CREATED by Jafarabat ©

Билеты по теории вероятностей 2 курс 3 семестр

1. Простарнаство элементарных исходов. События, действия над над ними.

Определение : Элементарный исход ω - любой простейший (неделимый) результат конкретного случайного эксперимента

Определение : Пространство элементарных исходов Ω - это множество всех элементарных исходов, возможных в рамках конкретного случайного эксперимента.

В зависимости от числа элементарных исходов пространство Ω может быть либо дискретным(конечное или счетное), либо непрерывным.

Определение : Событие A - это любой набор элементарных исходов конкретного случайного эксперимента, или, иными словами, произвольное подмножество пространства элементарных исходов Ω.

Достоверным событием называется событие, состоящее из всех элементарных исходов случайного эксперимента (событие, которое обязательно просиходит в случайном экперименте).

Т.к достоверное событие совпадает с пространством элементарных исходов, то оно обозначается Ω.

Невозможным событием называется событие, не содержащее ни одного элементарного исхода случайного эксперимента(событие, которое никогда не происходить в данном случайном эксперименте)

Невозможное событие обозначается $\emptyset$.

Операции над событиями:

- **Пересечение (произведение, умножение)** двух событий A и B называют событие $C = \{\omega : \omega :\in A \text{ и } \omega \in B\}$, происходящее тогда и только тогда, когда одновременно происходят оба события A и B, т.е. это событие, состоящее из тех и только тех элементарных исходов, которые входят в оба события A и B. $C = A \cap B = AB$
- **Несовместными (непересекающимися)**) , событиями A и B называются события, для которых их пересечение является невозможным(у этих событий нет общих элементарных исходов). То есть $A \cap B = \emptyset$.
- **(попарно) Несовместными или (попарно) непересекающимися** , называются события $A_1, A_2, \dots, A_n$, если $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j$ при $i \neq j$
- **Объединением (суммой)** событий A и B называется событие $C = \{\omega : \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$, происходящее тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A и B. $C = A \cup B$. Т.е событие C состоит из тех элементарных исходов, которые принадлежат хотя бы одному из подмножеств A или B.
- **Разностью** событий A и B называется событие $C = A \setminus B$=$\{\omega : \omega \in A, \omega \notin B,\}$ происходящее тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B. Т.е C состоит из тех элементарных исходов, которые входят в A, но не входят в B.
- **Дополнением** события A называют событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ =$\{\omega : \omega \in \Omega, \omega \notin A,\}$ происходящее тогда, когда не происходит событие A. Событие $\overline{A}$ называют так же событием, противоположным событию A.

- Событие A **включено** в событие B (принадлжеит событию B), если появление события A влечет за собой наступления события B, т.е каждый элементарный исход, входящий в A, также входит в B. $A \cap B = A,\ A \cup B = B,\ A \setminus B = \emptyset$
- **Симметричной разностью** двух событий A и B называется событие C, такое, что $C = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Т.е событие C состоит из тех элементарных исходов, которые принадлежат и событию A, и B, но не одновременно двум событиям. Если события A и B являются несовместимыми, то верно

$$C = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$$

- **Совпадающими** называются такие события A и B, для которых $A \subset B$ и $B \subset A$. Т.е оба события состоят из одних и тех же элементарных исходов.
- **Равнозначными** называются события A и B, которые содержат в себе одинаковое число элементарных исходов. Т.е $A \sim B$.
- **Полную группу событий** образуют события $A_1, A_2,\ \dots\ , A_n$, если выполняются два условия:
    1. Для любых пар событий верно $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall\, i, j$ при $i \neq j$. Т.е события являются несовместными.
    2. Объеденения всех событий $A_1, A_2,\ \dots\ , A_n$ образует пространство элементарных событий.

2. Алгебра и сигма-алгебра событий

Определение : Алгебра событий $\mathcal{A}$ называется непустая система подмножеств пространства элементарных исходов Ω, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. Если подмножество A принадлежит алгебре $\mathcal{A}$(является событием), то его дополнение $\overline{A}$ также принадлежит алгебре $\mathcal{A}$.(является событием)
2. Если подмножества A и B принадлежат алгебре $\mathcal{A}$(являются событиями), то их Объеденение $A \cup B$ также принадлежит алгебре $\mathcal{A}$(является событием)

Аскиома 2 также включает в себя пересечение и для конечного набора событий

Определение : Сигма-алгеброй ($\sigma - \text{алгебой}$) событий $\mathcal{B}$ называется непустая система подмножеств пространства элементарных исходов Ω, которая удовлетворяет следующим аксиомам:

1. Если подмножество A принадлжеит $\sigma - \text{алгебре}\ \mathcal{B}$(является событием), то его дополнение $\overline{A}$ также принадлежит $\sigma - \text{алгебре}\ \mathcal{A}$(является событием).
2. Если подмножества $A_1, A_2, \dots\ , A_n$(счетный набор подмножеств) принадлежат $\sigma - \text{алгебре}\ \mathcal{B}$ (являются событиями), то их счетное Объеденение(пересечение) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ($\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$) также принадлежат $\sigma - \text{алгебре}\ \mathcal{B}$(являются событиями)

3. Аксиоматическое определение вероятности. Свойства вероятности (с доказательством) Вероятностное пространство.

Определение : Вероятностью называется числовая функция $P(A)$, заданная на $\sigma - \text{алгебре}$ событий $\mathcal{B}$, которая каждому событию A(подмножеству $A \in \mathcal{B}$, построенной на пространстве элементарных исходов Ω) ставит в соответствие число $P(A)$ и удовлетворяет следующим аксиомам:

1. Для любого события A вероятность является не отрицательным числом - $P(A) \geq 0, \forall A \subset B$(аксиома неотрицательности)
2. Вероятность достоверного события равняется единице - $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности)
3. Если события $A \text{ и } B$ несовместны ($A, B \subset \mathcal{B}, A \cap B = \emptyset$), то вероятность объединения этих событий равна сумме вероятностей событий -$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$(аксиома сложения)

Если пространство элементарных исходов Ω является счетным или непрерывным, то 3 аксиома заменяется расширенной аксиомой сложения:

3. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно несовместимыми ($A_i \subset \mathcal{B}, A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, i,\ j \geq 1$), то вероятность их объединения равна сумме вероятностей:

$$P(A_i \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Свойства:

Свойство №1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$(вероятность дополнительного события).

Доказательство : Пространство элементарных исходов Ω можно представить как объединение двух несовместимых событий: A и $\overline{A}$, т.е $\Omega = A + \overline{A}$. Согласно **аксиоме 3** $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Согласно **аксиоме 2** $P(\Omega) = 1$. Таким образом:

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Свойство №2. $P(\emptyset) = 0$ (вероятность невозможного события)

Доказательство : Невозможное событие является дополнением достоверного события $\emptyset = \overline{\Omega}$, следовательно, согласно **свойству 1** и **аксиоме 2**, получаем

$$P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

Свойство №3. Если событие A принадлежит событию B ($A \subset B$), то $P(A) \leq P(B)$(бОльшему событию соответствует бОльшая вероятность)

Доказательство : Пусть $A \subset B$., тогда событие B можно представить как объединение двух несовместимых событий $B = A + B/A$. Тогда используя **аксимому 3**, получаем

$$P(B) = P(A + B/A) = P(A) + P(B/A).$$

Но в силу **аксиомы 1** $P(B \setminus A) \geq 0$, следовательно $P(B) \geq P(A)$.

Свойство №4. Для любого события A верно, что $0 \leq P(A) \leq 1$.

Доказательство : Из **аксиомы 1** следует, что $\forall A \subset \mathcal{B}, P(A) \geq 0$. Если событие A принадлежит пространству элементарных исходов Ω (то есть$A \subset \Omega$), то Из **свойства 3** следует, что $P(A) \leq P(\Omega) = 1$

Свойство №5. Вероятность объединения двух событий A и B равна сумме вероятности событий минус вероятность их пересечения:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Доказательство : Предстваим объединение двух событий A и B как сумму двух несовместных событий: $A \cup B = A + B \setminus A$. Тогда $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$(в силу **аксиомы 3**). Далее, событие B представим тоже как сумму двух несовместных событий: $B = B/A + AB$ и тогда (по **аксиоме 3**) $P(B) = P(B/A + AB) = P(B/A) + P(AB)$. Следовательно, $P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$. Подставляя полученное выражение в формулу $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$ получим итоговое выражение

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Свойство №6. Вероятность объединения произвольных n событий $A_1, A_2, \dots A_n$ вычисляется по формуле:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) =$$
$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_{n-1}A_n) + P(A_1A_2A_3) + \dots + P(A_{n-2}A_{n-1}P_n) -$$
$$-P(A_1A_2A_3A_4) - \dots + (-1)^{n+1}P(A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n)$$

Доказательство : Свойство доказывается по методу мат. индукции. Докажем при $n = 3$

$$
\begin{gathered}
P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right)=P\left(A_1 \cup\left(A_2 \cup A_3\right)\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2 \cup A_3\right)-P\left(A_1\left(A_2 \cup A_3\right)\right)= \\
=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+P\left(A_3\right)-P\left(A_2 A_3\right)-P\left(A_1 A_2 \cup A_1 A_3\right)= \\
=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+P\left(A_3\right)-P\left(A_2 A_3\right)-\left(P\left(A_1 A_2\right)+P\left(A_1 A_3\right)-P\left(A_1 A_2 A_3\right)\right)= \\
=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+P\left(A_3\right)-P\left(A_1 A_2\right)-P\left(A_1 A_3\right)-P\left(A_2 A_3\right)+P\left(A_1 A_2 A_3\right)
\end{gathered}
$$

Свойство №7. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то **свойство 6** представимо в виде:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Доказательство : Свойство является частным случаем **расширенной аксиомы сложения**

Определенная аксиоматическая вероятность является третьей компонентой вероятностного пространства.

Определение : Вероятностным пространством называется тройка $\Omega, \mathcal{B}, P$, состоящая из пространства элементарных исходов Ω, построенной на этом пространстве σ-алгебры $\mathcal{B}$ и определенной на $\sigma-\text{алгебре}$ событий $\mathcal{B}$ вероятности P

4. Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики. Гипергеометрическая схема

Определение : Пусть для заданного вероятностного пространства Ω выполяняются 2 условия:

1. Пространство является конечным
2. Все элементарные исходы **равновероятны**, то есть вероятности элементарных исходов совпадают и определяются по формуле:

$$P(\omega) = \frac{1}{n},$$

где n- число элементарных исходов в пространстве Ω.

Тогда говорят, что задана классическая схема вероятности(классическая вероятность), и вероятность любого события A может быть найдена по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где $m-$ число благоприятствующих элементарных исходов для события A, а $n-$ общее число элементарных исходов в пространстве Ω.

Основаная формула комбинаторики : Основаная формула комбинаторики: пусть даны m групп элементов, причем $i-\text{ая}$ группа состоит из n_i элементов. Из каждоый группы выбирают по 1 элементу. Общее число N способов, с помощью которых можно осуществить указанный выбор определяется равенством:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots n_m.$$

Выборка с возвращением : Пусть производится выбор с возвращением из группы в n элементов k элементов(т.е из n достали 1, записали и вернули назад, и так ровно k раз). Тогда число всех способов выбора ровно k элементов из n определяется по формуле:

$$n^k$$

Перестановкой без возвращения : из n элементов называется любой упорядоченный набор этих элементов. Число различных перестановок из n элементов, которое обозначается через $P_n(P(n))$, определяется формулой:

$$P_n = n!.$$

Размещением из n элементов по m (без повторения) называется любой упорядоченный набор из m различных элементов, выбранных из общей совокупности в n элементов. Число размещений A_n^m определяется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Сочетанием из n элементов по m (без повторения) называется любой неупорядоченный набор из m различных элементов, выбранных из общей совокупности в n элементов. Для определения числа сочетаний C_n^m используется формула:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Гипергеометрическая схема(распределение)

Пусть имеется $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ различных элементов(частиц), причем из них n_1- элементы 1-ого типа, n_2- элементы 2-ого типа и т.д. Случайным образом из этих элементов выбирают m элементов($m \leq n$).

Рассмотрим событие A, состоящее в том, что среди выбранных m элементов окажется ровно m_1 элементов 1-го типа, m_2 элементов 2-го типа и т.д($m_1 + m_2 + \dots + m_k = m$, $m_1 \leq n_1, m_2 \leq n_2, \dots, m_k \leq n_k$). Рассмотренный способ называется **гипергеометрической схемой**

Т.к порядок выбора не важен, то используем число сочентаний. C_n^m-общее число исходов, $C_{n_1}^{m_1}-$ - вариантов для 1-ого типа,$C_{n_2}^{m_2}-$ - вариантов для 2-ого типа и т.д. Следовательно, вероятность определяется по формуле:

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot C_{n_1}^{m_1}}{C_n^m}$$

5. Геометрическое определение вероятности. Задача о встрече.

Пусть $\Omega-$ некоторая область в пространстве, имеющая конечную меру $\mu(\Omega)$(этой мерой может быть длина, площадь, объём и т.д). Основное требование - мера пространства Ω должна быть конечной ($0 < \mu(\Omega) < \infty$)

Говорят, что реализуется принцип геометрической вероятности, если произвольная точка равномерным образом попадает в данную область Ω, и вероятность $P(A)$ попадания этой точки в некоторую област A, являющуюся подобластью(частью) Ω, пропорциональна мере этой области $\mu(A)$ или, в силу аксиомы нормированности,

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Здесь нужно еще решить задачу о встрече как пример

6. Условная вероятность. Формула умножения вероятностей.

Определение : Условной вероятностью события B при условии(наступления) события A называется отношение число элементарных исходов n_{AB} пересечения 2ух событий(благоприятных для совместного осуществления событий A и B) к числу элементарных исходов для события A:

$$P(B/A) = \frac{n_{AB}}{n_A}$$

Если поделить числитель и знаменатель дроби на число элементарных исходов n_Ω, входящих в пространство элементарных исходов:

$$P(B/A) = \frac{\frac{n_{AB}}{n_\Omega}}{\frac{n_A}{n_\Omega}} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

получаем формулу для расчета условной вероятности, при условии $A \neq \emptyset, (n_A > 0), P(A) > 0$.

Свойства

Свойство 1. Для условной вероятности верна аксиома неотрицательности $P(A/B)$

Доказательство. По определению $P(A/B) = \frac{n_{AB}}{n_B}$, но $n_{AB} \geq 0, n_B > 0$. Следовательно $P(A/B) = \frac{n_{AB}}{n_B} \geq 0$

Свойство 2. Для условной вероятности $P(\Omega/B)$ верна аксиома нормированности $P(\Omega/B) = 1$

Доказательство. Для любого события $B \neq \emptyset$ верно, что $B \subset \Omega$ данное событие принадлежит пространству элементарных исходов. По свойствам операции пересечения(умножения) событий имеем:

$$\Omega \cap B = B \Rightarrow n_{\Omega B} = n_B \Rightarrow P(\Omega/B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{n_B}{n_B} = 1$$

Свойство 3. Пусть события B, C несовместные. Тогда верно $P(B + C/A) = P(B/A) + P(C/A)(\text{аксиома сложения})$.

Доказательство. Если события B, C несовместные, то пересечение событий AB и AC тоже несовместные, то есть $(B + C)A = AB + BC$. По аксиоме сложения вероятностей $P(B + C)A) = P(AB) + P(AC)$. Тогда, используя аксиомы и свойства вероятности, а также определение условий вероятности, получаем:

$$P(B + C/A) = \frac{P(B + C)A}{P(A)} = \frac{P(AB) + P(AC)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)} + \frac{A(AC)}{P(A)} = P(B/A) + P(C/a)$$

Свойство 4. Условная вероятность невозможного события при условии события A равна нулю: $P(\emptyset/A) = 0$

Доказательство. Используя то, что пересечение невозможного события с любым другим событием есть невозможное событие, получим:

$$P(\emptyset/A) = \frac{P(\emptyset \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$$

Свойство 5. Если событие $B \subset C$, то условная вероятность события B при условии события A будет не больше условной вероятности события C при условии события $A : P(B/A) \leq P(C/A)$.

Доказательство. Если верно, что $B \subset C$, то тогда событие C можно представить как объединение двух несовместных событий: $C = B + C \setminus B$. Тогда:

$$P(C/A) = P((B + C \setminus B)/A) = P(B/A) + P((C \setminus B)/A).$$

Так как вероятности неотрицательны , то $P(B/A) \geq 0, P((C \setminus B)/A \geq 0)$, то следует $P(C/A) \geq P(B/A)$.

Свойство 6. Для любого события B верно, что $0 \leq P(B/A) \leq 1$

Доказательство. Доказательство данного свойства полностью аналогично доказательству аналогичного свойства безусловной вероятности, а так же следует из доказанных выше свойств условной вероятности.

Свойство 7. Для любого события B верно, что $P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A)$

Доказательство. Пространство элементарных исходов Ω можно записать как объединение двух несовместных событий: B и его дополнения $\overline{B}$. Тогда (аксиома нормированности и аксиома сложения)

$$1 = P(\Omega/A) = P(B + \overline{B}/A) = P(B/A) + P(\overline{B}/A) \Rightarrow P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A)$$

Свойство 8. Если события A, B являются несовместными, то $P(A/B) = 0, P(B/A) = 0$.

Доказательство. События A, B несовместные, следовательно их пересечение пустое множество. Тогда:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

Свойство 9. Если событие A принадлежит событию $B(A \subset B)$, то условная вероятность события B при условии наступления события A равна 1.

Доказательство.

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Определение : Пусть событие A представимо как пересечение событий $A_1, A_2, ..., A_n$, т.е $A = A_1A_2...A_n$ тогда вероятность события A определяется по формуле умножения вероятностей.

$$P(A) = P(A_1A_2...A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n/A_1A_2...A_n)$$

Доказательство : $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB) = P(A/B)P(B)$

Тогда

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}) \cdot P(A_1A_2...A_{n-1})$$

$$P(A_1A_2...A_{n-1}) = P(A_{n-1}/A_1 - 2...A_{n-2}) \cdot P(A_1A_2...A_{n-2})$$

Продолжаем до тех пор, пока не останется вероятность пересечения только 2ух событий A_1, A_2

$$P(A_1A_2) = P(A_2/A_1) \cdot P(A_1)$$

Собираем результаты в 1 формулу

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})P(A_{n-1}/A_1A - 2...A_{n-2}) \cdot ... \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_1)$$

7. Независимость событий попарно и в совокупности. Пример Бернштейна событий, независимых попарно, но зависимых в совокупности. Доказательство независимости пар событий $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$

Определение. События A и B называются **независимыми**, если услованая вероятность события B при условии события A совпадают с безусловной вероятсностью события B, то есть $P(B/A) = P(B)$.

Понятние независимости событий A и B является симметричным относительно перестановки событий.

Определение. События A и B называются **независимыми**, если услованая вероятность события A при условии события B совпадают с безусловной вероятсностью события A, то есть $P(A/B) = P(A)$

Доказательство.

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Аналогично для второго определения.

Определение. События A и B называются независимыми, если вероятность их совместового осуществления равна произведению вероятностей событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Данная независимость называется попарной, так как мы рассматриваем только пару событий.

Утверждение. Если события A и B независимы, то независимыми будут и следующие пары событий: $\overline{A}$ и B , A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Доказательство. Докажем через определение и свойства условной вероятности и определение независимости событий A и B

$$1.\ P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - P(A) = P(\overline{A}).$$

$$2.\ P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - P(B) = P(\overline{B})$$

С другой стороны, из определения условной вероятности:

$$P(\overline{B}/A) = \frac{P(\overline{B}/A)}{P(A)} \Rightarrow P(\overline{B}A) = P(\overline{B}/A) \cdot P(A) = P(\overline{B}) \cdot P(A)$$

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{B}) \cdot P(A)}{P(\overline{B})} = P(A)$$

Для пары событий $\overline{A}, \overline{B}$ доказательством независимости явлется следвствие предыдущих пунктов.

Определение6 : События A, B, C называют **независимыми в совокупности**, если выполняются следующие 2 условия:

1. Любые 2 пары событий независимы
2. Вероятность пересечения 3 событий равна произведению вероятностей событий.

Пример Бернштейна

Три грани правильного тетраэдра (четырёхгранной пирамиды) раскрашены в зелёный, синий и красный цвета следующим образом: одна грань окрашена только в зелёный цвет, другая грань — только в синий цвет, третья грань — только в красный, на четвёртой грани есть все три цвета. Определим три события: A={на нижней грани тетраэдра есть зелёный цвет}, B={на нижней грани тетраэдра есть синий цвет}, C={на нижней грани тетраэдра есть красный цвет}.

Тогда вероятность равна:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

так как каждый цвет присутствует на двух гранях. Вероятность одновременного осуществления двух событий:

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

так как два цвета присутствуют только на одной из четырёх граней. Таким образом, любая пара событий является независимой (выполнено условие 1 из определения 6). Вероятность того, что на нижней гране тетраэдра будут все три цвета (одновременное наступление всех трёх событий) равна

$$P(ABC) = \frac{1}{4}$$

так как только на одной из четырёх граней присутствуют все три цвета. Нетрудно заметить, что условие 2 определения 6 независимости в совокупности не выполняется:

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

8. Формула полной вероятности (формулировка и вывод). Формула Байеса (вывод)

Формула полной вероятности

Определение : Гипотезой H_1 будем называть событие, удовлетворяющее двум условиям:

1. Любые 2 события H_i и $H_j (1 \neq j)$ являются несовместными , т.е $H_i H_j = \emptyset$.
2. Объеденения всех $n-$ событий образует пространство элементарных исходов

Таким образом гипотезы образуют полную группу событий

Пусть известныв вероятности $P(H_i)$ гипотез H_i, образующих полную группу событий, а также известны вероятности $P(A/H_i)-$ условные вероятности наступления события A при условии H_i, тогда вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i),$$

называемой **формулой полной вероятности.**

Доказательство : Пространство элементарных исходов Ω представим как объединение n несовместимых гипотез:

$$\Omega=H_1+H_2+...+H_n$$

Далее, событие A представим как пересечение с достоверным событием $\Omega-A=A\Omega$. Тогда вероятность события A вычисляется так:

$$P(A)=P(A\Omega)=P(A(H_1+H_2+...+H_n))=P(AH_1+AH_2+...+AH_n)=P(AH_1)+P(AH_2)+...+P(AH_n),$$

где $P(AH_i)=P(A/H_i)\cdot P(H_i)$

Подставляем в формулу для вероятности A:

$$P(A)=P(A\Omega)=P(AH_1)+P(AH_2)+...+P(AH_n)=P(A/H_1)\cdot P(H_1)+P(A/H_2)\cdot P(H_2)+...+P(A/H_n)\cdot P(H_n)$$

Формула Байеса

Формула которая позволяет переоценить вероятность $i-\text{ой}$ гипотезы при условии события A:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}$$

называется **формула Байеса.**

Доказательство : Воспользуемся формулой условной вероятности.

$$P(H_i/A)=\frac{P(AH_i)}{P(A)}=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}$$

9. Схема Бернулли, формула Бернулли (вывод формулы).

Определение. Схемой Бернулли (биномильной схемой) называется последовательность независимых и одинаковых экспериментов, в каждом из которых либо с вероятностью p наступает событие A(успех), либо с вероятностью $q=1-p$ не наступает событие A(неудача).

Таким образом, для схемы Бернулли необходимо выполнение следующих условий:

- Эксперименты должны быть независимыми(результат одного эксперимента никак не должен влиять на результат последующих экспериментов)
- Эксперименты должны быть одинаковыми
- В результате эксперимента возможны только два противоположных друг другу события(успех и неудача)

Пусть проводится n независимых одинаковых испытаний, в каждом из которых может произойти только 2 несовместных события: либой успех(p), либо неудача($q=1-p$). Тогда вероятность получить ровно m успехов в n испытаниях Бернулли определяется по формуле:

$$P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m},\ m=\overline{0,n},$$

называемой **формулой Бернулли.**

Доказательство : Выведем формулу Бернулли. Обозначим через У успех в каждом испытании, а через Н - неудачу, тогда $\omega=\{\text{УУУННН...УУУННН}\}$, где на n позициях(общее число экспериментов) находятся либо

У, либо Н.
Событие A={произошло m успехов в n испытаниях Бернулли} $m \leq n$ входят элементарные исходы $\omega_A =$ {УУУНННУНУ...УУНУНУН}, где $m-$ число успехов, а $n-m-$ число неудач.
Вероятность такого исхода: $P(\omega_A) = p^m \cdot q^{n-m}$
Теперь определим, сколько элементарных исходов входит в событие A. Для этого достаточно определить скольким числом способов можно расставить на n позициях m У и $n-m$ Н. Т.е использовать число сочетаний C_n^m. В итоге получаем:

$$P(A) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

10. Теорема Пуассона (с доказательством).

Теорема Пуассона. Если число испытаний n Бернулли велико и $m-$ нет, а $\lambda = np$ (либо $\lambda' = nq$) достаточно мала, тогда вероятность $P_n(m)$ получить ровно m в n испытаниях Бернулли вычисляется по приближенной формуле:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},\ m = \overline{0, n},$$

называемой **формулой Пуассона.**

Доказательство : Докажем через формулу Бернулли
$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-q)^{n-m} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!} p^m (1-p)^{n-m}$.
$\lambda = np \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$
$P_n(m) = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!} (\frac{\lambda}{n})^m (1-\frac{\lambda}{n})^{n-m} = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot ... \cdot \frac{n-m+1}{n} \cdot (1-\frac{\lambda}{n})^n \cdot (1-\frac{\lambda}{n})^{-m}$
При $n \to \infty$ каждая дробь($\frac{n}{n}, \frac{n-1}{n}$...и т.д)$\approx 1$
$(1-\frac{\lambda}{n})^{-m} \approx 1$, т.к $\frac{\lambda}{n} \to 0$
$(1-\frac{\lambda}{n})^n \to e^{-\lambda}$
В итоге получаем:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

11. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Локальная теорема Муавра – Лапласа. Если в схеме Бернулли число испытаний $n-$ велико, а также велико значение параметра $\lambda = np$ $(\lambda' = nq)$, то для всех m справедлива приближенная формула (**локальная формула Муавра – Лапласа.**):

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}},\ \text{где } x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Для функций $\varphi(x)$ существуют специальные таблицы.

Свойства функции:

- $\varphi(-x) = \varphi(x)$ т.к функция являяется четной
- при $x \geq 5$ значение функции $\varphi(x) \approx 0$

Интегральная теорема Муавра – Лапласа. Если в схеме Бернулли число испытаний $n-$ велико, а также велико значение параметра $\lambda = np$ $(\lambda' = nq)$, то для всех m, лежащих в пределах (m_1, m_2) справедлива приближенная формула (**интегральная формула Муавра – Лапласа.**):

$$P\{m_1 < m < m_2\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Функция $\Phi(x)$ обладает следующими свойствами:

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- при $x \geq 5$ $\Phi(x) \approx 1$, а при $x \leq -5$ $\Phi(x) \approx 0$

При решении практических задач вместо функции $\Phi(x)$ используют функцию Лапласа $\Phi_0(x)$ определяемую по формуле:

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-y^2}{2}} dy = \Phi(x) - \frac{1}{2}.$$

Функция Лапласа $\Phi_0(x)$ обладает следующими свойствами:

- $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$ т.к функция явяляется нечетной
- при $x \geq 5$ $\Phi_0(x) \approx \frac{1}{2}$

В терминах функции Лапласа $\textbf{интегральная формула Муавра} - \textbf{Лапласа.}$ имеет вид:

$$P\{m_1 < m < m_2\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1),$$

где

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

12. Теорема Бернулли (закон больших чисел в форме Бернулли). Полиномиальная схема.

$\textbf{Теорема Бернулли.}$ $\forall \varepsilon > 0$ верно, что вероятность отклонения наблюденной частоты успехов μ от вероятности успеха p в одном испытании Бернулли на величину, не больше ε, стремится к 1 с ростом числа испытнаний Бернулли:

$$P\{|\mu - p| \leq \varepsilon\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

$\textbf{Полиномиальной схемой.}$ называется последовательность независимых и одинаковых экпериментов, в каждом из которых может произойти ровно одно из k несовместных событий $A_i(i = \overline{1,k}, A_1 + A_2 + ... + A_k = \Omega)$ с вероятностью $p_i(p_1 + p_2 + ... + p_k = 1)$

Для полиномиальной схемы имеем:

1. Эксперименты должны быть независимыми.
2. Эксперименты должны быть одинаковыми.
3. В результате каждого эксперимента может произойти ровно одно из k несовместных событий $A_i(i = \overline{1,k}, A_1 + A_2 + ... + A_k = \Omega)$

При $k = 2$ полиномиальная схема становится схемой Бернулли.

Пусть задана полиномиальная схема. Тогда вероятность того, что в n независимых одинаковых испытаниях событие A_1 наступит ровно n_1 раз, A_2- ровно n_2 и т.д вычисляется по $\textbf{полиномиальной формуле}$

$$P_n(n_1, ...n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ... \cdot p_k^{n_k}$$

13. Случайная величина. Функция распределения и ее свойства (свойства – с доказательством).

$\textbf{Определение 1.}$ $\textbf{Случайной величиной}$ ξ называется действительная числовая функция, ставящая в соответсвие каждому элементарному исходу ω некоторое действительное число $\xi(\omega)$, причем для любого числа x множество $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ элементарных исходов $\xi(\omega)$, для которых $\xi(\omega) < x$ является событием(функция $\xi(\omega)$ яваляется измеримой относительно $\sigma - \text{алгебры}$ событий $\mathcal{B}$)

Определение 2. Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x) = F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{\xi < x\}$ (события, состоящего только из тех элементарных исходов ω, для которых $\xi(\omega) < x$)

Свойства

Свойство 1. Для любого значения аргумента x верно, что

$$0 \leq F_\xi(x) \leq 1.$$

Доказательство. По определению $F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}$, но для вероятности любого события верно, что она принимает значения от 0 до 1.

Свойство 2. Если $x_1 \leq x_2$, то $F_\xi(x_2)$ Функция является неубывающей.

Доказательство. Рассмотрим события $A_1 = \{\omega : \xi(\omega) < x_1\}$ и $A_2 = \{\omega : \xi(\omega) < x_2\}$. Если $x_1 \leq x_2$, то событие A_1 принадлежит событию A_2 т.к $(-\infty; x_1) \subset (-\infty; x_2) \Rightarrow$ по свойствам вероятности $P(A_1) \leq P(A_2)$.

Свойство 3. $F_\xi(-\infty) = 0$

Доказательство. Рассмотрим событие $\{\omega : \xi(\omega) < -\infty\}$. Это событие является невозможным, т.к с.в. ξ не может принимать значения $< -\infty \Rightarrow$ такие элементарные исходы не существуют.

Свойство 4. $F_\xi(\infty) = 1$

Доказательство. Рассмотрим событие $\{\omega : \xi(\omega) < \infty\}$. Получается, что случайная велична ξ может принять любое действительное значение, то есть это событие - достоверное. Вероятность достоверного события равна 1.

Свойство 5. Вероятность попадания случайной величины ξ на интервал $[x_1, x_2)(x_1 \leq \xi < x_2)$ определяется по формуле

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F_x(x_2) - F_\xi(x_1)$$

Доказательство. Рассмотри 2 события: $A_1 = \{\omega : \xi(\omega) < x_1\}$ и $A_2 = \{\omega : \xi(\omega) < x_2\}$, причем $x_1 \leq x_2$. Тогда событие A_2 можно предстваить как сумму двух несовметсных событий:

$$A_2 = \{\xi < x_2\} = A_1 + A_2 \backslash = \{\xi < x_1\} + \{x_1 \leq \xi < x_2\}$$

По свойствам вероятности получаем:

$$P\{\xi < x_2\} = P(A_2) = P(A_1) = P(A_2 \setminus A_1) = P\{\xi < x_1\} w + P\{x_1 \leq \xi < x_2\}$$

Выразим $P\{x_1 \leq \xi < x_2\}$:

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = P\{\xi < x_2\} - P\{\xi < x_1\} \Rightarrow F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$$

Свойство 6. Функция распределения ξ является непрерывной. Т.е $F_\xi(x) = F_\xi(x - 0)$

Доказательство. Пусть задана возрастающая последовательность действительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n (x_1 < x_2 ...)$ сходящаяся к некоторому числу x. Определим следубщие несовместные события $A_1, ..., A_n$

$$A_1 = \{\xi < x_1\}$$

и т.д

Тогда событие $A = \{\xi < x\}$ представимо как счетное объединение всех событий

$$A = A_1 + A_2 + ... + A_n = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

В силу расширенной аксиомы сложения, определения событий и свойства 5 функции распределения вероятностей, получаем:

$$P(A) = P(A_1 + A_2 ...) = P(A_1) + P(A_2)... = P\{\xi < x_1\} + P\{x_1 \leq \xi < x_2\}... = F_\xi(x_1) + [F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)]... = \lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n)$$

Следовательно,

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = F_\xi(x-0)$$

14. Дискретная случайная величина. Ряд распределения. Биномиальное, пуассоновское, геометрическое распределения.

Определение 3. Дискретная с.в ξ - это с.в, которая каждому элменетарному исходу ω ставит в соответствие одно из дискретного набора чисел $X_1, X_2 ...$

Определение 4. Рядом распределения (вероятностей) дискретной с.в ξ называется таблица, состоящая из двух строк: в верхней строке перечислены все возможные значения X_i случайной величины ξ, а в нижней строке указываются вероятности $p_i = P\{\xi = X\}$ того, что с.в ξ примет эти значения.

ξ	X_1	X_2	$\dots$	X_i	$\dots$	X_n
P_ξ	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

ξ	X_1	X_2	$\dots$	X_i	$\dots$	X_n	$\dots$
P_ξ	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n	$\dots$

Т.к в ряде распределения указываются все возможные значения с.в ξ, то для вероятностей $p_i = P\{\xi = X_i\} (i = \overline{1, n})$ должно выполняться следующее условие(нормировка)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

для дискретной с.в с конечным множеством значений, и

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

для дискретной случайной с.в со счетным множеством значений.

$$F_\xi(x) = \sum_{X_i < x} P\{\xi = X\}$$

Биномиальное распределение. С.в ξ распределена по биномиальному закону, если она принимает значения $0, 1, 2, 3...$ с вероятнстями $p_i = P\{\xi = i\}$

ξ	0	1	$\dots$	i	$\dots$	n
P_ξ	q^n	$C_n^1 pq^n$	$\dots$	$C_n^i p^i q^{n-i}$	$\dots$	p^n

С.в ξ описывает число успехов в n испытнаниях Бернулли, веротяность $p-$ успех, $q = 1 - p-$ неудача. Это параметры биномиального распределения.

Проверим условие нормировки:

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} = (p+q)^n = (p+1-p)^n = 1.$$

Распределение Пуассона. С.в ξ распределена по закону Пуассона, если она принимает целые неотрицательные значения с вероятностями, представленными в таблице, где $\lambda > 0-$ это параметр пуассоновского распределения.

ξ	0	1	2	$\dots$	i	$\dots$
P_ξ	$\mathrm{e}^{-\lambda}$	$\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}\mathrm{e}^{-\lambda}$	$\dots$	$\frac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda}$	$\dots$

Проверим условие нормировки:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}$$

Т.к. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}$ это разложение в ряд Тейлора экспоненты e^λ, то получаем

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

Геометрическое распределение. Пусть с.в ξ будет показывает число неудач, наступающих до появления первого успеха. Т.к успех может произойти в 1 испытании, то минимальное значени $\xi = 0$, а максимальное значение $\to \infty$. Вероятность того, что что первое испытание закончилось успехом - p $(\Rightarrow \xi = 0)$. Вероятность, что успех произошел на втором испытании($\xi = 1$) равна qp. Вероятность того, что $\xi = i, i > 1$ равна $q^i p.D$

ξ	0	1	2	$\dots$	i	$\dots$
P_ξ	p	qp	q^2p	$\dots$	q^ip	$\dots$

Проверим условие нормировки:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} q^i p = p \sum_{i=0}^{\infty} q^i$$

$q < 1$, сумма $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ - это сумма бесконечно убывающей прогрессии, следовательно:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \sum_{i=0}^{\infty} q^i p = p \sum_{i=0}^{\infty} q^i = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

15. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения и ее свойства (свойства – с доказательством). Равномерное,

экспоненциальное, нормальное, гамма распределения.

Определение 1. Непрерывной называется с.в ξ, у которой функция распределения $F_\xi(x)$ можно представить:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(y)dy$$

где функция $p_\xi(x)$ называется **плотностью распределения вероятностей**.

Плотность распределения связана с функцией распределения следующим образом:

$$p_\xi(x) = \frac{d}{dx}F_\xi(x) = F'_\xi(x),$$

Свойство 1. Для любого аргумента x плотности распределения верно:

$$p_\xi(x) \geq 0$$

Доказательство. Докажем через опр.1 и определение производной.

$$p_\xi(x) = \frac{d}{dx}F_\xi(x) = F'_\xi(x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{F_\xi(x+\Delta) - F_\xi(x)}{\Delta}$$

$F_\xi(x)$ является неубывающей функцией, следовательно, $F_\xi(x+\Delta) - F_\xi(x) \geq 0$ при $\Delta \geq 0$

Свойство 2. Для любых x_1 и x_2, таких, что $x_1 \leq x_2$ верно:

$$P = \{x_1 \leq \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x^2} p_\xi(x)dx$$

Доказательство. Воспользуемся свойсвтом функции распределения вероятностей $P = \{x_1 \leq \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$ и опр. 1 непрерывной с.в, а также свойствами интегралов:

$$P = \{x_1 \leq \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} p_\xi(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} p_\xi(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx$$

Свойство 3. Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1$$

Доказательство. Воспользуемся свойствами функции распределения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = F_\xi(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

Свойство 4. Вероятность попадания на малый интервал Δ:

$$P = \{x \leq \xi < x+\Delta\} \approx p_\xi(x)\cdot\Delta$$

Доказательство. докажем через **Свойство 2.**:

$$P = \{x \leq \xi < x+\Delta\} = \int_{x}^{x+\Delta} p_\xi(x)dx \approx p_\xi(x)\cdot\Delta$$

Свойство 5. Вероятность попадания в любую конкретную точку x для непрерывной с.в. равна нулю:

$$P\{\xi = 0\} = 0$$

Доказательство. Представим вероятность $P\{\xi = x\}$ в следующем виде:

$$P\{\xi = x\} = \lim_{\Delta\to 0} P\{x \leq \xi < x+\Delta\}$$

Используя **свойство 4.**:

$$P\{\xi = x\} = \lim_{\Delta \to 0} P\{x \le \xi < x + \Delta\} = \lim_{\Delta \to 0} p_\xi(x)\Delta = p_\xi(x) \cdot 0 = 0$$

Используй **свойство 5.** можно переопределить **свойство 2.**:

Свойство" 2. Для любых $x_1,\ x_2 (x_1 \le x_2)$ верно:

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = P\{x_1 < \xi < x_2\} = P\{x_1 < \xi \le x_2\} = P\{x_1 \le \xi \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx$$

Примеры распределений

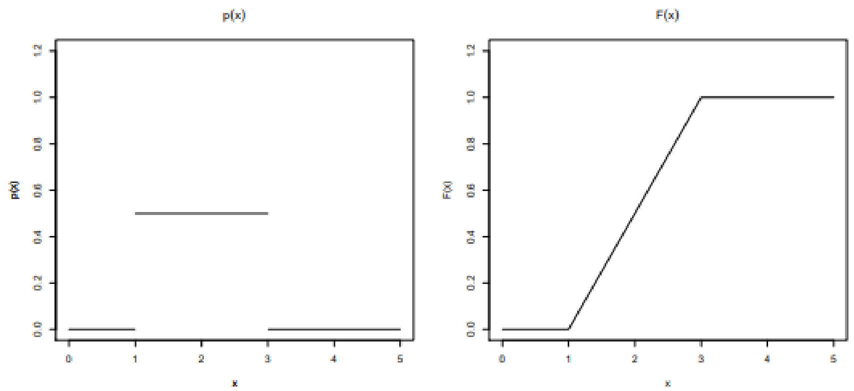
1. Равномерное распределение. С.в ξ называется равномерно распределенной на отрезке $[a;b]$, если её плотность имеет вид:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Функция распределения вероятностей определяеся выражением:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(y)dy = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Принадлежность с.в равномерному закону обозначается $\xi \sim Unif(a, b)$



Вероятность попадания равномерно распределенной с.в ξ на интервал $(x_1; x_2)$, лежащий на отрезке $[a; b]$:

$$P\{\xi \in (x_1; x_2)\} = P\{x_1 < \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{b - a}$$

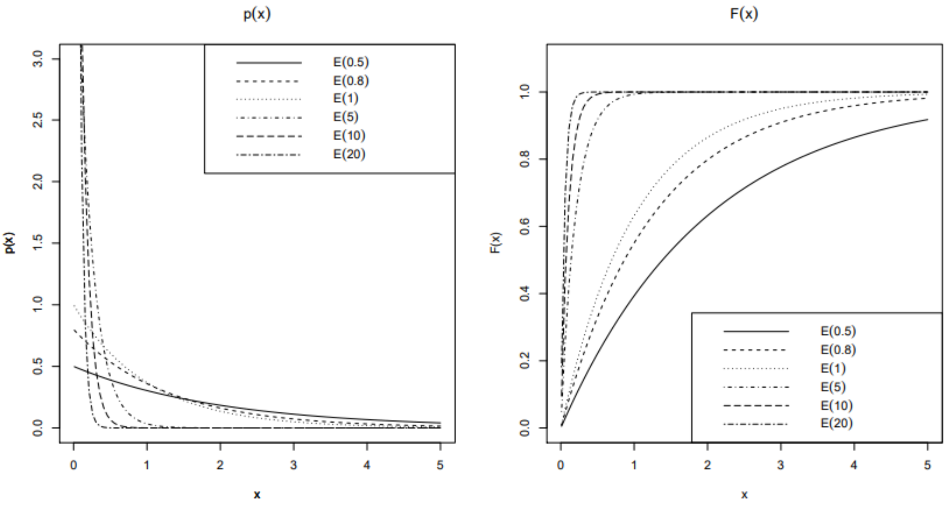
2. Экспоненциальное распределение. С.в ξ подчиняется экспоненциалному(показательному) закону, если ее плотность распределения вероятностей представима в виде:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Где $\lambda -$ неотрицательное число(параметр). Принадлежность экспоненциальному закону обозначается $\xi \sim E(\lambda)(Exp(\lambda))$

Функция распределения имеет вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$



Экспоненциально распределенная с.в обладает важным свойством, называемым **отсутствие последствий**

$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{(P\{x_1<\xi<x_1+x_2\}\cap)\{\xi>x_1\}}{P\{\xi>x_1\}} = \frac{P\{x_1<\xi<x_1+x_2\}}{P\{\xi>x_1\}} = \frac{F_\xi(x_1+x_2)-F_\xi(x_1)}{1-F_\xi(x_1)} = \frac{1-e^{-\lambda(x_1+x_2)-(1-e^{=\lambda x_1})}}{1-(1-e^{=\lambda x_1})} = \frac{e^{-\lambda x_1}-e^{-\lambda(x_1+x_2)}}{e^{-\lambda x_1}} = \frac{e^{-\lambda x_1}(1-e^{-\lambda x_2})}{e^{-\lambda x_1}} = 1-e^{-\lambda x_2}$

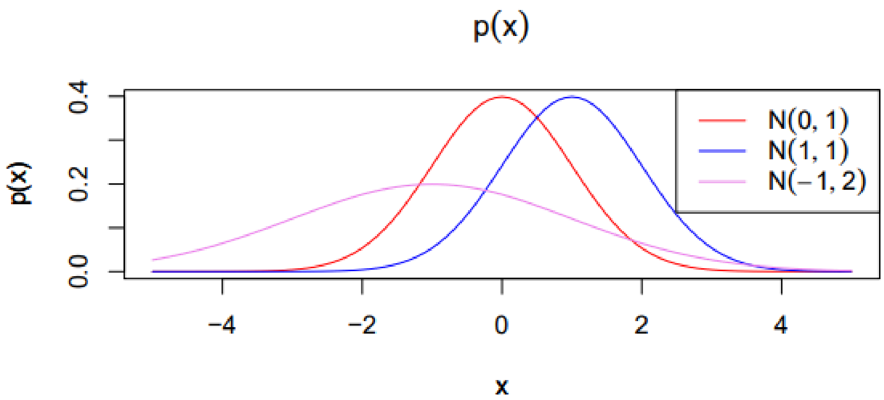
3. Нормальное распределение. С.в ξ имеет нормальное(гауссовское распределение), если ее плотность распределения вероятностей имеет вид:

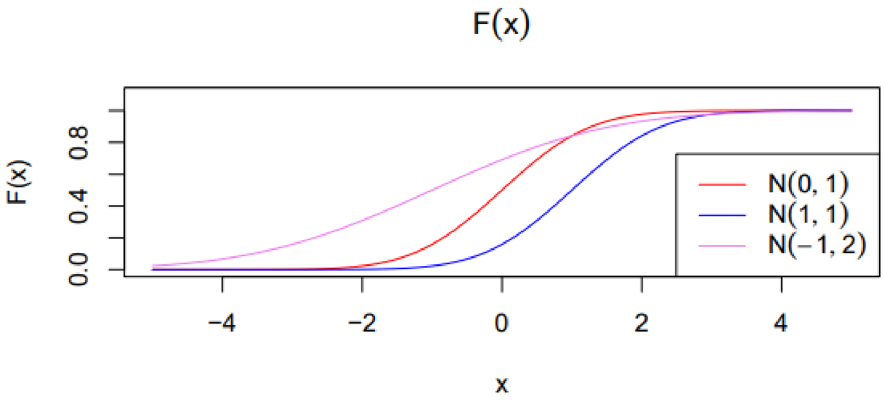
$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < m < \infty, \sigma > 0.$$

$m, \sigma-$ параметры нормального распределения, параметр m определяет положение центра плотности нормального распределения, а $\sigma-$ степень разброса относительно центра.

Принадлежность с.в ннормальному закону обозначают следующим образом:

$$\xi \sim Norm(m, \sigma)$$





Если $m = 0, \sigma = 1$, то плотность распределения будет иметь вид:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

В этом случае говорят, что с.в имеет стандартное нормальное распределение.

Стоит отметить, что в явном виде формулы для функции распределения нормального закона не существует.

4. Гамма распределение. С.в подчиняется гамма закону, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\lambda^\gamma x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

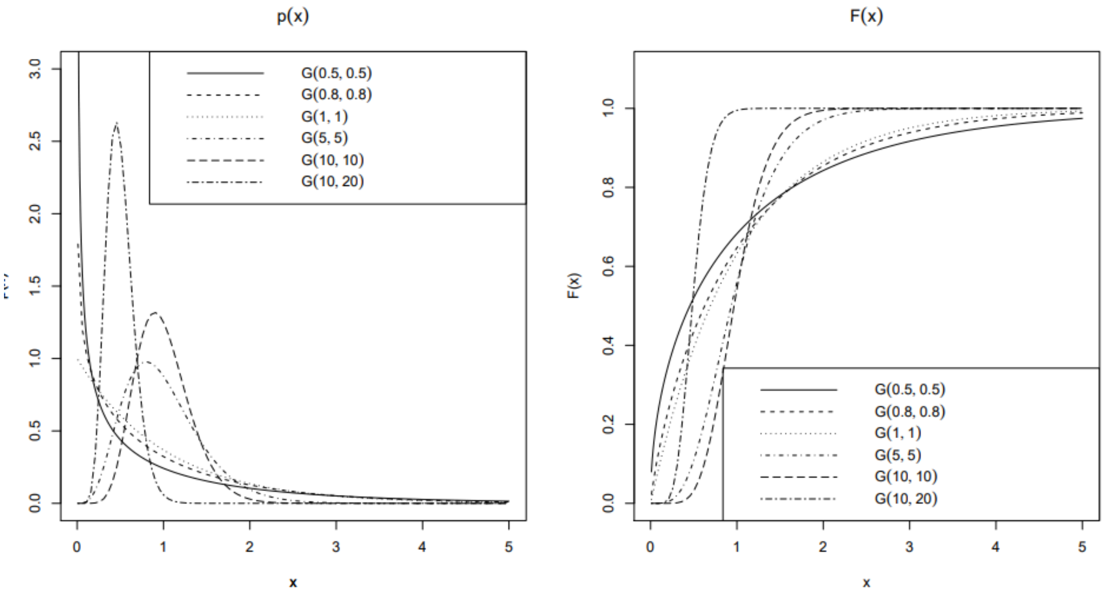
где $\lambda > 0, \gamma > 0-$ это параметры распределения, а $\Gamma(\gamma)-$ гамма функция Эйлера:

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty x^{\gamma-1} e^{-x} dx,$$

обладающая следующими свойствами: $\Gamma(\gamma+1) = \gamma\Gamma(\gamma)$, $\Gamma(n) = (n-1)!(n-$ целое положительное число) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Принадлежность с.в обозначается:

$$\xi \sim G(\lambda, \gamma)(\Gamma(\lambda, \gamma))$$



16. Функция от случайной величины (вычисление распределений функции от случайной величины для различных случаев).

Пусть задана числовая функция $g(x)$ числового аргумента x такая, что каждому элементарному исходу ω по формуле $g(\xi(\omega))$ сопоставляется новое число $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$. Тогда новая с.в $\eta = \eta(\omega)$ называется функцией $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$.

Пример 1. С.в ξ имеет нормальное распределение с параметрами $m = 0, \sigma = 1$.

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

Тогда новая с.в $\eta = g(\xi)$ будет дискретной с.в, принимающей 2 значения:

$$\begin{matrix} \eta & 0 & 1 \\ P_\eta & 0.5 & 0.5 \end{matrix}$$

По определению, $F_\eta(y) = P\{\eta < y\}$ это есть вероятность события $\{\eta < y\}$.

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = \int_{g(x)<y} p_\xi(x)dx$$

Пример 2. С.в ξ распределена по стандартному нормальному закону. Вычислим распределение новой с.в $\eta = \xi^2$

$y = g(x) = x^2$

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{\xi^2 < y\} = \int_{x^2<y} p_\xi(x)dx = \int_{x^2<y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

При $y \le 0$ $F_\eta(y) = 0$

При $y > 0$ событие представимо в виде $\{-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}\}$:

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{\xi^2 < y\} = P\{-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

В силу четности и симметричности области интегрирования относительно 0:

$$F_\eta(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Заменим $z = x^2$:

$$F_\eta(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Плотность новой с.в:

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{x^2}{2}}, & y > 0 \end{cases}$$

Для монотонно возрастающей функции $g(x)$:

$$F_\eta(y) = F_\xi(g^{-1}(y))$$

Для монотонно убывающей функции $g(x)$:

$$F_\eta(y) = 1 - F_\xi(g^{-1}(y))$$

Вычисление плотности новой с.в:

$$p_\eta(y) = p_\xi(g^{-1}(y)) \cdot |g^{-1}(y)'|$$

17. Многомерная случайная величина (на примере 2-мерной). Совместная функция распределения и ее свойства (свойства – с доказательством).

Определение 1. Пусть на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ задано n случайных величин $\xi_1 = \xi_1(\omega)$.... Совокупность с.в будем называть **многомерной** с.в или случайным вектором.

$$\vec{\xi} = \xi = (\xi_1 ...)$$

Определение 2. Функцией распределения вероятностей $n-$мерной с.в, называется функция $F_{\xi_1, \xi_2 ...}(x_1, x_2 ...)$, значение которой в точке $(x_1 ..., x_n)$ равно вероятности совместного осуществления (пересечения) событий $\{\xi_1 < x\}, \{\xi_2 < x_2\}$...:

$$F(x_1, x_2 ...) = F_{\xi_1, \xi_2 ...}(x_1, x_2, ...) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2 ...\}$$

Также это называется совместной функцией распределения вероятностей с.в

Свойство 1. Для любых x_1, y_1 верно $0 \le F_{\xi,\eta}(x_1, y_1) \le 1$

Доказательство. По определению $F_{\xi,\eta}(x_1, y_1)-$ это вероятность события. Но вероятность любого события всегда лежит в пределах от 0 до 1.

Свойство 2. Совместная функция распределения вероятностей $F_{\xi,\eta}(x_1, y_1)$ является неубывающей по каждому своему аргументу x_1, y_1. Иными словами, если $x_2 \ge x_1,\ y_2 \ge y_1$, то

$$F(x_1, y_1) \le F(x_2, y_1),\ F(x_1, y_1) \le F(x_1, y_2),\ F(x_1, y_1) \le F(x_2, y_2)$$

Доказательство. Пусть $(x_2 \ge x_1)(y_1$ не меняется), тогда событие $\{\omega : \xi(\omega) < x_1, \eta(\omega) < y_1\}$ принадлежит событию $\{\omega : \xi(\omega) < x_2, \eta(\omega) < y_1\}$ и по свойствам вероятности:

$$P\{\omega : \xi(\omega) < x_1, \eta(\omega) < y_1\} \le P\{\omega : \xi(\omega) < x_2, \eta(\omega) < y_1\}$$

Следовательно:

$$F_{\xi,\eta}(x_1, y_1) \le F_{\xi,\eta}(x_2, y_1)$$

Пусть теперь $y_2 \ge y_1(x_1$ не меняется) тогда событие $\{\omega : \xi(\omega) < x_1, \eta(\omega) < y_1\}$ принадлежит событию $\{\omega : \xi(\omega) < x_1, \eta(\omega) < y_2\}$ и по свойствам вероятности:

$$P\{\omega : \xi(\omega) < x_1, \eta(\omega) < y_1\} \le P\{\omega : \xi(\omega) < x_1, \eta(\omega) < y_2\}$$

Следовательно:

$$F_{\xi,\eta}(x_1, y_1) \leq F_{\xi,\eta}(x_1, y_2)$$

Свойство 3. Для любых x_1, y_1 верно, что $F(x_1, -\infty) = F(-\infty, y_1) = 0$

Доказательство. События $\{\omega : \xi(\omega) < -\infty\}$ и $\{\omega : \eta(\omega) < -\infty\}$ являются возможными:

$$\{\omega : \xi(\omega) < -x_1, \eta(\omega) < -\infty\} = \{\omega : \xi(\omega) < -x_1\} \cap \{\omega : \eta(\omega) < -\infty\} = \{\omega : \xi(\omega < x_1)\} \cap \emptyset = 0$$

Аналогично для y_1

По свойствам веротяности $P(\emptyset) = 0.$:

$$F(x_1, -\infty) = P\{\omega : \xi(\omega) < x_1, \eta(\omega) < -\infty\} = P\{\emptyset\} = 0$$

Аналогично для y_1

Свойство 4. Значение совместной функции распределеления с.в для $x_1 = \infty, y_1 = \infty$ равняется 1 $F(\infty, \infty) = 1$

Доказательство. События $\{\xi < \infty\}$ и $\{\eta < \infty\}$ являются достоверными. Их пересечение:

$$\{\xi < \infty\} \cap \{\eta < \infty\} = \Omega \cap \Omega = \Omega$$

также явлется достоверным. Согласно аксиоме вероятности $P(\Omega) = 1$. Таким образом:

$$F(\infty, \infty) = P\{\xi < \infty \, \eta < \infty\} = P\{\Omega \cap \Omega\} = 1$$

Свойство 5. Для любых x_1, y_1 верно:

$$F(x_1, \infty) = F_\xi(x_1), F(\infty, y) = F_\eta(y_1)$$

Доказательство. Событие $\{\xi < x_1 \, \eta < \infty\}$ является пересечением двух событий $\{\xi < x_1\}$ и достоверного события $\{\eta < \infty\}$. По свойствам пересечения:

$$\{\xi < x_1, \eta < \infty\} = \{\xi < x_1\} \cap \{\eta < \infty\} = \{\xi < x_1\}$$

Следовательно:

$$F(x_1, \infty) = P\{\xi < x_1, \eta < \infty\} = P(\{\xi < x_1\} \cap \{\eta < \infty\} = \{\xi < x_1\}) = P\{\xi < x_1\} = F_\xi(x_1)$$

Аналогично для y_1

Свойство 6. Для любых x_1, y_1, x_2, y_2 таких, что $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ верно:

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2, y_1 \leq \eta < y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1).$$

Доказательство. Представим событие $\{\xi < x_2, \eta < y_2\}$ как объединение двух несовместимых событий $\{\xi < x_1, \eta < y_2\}$ и $\{x_1 \leq \xi < x_2, \eta < y_2\}$:

$$\{\xi < x_2, \eta < y_2\} = \{\xi < x_1, \eta < y_2\} + \{x_1 \leq \xi < x_2, \eta < y_2\}$$

Событие $\{x_1 \leq \xi < x_2, \eta < y_2\}$ также представим как объединение двух несмовместных событий $\{x_1 \leq \xi < x_2, \eta < y_1\}$ + $\{x_1 \leq \xi < x_2, y_1 \leq \eta < y_2\}$.

А событие $\{x_1 \leq \xi < x_2, \eta < y_1\}$ представим как разность: $\{\xi < x_2, \eta < y_1\} \setminus \{\xi < x_1, \eta < y_1\}$

По аксиоме сложения и из определения многмерной функции распределения верояностей:

$$F(x_2, y_2) = P\{\xi < x_2, \eta < y_2\} = P\{\xi < x_1, \eta < y_2\} + P\{x_1 \leq \xi < x_2, \eta < y_2\} = F(x_1, y_2) + P\{x_1 \leq \xi < x_2, \eta < y_2\}.$$

Далее

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2, \eta < y_2\} = P\{x_1 \leq \xi < x_2, \eta < y_1\} + P\{x_1 \leq \xi < x_2, y_1 \leq \eta < y_2\}$$

Воспользуемся, что

$$P\{x_1 \le \xi < x_2, \eta < y_1\} = P\{\xi < x_2, \eta < y_1\} - P\{\xi < x_1, \eta < y_1\} = F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)$$

Таким образом:

$$P\{x_1 \le \xi < x_2, \eta < y_2\} = F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1) + P\{x_1 \le \xi < x_2, y_1 \le \eta < y_2\}$$

$$P\{x_1 \le \xi < x_2, \eta < y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)$$

Приравнивая 2 последних выражения получаем:

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

Свойство 7. Совместная функция распределеления вероятностей является непрерывной по каждому из аргументов x, y

Доказательство. Доказательство аналогично одномерному случаю.

В отличие от одномерного случая, не любая функция $F(x_1, y_1)$, удовлетворяющая вышеперечисленным свойствам может являться совместной функцией распределения некоторой двумерной с.в.

Для того, чтобы это было возможно, необходимо потребовать также для любых x_1, y_1, x_2, y_2 таких, что $x_1 \le x_2, y_1 \le y_2$ выполнение данного условия:

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \ge 0$$

18. Дискретная двумерная случайная величина.

Определение. Двумерная случайная величина называется дискретной, если каждая из с.в является дискретной.

Для ряда (таблицы) распределеления двумерной случайной величины (как и для одномерного случая) должно выполняться условие нормировки:

$$\sum_i \sum_j p_{i,j} = \sum_{X_i} \sum_{Y_j} P\{\xi = X_i, \eta = Y_j\} = 1$$

$\xi \setminus \eta$	Y_1	Y_2	$\dots$	Y_j	$\dots$	Y_m
X_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\dots$	$p_{1,j}$	$\dots$	$p_{1,m}$
X_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	$\dots$	$p_{2,j}$	$\dots$	$p_{2,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
X_i	$p_{i,1}$	$p_{i,2}$	$\dots$	$p_{i,j}$	$\dots$	$p_{i,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
X_n	$p_{n,1}$	$p_{n,2}$	$\dots$	$p_{n,j}$	$\dots$	$p_{n,m}$

По данной таблице можно определить функцию распределения вероятностей $F(\xi, \eta)$. Для этого нужно просуммировать вероятности $p_{ij} = P\{\xi = X_i, \eta = Y_j\}$ по всем значениям:

$$F(x; y) = \sum_{\substack{i: X_i < x \\ j: Y_j < y}} p_{ij} = \sum_{\substack{X_i < x \\ Y_j < y}} P\{\xi = X_i, \eta = Y_j\}$$

Двумерный ряд распределения вероятностей при решении практических задач представлют так:

$\xi \setminus \eta$	Y_1	Y_2	$\dots$	Y_j	$\dots$	Y_m	$\mathbf{P}_\xi$
X_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\dots$	$p_{1,j}$	$\dots$	$p_{1,m}$	$p_{\xi 1}$
X_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	$\dots$	$p_{2,j}$	$\dots$	$p_{2,m}$	$p_{\xi 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
X_i	$p_{i,1}$	$p_{i,2}$	$\dots$	$p_{i,j}$	$\dots$	$p_{i,m}$	$p_{\xi i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
X_n	$p_{n,1}$	$p_{n,2}$	$\dots$	$p_{n,j}$	$\dots$	$p_{n,m}$	$p_{\xi n}$
$\mathbf{P}_\eta$	$p_{\eta,1}$	$p_{\eta,2}$	$\dots$	$p_{\eta,j}$	$\dots$	$p_{\eta,m}$	1

На пересечении столбца P_ξ со строкой X_i записывают число $p_{\xi i} = p_{i,1} + p_{i,2}$...

Но число $p_{\xi i}$ представляет собой вероятность с.в ξ принять значение X_i :

$$\begin{aligned} p_{\xi i} = p_{i,1} + p_{i,2} + \ldots + p_{i,m} = P\left\{\xi = X_i, \eta = Y_1\right\} + P\left\{\xi = X_i, \eta = Y_2\right\} + \ldots + P\left\{\xi = X_i, \eta = Y_m\right\} = \\ = P\left(\{\xi = X_i, \eta = Y_1\} + \{\xi = X_i, \eta = Y_2\} + \ldots + \{\xi = X_i, \eta = Y_m\}\right) = \\ = P\left(\{\omega : \xi(\omega) = X_i\} \cap \{\omega : \eta(\omega) = Y_1\} + \{\omega : \xi(\omega) = X_i\} \cap \{\omega : \eta(\omega) = Y_2\} + \right. \\ \left. + \ldots + \{\omega : \xi(\omega) = X_i\} \cap \{\omega : \eta(\omega) = Y_m\}\right) = \\ = P\left(\{\omega : \xi(\omega) = X_i\} \cap \left(\{\omega : \eta(\omega) = Y_1\} + \{\omega : \eta(\omega) = Y_2\} + \{\omega : \eta(\omega) = Y_m\}\right)\right) = \\ = P\left(\{\omega : \xi(\omega) = X_i\} \cap \Omega\right) = P\left\{\omega : \xi(\omega) = X_i\right\} = P\left\{\xi = X_i\right\}. \end{aligned}$$

Аналогично для η

19. Непрерывная двумерная случайная величина. Совместная плотность распределения и ее свойства.

Определение. Непрерывной двумерной с.в (ξ, η) называется такая двумерная с.в, функция распределения которой $F_{\xi,\eta}(x,y) = P\{\xi < x, \eta < y\}$ может быть распределена в виде:

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \iint_{\substack{-\infty<x_1<x \\ -\infty<y_1<y}} p_{\xi,\eta}(x_1,y_1)dx_1, dy_1 = \int_{-\infty}^{x} dx_1 \int_{-\infty}^{y} p_{\xi,\eta}(x_1,y_1)dy_1 = \int_{-\infty}^{y} dy_1 \int_{-\infty}^{x} p_{\xi,\eta}(x_1,y_1)dx_1$$

Где функция $p_{\xi,\eta}(x,y) = p(x,y)$ называется **совместоной плотностью** распределеления вероятностей с.В

Совместная плотность представляет собой смешанную производную совместной функции распределения:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{d^2}{dxdy} F_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{d^2}{dydx} F_{\xi,\eta}(x,y)$$

Свойства

Свойство1. Совместная плотность распределеления $p_{\xi,\eta}(x,y)$ принимает только неотрицательные значения.

Доказательство. Т.к $p_{\xi,\eta}(x,y)$ является смешанной производной неубывающей функции - совместной функции распределения $F_{\xi,\eta}(x,y)$, следовательно $p_{\xi,\eta}(x,y) \geq 0$

Свойство2. Вероятность события $\{x_1 \leq \xi < x_2, y_1 \leq \eta < y_2\}$ вычисляется по формуле:

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2, y_1 \leq \eta < y_2\} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p_{\xi,\eta}(x,y)dydx$$

Доказательство. Воспользуемся свойством двумерной функции распределения:

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2, y_1 \leq \eta < y_2\} = F_{\xi,\eta}(x_2,y_2) - F_{\xi,\eta}(x_1,y_2) - F_{\xi,\eta}(x_2,y_1) + F_{\xi,\eta}(x_1,y_1)$$

и определением двумерной непрерывной с.в.

$$F_{\xi,\eta}(x_2,y_2)=\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{y_2}p_{\xi,\eta}(x,y)dydx,\quad F_{\xi,\eta}(x_1,y_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{y_2}p_{\xi,\eta}(x,y)dydx$$

$$F_{\xi,\eta}(x_2,y_1)=\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{y_1}p_{\xi,\eta}(x,y)dydx,\quad F_{\xi,\eta}(x_1,y_1)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{y_1}p_{\xi,\eta}(x,y)dydx$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
&P\left\{x_1\le\xi<x_2,y_1\le\eta<y_2\right\}=\\
&=\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{y_2}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\,dx-\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{y_2}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\,dx-\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{y_1}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\,dx+\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{y_1}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\,dx=\\
&=\left(\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{y_2}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\,dx-\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{y_1}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\,dx\right)-\left(\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{y_2}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\,dx-\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{y_1}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\,dx\right)=\\
&=\int_{-\infty}^{x_2}\left(\int_{-\infty}^{y_2}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy-\int_{-\infty}^{y_1}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\right)\,dx-\int_{-\infty}^{x_1}\left(\int_{-\infty}^{y_2}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy-\int_{-\infty}^{y_1}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\right)\,dx=\\
&=\int_{-\infty}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\,dx-\int_{-\infty}^{x_1}\int_{y_1}^{y_2}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\,dx=\int_{y_1}^{y_2}\int_{-\infty}^{x_2}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy-\int_{y_1}^{y_2}\int_{-\infty}^{x_1}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy=\\
&=\int_{y_1}^{y_2}\left(\int_{-\infty}^{x_2}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx-\int_{-\infty}^{x_1}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\right)\,dy=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\,dx.
\end{aligned}$$

Свойство3. Интеграл от совместной плотности распределения с.в по всем значениям с.в равен единице:

$$\iint_{-\infty}^{\infty}p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy=1$$

Доказательство. Согласно **свойству 2** совместной плотности распределения:

$$\iint_{-\infty}^{\infty}p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy=P\{-\infty<\xi<\infty,-\infty<\eta<\infty\}$$

Но события $\{-\infty<\xi<\infty\}$ и $\{-\infty<\eta<\infty\}$ являются достоверными, следовательно их пересечение - тоже достоверное событие, вероятность которого = 1

$$P\{-\infty<\xi<\infty\ -\infty<\eta<\infty\}=P(\{-\infty<\xi<\infty\}\cap\{-\infty<\eta<\infty\})=P\{\Omega\cap\Omega\}=P\{\Omega\}=1$$

Свойство4. Вероятность попадания думерной непрерывной с.в в малый прямоугольник приближенно равна:

$$P\{x\le\xi<x+\Delta_x,y\le\eta<\Delta_y\}\approx p_{\xi,\eta}(x,y)\Delta_x\Delta_y$$

Доказательство. По свойствам совместной плотности и двойного интеграла:

$$P\{x\le\xi<x+\Delta_x,y\le\eta<\Delta_y\}=\int_x^{x+\Delta_x}\int_y^{y+\Delta_y}p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy\approx p_{\xi,\eta}(x,y)\Delta_x\Delta_y$$

Свойство5. Вероятность того, что двумерная непрерывная с.в пример конкретное значение равна нулю:

$$P\{\xi=x,\eta=y\}=0$$

Доказательство. Рассмотрим вероятность $P\{x\le\xi<x+\Delta_x,y\le\eta<\Delta_y\}$ и пусть $\Delta_x\to0,\Delta_y\to0$. Тогда, используя **свойсвто 4**, получим:

$$P\{\xi=x,\eta=y\}=\lim_{\substack{\Delta_x\to0\\\Delta_y\to0}}P\{x\le\xi<x+\Delta_x,y\le\eta<\Delta_y\}=\lim_{\substack{\Delta_x\to0\\\Delta_y\to0}}=p_{\xi,\eta}(x,y)\Delta_x,\Delta_y=p_{\xi,\eta}(x,y)\lim_{\substack{\Delta_x\to0\\\Delta_y\to0}}\Delta_x\Delta_y=p_{\xi,\eta}(x,y)\cdot0=0$$

Свойство6. Вероятность попадания двумерной непрерывной с.в в произвольную область D вычисляется по формуле:

$$P\{(\xi,\eta)\in D\}=\iint_D p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy$$

Доказательство. Как следует из **свойство4**, вероятность попадания двумерной с.в в малый прямоугольник $\approx p_{\xi,\eta}(x,y)\Delta_x\Delta_y$. Поскольку попадания в непересекающиеся прямоугольники являются несовместимыми событиями, то, для того чтобы найти полную вероятность вероятность попадания двумерной с.в в область D, нужно просуммировать вероятности попадания во все «малые» прямоугольники, входящие в область D. Переходя к пределу мы получаем для $P\{(\xi,\eta)\in D\}-$ вероятности попадания с.в в область D:

$$P\{(\xi,\eta)\in D\}=\iint_D p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy$$

Свойство7. Из совместной плотности распределеления с.в всегда можно получить плотность распределения одной из с.в:

$$p_\xi(x)\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)dy, \quad p_\eta(y)\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)dx$$

Доказательство. По свойству двумерной функции $F_{\xi,\eta}(x,y)$ распределеление вероятностей с.в и определению непрервыной двумерной с.в имеем:

$$F_\xi(x) = F_{\xi,\eta}(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x_1,y)dydx_1, \quad F_\eta(y) = F_{\xi,\eta}(\infty,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} p_{\xi,\eta}(x,y_1)dy_1dx$$

Одномерные плотности распределения вычисляются по форумлам:

$$p_\xi(x) = F'_\xi(x) = (F_{\xi,\eta}(x,\infty))'_x = (\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x_1,y)dydx_1)' = \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{x} p_{\xi,\eta}(x_1,y)dx_1)dy = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)dy$$

Аналогично для y

20. Условные распределения случайных величин.

Непрерывные с.в

Определение. **Условной функцией** распределения $F_\xi(x/\eta=y)$ с.в ξ при условии, что $\eta=y$ называется предел:

$$F_\xi(x/\eta=y) = \lim_{\Delta_y\to 0} P\{\xi < x/y \le \eta < y+\Delta_y\} = \frac{\frac{d}{dy}F_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}$$

Чтобы доказать верность формулы, разделим в пределе

$$\lim_{\Delta_y\to 0}\frac{F_{\xi,\eta}(x,y+\Delta_y)-F_{\xi,\eta}(x,y)}{F_\eta(y+\Delta_y)-F_\eta(y)}$$

числитель и знаменатель на Δ_y и воспользуемся определением производной:

$$\lim_{\Delta_y\to 0}\frac{\frac{F_{\xi,\eta}(x,y+\Delta_y)-F_{\xi,\eta}(x,y)}{\Delta_y}}{\frac{F_\eta(y+\Delta_y)-F_\eta(y)}{\Delta_y}} = \frac{\frac{d}{dy}F_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}$$

Но по свойствам двумерной плотности распределени, можно записать

$$\frac{d}{dy}F_{\xi,\eta}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} p_{\xi,\eta}(x_1,y)dx_1$$

Таким образом получаем еще одно определение условной функции распределеления $F_\xi(x/\eta=y)$ с.в ξ при условии, что $\eta=y$

Определение. **Условной функцией** распределеления $F_\xi(x,\eta=y)$ с.в ξ при условии, что $\eta=y$ называется:

$$F_\xi(x,\eta=y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} p_{\xi,\eta}(x_1,y)dx_1}{p_\eta(y)}$$

Так как условная функция распределеления $F_\xi(x/\eta=y)$ для непрерывных случайных величин ξ,η явялется непрерывной функцией по обоим аргументам, то для нее существует производная по аргументу x.

Определение. **Условной плотностью** распределеления $p_\xi(x/\eta=y)$ с.в ξ при условии, что $\eta=y$ называется:

$$p_\xi(x,/\eta=y) = \frac{d}{dx}F_\xi(x/\eta=y) = \frac{p_{\xi,\eta(x,y)}}{p_\eta(y)}$$

Дискретные с.в

Определение. **Условной функцией** распределения вероятностей $F_\xi(x/\eta=Y_j)$ с.в ξ при условии $\eta=Y_j$ называется условная вероятность события $\{\xi<x\}$ при условии $\{\eta=Y_j\}$:

$$F_\xi(x/\eta = Y_j) = P\{\xi < x/\eta = Y_j\} = \frac{P\{\xi < x, \eta = Y_j\}}{P\{\eta = Y_j\}},\ j = \overline{1,m}$$

Условная функция распределения обладает всеми теми же свойствами, которыми обладает безусловная функция распределения с.в.

Определение. **Условной вероятностью** $\pi_{i,j}$ того, что с.в ξ примет значение X_i при условии, что с.в η приняла значение Y_j называется условная вероятность события $\{\xi = X_i\}$ при условии $\{\eta = Y_j\}$, т.е:

$$\pi_{i,j} = P\{\xi = X_i/\eta = Y_j\} = \frac{P\{\xi = X_i, \eta = Y_j\}}{P\{\eta = Y_j\}} = \frac{p_{i,j}}{p_{\eta,j}},\ j = \overline{1,m}$$

Аналогично при условии, что ξ приняла значение X_i

21. Независимые случайные величины (общее определение, определение независимости для дискретного и непрерывного случаев).

Определение. С.в ξ, η называются **независимыми**, если совместная функция распределения вероятностей $F_{\xi,\eta}(x,y)$ представима в следующем виде:

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$$

Определение. Непрерывные случайные величины ξ, η называются **независимыми**, если совместная плотность распределеления верояностей $p_{\xi,\eta}(x,y)$ представима в следующем виде:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y)$$

Определение. С.в ξ, η называются **независимыми**, тогда и только тогда, когда условное распределеление($F_\xi(x, \eta = y)$ или $p_\xi(x, \eta = y)$) с.в ξ при условии $\eta = y$ совпадает с безусловным распределением($F_\xi(x)$, плотностью распределения $p_\xi(x)$) с.в ξ при всех значениях x, y

Определение. Дискретные с.в ξ, η независимы, если для всех возможных значений X_i с.в ξ и значений Y_j с.в η верно:

$$p_{i,j} = P\{\xi = X_i, \eta = Y_j\} = P\{\xi = X_i\} \cdot P\{\eta = Y_j\} = p_{\xi,i} \cdot p_{\eta,i},\ \ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$$

Если использовать понятие условного распределения:

Определение. Дискретные с.в. ξ, η независимы, если для всех возможных значений X_i с.в ξ и значений Y_j с.в η верно:

$$p_{\xi,i}(Y_j) = P\{\xi = X_i/\eta = Y_j\} = P\{\xi = X_i\} = p_{\xi,i},\ \ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$$

22. Функции от двумерной случайной величины (вычисление распределений).

Определение. Пусть задана числовая(измеримая) функция $z = g(x,y)$ числовых аргументов x, xy. С.в $\mu = g(\xi,\eta) = g(\xi(\omega),\eta(\omega))$ называется **функцией** от двумерной случайной величины ξ, η

Определение. Функция распределеления вероятностей $F_\mu(z)$ новой непрерывной с.в $\mu = g(\xi,\eta)$, являющейся функцией с.в ξ, η определяется по формуле :

$$F_\mu(z) = \iint_{g(x,y)<z} p_{\xi,\eta}(x,y)dydx$$

Для новой двумерной с.в $(\mu_1, \mu_2,)$ где μ_1, μ_2 яваляются функциями исходных с.в ξ, η верно следующее определение:

Определение. Функция распределеления вероятностей $F_{\mu_1,\mu_2}(z_1,z_2)$ новой двумерной с.в $(\mu_1,\mu_2,)$ где $\mu_1=g_1(\xi,\eta),\mu_2=g_2(\xi,\eta)$ являются функциями с.в ξ,η определяется по формуле:

$$F_{\mu_1,\mu_2}(z_1,z_2)=\iint_{\substack{g_1(x,y)<z_1\\ g_2(x,y)<z_2}} p_{\xi,\eta}(x,y)dydx$$

Если непрерывные функции $z_1=g_1(x,y),z_2=g_2(x,y)$ задают взаимно однозначное преобразование плоскости саму в себя(или некоторую область G), причем существуют обратные преобразования $x=h_1(z_1,z_2),\ y=h_2(z_1,z_2)$, которые имеют непрерывные частные производные по z_1,z_2, то совместная плотность распределения $p_{\mu_1,\mu_2}(z_1,z_2)$ новой двумерной непрерывной с.в (μ_1,μ_2) связана с совместной плотностью распределения $p_{\xi,\eta}(x,y)$ изначальной двумерной непрерывной с.в ξ,η следующим выражением:

$$p_{\mu_1,\mu_2}(z_1,z_2)=p_{\xi,\eta}(h_1(z_1,z_2),h_2(z_1,z_2))\cdot|J|,$$

где

$$J=\begin{vmatrix}\frac{d}{dz_1}h_1(z_1,z_2) & \frac{d}{dz_2}h_1(z_1,z_2)\\ \frac{d}{dz_1}h_2(z_1,z_2) & \frac{d}{dz_2}h_2(z_1,z_2)\end{vmatrix}$$

Это определитель матрицы Якоби(матрица частных производных)

Утверждение. Пусть с.в ξ,η являются независимыми, а функция $z_1=g_1(x,y)=g_1(x)$ и $z_2=g_2(x,y)=g_2(y)$ таковы, что зависят только от одного аргумента. Тогда с.в $\mu_1=g_1(\xi,\eta)=g_1(\eta)$ и $\mu_2=g_2(\xi,\eta)=g_2(\eta)$ также являются независимыми.

23. Формула свертки (для функции распределения и для плотности распределения).

Утверждение. Если с.в ξ,η являются независимыми, а новая с.в μ есть их сумма $(\mu=\xi+\eta)$, то справедливы следующие формулы:

$$F_\mu(z)=\int_{-\infty}^{\infty}F_\eta(z-x)p_\xi(x)dx$$

$$F_\mu(z)=\int_{-\infty}^{\infty}F_\xi(z-y)p_\eta(y)dy$$

$$p_\mu(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_\eta(z-x)p_\xi(x)dx$$

$$p_\mu(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_\xi(z-y)p_\eta(y)dy$$

назывемые **формулами свертки**.

Доказательство. По определению функции двемерной с.в

$$\begin{gathered}F_\mu(z)=\iint_{g(x,y)<z}p_{\xi,\eta}(x,y)dydx=\iint_{x+y<z}p_{\xi,\eta}(x,y)dydx=\iint_{x+y<z}p_\xi(x)p_\eta(y)dydx=\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x}p_\xi(x)p_\eta(y)dydx=\int_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x)\left(\int_{-\infty}^{z-x}p_\eta(y)dy\right)dx=\\ =\int_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x)F_\eta(z-x)dx.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}F_\mu(z)=\iint_{g(x,y)<z}p_{\xi,\eta}(x,y)dydx=\iint_{x+y<z}p_{\xi,\eta}(x,y)dydx=\iint_{x+y<z}p_\xi(x)p_\eta(y)dydx=\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y}p_\xi(x)p_\eta(y)dydx=\int_{-\infty}^{\infty}p_\eta(y)\left(\int_{-\infty}^{z-y}p_\xi(x)dx\right)dy=\\ =\int_{-\infty}^{\infty}p_\eta(y)F_\eta(z-y)dx.\end{gathered}$$

Плотность распределения с функцией распределения связана формулой:

$$p_\mu(z) = F'_\mu(z) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)F_\eta(z-x)dx\right)'_z = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)(F_\eta(z-x))'_z dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)p_\eta(z-x)dx$$

$$p_\mu(z) = F'_\mu(z) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} p_\eta(y)F_\xi(z-y)dy\right)'_z = \int_{-\infty}^{\infty} p_\eta(y)(F_\xi(z-y))'_z dy = \int_{-\infty}^{\infty} p_\eta(y)p_\xi(z-y)dy$$