02讲余数：原来取余操作本身就是个哈希函数

你好，我是黄申。今天我们来聊聊“余数”。

提起来余数，我想你肯定不陌生，因为我们生活中就有很多很多与余数相关的例子。

比如说，今天是星期三，你想知道50天之后是星期几，那你可以这样算，拿50除以7（因为一个星期有7天），然后余1，最后在今天的基础上加一天，这样你就能知道50天之后是星期四了。

再比如，我们做Web编程的时候，经常要用到分页的概念。如果你要展示1123条数据，每页10条，那该怎么计算总共的页数呢？我想你肯定是拿1123除以10，最后得到商是112，余数是3，所以你的总页数就是112+1=113，而最后的余数就是多出来，凑不够一页的数据。

看完这几个例子，不知道你有没有发现，**余数总是在一个固定的范围内**。

比如你拿任何一个整数除以7，那得到的余数肯定是在0～6之间的某一个数。所以当我们知道1900年的1月1日是星期一，那便可以知道这一天之后的第1万天、10万天是星期几，是不是很神奇？

你知道，整数是没有边界的，它可能是正无穷，也可能是负无穷。但是余数却可以通过某一种关系，让整数处于一个确定的边界内。我想这也是人类发明星期或者礼拜的初衷吧，任你时光变迁，我都是以7天为一个周期，“周”而复始地过着确定的生活。因为从星期的角度看，不管你是哪一天，都会落到星期一到星期日的某一天里。

我们再拿上面星期的例子来看。假如今天是星期一，从今天开始的100天里，都有多少个星期呢？你拿100除以7，得到商14余2，也就是说这100天里有14周多2天。换个角度看，我们可以说，这100天里，你的第1天、第8天、第15天等等，在余数的世界里都被认为是同一天，因为它们的余数都是1，都是星期一，你要上班的日子。同理，第2天、第9天、第16天余数都是2，它们都是星期二。

这些数的余数都是一样的，所以被归类到了一起，有意思吧？是的，我们的前人早已注意到了这一规律或者特点，所以他们把这一结论称为**同余定理**。简单来说，就是两个整数a和b，如果它们除以正整数m得到的余数相等，我们就可以说a和b对于模m

同余。

也就是说，上面我们说的100天里，所有星期一的这些天都是同余的，所有星期二的这些天就是同余的，同理，星期三、星期四等等这些天也都是同余的。

还有，我们经常提到的奇数和偶数，其实也是同余定理的一个应用。当然，这个应用里，它的模就是2了，2除以2余0，所以它是偶数；3除以2余1，所以它是奇数。2和4除以2的余数都是0，所以它们都是一类，都是偶数。3和5除以2的余数都是1，所以它们都是一类，都是奇数。

你肯定会说，同余定理就这么简单吗，这个定理到底有什么实际的用途啊？其实，我上面已经告诉你答案了，你不妨先自己思考下，同余定理的意义到底是什么。

简单来说，**同余定理其实就是用来分类的**。你知道，我们有无穷多个整数，那怎么能够全面、多维度地管理这些整数？同余定理就提供了一个思路。

因为不管你的模是几，最终得到的余数肯定都在一个范围内。比如我们上面除以7，就得到了星期几；我们除以2，就得到了奇偶数。所以按照这种方式, 我们就可以把无穷多个整数分成有限多个类。

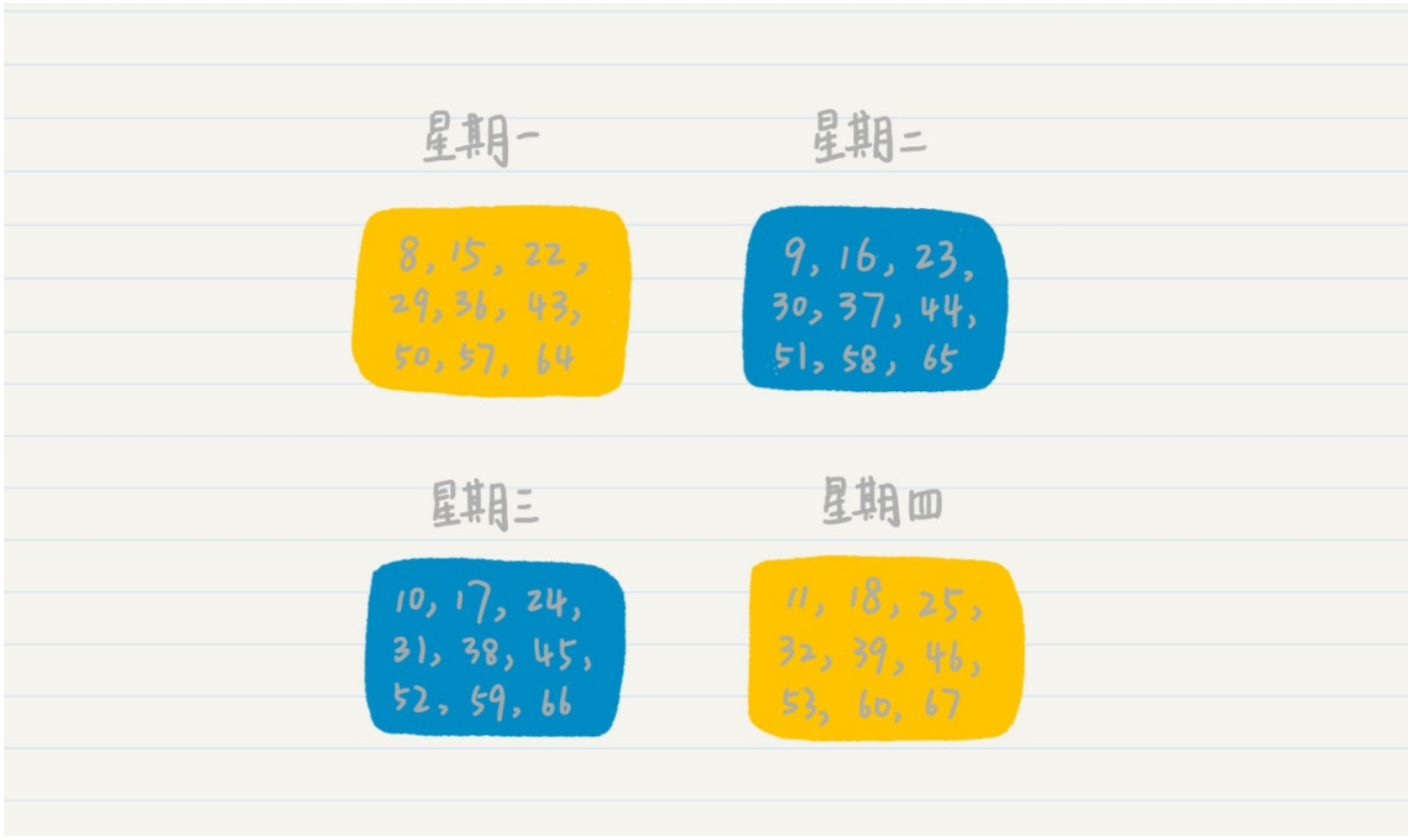
这一点，在我们的计算机中，可是有大用途。

哈希（Hash）你应该不陌生，在每个编程语言中，都会有对应的哈希函数。哈希有的时候也会被翻译为散列，简单来说，它就是**将任意长度的输入，通过哈希算法，压缩为某一固定长度的输出**。这话听着是不是有点耳熟？我们上面的求余过程不就是在做这事儿吗?

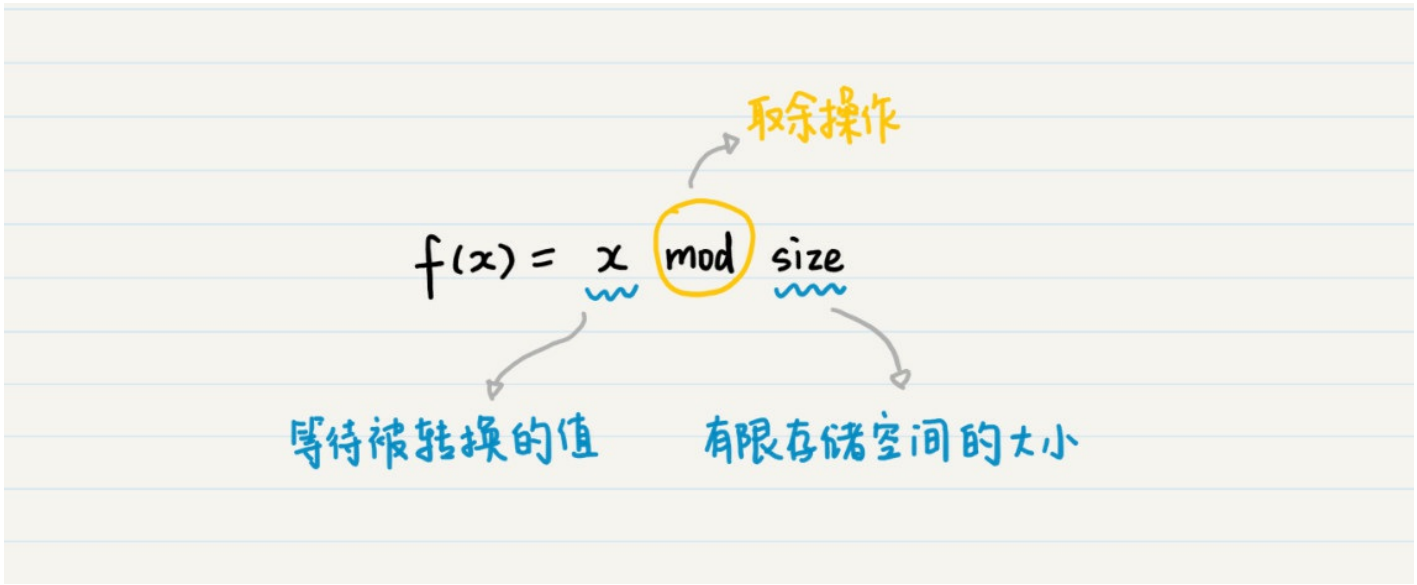
举个例子，假如你想要快速读写100万条数据记录，要达到高速地存取，最理想的情况当然是开辟一个连续的空间存放这些数据，这样就可以减少寻址的时间。但是由于条件的限制，我们并没有能够容纳100万条记录的连续地址空间，这个时候该怎么办呢?

我们可以考察一下，看看系统是否可以提供若干个较小的连续空间，而每个空间又能存放一定数量的记录。比如我们找到了100个较小的连续空间，也就是说，这些空间彼此之间是被分隔开来的，但是内部是连续的，并足以容纳1万条记录连续存放，那么我们就可以使用余数和同余定理来设计一个散列函数，并实现哈希表的结构。

那这个函数应该怎么设计呢？你可以先停下来思考思考，提醒你下，你可以再想想星期几的那个例子，因为这里面用的就是余数的思想。

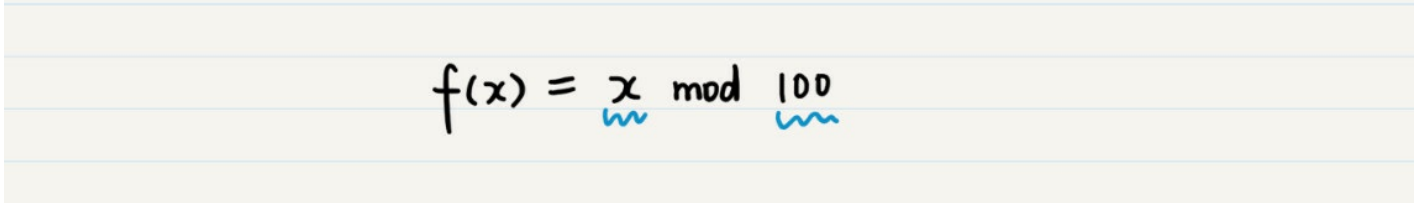


下面是我想到的一种方法：



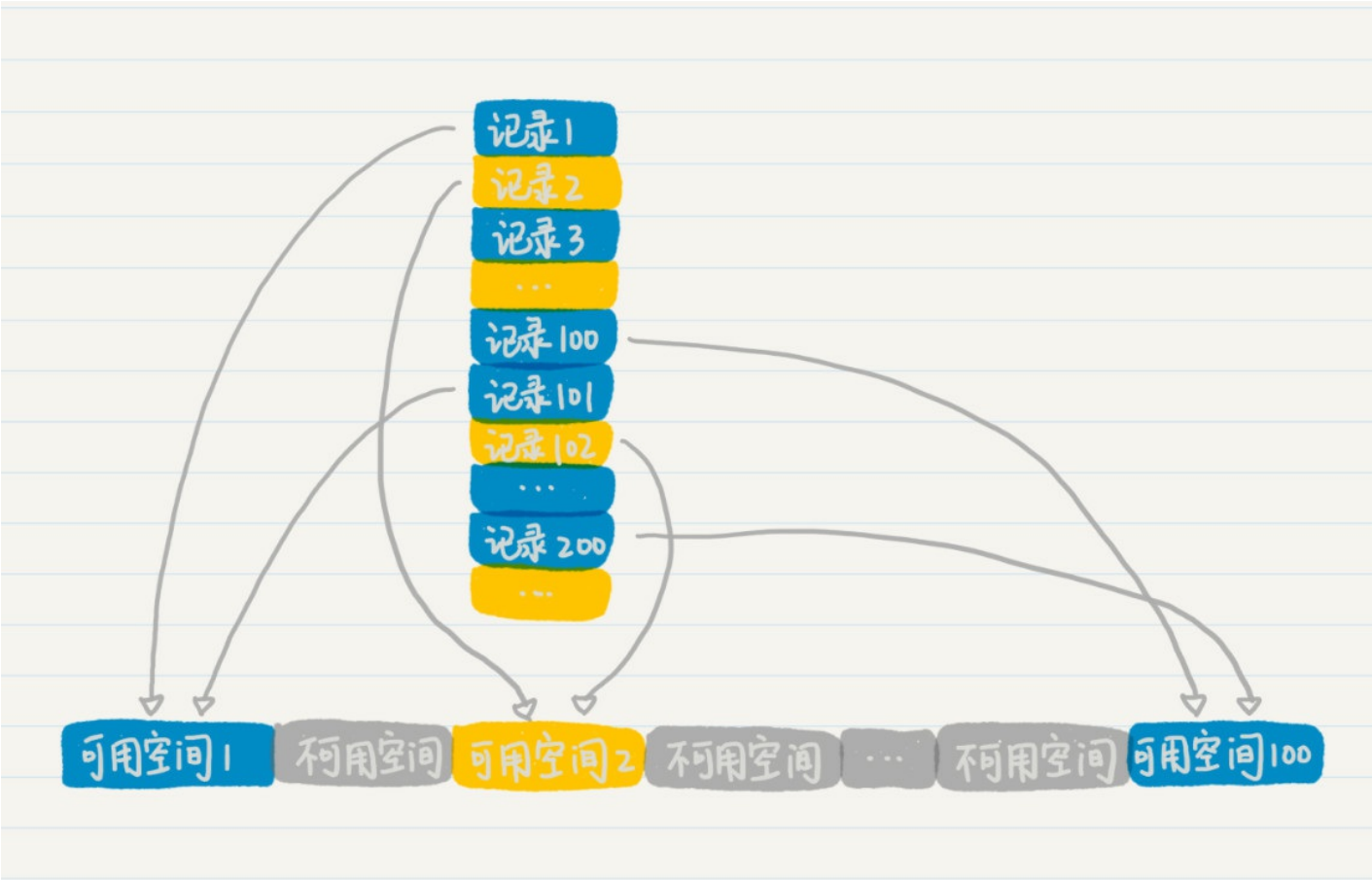
在这个公式中，x表示等待被转换的数值，而size表示有限存储空间的大小，mod表示取余操作。**通过余数，你就能将任何数值，转换为有限范围内的一个数值，然后根据这个新的数值，来确定将数据存放在何处。**

具体来说，我们可以通过记录标号模100的余数，指定某条记录存放在哪个空间。这个时候，我们的公式就变成了这样：

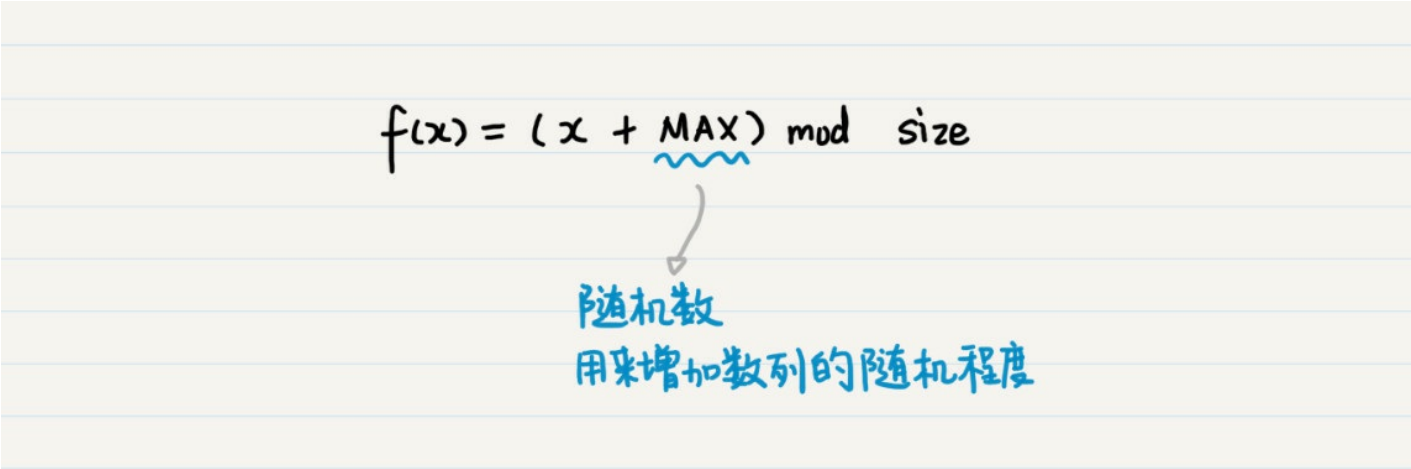


假设有两条记录，它们的记录标号分别是1和101。我们把这些模100之后余数都是1的，存放到第1个可用空间里。以此类推，将余数为2的2、102、202等，存放到第2个可用空间，将100、200、300等存放到第100个可用空间里。

这样，我们就可以根据求余的快速数字变化，对数据进行分组，并把它们存放到不同的地址空间里。而求余操作本身非常简单，因此几乎不会增加寻址时间。



除此之外，为了增加数据散列的随机程度，我们还可以在公式中加入一个较大的随机数MAX，于是，上面的公式就可以写成这样：



我们假设随机数MAX是590199，那么我们针对标号为1的记录进行重新计算，最后的计算结果就是0，而针对标号101的记录，如果随机数MAX取627901，对应的结果应该是2。这样先前被分配到空间1的两条记录，在新的计算公式作用下，就会被分配到不同的可用空间中。

你可以尝试记录2和102，或者记录100和200，最后应该也是同样的情况。你会发现，使用了MAX这个随机数之后，被分配到

同一个空间中的记录就更加“随机”，更适合需要将数据重新洗牌的应用场景，比如加密算法、MapReduce中的数据分发、记录的高速查询和定位等等。

让我以加密算法为例，在这里面引入MAX随机数就可以增强加密算法的保密程度，是不是很厉害？举个例子，比如说我们要加密一组三位数，那我们设定一个这样的加密规则：

1. 先对每个三位数的个、十和百位数，都加上一个较大的随机数。
2. 然后将每位上的数都除以7，用所得的余数代替原有的个、十、百位数；
3. 最后将第一位和第三位交换。

这就是一个基本的加密变换过程。

假如说，我们要加密数字625，根据刚才的规则，我们来试试。假设随机数我选择590127。那百、十和个位分别加上这个随机数，就变成了590133，590129，590132。然后，三位分别除以7求余后得到5，1，4。最终，我们可以得到加密后的数字就是415。因为加密的人知道加密的规则、求余所用的除数7、除法的商、以及所引入的随机数590127，所以当拿到415的时候，加密者就可以算出原始的数据是625。是不是很有意思？

小结

到这里，余数的所有知识点我们都讲完了。我想在此之前，你肯定是知道余数，也明白怎么求余。但对于余数的应用不知道你之前是否有思考过呢？我们经常说，数学是计算机的基础，在余数这个小知识点里，我们就能找到很多的应用场景，比如我前面介绍的散列函数、加密算法，当然，也还有我们没有介绍到的，比如循环冗余校验等等。

余数只是数学知识中的沧海一粟。你在中学或者大学的时候，肯定接触过很多的数学知识和定理，编程的时候也会经常和数字、公式以及数据打交道，但是真正学懂数学的人却没几个。希望我们可以从余数这个小概念开始，让你认识到数学思想其实非常实用，用好这些知识，对你的编程，甚至生活都有意想不到的作用。

今日学习笔记

第2节　余数

1. 余数的特性

整数是没有边界的，它可能是正无穷，也可能是负无穷。余数却总是在一个固定的范围内。生活中，余数可以用来算星期，web编程中可以用在分页中。

2. 同余定理

两个整数a和b，如果它们除以正整数m得到的余数相等，我们就可以说，a和b对于模m同余。同余定理其实就是用来分类的。

3. 求余过程就是个哈希函数

每个编程语言都有对应的哈希函数。哈希有的时候也会被翻译为散列，简单来说就是将任意长度的输入，通过哈希算法压缩为某一固定长度的输出。

思考题

你可以想想，在生活和编程中，还有哪些地方用到了余数的思想呢?

欢迎在留言区交作业，并写下你今天的学习笔记。你可以点击“请朋友读”，把今天的内容分享给你的好友，和他一起精进。

精选留言

唐瑞甫

既然提到了hash+salt 建议可以稍微多聊一点，在现实场景中更容易碰到

2018-12-12 08:47

我来也

关于文中的例子有点不解:

"假如说，我们要加密数字 625，根据刚才的规则，我们来试试。假设随机数我选择 590127。那百、十和个位分别加上这个随机数，就变成了 590133，590129，590132。然后，三位分别除以 7 求余后得到 5，1，4。最终，我们可以得到加密后的数字就是 415。因为加密的人知道加密的规则、求余所用的除数 7、除法的商、以及所引入的随机数 590127，所以当拿到 415 的时候，加密者就可以算出原始的数据是 625。是不是很有意思？"

正向加密可以理解.

反向解密感觉有点问题呀.

625中间的数字2: (2 + 590127)%7 = 1. 但是(9 + 590127)%7 = 1

那么625和695最终加密后的结果都是415啊.

那就不一定能还原出来原始的值了啊.

另外,如果最后一位数字加密后的结果是0, 交换位置后, 会有麻烦吧.

2018-12-12 18:05

作者回复

这里还要用到除法中的商

2018-12-12 23:00

Only
now
尾号限行啊！
2018-12-12 17:31

作者回复

这个例子
2018-12-12 23:32

acheng
最大公约数，模幂运算(DES、AES、RSA)，凯撒密码，孙子定理，都是以模运算为基础的。
2018-12-12 07:27

Transient
在各种进制转换的过程中也需要用到余数。例如：十进制的100转换成二进制，就可以使用循环取余。还有就是在求水仙花数的时候，取十进制上每一位的数值的过程中可以使用取余运算
2018-12-12 07:48

作者回复

是的，融汇贯通，赞
2018-12-12 12:30

蒋宏伟
个人觉得余数用分类来形容有些不恰当，当更恰当的词是均分。分类，每类数量不一定相同，当均分，每类数量是相同的。
2018-12-15 01:12

作者回复

确实分类这个词有歧义，常规的取余是均分
2018-12-15 04:52

小花小黑的铲屎官
模运算最大的特点就是不可逆，https就是利用这个原理通过非对称加密协商出对称密钥的。
2018-12-12 21:30

石头

```
public static int encryptionNum(int num) {
System.out.println("加密前：" + num);
// 1.取余 并 加上随机数
int bit = num % 10;
int tenBit = num % 100 / 10;
int hundredBit = num % 1000 / 100;
System.out.println(bit + "\t" + tenBit + "\t" + hundredBit);
bit = bit + MAX;
tenBit = tenBit + MAX;
hundredBit = hundredBit + MAX;
System.out.println(bit + "\t" + tenBit + "\t" + hundredBit);
// 2.每个位数 除以7 取余代替原来的个十百
bit = bit % MULTIPLE;
tenBit = tenBit % MULTIPLE;
hundredBit = hundredBit % MULTIPLE;
System.out.println(bit + "\t" + tenBit + "\t" + hundredBit);
// 3.swap 第一位和第三位
int temp;
temp = bit;
bit = hundredBit;
hundredBit = temp;
System.out.println(bit + "\t" + tenBit + "\t" + hundredBit);
int result = bit + tenBit * 10 + hundredBit * 100;
System.out.println("加密结果为：" + result);
return result;
}
```

```
public static int decryptNum(int num) {
System.out.println("解密前：" + num);
// 1.取余
int bit = num % 10;
int tenBit = num % 100 / 10;
int hundredBit = num % 1000 / 100;
// 2.交互位数
int temp;
temp = bit;
bit = hundredBit;
hundredBit = temp;
// 3.乘回7的倍数
// 这里可能有bug 只能针对当前的MAX值 如果换了一个随机值 要考虑 是否要+1
int temp2 = (MAX / MULTIPLE) + 1;
bit = bit + temp2 * MULTIPLE;
tenBit = tenBit + temp2 * MULTIPLE;
hundredBit = hundredBit + temp2 * MULTIPLE;
// 4.减去随机数
bit = bit - MAX;
tenBit = tenBit - MAX;
hundredBit = hundredBit - MAX;
System.out.println(bit + "\t" + tenBit + "\t" + hundredBit);
int result = bit + tenBit * 10 + hundredBit * 100;
System.out.println("解密结果为：" + result);
return result;
}
```

2018-12-12 10:15

云在飘

为老师最后的学习笔记点赞

2018-12-12 09:21

smarttime

老师能不能再深入些，这些太表面化了，另同问加密之后怎么解密的，规则没说3个数字除以7商要相同吧！多讲些实际应用，文章字数有些少！

2018-12-13 09:56

作者回复

好的 在后面的文章中我多用一些实例

2018-12-13 12:08

loyt

今天知道了什么是散列

2018-12-14 15:20

指间砂的宿命

生活中的话，闰年的计算就是典型的余数决定了

2018-12-12 09:27

大鱼

```
rand_max = 590199
num = 7
def encode_number(number):
rs = []
for i in number:
t = (int(i) + rand_max) % num
rs.append(t)
```

print(''.join([str(x) for x in rs]))

但是解密的过程就有点玄乎了，因为0-9的数字在对7进行取余的时候会有同样的结果出来，这个时候要补充商才比较合适一点。

2018-12-18 13:12

作者回复

对 需要保留商

2018-12-20 05:02

付剑津

公式中，size指的是有限空间的数目而不是大小吧？100个有限空间，每个容量不小于1万

2018-12-17 09:16

作者回复

对 是空间的数量 原文有歧义 稍后修改

2018-12-17 11:50

Kerwin

分库分表

2018-12-14 14:20

永旭

请问625加密用例代码是现实时，每个位数的商值是怎么存储啊？

2018-12-14 11:12

作者回复

基本单位方法可以有很多，比如数组

2018-12-14 14:04

Allen

课程讲解(包括后面的课程)主要涉及的软件能不能说一下 因为刚入门不是很熟

2018-12-12 20:44

Yezhiwei

轻松愉快地享受数学的乐趣，全靠老师精彩的分享

2018-12-12 09:00

阿火

万万没想到，余数有这么多作用

2018-12-12 08:48

西北偏北

取模定义：

除法是被除数除以除数，结果包含商和余数，记做：a/b

只求余数的除法，叫取模。记做 a%b

应用举例：

取模运算的特点，无论a多大，只要b固定，那么a%b的余数总是在一个有限范围内。这种特点相当于将a进行了降维和分类，跟方便我们认知世界。

比如今天是星期一，10000天后是星期几。就可以通过求余数来计算。因为今天是星期一，所以相对于今天的7天后，肯定也是星期一。

那1w天中，7的整数倍日期，肯定也都是星期一，唯一要看的，就是最终余数多少，那就相当于距离星期一几天。所以1w天后是星期几变成了

公式:(星期一 + 1w%7) 由于1w%7 = 4 ，说明是星期一的四天后，于是相对于今天1w天后是星期五

取模增加随机性：

连续的整数，在取模时，其余数也是周期连续的。比如：10%7 = 3 ， 11%7=4 。余数算作一分钟分类，某些情况下，我们不希望原始数据的连续性，

在分类后也连续。为了增加几个班同学之间随机组合，增加交流。比如你不希望一个班(他们的学号相同)，被分配到连续的组

里。

那可以在取模之间，对原始数据做一些规则转换，让连续的原始数据变得不连续。比如给原始数据加一个随机数。

公式为：(a + random) % b

注意在一次分类活动中，random是固定的，不是每个数来都重新来个random。random就相当于hash算的中的hash因子。

当然为了使得原始连续数据不连续还有其他很多种方式，比如数据的不同位树互换等等。

文章谬误：

文章中所说的加密算法，再缺乏商时，无法完成解密，因为数据被降维了。

2018-12-27 10:57

作者回复

是的 需要保留商，原文没有强调这点

2018-12-27 12:07