CREATED by Jafarabat ©

1. Существование и единственность задачи Коши для уравнения с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (7)$$

Теорема 1. (О существовании и единственности задачи Коши для уравнения с разделяющимися переменными) Пусть функция $f(x), g(y)$ непрерывны на интервалах $a < x < b$ и $c < y < d$ соответственно и $g(y) \neq 0 \ \forall y : y \in (c, d)$. Тогда через каждую точку (x_0, y_0) прямоугольника $Q\{(x, y) \in R^2 : a < x < b, \ c < y < d\}$ проходит график одного и только одного решения $y = \varphi(x)$ уравнения (7).

Иначе говоря, теорема 1 говорит о том, что в прямоугольнике Q задача

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (9)$$

имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть $y = \varphi(x) -$ решение уравнения (7), проходящее через точку (x_0, y_0), то есть удовлетворяет условию

$$\varphi(x_0) = y_0 \quad (10)$$

Функция $\varphi(x)$ является решением уравнения (7), а значит эта функция непрерывно дифференцируема и обращает в тождество уравнение (7)

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x)g(\varphi(x)) \quad (11)$$

Так как $g(y) \neq 0$, то разделим обе части уравнения:

$$\frac{d\varphi(x)}{g(\varphi(x))} \equiv f(x)dx \quad (12)$$

Справа и слева стоят непрерывные функции. Переобозначим переменную x как t и проинтегрируем в пределах x_0, x, где $(x_0, x) \subset (a, b)$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\varphi(t)}{g(\varphi(t))} \equiv \int_{x_0}^{x} f(t)dt \quad (13)$$

Пусть $t \in (x_0, x) \ \varphi(t) = \xi \Rightarrow \xi \in (\varphi(x_0), \varphi(x))$.

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{d\xi}{g(\xi)} \equiv \int_{x_0}^{x} f(t)dt \quad (14)$$

Пусть $G(\xi)-$ одна из первообразных функций $\frac{1}{g(\xi)}, F(t)-$ одна из первообразных функций $f(t)$. Тогда после интегрирования получим:

$$G(\varphi(x)) - G(\varphi(x_0)) = F(x) - F(x_0) \quad (15)$$

$$G(\varphi(x)) = F(x) - F(x_0) + G(\varphi(x_0)) \quad (16)$$

Функция $G(y)$ монотонна на (c, d) (т.к $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$). Следовательно существует единственная обратная функция $G^{-1}(x)$:

$$\varphi(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(\varphi(x_0))) \quad (17)$$

Функция $\varphi(x)$, заданная формулой (17), определена единственным образом, так как в правой части формулы (17) содержатся только функции из правой части уравнения (7) и начальные условия. Таким образом, предположив существование решения мы доказали единственность.

Покажем, что функция $\varphi(x)$, заданная формулой (17) удовлетворяет задаче (9). Покажем, что функция $\varphi(x)$ является решение уравнения (7). Для этого продифференцируем (16). Это можно сделать потому что функции F, G являются первообразными непрерывных функций. Получим тогда

$$\frac{dG}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dF}{dx}$$

$$\frac{1}{g(\varphi(x))}\frac{d\varphi}{dx} = f(x)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x)g(\varphi(x) \quad (18).$$

Из формулы (18) мы видим, что $\varphi(x)$ является решением уравнения (7). Проверим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию $\varphi(x_0) = y_0$. Действительно,

$$\varphi(x_0) = G^{-1}(F(x_0) - F(x_0) + G(\varphi(x_0))) = G^{-1}(G(y_0)) = y_0 \quad (19)$$

2. Условие Липшица, лемма об условии Липшица в выпуклой области

Пусть функция $f(x, y_1, ..., y_n)$ определена в области D.

Определение. Функция f, определена в ограниченной области D, удовлетворяет условию Липшица по переменным $y_1, ..., y_n$, если существует константа $L > 0$, такая, что для любых точек $(x, u_1, ..., u_n) \in D$ и $(x, v_1, ..., v_n) \in D$ выполняется неравенство:

$$|f(x, u_1, ..., u_n) - f(x, v_1, ..., v_n)| \leq L\sum_{i=1}^{n}|u_i - v_i| \quad (1)$$

Определение. Область D наз. выпуклой, если для двух точек $(x, u_1, ..., u_n) \in D$ и $(x, v_1, ..., v_n) \in D$, и для любых s таких, что $0 \leq s \leq 1$, точка

$(x, su_1 + (1-s)v_1, ...su_n + (1-s)v_n) \in D$

Лемма. Пусть функция f определена и непрерывно дифференцируема в выпуклой области D и кроме того:

$$|\frac{df}{dy_i}| \le k_i, \quad i = \overline{1,n}, \text{ где } k_i = const$$

Тогда функция f удовлетворяет условию Липшица по переменным $y_1, ..., y_n$

Доказательство. Возьмем 2 точки $(x, su_1 + (1-s)v_1, ...su_n + (1-s)v_n) \in D$. Покажем, что для f будет выполняться условие (1). Применяя формулу Ньютона-Лейбница, а также используя выпуклость области D получим следующее выражение:

$$|f(x, u_1, ..., u_n) - f(x, v_1, ..., v_n)|$$

$$= |\int_0^1 \frac{d}{ds} f(x, su_1 + (1-s)v_1, ...su_n + (1-s)v_n) ds|$$

Пусть $z_1 = su_1 + (1-s)v_1, ..., z_n = su_n + (1-s)v_n$. Тогда:

$$\int_0^1 \frac{d}{ds} f(x, z_1, ..., z_n) ds = |\int_0^1 \frac{df}{dz_i} \frac{dz_i}{ds} ds| = |\int_0^1 \frac{df}{dz_i}(u_i - v_i) ds| \le$$

$$\le \int_0^1 \sum_{i=1}^n |\frac{df}{dz_i}||u_i - v_i| ds \le \sum_{i=1}^n k_i |u_i - v_i| \int_0^1 ds \le K \sum_{i=1}^n |u_i - v_i|$$

Сопоставив начало и конец получим:

$$|f(x, u_1, ..., u_n) - f(x, v_1, ..., v_n)| \le K \sum_{i=1}^n |u_i - v_i|$$

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y_1, ..., y_n) = |y_1|$ в единичном шаре с центром в начале координат $B_1(0) \subset R^{n+1}$. В нуле эта функция не дифференцируема, но тем не менее, удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x, u_1, ..., u_n) - f(x, v_1, ..., v_n)| = ||u_1|$$

$$-|v_1|| \le |u_1 - v_1| \le \sum_{i=1}^n |u_i - v_i|$$

3. Лемма об эквивалентности решения задачи Коши и решения интегрального уравнения.

Рассмотрим задачу Коши в прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) \in R^2 : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (5)$$

Лемма 2. (Об эквивалентности решения задачи Коши и решения интегрального уравнения). Пусть $f(x, y)$ непрерывна в Π, тогда Решение задачи Коши (4)-(5) эквивалентно непрерывному решению уравнения

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y) dt \quad (6)$$

Определение 3. Функция $y = \varphi(x)$ называется решением задачи Коши (4)-(5), если:

- 3.a)Она определена на отрезке $I_a = [x_0 - a, x_0 + a]$
- 3.b) $\forall x \in I_a \exists$ непрерывная $\varphi'(x)$
- 3.c) $\forall x \in I_a$ т. $(x, \varphi(x)) \in \Pi$
- 3.d) $\forall x \in I_a : \frac{d\varphi}{dx} \equiv f(x, \varphi)$
- 3.e) $\varphi(x_0) = y_0$

Определение 4. Функцию $y = \psi(x)$ будем называть решением интегрального уравнения (6), если:

- 4.a) Она определена на отрезке $I_a = [x_0 - a, x_0 + a]$
- 4.b) $\psi(x)$ непрерывна на отрезке $I_a = [x_0 - a, x_0 + a]$
- 4.c) $\forall x \in I_a$ т. $(x, \psi(x)) \in \Pi$
- 4.d) $\forall x \in I_a : \psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t)) dt$

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ будет решением задачи Коши (4)-(5). Покажем, что тогда из условий (3.a)-(3.e) следуют условия (4.a)-(4.d). 3.a и 4.a совпадают, 3.c и 4.c - тоже. Из пункта 3.b следует 4.b. Покажем, что из 3.d, 3.e следует 4.d. Подставим функцию $\varphi(x)$ в уравнение (4), получим

$$\frac{d\varphi}{dx} \equiv f(x, \varphi(x)) \quad (7)$$

Функция $\varphi(x)$ непрерывна по условию 3.b, f непрерывна в прямоугольнике П по условию теоремы, x неперерывна как элементарная функция, тогда суперпозиция $F(x) = f(x, \varphi(x))$ непрерывна на отрезке I_a. Заменим в тождестве (7) x на t и проинтегрируем в пределах x_0, x :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\varphi}{dt} \equiv \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) dt.$$

Проинтегрировав получим:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \equiv \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) dt$$

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) dt$$

Таким образом, мы получаем, что если функция $\varphi(x)$ является решением задачи Коши (4)-(5), то она будет и решением интегрального уравнения (6).

— —

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad (4)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (5)$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y)dt \quad (6)$$

Теорема 2. (О существовании и единственности задачи Коши)(Теорема Пикара). Пусть $f(x,y)$ определена в прямоугольнике П и удовлетворяет условиям:

- $f(x,y)$ непрерывна в П;
- $f(x,y)$ по переменной y удовлетворяет условию Липшица.

Тогда для любых $(x_0, y_0) \in \Pi$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши(4)-(5), которое определено и непрерывно для $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $h = min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M = max_{\Pi}|f(x,y)|$.

Доказательство. Согласно доказанной выше лемме (Лемма об эквивалентности решения задачи Коши и решения интегрального уравнения.), достаточно доказать существование и единственность решения интегрального уравнения (6). Доказательство будем проводить методом последовательных приближений. Разобьем на 4 этапа(4-7 биелеты)

— —

4. Теорема Пикара. Построение последовательных приближений.

Очевидно, $\forall x \in I_a$ т. $(x, \varphi_0(x)) \in \Pi$. Далее, в качестве $\varphi_1(x)$ возьмем функцию:

$$\varphi_1(x) = y_0 = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))dt \quad (14)$$

Покажем, что $\varphi_1(x)$ непрерывна на I_a. Используем теорему из мат. анализа:

Теорема 3. Если $f(t)$ интегрируема на $[a,b]$, то функция $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ непрерывна, а если еще и $f(t)$ непрерывна на $[a,b]$, то F(x) дифференцируема.

Так как в выражении (14) подынтегральное выражение $f(t, \varphi_0(t))$ непрерывно (как композиция двух непрерывных функций f и φ_0 и элементарной функции t, функции $\varphi_1(x)$ также непрерывна. Покажем, что график функции $\varphi_1(x)$ не выходит за пределы прямоугольника $\Pi_1 = \{(x,y) \in \Pi : |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq b\}$, где

$h = min\{a, \frac{b}{M}\}$. Покажем, что для всех $x \in I_h, I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$ выполяется неравенство:

$$|\varphi_1(x) - y_0| \le b$$

тем самым, докажем, что график лежит в прямоугольнике Π_1. Получим:

$$|\varphi_1(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))dt| \le |\int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_0(t))|dt| \le M|x - x_0| \le Mh \le b$$

Мы получили, что второе приближение $\varphi_1(x)$ является непрерывным и график функции $\varphi_1(x)$ для всех $x \in I_h$ лежит в прямоугольнике Π_1. След. приближение строим аналогично:

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t_1))dt$$

Функция непрерывна $\varphi_2(x)$ непрерывна на I_2 как сумма двух непрерывных функций. Проверим, что $\varphi_2(x)$ лежит в прямоугольнике Π_1:

$$|\varphi_2(x) - y_0| \le b$$

$\forall x \in I_h,\ I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$. Будем иметь:

$$|\varphi_2(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_1(t))dt| \le |\int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t))|dt| \le M|x - x_0| \le Mh \le b$$

Будем продолжать процесс построения приближений согласно формуле:

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Это рекурретная формула для получения любого члена последовательности, где функция φ_n определены и непрерывны на I_n, а так же, для $\forall x \in I_h$ точка $(x, \varphi_n(x)) \in \Pi$

5. Теорема Пикара. Сходимость последовательных приближений.

Мы уже построили последовательность

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x) \quad (17)$$

Где каждое приближение можем получить зная предыдущее. Покажем, что последовательность (17) равномерно сходится к некоторой функции $\varphi(x)$ на I_h($I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$)

Определение 5 Последовательность функций $\varphi_n(x), n = 1, 2, 3...$ равномерно сходится на $[a, b]$ к $\varphi(x)$, если

$$\sup_{[a,b]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = r_n \to 0, \text{ при } n \to 0$$

Для равномерной сходимости использую обозначение $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$

Исследуем ряд

$$\varphi_0(x) + [\varphi_1(x) - \varphi_0(x)] + [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] + ... + [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)] \quad (18)$$

где $S_{n+1} = \varphi_n(x),\ n = 1, 2, 3...$ Таким образом, если ряд (18) сходится, то и последовательность (17) сходится. будем использовать мажорантный признак Вейерштрасса:

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leq |\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))dt| \leq M|x - x_0|,$$

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| = |\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_1(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))dt| = |\int_{x_0}^{x} (f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_0(t)))dt| \leq$$

$$|\int_{x_0}^{x} |(f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_0(t)))|dt| \leq L|\int_{x_0}^{x} |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)|dt| \leq LM\frac{|x - x_0|^2}{2}$$

Продолжая аналогичным образом, получим

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq M\frac{L^{n-1}|x - x_0|^n}{n!},\ n = 1, 2, 3...$$

Учитывая, что $|x - x_0| < h$, получим

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq M\frac{L^{n-1}h^n}{n!},\ n = 1, 2, 3...$$

Рассмотрим рядо из a_n, где $a_n = M\frac{L^{n-1}h^n}{n!}$. По условию теоремы $L, M, h > 0 \Rightarrow a_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = Lh \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Отсюда по признаку Даламбера, получим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^{n-1}h^n}{n!}$ сходится, а значит, наш функциональный ряд (18) сходится равномерно на I_h. Отсюда следует, что последовательность (17) имеет предел:

Суть признака Даламбера:

- При меньшем значении ряд сходится.
- При большем значении ряд расходится.
- Если значение равно 1, то признак не даёт ответа

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x).$$

Функция $\varphi(x)$ непрерывна на I_h, так как является равномерным пределом последовательности непрерывных функций. Действительно, здесь мы опираемся на теорему из мат. анализа.

Теорема 4. Пусть последовательность $\varphi_n(x)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$ на $[a, b]$ и кроме того $\varphi_n(x)-$ непрерывны на $[a, b]$. Тогда предельная функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Проверим, что предельная функция лежит в прямоугольнике Π_1 для $x \in I_h$. Поскольку все последовательные приближения удовлетворяют неравенствам:

$$y_0 - b \le \varphi_n(x) \le y_0 + b,$$

то и предельная функция удовлетворяет условию

$$y_0 - b \le \varphi(x) \le y_0 + b,$$

$$|\varphi(x) - y_0| \le b.$$

Здесь мы опираемся на след. утверждение.

Теорема 5. Пусть все члены последовательности a_n таковы, что $A \le a_n \le B$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда и для предельного значения справедливо неравенство: $A \le a \le B$.

Мы доказали, что построенная последовательность приближений равномерно сходится, ее предельная функция непрерывна и не выходит за рамки прямоугольника Π_1 для всех $x \in I_h$

6. Теорема Пикара. Доказательство того, что предельная функция последовательности приближений является решением интегрального уравнения.

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)dt \qquad (6)$$

Покажем, что предельная функция $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения (6), то есть обращает в тождество выражение:

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(x))dt.$$

Функция $\varphi(x)$ является равномерным пределом на $I_h (I_h = [x_0 - h, x_0 + h])$ последовательности $\varphi_n(x)$, построенной по рекурретному соотношению

Равномерный предел последовательности — это предел, при котором скорость сходимости не зависит от точки

$$\varphi_n(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt,\ n = 1, 2, 3...$$

Перейдем к пределу:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}(y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi_{n-1}(t))dt)$$

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi_{n-1}(t))dt=\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))dt \quad (25)$$

В (25) при каждом фиксированном $x\in I_h$ мы имеем дело с числовой последовательностью. Покажем, что при каждом фиксированном $x\in I_h$ будет справедливо:

$$|\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi_{n-1}(t))dt-\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))dt|\to 0 \text{ при } n\to\infty$$

Действительно,

$$0\le|\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi_{n-1}(t))dt-\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))dt|\le|\int_{x_0}^{x}(f(t,\varphi_{n-1}(t))-f(t,\varphi(t)))dt|\le$$

$$\le L|\int_{x_0}^{x}|\varphi_{n-1}(t)-\varphi(t)|dt|\le L|\int_{x_0}^{x}\sup|\varphi_{n-1}(t)-\varphi(t)|dt|=L|\int_{x_0}^{x}r_n dt|\le Lhr_n\to 0,\ \text{при } n\to\infty$$

7. Теорема Пикара. Единственность.

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y)dt \quad (6)$$

Докажем, что предельная функция $\varphi(x)$ является единственным решением интегрального уравнения (6). Предположим противное, т.е, пусть существует функция $\psi(x)$, удоавлетворяющая интгральному тождеству

$$\psi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\psi(x))dt$$

На втором шаге мы показали, что

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\psi(x)$$

Если мы покажем это, то в силу единственности предела получим, что $\varphi(x)=\psi(x)$. На самом деле достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}|\varphi_n(x)-\psi(x)|=0.$$

Рассмотрим $|\varphi_n(x)-\psi(x)|$, где $n=1,2,3...$ Начнем с $n=0$:

$$|\varphi_n(x)-\psi(x)|=|\int_{x_0}^{x}f(t,\psi(x))dt|\le|\int_{x_0}^{x}|f(t,\psi(x))|dt|\le M|x_0-x|.$$

Здесь мы воспрользовались тем, что $f(t,\psi(x))$ непрерывна на отрезке I_h,($I_h=[x_0-h,x_0+h]$) как композиция непрерывных функций, и тем, что функция ограничена на $I_h:|f(t,\psi(x))|\le M$. Возьмем $n=1$:

$$|\varphi_1(x) - \psi(x)| \leq |\int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_0(x)) - f(t, \psi(x))|dt| \leq L|\int_{x_0}^{x} |\varphi_0(x) - \psi(x)|dt| \leq \frac{LM|x-x_0|^2}{2!}$$

Продолжая оценку , получаем:

$$|\varphi_n(x) - \psi(x)| \leq \frac{L^n M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Вспоминаем, что $\frac{L^n M h^{n+1}}{(n+1)!} = a_n$, где $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходящийся ряд. Но если ряд сходится, то из необходимого условия сходимости числового ряда следует, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Мы имеем следующее:

$$0 \leq |\varphi_n(x) - \psi(x)| \leq a_n \to 0.$$

Тогда по теореме о 2 милиционерах $|\varphi_n(x) - \psi(x)| \to 0.$ Тем самым единсвтенность доказана.

8. Теорема об общем решении однородного линейного уравнения.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_n(x)y = 0 \quad (8)$$

Определение 3. Введем пространство $C^n([a,b])$ непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций до порядка n включительно, с нормой $||u||_{C^n([a,b])} = \sum_{i=0}^{n} max|u^{(i)}(x)|$.

Рассмотрим линейный диффернциальный оператор $L(x, \frac{d}{dx}u)$ действующий из $C^n([a,b])$ в $C([a,b])$ по формуле:

$$L(u) = L(x, \frac{d}{dx})u = \frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + ... + a_n(x)u \quad (10)$$

Тогда уравнение (8) можно записать в виде $L(y) = 0$. Оператор L является линейным, так как для него справедливы следующие свойства:

- $L(u+v) = L(U) + L(V), \forall\, U, V \in C^n([a,b])$
- $L(cU) = cL(U), \forall\, c \in R, \forall U \in C^n([a,b])$

Теорема 3. (О множестве решений линейного однородного уравнения $L(y) = 0$). Множество решений уравнения (8), при условии непрерывности коэффициентов на отрезке $[a,b]$ образуют линейное $n-$ мерное пространство.

Доказательство. Шаг 1. Пусть $M-$ множество решений уравнения (8). Введем операции сложения и умножения на скаляр. Тогда получим, что если $z, y \in M$, то и $z + y \in M$. Действительно, если $z, y \in M$, то $L(z) \equiv 0$ и $L(y) \equiv 0$. Но тогда в силу линейности, для любой константы будет выполнено:

$$L(cy) = cL(y) \equiv 0.$$

Тогда и $cy \in M$. Таким образом, для элементов множества решений уравнения (8) M выполняется следующее. Если

$$z, y \in M, \text{ то } z + y \in M, \ cy \in M,$$

где $c-$ константа. Это значит, что множество M является линейным пространством.

Шаг 2. Покажем, что множество линейного пространства M имеет размерность n. Т.е., что существуют n линейно независимых решений, а любые $n+1$ решения являются линейно зависимыми на $[a, b]$

Построим сначала n решений и покажем, что они линенйно независимы. Пусть $y_j(x)-$ решения линейного однородного уравнения уравнения, удовлетворяющее удоавлетворяющая условиям:

$$\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}(x_0 = \delta_j^i) \qquad (11)$$

где $x_0 \in [a, b], \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ $-$ символ Кронекера, $i, j = \overline{1, n}$. Задача (8)-(11) имеет единственное решение, так как выполнены условия теоремы существования и единственности. Меняя j от 1 до n получим n функций.

9. Теорема об определителе Вронского(линейная зависимость).

Теорема 4. Пусть функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$, и являются линейно независимыми на этом отрезке. Тогда на этом отрезке. Тогда на $[a, b]$ определитель, называемый определителем Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \equiv 0$$

Доказательство. По условию теоремы функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы. Это значит, что существует набор констант $\overline{c_1}, \overline{c_2}, \ldots, \overline{c_n}$, $\overline{c_1}^2, \overline{c_2}^2, \ldots, \overline{c_n}^2 \neq 0$, такой, что имеет место тождество:

$$\overline{c_1} y_1(x) + \overline{c_2} y_2(x) + \ldots + \overline{c_n} y_n(x) \equiv 0$$

Так как $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ дифференцируемы $(n-1)$ раз, можем продифференцировать вышестоящее тождество $(n-1)$ раз. Тогда мы получим систему:

$$\begin{cases} \overline{c_1}y_1(x) + \overline{c_2}y_2(x) + ... + \overline{c_n}y_n(x) \equiv 0, \\ \overline{c_1}y_1'(x) + \overline{c_2}y_2'(x) + ... + \overline{c_n}y_n'(x) \equiv 0 \\ ..., \\ \overline{c_1}y_1^{(n-1)}(x) + \overline{c_2}y_2^{(n-1)}(x) + ... + \overline{c_n}y_n^{(n-1)}(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Рассмотрим эту систему относительно констант. Система линейно и однородна. Она всегда имеет нулевое решение. Однако, по условию теоремы система имеет и не нулевое решение. Это значит, что решение не единственно и определитель равен нулю. Но определитель системы - это и есть определитель Вронского.

Обратное утверждение не верно.

10. Теорема об определителе Вронского(нелинейная зависимость).

Теорема 4. Пусть функции $y_1(x), ..., y_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$, и являются линейно независимыми на этом отрезке. Тогда на этом отрезке. Тогда на $[a, b]$ определитель, называемый определителем Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \equiv 0$$

Теоерема 5. Пусть $y_1(x), ..., y_n(x) -$ решения линейного однородного уравнения

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0,$$

с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами, линейно незвсисимы на отрезке $[a, b]$. Тогда определитель Вронского этих решений не может обратиться в ноль ни в одной точке отрезка $[a, b]$

Доказательство. Предположим противное. Допустим, что существует точка $x_0 \in [a, b]$, такая, что $W(x_0) = 0$. Тогда система

$$\begin{cases} \overline{c_1}y_1(x_0) + \overline{c_2}y_2(x_0) + ... + \overline{c_n}y_n(x_0) = 0, \\ \overline{c_1}y_1'(x_0) + \overline{c_2}y_2'(x_0) + ... + \overline{c_n}y_n'(x_0) = 0, \\ ..., \\ \overline{c_1}y_1^{(n-1)}(x_0) + \overline{c_2}y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + \overline{c_n}y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

имеет ненулевое решение. То есть сущесвтует набор констант $\overline{c_1}, \overline{c_2}, ..., \overline{c_n}$, $\overline{c_1}^2, \overline{c_2}^2, ..., \overline{c_n}^2 \neq 0$. Составим функцию $y(x) = \overline{c_1}^2 y_1(x) + ... + \overline{c_n}^2 y_n(x)$. Эта функция является решением линейного однородного уравнения

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0,$$

так как функции $y_1(x), ..., y_n(x)$ решения линейного однородного уравнения. Кроме того, в силу равенств (27), удовлетворяет нулевым начальным условиям: $y_0(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тогда по лемме о нулевом решении задачи

Коши функция $y(x) \equiv 0$ для всех $x \in [a, b]$. То есть, выполняется равенство $\overline{c}_1^2 y_1(x) + \ldots + \overline{c}_n^2 y_n(x) \equiv 0$ и $\overline{c}_1^2 + \ldots + \overline{c}_n^2 \neq 0$. Это значит, что система линейно независима. Следовательно, получим противоречие.

Теоерема 6. Критерий линейной независимости n решений линейного однородного уравнения. Для того, чтобы n решений $y_1(x), \ldots, y_n(x) -$ решения линейного однородного уравнения

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0,$$

с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами, были линейно независимы на этом отрезке необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского этих решений был отличен от нуля на всем отрезке $[a, b]$

Доказательство. Пусть решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимы. Тогда по теореме 5 $W \neq 0$ для всех $x \in [a, b]$.

Обратно, пусть $W \neq 0$. Тогда решения лиенйно независимы? Предположим противное, то есть, что решения линейно зависимы. Тогда по теореме 4 $W = 0$. Получили противоречие.

Если функции $y_1(x), \ldots, u_n(x)$ не являются решением линейного однородного уравнения, то W может обращаться в ноль.

— —
— —

Основные понятия теории ОДУ.

1. Уравнение с разделяющимися переменными.

Пусть $y(x) -$ неизвестная функция, а функция $f(x), g(x) -$ заданные функции. Уравнения вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) g(x) \qquad (7)$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Можно записать в виде:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

Затем проинтегрировав справа и слева, откуда получим решение. Но это можно сделать только в предположении, что $g(x) \neq 0$. Таким образом в при решении важную роль будут играть точки, в которых функция $g(y) = 0$

Примеры

Джафар:

- $xy\ dx + (x+1)\ dy = 0$
- $\sqrt{y^2+1}\ dx = xy\ dx$

Кенан:

- $y' - xy^2 = 2xy$
- $\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$

Егор:

- $(x^2+9)y' = 4xy$
- $\cos^2(x)\ dy = \sin^2(y)\ dx$

Нур:

- $x\ dx + y\ dy = 0$
- $y^2(1+x)dx + x^2(1-y)dy = 0$

Евгений:

- $2y\ dy = 3x^2\ dx$
- $(e^x+1)\ dx = 6y^5\ dy$

Фрязино:

- $xy' = y$
- $y' + (2y+1)ctg(x) = 0$

2. Порядок уравнения.

Максимальный порядок производной, входящей в уравнение, называется порядком уравнения.

Определение. Обыкновенным дифференциальным уравнением $n-\text{ого}$ порядка будем называть соотношение, связывающее незавсимую переменную от x, функции $y(x)$ и ее производные до $n-\text{ого}$ порядка.

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

где F определена на $[a, b] \in R$

3. Решение уравнения.

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Определение. Функция $y = \varphi(x)$ называется решением уравнения (1) (частным решением), если она определена на $[a, b]$, имеет все производные до порядка n, то есть $\varphi \in C^n([a, b])$, если при подстановке в уравнение(1) мы получим тождество:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0, \text{ для всех } x \in [a, b]. \quad (2)$$

Определение. Решение уравнения (1), зависящее от n произвольных постоянных будем называть общим решением уравнения (1), если при соответсвующем наборе констант можно получить любое решение уравнения (1)

Пример:

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

$$y(x) = C_1 cos(x) + C_2 sin(x) - \text{общее решение}$$

4. Линейное уравнение.

$$\frac{d^n(y)}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_n(x)y = f(x). \quad (8)$$

- Если правая часть уравнения (8)- функция $f(x) \equiv 0$, то уравнение (8) называется **линейным однородным уравннением**.
- В противном случае уравнение (8) называется **линейным неоднородным уравннением**.
- Функции $a_1, a_2, ..., a_n$ называются коэффициентами уравнения (8).
- дифференциальное уравнение (8) имеет порядок n.
- Будем предполагать, что правая часть уравнения (8) и коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_n$ непрерывны на $[a, b]$

5. Однородное уравнение.

Определение. Однородным ДУ называется уравнение $n - \text{ого}$ порядка вида:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0,$$

Примеры

Джафар:

- $y'' - 2y' - 3y = 0$

Кенан:

- $y'' - 8y' + 16y = 0$

Егор:

- $y'' + 3y' - 10y = 0$

Нур:

- $y'' - 6y' + 25y = 0$

Евгений:

- $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

Фрязино:

- $y'' - 4y' = 0$

где $a_1, a_2, ..., a_n$ заданные коэффициенты, которые могут зависеть от x, а $y-$ искомая функция.

6. Неоднородное уравнение.

Неоднородным называется уравнение, которое содержит не равный тождественно нулю член-слагаемое, не зависящее от функций

$$b_1(t)x^{(n)} + ... + b_n(t)x - f(t) = 0,$$

где $f(t) \neq 0$

Примеры

Джафар:

- $y'' + 4y' + 13y = 5\sin(2x)$

Кенан:

- $y''2y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$

Егор:

- $5y'' - 4y' - y = 3\sin(x) + 2\cos(x)$

Нур:

- $y'' + y = \frac{1}{sin(x)}$

Евгений:

- $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$

Фрязино:

- $y'' + 4y = 2\operatorname{tg}(x)$

7. Задача Коши.

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Определение. (Задача Коши для уравнений n-ого порядка). Рассмотрим след. задачу. Среди всех решений уравнения (1) найти решение, удовлетворяющее условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ ..., \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \qquad (3)$$

Где $x_0 \in [a, b]$, а $y_0, y_1, ..., y_{n-1}-$ заданные числа. Условие (3) называется начальным условием, а задача (1),(3) называется задачей Коши.

Примеры

Джафар:

- $y' - 3y = 0, \quad y(0) = 5$

Кенан:

- $y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, y'(x) = 0$

Егор:

- $y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = -1, y'(x) = 3$

Нур:

- $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 0, y''(x) = -1$

Евгений:

- $x^2y'' + 3xy' - 4y = 0, \quad y(1) = 3, y'(1) = -2$

Фрязино:

- $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 4, y'(0) = -2$

8. Линейно зависимая и линейно независимая система решений.

Линейная зависимость. Система функций $y_1(x), ...y_n(x)$ называется линейно независимой на интервале $[a, b]$, если существуют такие константы $c_1, ..., c_n$, не все из которых равны нулю, что выполняется равенство:

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x) = 0$$

Линейная независимость. Система функций $y_1(x), ...y_n(x)$ называется линейно независимой на интервале $[a, b]$, если из равенства

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x) = 0$$

следует, что $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$

9. Определитель Вронского.

Определение. Для системы функций $y_1(x), ...y_n(x)$ определитель Вронского определяется как

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Это определитель матрицы, который состоит из функций и их производных до $(n-1)-\text{ого}$ порядка.

Свойства

Свойство 1. Если система функций линейно независима, то $W(x) \neq 0$

Свойство 2. Если система функций линейно зависима, то $W(x) \equiv 0$

10. Критерий линейной независимости n решений линейного однородного

уравнения.

Теорема 4. Пусть функции $y_1(x), ..., y_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$, и являются линейно независимыми на этом отрезке. Тогда на этом отрезке. Тогда на $[a, b]$ определитель, называемый определителем Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \equiv 0$$

Доказательство. По условию теоремы функции $y_1(x), ..., y_n(x)$ линейно зависимы. Это значит, что существует набор констант $\overline{c_1}, \overline{c_2}, ..., \overline{c_n}$, $\overline{c_1}^2, \overline{c_2}^2, ..., \overline{c_n}^2 \neq 0$, такой, что имеет место тождество:

$$\overline{c_1}y_1(x) + \overline{c_2}y_2(x) + ... + \overline{c_n}y_n(x) \equiv 0$$

Так как $y_1(x), ..., y_n(x)$ дифференцируемы $(n-1)$ раз, можем продифференцировать вышестоящее тождество $(n-1)$ раз. Тогда мы получим систему:

$$\begin{cases} \overline{c_1}y_1(x) + \overline{c_2}y_2(x) + ... + \overline{c_n}y_n(x) \equiv 0, \\ \overline{c_1}y_1'(x) + \overline{c_2}y_2'(x) + ... + \overline{c_n}y_n'(x) \equiv 0 \\ ..., \\ \overline{c_1}y_1^{(n-1)}(x) + \overline{c_2}y_2^{(n-1)}(x) + ... + \overline{c_n}y_n^{(n-1)}(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Рассмотрим эту систему относительно констант. Система линейно и однородна. Она всегда имеет нулевое решение. Однако, по условию теоремы система имеет и не нулевое решение. Это значит, что решение не единственно и определитель равен нулю. Но определитель системы - это и есть определитель Вронского.

Обратное утверждение не верно.

Теоерема 6. Критерий линейной независимости n решений линейного однородного уравнения. Для того, чтобы n решений $y_1(x), ..., y_n(x)-$ решения линейного однородного уравнения

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0,$$

с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами, были линейно независимы на этом отрезке необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского этих решений был отличен от нуля на всем отрезке $[a, b]$

Доказательство. Пусть решения $y_1(x), ..., y_n(x)$ линейно независимы. Тогда по теореме 5 $W \neq 0$ для всех $x \in [a, b]$.

Обратно, пусть $W \neq 0$. Тогда решения лиенйно независимы? Предположим противное, то есть, что решения линейно зависимы. Тогда по теореме 4 $W = 0$. Получили противоречие.

Если функции $y_1(x), ..., u_n(x)$ не являются решением линейного однородного уравнения, то W может обращаться в ноль.

11. Условие Липшица, примеры.

Пусть функция $f(x, y_1, ..., y_n)$ определена в области D.

Определение. Функция f, определена в ограниченной области D, удовлетворяет условию Липшица по переменным $y_1, ..., y_n$, если существует константа $L > 0$, такая, что для любых точек $(x, u_1, ..., u_n) \in D$ и $(x, v_1, ..., v_n) \in D$ выполняется неравенство:

$$|f(x, u_1, ..., u_n) - f(x, v_1, ..., v_n)| \le L \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i| \quad (1)$$

Определение. Область D наз. выпуклой, если для двух точек $(x, u_1, ..., u_n) \in D$ и $(x, v_1, ..., v_n) \in D$, и для любых s таких, что $0 \le s \le 1$, точка $(x, su_1 + (1-s)v_1, ...su_n + (1-s)v_n) \in D$

Лемма. Пусть функция f определена и непрерывно дифференцируема в выпуклой области D и кроме того:

$$|\frac{df}{dy_i}| \le k_i, \quad i = \overline{1, n}, \text{ где } k_i = const$$

Тогда функция f удовлетворяет условию Липшица по переменным $y_1, ..., y_n$

Доказательство. Возьмем 2 точки $(x, su_1 + (1-s)v_1, ...su_n + (1-s)v_n) \in D$. Покажем, что для f будет выполняться условие (1). Применяя формулу Ньютона-Лейбница, а также используя выпуклость области D получим следующее выражение:

$$|f(x, u_1, ..., u_n) - f(x, v_1, ..., v_n)| = |\int_0^1 \frac{d}{ds} f(x, su_1 + (1-s)v_1, ...su_n + (1-s)v_n) ds|$$

Пусть $z_1 = su_1 + (1-s)v_1, ..., z_n = su_n + (1-s)v_n$. Тогда:

$$|\int_0^1 \frac{d}{ds} f(x, z_1, ..., z_n) ds| = |\int_0^1 \frac{df}{dz_i}\frac{dz_i}{ds} ds| = |\int_0^1 \frac{df}{dz_i}(u_i - v_i) ds| \le$$

$$\le \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} |\frac{df}{dz_i}||u_i - v_i| ds \le \sum_{i=1}^{n} k_i |u_i - v_i| \int_0^1 ds \le K \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$$

Сопоставив начало и конец получим:

$$|f(x, u_1, ..., u_n) - f(x, v_1, ..., v_n)| \le K \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$$

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y_1, ..., y_n) = |y_1|$ в единичном шаре с центром в начале координат $B_1(0) \subset R^{n+1}$. В нуле эта функция не дифференцируема, но тем не менее, удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x,u_1,...,u_n)-f(x,v_1,...,v_n)| = ||u_1|-|v_1|| \leq |u_1-v_1| \leq \sum_{i=1}^{n}|u_i-v_i|$$

12. Теоремы о существовании и единственности задачи Коши: в полосе, для уравнения n-го порядка.

Теорема 6. (О существовании и единственности задачи Коши в полосе). Пусть функция $f(x,y)$ определена в полосе Π_2 и удовлетворяет условиям:

- $f(x,y)$ непрерывна в Π_2 по совокупности переменных.
- $f(x,y)$ по переменной y удовлетворяет условию Липшица в полосе(т.е существует константа $l>0$, единая для всей полосы, такая, что для любых точек $(x,y_1),(x,y_2)\in\Pi_2$ выполняется неравенство: $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq l|y_1-y_2|$.)

Тогда для любых $x_0\in I_a$ существует единственное решение $y=\varphi(x)$ задачи Коши, которое определено и непрерывно для любых $x\in I_a$

Теорема 7.(Теорема Пеано) Пусть правая часть уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, где $f\in C(G)$ и $(x_0,y_0)\in G$, где $G-$ некоторая область. Тогда задача Коши

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

имеет решение, определенное на некотором промежутке $[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

CREATED by Jafarabat ©