Векторные пространства. Определение и примеры векторных пространств.

Определение векторного пространства

Векторное пространство представляет собой математическую структуру, состоящую из набора элементов, называемых векторами, и двух операций, которые можно выполнять над этими векторами:

- **Сложение векторов**: Операция, которая принимает два вектора **u** и **v** и возвращает новый вектор **u+v**
- **Умножение вектора на скаляр:** операция, которая принмает вектор **v** и скаляр(число) **c**, и возвращает новый вектор **cv**.

Эти операции должны удовлетворять следующим свойствам:

- **Ассоциативность сложения**: для всех векторов **u**, **v** и **w**:
  $(u+v)+w=u+(v+w)$
  Ассоциативное свойство. Операция сложения векторов в векторном пространстве ассоциативна, что означает, что результат сложения трех векторов не зависит от порядка, в котором выполняются сложения. Математически верно, что $(a+b)+c=a+(b+c)$, где a, b, c — векторы векторного пространства.

- **Коммутативность сложения:** для всех векторов **u** и **v**:
  $u+v=v+u$
  Свойство коммутативности. Операция добавления векторов в векторное пространство является коммутативной, что означает, что порядок добавления векторов не влияет на конечный результат. Математически это можно выразить как $a+b=b+a$, где a, b — векторы векторного пространства.

- **Нейтральный элемент сложения:** : существует вектор **0**, называемый нулевым вектором, такой что для всех векторов **v**:
  $0+v=v$
  Нейтральный элемент. В векторном пространстве должен быть нейтральный элемент для добавления векторов. Этот вектор, обозначенный как **0**, обладает тем свойством, что любой вектор, добавленный к нему, дает один и тот же вектор. Математически

справедливо, что $a + 0 = a$, где a — вектор векторного пространства.

- **Обратный элемент сложения:** для каждого вектора v существует вектор $-v$, называемый противоположным вектором, такой что: $v + (-v) = 0$
  Аддитивный обратный: для каждого вектора в векторном пространстве должен существовать противоположный вектор, при добавлении которого получается нейтральный элемент. Этот противоположный вектор обозначается как $-a$, где a — вектор в векторном пространстве. Математически верно, что $a + (-a) = 0$.

- **Ассоциативность умножения на скаляр:** Для всех векторов v и скаляров c, d:
  $c(dv) = (cd)v$

- **Дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов:** Для всех векторов u, v и скаляра c:
  $c(u + v) = cu + cv$

- **Умножение единицы на вектор:** для всех векторов v :
  $1v = v$

Примеры векторных пространств :

Существует множество примеров векторных пространств в различных областях исследования. Некоторые распространенные примеры включают в себя:

- **Трёхмерное векторное пространство:** : это пространство состоит из векторов с тремя компонентами (x, y, z), где операции сложения и умножения на скаляр следуют стандартным правилам.

- **Векторное пространство функций:** это пространство состоит из всех функций переменной, где сложение функций и умножение на скаляр определяются поточечно.

- **Векторное пространство матриц:** состоит из матриц определённого размера, где сложение выполняется поэлементно, а умножение на скаляр умножает каждый элемент матрицы на этот скаляр.

- **Векторное пространство многочленов:** Это пространство состоит из всех многочленов, где сложение многочленов и умножение на скаляр определяются в соответствии с правилами алгебры полиномов.

Базис и размерность векторного пространства

Определение размерности вектора.

Размерностью векторного пространства называется число, равное максимальному количеству линейно независимых векторов в этом пространстве

Если линейная комбинация $\lambda_1 \cdot a^{(1)} + \lambda_2 \cdot a^{(2)} + ... + \lambda_p \cdot a^{(p)}$ может представить собой нулевой вектор тогда, когда среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ есть хотя бы одно, отличное от нуля, то система векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(p)}$ называется **линейно зависимой**.

Если линейная комбинация $\lambda_1 \cdot a^{(1)} + \lambda_2 \cdot a^{(2)} + ... + \lambda_p \cdot a^{(p)}$ представляет собой нулевой вектор только тогда, когда все числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ равны нулю, то система векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(p)}$ называется **линейно независимой**

Для 2-х и 3-х мерных векторов

Два линейно зависимые вектора - коллинеарные. (Коллинеарные вектора - линейно зависимы.)

Для 3-х мерных векторов

Три линейно зависимые вектора - компланарные. (Три компланарные вектора - линейно зависимы.)

Для n-мерных векторов

$n + 1$ вектор всегда линейно зависимы.

Определение базиса векторного пространства

Базис векторного пространства – это упорядоченная совокупность линейно независимых векторов этого пространства, число которых равно размерности пространства. Векторное пространство с размерностью n имеет столько базисов, сколько существует линейно независимых систем их n – мерных векторов числом n. Плоскость является двумерным пространством - ее базисом будут два любых неколлинеарных вектора. Базисом трехмерного пространства послужат три любых некомпланарных вектора.

Координаты вектора в базисе и их свойства

Базис - упорядоченная совокупность линейно независимых векторов заданного множества векторов. Любой вектор этого множества можно представить в виде их линейной комбинации

Базис на плоскости образуют любые два линейно независимые вектора, лежащие в этой плоскости.

Базис в пространстве составляют три линейно независимые векторы этого пространства

Пусть векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ образуют базис в пространстве.
Тогда любой вектор $\overline{x}$ данного пространства представим в виде линейной комбинации этих векторов
$\overline{x} = \alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \alpha_3\overline{a_3}$
Данное представление вектора $\overline{x}$ есть разложение вектора $\overline{x}$ в базисе $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе

Любая декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ определяется в пространстве заданием ортонормированного базиса и точки приложения векторов этого базиса(точки 0). Таков базис есть декартов прямоугольный базис с векторами i, j, k.
Координаты вектора в прямоугольной системе координат - коэффициенты его разложения по ортонормированному базису$\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$
Разложение вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ записывается кратко в виде:
$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$
где a_x, a_y, a_z - координаты вектора $\overline{a}$

Свойства(действия над векторами в координатной форме)

- $\overline{a} + \overline{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$

- $\lambda \cdot \overline{a} = (\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z)$

- $\overline{a} = \overline{b} \ <=> \ a_x = b_x, \ a_y = b_y, \ a_z = b_z$

- Координаты коллинеарных векторов пропорциональны
  $\overline{a}||\overline{b} <=> \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

- Координаты вектора равны разности соответсвующих координат его конца и начала.
  $A(x, y, z)$, $B(x_2, y_2, z_2)$
  $\overline{AB} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$

- Нулевой вектор имеет нулевые координаты
  $\overline{0} = (0, 0, 0)$

Связь между координатами вектора в различных базисах. Матрица перехода.

Рассмотрим произвольный элемент $x \in E$ и запишем его разложение в двух заданных базисах $(g_1, g_2, ..., g_n)$ и $(f_1, f_2, ..., f_n)$
$\overline{x} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + ... + \alpha_n g_n$
$\overline{x} = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + ... + \beta_n f_n$ (3)

Перепишем равенства в матричной форме:

$$\underbrace{g_1, g_2, ..., g_n}_{G} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \underbrace{f_1, f_2, ..., f_n}_{F} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

То есть $G \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = F \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, откуда с учётом формулы получим:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_3 \end{pmatrix} (4)$$

Где C - матрица перехода от базиса $(g_1, g_2, ..., g_n)$ к $(f_1, f_2, ..., f_n)$

Пример:

В R^3 заданы 2 базиса:
$g_1 = (-2, 1, 2),\ g_2 = (0, 3, 0),\ g_3 = (0, 0, 2)$
$f_1 = (0, 1, -1),\ f_2 = (2, 0, 0),\ f_3 = (0, 1, 0)$
Найти матрицу C перехода от базиса (g_1, g_2, g_3) к базису (f_1, f_2, f_3).
Координаты базисных векторов заданы в ОНБ i, j, k Из формулы 2 имеем, что $F = G \cdot C \to C = G^{-1} \cdot F$.
Составим матрицы F и G

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как $detG = -12$, то

$$G^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -6 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^r =$$

$$\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $C = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Скалярное произведение векторов и его свойства

Что такое скалярное произведение?

Скалярным проивзедением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ будет скалярная величина(число), равная произведению модулей этих векторов, умноженная на косинус угла между ними:
$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| * \cos\alpha$

Если два вектора сонаправлены, то $\cos\alpha = 1$, скалярное произведение равно $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| * |\overline{b}|$

Свойства скалярного произведения

- Умножение вектора самого на себя
  $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$
  В результате получаем скалярный квадрат вектора

- Скалярный квадрат вектора всегда больше или равен нулю
  $\overline{a} \cdot \overline{a} \geq 0$

- Произведение вектора самого на себя равно нулю тогда и только тогда, кгда вектор является нулевым вектором
  $\overline{a} \cdot \overline{a} = 0$, если $\overline{a} = 0$

- Коммутативность
  $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$

- Дистрибутивность
  $(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$

- Ассоциативность
  $(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda(\overline{b} \cdot \overline{a})$ - Выносим константу

Векторное произведение векторов и его свойства в геометрии

Что такое векторное произведение?

Векторное произведение (перекрёстное или кросс-продукт) — это операция между двумя векторами в трёхмерном пространстве, которая возвращает новый вектор. Этот вектор перпендикулярен к обоим исходным векторам и имеет длину, равную площади параллелограмма, образованного этими векторами.

Умножения через матрицу через $\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{j}\ \boldsymbol{k}$

Свойства векторного произведения

1. Перпендикулярность

Вектор, полученный в результате векторного произведения, перпендикулярен к обоим исходным векторам:

- $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{a} = 0$
- $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{b} = 0$

2. Правило правой руки

Направление вектора $\overline{a} \times \overline{b}$ определяется "правилом правой руки": если вы выпрямите большой палец в направлении вектора $\overline{a}$, а указательный палец направите в сторону вектора $\overline{b}$, то средний палец, перпендикулярный к остальным, укажет направление вектора $\overline{a} \times \overline{b}$.

3. Модуль векторного произведения

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, образованного векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin(\theta)$ - площадь параллелограмма

$\frac{1}{2}|\overline{a} \times \overline{b}| = \frac{1}{2}|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin(\theta)$ - плоащадь треугольника

где θ — угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

4. Антикоммутативность

Векторное произведение антикоммутативно:

$\overline{a} \times \overline{b}$=-$(\overline{b} \times \overline{a})$

5. Дистрибутивность

Векторное произведение дистрибутивно относительно сложения:

$\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b}) + (\overline{a} \times \overline{c})$

6. Ассоциативность со скалярами

Для скаляра $\mathbf{c}$:

$(\mathbf{c}\overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times (\mathbf{c}\overline{b}) = \mathbf{c}(\overline{a} \times \overline{b})$

7. Векторное произведение с самим собой

Если вектор умножить на самого себя векторным произведением, результатом будет нулевой вектор:

$\overline{a} \times \overline{a} = \overline{0}$

8. Связь с тройным смешанным произведением

Векторное произведение играет ключевую роль в вычислении тройного смешанного произведения (объёма параллелепипеда):

$\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$

Этот скалярный результат показывает объём параллелепипеда, образованного тремя векторами: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Векторное произведение — это важный инструмент в геометрии и механике, часто используемый для решения задач, связанных с нормалями поверхностей, моментами сил и другими аспектами трёхмерной геометрии.

- Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы перпендикулярны
  $\overline{a} \neq 0, \overline{b} \neq 0, \overline{a} \cdot \overline{b} = 0 <=> a \perp b$

Смешанное произведение векторов

Что такое смешанное произведение векторов?

Смешанным произведением трёх векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\overline{a}$ на векторное произведение векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$
$\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$
Обозначается $< \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} >$

Свойства смешанного произведения векторов

- При циклической перестановке векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ их смешанное произведение не меняется, т.е.
  $< \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} > = < \overline{b}, \overline{c}, \overline{a} >$

- При перестановке любых двух векторов их смешанное произведение меняет знак.

- Числовой множитель любого из трёх векторов можно вынести за знак смешанного произведения, т.е.
  $< \lambda\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} > = < \overline{a}, \lambda\overline{b}, \overline{c} > = < \overline{a}, \overline{b}, \lambda\overline{c} > = \ \lambda < \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} >$

- Если один из векторов записан в виде суммы, то смешанное произведение тоже можно записать в виде суммы.
  $< \overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b}, \overline{c} > = < \overline{a_1}, \overline{b}, \overline{c} > + < \overline{a_2}, \overline{b}, \overline{c} >$

- Ненулевые векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны <=> их смешанное произведение равно нулю

- Если $< \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} >> 0$, то $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют правую тройку.
  Если $< \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} >< 0$, то $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют левую тройку.

- Геометрический смысл смешанного произведения.
  Модуль смешанного произведения некомпланраных векторов $| < \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} > |$ равен объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах.
  $\frac{1}{6} | < \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} > |$ = объёму пирамиды, построенной на этих векторах

Прямая на плоскости. Способы её задания

---

1) Общее уравнение прямой

$$\mathbf{Ax + By + C = 0}$$

---

2) По двум точкам

$$\frac{\mathbf{x - x_1}}{\mathbf{x_2 - x_1}} = \frac{\mathbf{y - y_1}}{\mathbf{y_2 - y_1}}$$

---

3) По точке и направляющему вектору

$$\frac{\mathbf{x - x_0}}{a_1} = \frac{\mathbf{y - y_0}}{a_2}$$

Направляющим вектором данной прямой называется любой ненулевой вектор, лежащий на данной прямой. Способо вытекает из аксиомы: через точку, не лежащей на данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной.

---

4) Параметрически

$$f(n) = \begin{cases} \mathbf{x = x_0 + a_1 t} \\ \mathbf{y = y_0 + a_2 t} \end{cases}$$

5) По точке и вектору нормали

$$\underbrace{\mathbf{n_1 x}}_{A} - \underbrace{\mathbf{n_1 x_0}}_{B} + \underbrace{\mathbf{n_2 y} - \mathbf{n_2 y_0}}_{C} = 0$$

Пусть точка и нормальный вектор прямой имеют координаты:

$$\mathbf{M(x, y)}, \overline{n}(\mathbf{n_1, n_2})$$

Легко видеть, что точка $\mathbf{M}$ с переменнными координатами будет лежать на нашей прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0 M}$ и $\overline{n}$ перпендикулярны(скалярное произведение равно 0)

6) Расстояние от точки до прямой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

7) Угол между прямыми

$$\cos(\phi) = \frac{|\overline{a_1} \times \overline{a_2}|}{|\overline{a_1}| \cdot |\overline{a_2}|}$$

Прямая в пространстве. Способы её задания

1) По двум точкам

$$\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x_1}}{\mathbf{x_2}-\mathbf{x_1}} = \frac{\mathbf{y}-\mathbf{y_1}}{\mathbf{y_2}-\mathbf{y_1}} = \frac{\mathbf{z}-\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}-\mathbf{z_1}}$$

Аналогично прямой на плоскости, точка будет лежать на нашей прямой тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны(что эквивалентно пропорциональности их координат)

---

2) По точке и напрявляющему вектору

$$\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x_0}}{a_1} = \frac{\mathbf{y}-\mathbf{y_0}}{a_2} = \frac{\mathbf{z}-\mathbf{z_0}}{a_3}$$

Аналогично 1 уравнению

$\underline{\text{Замечание :}}$ уравнения 1 и 2 являются каноническими

---

3) Параметрически

$$f(n) = \begin{cases} \mathbf{x = x_0 + a_1 t} \\ \mathbf{y = y_0 + a_2 t} \\ \mathbf{z = z_0 + a_3 t} \end{cases}$$

---

4) Задание прямой как линии пересечения плоскостей

$$f(n) = \begin{cases} \mathbf{A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1} = 0 \\ \mathbf{A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2} = 0 \end{cases}$$

Прямую в пространстве можно задать и как линию пересечения некоторых плоскостей(это следует из соответсвующей аксиомы стереометрии), т.е. как решение системы.

Плоскость. Способы задания и уравнения плоскостей

---

1) По трём точкам

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Этот способо следует из аксиомы стереометрии: через три точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, притом только одна.

---

2) По точке и направляющим векторам

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Направляющими векторами данной плоскости называется любая пара неколлинеарных векторов, лежащих в данной плоскости Этот способо вытекает из теоремы стереометрии: через любую точку пространства, не лежащей на данной плоскости, можно провести единственную параллельную ей плоскость. Точка будет лежать в плоскости, когда смешанное произведение будет равняться нулю.

---

3) По точке и нормальному вектору

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0)$$

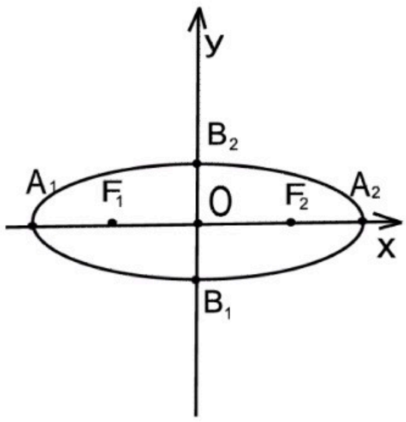
Нормальным вектором данной плоскости называется любой ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости. Способ задания вытекает из утверждения: через любую точку пространства можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данной прямой.

---

4) Общее уравнение

$\mathbf{Ax + By + Cz + D} = 0$

Эллипс



Что такое эллипс?

Эллипсом называется множество точек плоскости, удовлетворяющее условию: сумма расстояний от каждой точки данного множества до двух фиксированных точек F_1 и F_2 есть постоянная величина, равная $2a$, причём эта величина больше, чем расстояние между F_1 и F_2, т.е. $2a > 2c$.

Каноническое уравнение

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a-$ большая полуось $b-$ малая полуось

Фокальные радиусы

- $r_1 = a - ex$
- $r_2 = a + ex$
- $r_1 = |\overline{F_1M}|$
- $r_2 = |\overline{F_2M}|$
- $r_1 + r_2 = 2a$

Теорема: $\frac{r_1}{d(M_1D_1)} = \frac{r_2}{d(M_2D_2)} = e$

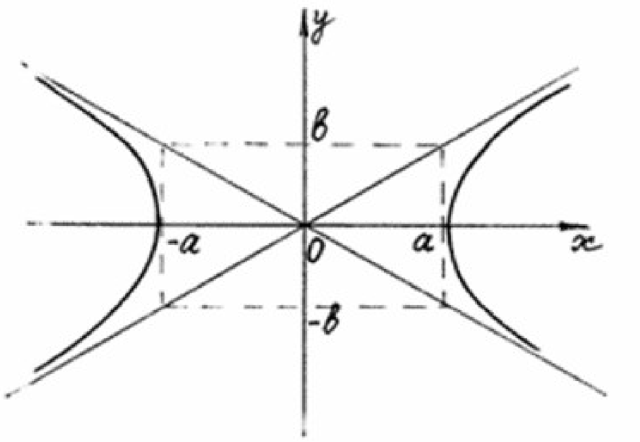
Фокусы

$F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$
$c = \sqrt{a^2-b^2},\ a > c$
$|\overline{F_1F_2}| = 2c$
$e = \frac{c}{a}$ **-экцинтриситет**

Директрисы

$D_1 : x = -\frac{a}{e}$
$D_2 : x = \frac{a}{e}$

Гипербола



Что такое гипербола?

Гиперболой называется множество точек плоскости, удовлетвояряющие условию: модуль разности расстояний от каждой точки данного множества до двух фиксированных точек $F_1,\ F_2$ есть постоянная величина, равная $2a$, причём эта величина меньше, чем расстояние между $F_1,\ F_2$, т.е. $2a < 2c$

Каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$a-$ **действительная полуось**
$b-$ **мнимая полуось**
$y = \pm\frac{b}{a}x$ **- ассимптоты**

Фокусы

$F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$
$c^2 = a^2 + b^2$
$e = \frac{c}{a},$ где $a -$ действительнаяполуось

Фокальные радиусы

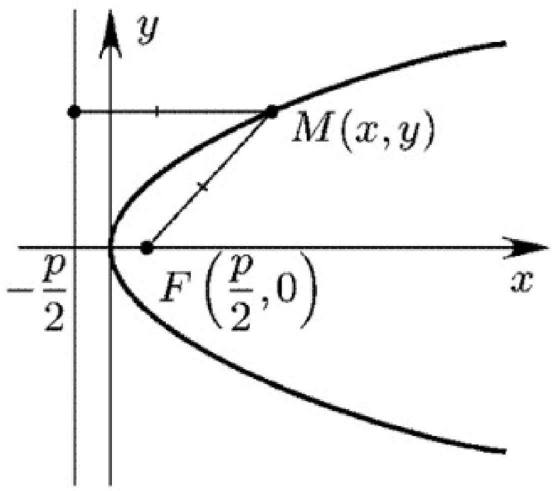
- Если $x > 0$ т.е. т. $M \in$ правой ветви гиперболы, то\ $r_1(M) = |\overline{MF_1}| = a + ex$
  $r_2(M) = |\overline{MF_2}| = -a + ex$
- Если $x < 0$ т.е. т. $M \in$ левой ветви, то
  $r_1(M) = |\overline{MF_1}| = -(a + ex)$
  $r_2(M) = |\overline{MF_2}| = -(-a + ex)$

- **Теорема:**
  $\exists\ M \in$ **гипербола** $\frac{r_1}{d(M_1D_1)} = \frac{r_2}{M_1D_2} = e$

  ### Директрисы

  $D_1 : x = -\frac{a}{e}$
  $D_2 : x = \frac{a}{e}$

  # Парабола



Что такое парабола?

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние от некоторой фиксированной точки F (называемой фокусом) равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой D (называемой директрисой), не проходящей через F

Каноническое уравнение

$y^2 = 2px,\ p > 0$

Фокус

$F(\frac{p}{2}; 0)$

Директриса

$D: x = -\frac{p}{2}$

Экцентреситет

$e = 1\ const$