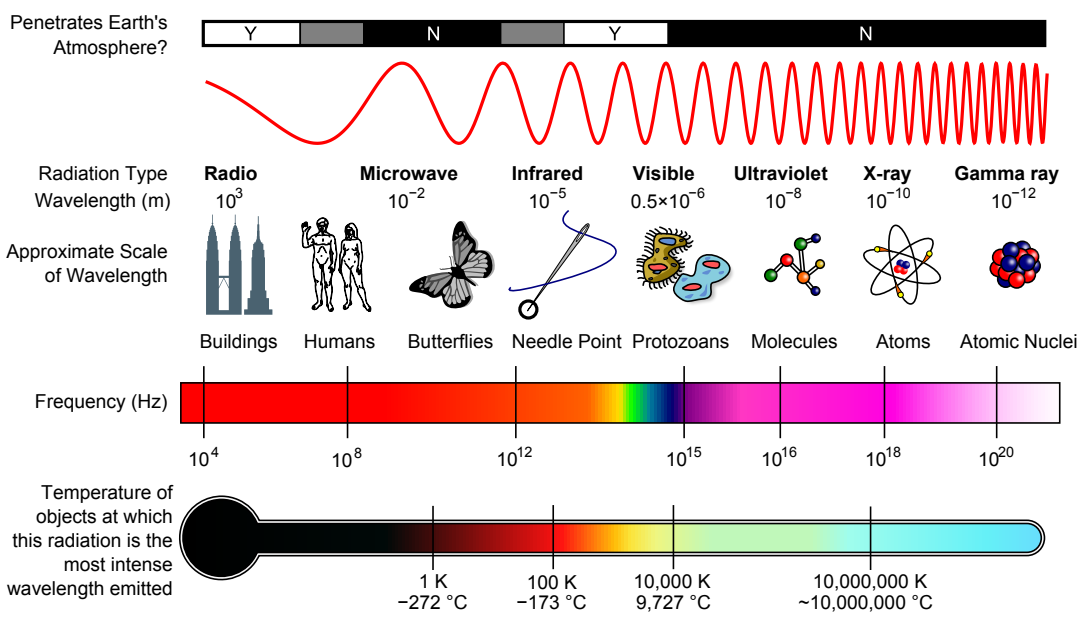
metrů. Kdyby elektrické síly mezi nimi nebyly vyvážené, kdyby nebylo odpuzování a vše se navzájem přitahovalo a nic se nekompenzovalo, jakou silou by se zrnka přitahovala? Byla by to síla tří miliónů tun. Jistě chápete, že pro vytvoření značného elektrického působení stačí velmi malý přebytek nebo nedostatek záporných nebo kladných nábojů. Proto není vidět rozdíl mezi elektricky nabitým a nenabitým předmětem - pro nabití předmětu je třeba tak málo částic, že se téměř neprojeví na jeho hmotnosti, či rozměru.

S těmito poznatky bylo jednodušší pochopit atomy. Předpokládalo se, že mají uprostřed „jádro“, které je kladně elektricky nabitě a velmi těžké, a toto jádro je obklopeno určitým počtem „elektronů“, jež jsou velmi lehké a záporně nabitě. Teď trochu pokročíme v našem výkladu a poznamenáme, že v samotných jádrech byly objeveny dva druhy částic - *protony* a *neutrony*, které mají téměř stejnou, velmi velkou hmotnost. Protony jsou elektricky nabitě a neutrony jsou neutrální. Máme-li atom se šesti protony v jádře, které je obklopeno šesti elektrony (záporné částice obyčejného světa jsou všechno elektrony a ty jsou velmi lehké v porovnání s protony a neutrony, které tvoří jádra), půjde o atom číslo šest v chemické tabulce a tento atom se nazývá uhlík. Atom číslo osm se nazývá kyslík atd. Chemické vlastnosti závisí na vnějších elektronech, ve skutečnosti jen na tom, kolik má atom elektronů. *Chemické vlastnosti* látek tedy závisí na jediném čísle, na *počtu elektronů*. (Seznam prvků sestavený chemiky by se mohl nahradit očíslováním 1, 2, 3, 4, 5 atd. Místo toho, abychom říkali „uhlík“, stačilo by říci „prvek číslo šest“, což by znamenalo, že prvek má šest elektronů. Při objevování prvků však tato skutečnost nebyla známa a dále, při číslování by vše vypadalo velmi složité. Proto je lepší ponechat prvkům názvy i symboly a nedožadovat se pouhého očíslování.)

O elektrické síle bylo získáno mnoho dalších poznatků. Bylo by přirozené předpokládat, že elektrická interakce je jednoduché přitahování dvou předmětů: kladného a záporného. Zjistilo se však, že toto není úplně vhodná představa. Situaci lépe vystihuje představa, že existence kladného náboje v prostoru způsobuje jeho jisté *zakřivení*, vytváří v něm určitou „podmínku“, aby záporný náboj vložený do tohoto prostoru cítil působení síly. Tato možnost vzniku síly se nazývá *elektrické pole*. Dostane-li se elektron do elektrického pole, je jakoby „tažen“. Přitom platí dvě pravidla: a) *náboje vytvářejí pole*, b) *v poli působí na náboje síly a náboje se pohybují*. Příčina takového chování se stane jasnější, jakmile rozebereme následující jev: Nabijeme-li těleso elektricky, například hřeben, a do určité vzdálenosti položíme nabitý ústřížek papíru, přičemž začneme hřebem pohybovat sem a tam, bude se papír natáčet směrem k hřebenu. Zrychlíme-li pohyb hřebenu, zjistíme, že papír zaostává, působení se opoždí. (V prvním stádiu, když pohybujeme hřebem poměrně pomalu, zkomplikuje nám situaci *magnetismus*. Magnetické vlivy se projevují, když jsou *náboje v relativním pohybu*, takže magnetické a elektrické síly je možné skutečně připsat jedinému poli jako dvě stránky jedné věci. Měnící se elektrické pole nemůže existovat bez magnetizmu.) Oddálíme-li nabitý papír, zpoždění je větší. V tu chvíli pozorujeme zajímavou věc. Ačkoliv se síly působící mezi dvěma nabitými předměty mění nepřímo úměrně čtverci vzdálenosti, při kmitání náboje zjišťujeme, že jeho působení se rozprostírá mnohem dále, než by se dalo očekávat. Pokles tohoto působení je mnohem pomalejší než při nepřímé úměrnosti čtverci vzdálenosti.

S analogickou situací se setkáváme, když na vodě plave splávek a my ho uvedeme do pohybu „přímo“ tím, že způsobíme pohyb vody jiným splávkem. Kdybychom se dívali jen na dva splávky, pozorovali bychom pouze to, že jeden se dává do pohybu jako odezva na pohyb druhého, že mezi nimi existuje určitá „interakce“. Ve skutečnosti jsme ale rozčeřili vodu a voda posunula druhý splávek. Mohli bychom zformulovat „zákon“, že i při slabém zčeření vody se na vodě budou pohybovat předměty nacházející se blízko zdroje zčeření. Kdyby byl druhý splávek dost daleko, sotva by se dal do pohybu, neboť jsme uvedli vodu do pohybu jen v

jednom místě. Bude-li však druhý splávek pravidelně kmitat, vznikne nový úkaz, při kterém se pohyb vody přenáší dál, vzniká *vlnění* a vliv poskakujícího splávku již nemůžeme chápat jako přímé působení mezi splávky. Myšlenku přímé interakce tedy musíme nahradit předpokladem o existenci vody nebo v případě elektrických nábojů tím, co nazýváme *elektromagnetickým polem*.



Obrázek 1.12.: Elektromagnetické spektrum (někdy zvané Maxwelllova duha) zahrnuje elektromagnetické záření všech možných vlnových délek. Srovnání délek elektromagnetických vln s běžnými předměty a odpovídající teplotní stupnice umožňuje lépe získat představu o jejich rozměrech a energiích.

Elektromagnetické pole může přenášet vlny. Některé z těchto vln jsou světlo jak je znázorněno na obrázku 1.12, jiné se používají při rádiovém vysílání, ale obecně se nazývají *elektromagnetickými vlnami*. Tyto vlny mohou mít rozmanité *frekvence*. Jediné, čím se jedna vlna liší od druhé, je právě frekvence vlnění. Kdybychom pohybovali nábojem sem a tam a dělali bychom to stále rychleji a rychleji, objevovala by se celá řada různých jevů, které je možné systematizovat udáním čísla vyjadřujícího počet kmitů za sekundu. Frekvence, s nimiž přicházíme do styku prostřednictvím běžných rozvodových elektrických sítí v domech, jsou řádově sto kmitů za sekundu. Zvýšíme-li frekvenci na 500 kHz nebo 1000 kHz (1 kHz = 1000 kmitů za sekundu), dostáváme se z domů ven, „na vzduch“, neboť máme co činit s frekvencemi používanými při rozhlasovém vysílání. (Se vzduchem to ale nemá co dělat! Rádiové vlny se mohou šířit i v prostoru, v němž není vzduch.) Zvyšujeme-li frekvenci, dostáváme se do oblasti VKV a televizního vysílání. Při ještě vyšších frekvencích máme velmi krátké vlny, které se využívají např. v *radiolokaci*. Kdybychom šli ještě výše, nepotřebovali bychom už zařízení na registraci takových vln, protože bychom je viděli naším zrakem. Kdybychom dokázali pohybovat nabitým hřebem tak rychle, aby kmital s frekvencemi od 5 · 10¹⁴ Hz do 5 · 10¹⁵ Hz, viděli bychom

toto kmitání jako červené, modré nebo fialové světlo v závislosti na frekvenci. Frekvence pod touto oblastí nazýváme *infračervenými* a nad touto oblastí *ultrafialovými*. Skutečnost, že naše vidění je omezeno na určitou frekvenční oblast, nedělá tuto oblast elektromagnetického spektra z fyzikálního hlediska důležitější než jiné oblasti, avšak z lidského hlediska je tato oblast přece jen zajímavější. Kdybychom frekvenci ještě zvýšili, dostali bychom *rentgenové paprsky*. Tyto paprsky nejsou nic jiného, než světlo s velmi vysokou frekvencí. Ještě vyšším frekvencím odpovídá *záření gama*. Výrazy rentgenové paprsky a záření gama jsou téměř synonyma. Zářením gama nazýváme obvykle elektromagnetické vlny pocházející z jader a rentgenovými paprsky vlny pocházející z atomů; při shodě jejich frekvencí jsou však fyzikálně nerozlišitelné, bez zřetele na jejich původ. Vlny ještě vyšších frekvencí, řekněme $10 \cdot 10^{24}$ Hz, lze získat uměle, například na *synchrotronu* v Caltechu. Elektromagnetické vlny úžasně vysokých frekvencí (až tisíckrát vyšších) je možné najít ve vlnách *kosmického záření*. Tyto vlny však neumíme ovládat. [2, s. 29]

1.5. Kvantová Fyzika

Když jsme načrtli představu elektromagnetického pole, v němž se mohou šířit vlny, brzy zjistíme, že tyto vlny se chovají nezvykle, jako kdyby to ani vlny nebyly. Při vyšších frekvencích se více podobají *částicím*! Jejich neobvyklé chování vysvětluje *kvantová mechanika*, jejíž vznik je spojován s obdobím těsně po roce 1920. Před rokem 1920 pozměnil Einstein obraz trojrozměrného prostoru a nezávislého času nejdříve na kombinaci, kterou nazýváme *prostorčasem* a potom na *zakřivený* prostorčas, aby vystihl gravitaci. „Scéna“ se změnila na prostorčas a o gravitaci předpokládáme, že je modifikací prostorčasu. Zjistilo se dokonce, že zákony pro pohyb částic jsou nepřesné. Mechanické zákony „setrvačnosti“ a „síly“ jsou *nesprávné* - Newtonovy zákony neplatí ve světě atomů. Zjistilo se, že věci se v malém měřítku chovají úplně jinak než věci ve velkém měřítku. To dělá fyziku obtížnou, ale velmi zajímavou. Obtížnou proto, že chování věcí malých rozměrů je pro nás „nepřirozené“, nemáme v tomto směru přímé zkušenosti. Věci se tu chovají úplně jinak, než jsme zvyklí, a proto není možné popsat jejich chování jinak, než analyticky. Takový popis je těžký a vyžaduje mnoho představivosti.

Kvantová mechanika má mnoho zvláštností. Především vylučuje předpoklad, že částice má určitou polohu a určitou rychlost. Abychom ukázali, do jaké míry je klasická fyzika správná, uvedeme pravidlo kvantové mechaniky, které říká, že není možné současně vědět, kde se něco nachází a jak rychle se to pohybuje. Neurčitost v hybnosti a neurčitost v poloze jsou *komplementární* a jejich součin je konstantní. Můžeme to zapsat následujícím způsobem: $\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{2\pi}$. Podrobněji bude o tomto principu mluveno později. Vysvětluje se tím velmi záhadný paradox: jsou-li atomy složeny z kladných a záporných nábojů, proč se záporný náboj prostě neusadí na kladném náboji (tyto náboje se přitahují) a to tak těsně, že by ho úplně vyrušil? *Proč jsou atomy tak velké?* Proč je jádro uprostřed a elektrony okolo něho? Zpočátku se myslelo, že příčinou je velký rozměr jádra; jenže jádro je velmi malé. Atom má průměr okolo $10 \cdot 10^{-10}$ m. Jádro má průměr asi $10 \cdot 10^{-15}$ m. Kdybychom měli atom a chtěli bychom vidět jeho jádro, museli bychom ho zvětšit tak, aby dosáhl velikosti místnosti a i potom by bylo jádro malé jako skvrnka, kterou sotva spatříte okem, ale téměř *všechna hmotnost* atomu připadá na toto nepatrné jádro. Co brání elektronu prostě spadnout na jádro? Právě uvedený princip. Kdyby elektrony byly v jádru, znali bychom přesně jejich polohu a princip neurčitosti by si potom vyžadoval, aby měly velmi velkou (ale *neurčitou*) hybnost, tj. velmi velkou *kinetickou energii*.

S takovou energií by se odtrhly od jádra. Dochází proto ke kompromisu: elektrony si ponechají jakýsi prostor pro tuto neurčitost a potom se ve shodě s tímto pravidlem pohybují s jistým minimálním množstvím pohybu. (Vzpomeňte si, že atomy krystalu při ochlazení na absolutní nulu neustaly ve svém pohybu, ale přece jen kmitaly. Proč? Kdyby se přestaly pohybovat, věděli bychom, kde se nacházejí a že mají nulový pohyb a to by bylo v rozporu s principem neurčitosti. Nemůžeme vědět, kde jsou a jak rychle se pohybují; proto atomy musí neustále kmitat!)

Jinou, velmi zajímavou změnou v ideách a filozofii vědy, kterou přinesla kvantová mechanika, je nemožnost přesně předpovědět, co se za jakýchkoli daných okolností odehraje. Například, je možné připravit atom, který bude emitovat světlo, a můžeme zjistit, kdy k této emisi došlo tím, že zachytíme foton (o tomto si brzy řekneme více). Nemůžeme však dopředu předpovědět, kdy se skuteční emise světla, nebo v případě více atomů, který z nich bude emitovat světlo. Možná se domníváte, že je to proto, že v atomu se nacházejí jakási vnitřní „kolečka“, která jsme ještě nerozeznali. Ne, taková vnitřní kolečka neexistují! Příroda, tak jak ji dnes chápeme, se chová tak, že je principiálně nemožné přesně předpovědět, co se skutečně stane v daném experimentu.

Opět se vrátíme ke kvantové mechanice a základní fyzice, ale nebudeme zabíhat do podrobností kvantové mechanických principů, protože jsou dost těžké k pochopení. Budeme prostě předpokládat jejich existenci a ukážeme, k jakým následkům vedou. Jedním z následků je, že věci, které jsme považovali za vlny, se chovají jako částice a částice zase jako vlny; ve skutečnosti se tedy všechno chová stejně. Není rozdíl mezi vlnou a částicí. **Kvantová mechanika sjednocuje myšlenku pole, jeho vln a částic vjedno.** Při nízkých frekvencích je aspekt pole více zřejmý, resp. užitečnější pro přibližný popis vyjádřený řečí naší každodenní zkušenosti. Se vzrůstem frekvence však zařízení, které obvykle používáme v experimentu, poskytuje spíše důkazy o částicích. I když mluvíme o vysokých frekvencích, musíme přiznat, že v oblasti frekvencí nad $10 \cdot 10^{12}$ Hz nebyl zatím zjištěn žádný jev přímo související s frekvencí. K existenci vyšších frekvencí docházíme pouze úvahou vycházející z energie částic a předpokladu správnosti *vlnově-korpuskulární představy kvantové mechaniky*.

Takto docházíme i k novému pohledu na *elektromagnetickou interakci*. Kromě elektronu, protonu a neutronu existuje nový druh částice. Tuto částici nazýváme foton. Nový pohled na interakci elektronů a protonů, tj. *elektromagnetickou teorii*, která zároveň *splňuje* zákonitosti *kvantové mechaniky*, nazýváme *kvantovou elektrodynamikou*. Tato základní teorie *interakce světla a hmoty*, nebo *elektrického pole a nábojů*, je dosud největším úspěchem fyziky. V této jediné teorii máme základní zákony, jimiž se řídí všechny známé jevy s výjimkou gravitace a jaderných procesů. Pomocí kvantové elektrodynamiky můžeme vysvětlit všechny známé zákony mechaniky, elektřiny a chemie. Plynou, zní zákony srážek kulečnickových koulí, pohyb vodičů v magnetickém poli i tepelná kapacita oxidu uhelnatého, barva neonových reklam, hustota soli, reakce vodíku a kyslíku při vzniku vody - to vše jsou následky jediného zákona. Všechny tyto detaily je možné získat, je-li situace dost jednoduchá na to, abychom ji mohli přibližně popsat. To sice není splněno téměř nikdy, často však můžeme pochopit více či méně, co se vlastně děje. Dosud se neobjevily žádné výjimky ze zákonů kvantové elektrodynamiky, až na atomová jádra. O jádrech však nemůžeme říci, jestli jde v jejich případě o výjimku, protože vlastně nevíme, jaké procesy v nich probíhají. Při budování teorie jádra musíme překonat tři hlavní problémy:

1. Není znám přesný tvar sil působících mezi nukleony v jádře,
2. rovnice popisující pohyb nukleonů v jádře jsou velmi komplikované – problém matematického popisu,

3. jádro má zároveň příliš mnoho nukleonů (nedá se popsat pohyb každé jeho částice) i příliš málo (nedá se popsat jako makroskopické spojitě prostředí).

Proto se musíme spokojit pouze s modely atomového jádra.

V podstatě je kvantová elektrodynamika teorií celé chemie a všech životních procesů, je-li možné život v konečném důsledku redukovat na chemii, nebo vlastně na fyziku, protože chemie vede k fyzice (a ta část fyziky, která se uplatňuje v chemii, je již dobře známá). Navíc, kvantová elektrodynamika - ta úžasná vědní disciplína - předpověděla mnoho nových věcí. Především mluví o vlastnostech fotonů velmi velkých energií, paprscích gama apod. Předpověděla i jinou, velmi pozoruhodnou věc: kromě elektronu musí existovat jiná částice se stejnou hmotností, ale s opačným nábojem, tzv. *pozitron* a elektron s pozitronem mohou při srážce anihilovat, přičemž se vyzáří světlo nebo paprsky gama (což je vlastně totéž, neboť světlo i záření gama se liší polohou ve frekvenční škále elektromagnetických vln). Zobecnění poznatku, že ke každé částici existuje antičástice, se ukazuje být pravdivým. V případě elektronů má antičástice jiné jméno - nazývá se pozitronem, ale u většiny jiných částic mluvíme o anti-tom a tom, např. o antiprotonu nebo antineutronu. Do kvantové elektrodynamiky se vkládají *dvě čísla* a o většině ostatních čísel ve světě se předpokládá, že jsou následkem těchto dvou. Tato dvě vkládaná čísla nazýváme hmotností a nábojem elektronu. Ve skutečnosti to však není úplně tak, neboť máme celý soubor chemických čísel, která hovoří o tom, jak těžká jsou jádra. To nás přivádí k další kapitole.

1.6. Jádra a Částice

Z čeho jsou jádra a jak drží pohromadě? Zjistilo se, že jádra jsou udržována obrovskými silami. Při uvolnění těchto sil se uvolňuje energie, která je obrovská v porovnání s chemickou energií, tak jak je obrovský výbuch atomové bomby v porovnání s výbuchem trinitrotoluenu. U atomové bomby jde totiž o změny uvnitř jádra, zatímco výbuch trinitrotoluenu souvisí se změnami elektronového obalu atomů. Proto si klademe otázku: co jsou to za síly, které udržují protony a neutrony v jádře pohromadě? Tak, jako je možné elektrické působení přisoudit částici - fotonu, předpokládal Yukawa, že i síly mezi neutrony a protony mají svá pole a kmity tohoto pole se chovají jako částice. Kromě neutronů a protonů by proto měly existovat jiné částice a Yukawa odvodil vlastnosti těchto částic z již známých charakteristik jaderných sil. Například, předpověděl, že by měly mít hmotnost dvěstě až třístakrát větší než elektron; a div se světe - v kosmickém záření byly objeveny částice s takovouto hmotností! Později se ukázalo, že to nebyla ta správná částice. Tuto částici nazvali μ -mezon neboli *mion*.

Trochu později, v roce 1947 nebo 1948, byla objevena jiná částice, π -mezon neboli *pion*, která vyhovovala Yukawovu kritériu. Abychom získali jaderné síly, musíme k protonu a neutronu přidat pion. A teď si řeknete: „Och, jak velkolepé! - pomocí této teorie vybudujeme nukleodynamiku, ve které budou mít piony takovou úlohu, jakou jim přisoudil Yukawa a všechno bude vysvětleno“. Ta věc má však háček! Ukázalo se, že výpočty v této teorii jsou tak složité, že se dodnes nikomu nepodařilo odvodit všechny důsledky této teorie, nebo ji porovnat s experimentem; a to se už táhne spoustu let!

Máme tedy teorii, ale nevíme, jestli je správná nebo nesprávná. Víme však už, že je trochu chybná, nebo aspoň neúplná. Zatím co jsme marnili čas teorií a snažili se odvodit její důsledky, experimentátoři některé věci objevili. Například, objevili μ -mezon neboli mion a my ani nevíme, jaká je jeho úloha. V kosmickém záření se našel velký počet dalších „přebytečných“ částic.

Dnes máme přibližně tři sta takových částic a je velmi těžké porozumět vztahům mezi těmito částicemi a pochopit, na co je příroda potřebuje, nebo která z nich na které závisí. Dnes tyto různé částice nechápeme jako různé aspekty téže věci a skutečnost, že máme tak mnoho ne-souvisejících částic, je odrazem toho, že máme tak mnoho ne-souvisejících informací bez dobré teorie. Po ohromném úspěchu kvantové elektrodynamiky máme jisté znalosti z jaderné fyziky, ale jen hrubé znalosti, částečně experimentální a částečně teoretické. Vycházíme přitom z charakteru sil působících mezi protony a neutrony a sledujeme, co z toho vyplyne, ale v podstatě nechápeme, odkud ty síly pocházejí. Kromě toho nebylo dosaženo téměř žádného pokroku. Objevíli jsme velký počet chemických prvků. Mezi těmito prvky se najednou objevila souvislost, neočekávaná souvislost zakotvená v Mendělejevově periodické tabulce prvků. Například, sodík a draslík jsou téměř shodné ve svých chemických vlastnostech a v Mendělejevově tabulce se nacházejí ve stejném sloupci. Hledala se tabulka Mendělejevova typu pro nové částice. Taková tabulka nových částic byla sestavena nezávisle Gell-Mannem v USA a Nishijimou v Japonsku. Základem jejich klasifikace je nové číslo, jež je možno, podobně jako elektrický náboj, přiřadit každé částici a které se nazývá její „podivností“ S (od anglického slova strangeness). Toto číslo se, podobně jako elektrický náboj, zachovává v reakcích vyvolávaných jadernými silami.

Seznam literatury

- [1] R. Feynman, R. Leighton a S. Matthew, *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 1/3*, I. Štoll, ed. Nakladatelství Fragment, 2000, s. 732, ISBN: 80-7200-405-0. WWW: <http://librarian/stable.php?id=458> (cit. na s. 34–37).
- [2] ———, *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*, I. Štoll, ed. Nakladatelství Fragment, 2000, s. 806, ISBN: 80-7200-420-4. WWW: <http://librarian/stable.php?id=250> (cit. na s. 39, 42).

Část IV

FYZ II

Část V

TEMP