1. Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции, центральные и начальные моменты высших порядков, квантили, моды, энтропии, условные числовые характеристики. Определения. Свойства. Доказательства свойств. Вывод формул расчета числовых характеристик для основных распределений.

Математическое ожидание

Дискретная случайная величина

Математическим ожиданием(средним значением) M_ξ дискретной случайной величины ξ называется сумма произведений значений X_i случайной величины на вероятности $p_i = P\{\xi = X_i\}$, с которым эти значения принимаются:

$$M_x i = \sum_i X_i p_i.$$

Причем, если с.в ξ принимает счетное число значений, то необходимо, чтобы

$$\sum_i |X_i| p_i < \infty$$

Иначен говорят, что мат. ожидания не существует.

Для двумерной дискретной случайной величины ξ и η мат. ожидание:

$$M_{\xi\eta} = \sum_i \sum_j X_i Y_j p_{ij}$$

Непрерывная случайная величина

Если с.в ξ непрерывна, то она принимает значение x с вероятностью $p(x)dx$. Заменяя сумму на интеграл, получаем:

$$M_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x) dx$$

Условие существования:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p_\xi(x) dx < \infty$$

Для двумерной непрерывной случайной величины ξ и η мат. ожидание:

$$M_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} xyp_{\xi\eta} dy$$

Свойства математического ожидания

Свойство 1.

$Mconst = const$

Доказательство.

Среднее значение константы = самой константе

Свойство 2.

$M(a\xi) = aM_\xi$

Доказательство.

$M(a\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} axp_\xi(x)dx = a\int_{-\infty}^{\infty} xp_\xi(x)dx = aM_\xi$

Свойство 3.

$M(\xi + \eta) = M_\xi + M_\eta$

Доказательство.

Пусть $\xi_1, \xi_2 -$ двумерная дискретная с.в. $X_i = \xi_1, Y_j = \xi_2$

$M_\eta = \sum_{i,j}(X_i + Y_j)P\{\xi_1 = X_i, \xi_2 = Y_j\} = \sum_i X_i(\sum_j P\{\xi_1 = X_i, \xi_2 = Y_j\}) + \sum_j Y_j(\sum_i P\{\xi_1 = X_i, \xi_2 = Y_j\}) = \sum_i X_i P\{\xi_1 = X_i\} + \sum_j Y_j P\{\xi_2 = Y_j\} = M_{\xi_1} + M_{\xi_2}$

Свойство 4. Если с.в независимы

$M(\xi\eta) = M_\xi \cdot M_\eta$

Доказательство.

$M(\xi_1 \cdot \xi_2) = \iint xyp_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(y)dydx = \int xp_{\xi_1}(x)dx \int p_{\xi_2}(y)dy = M_{\xi_1} \cdot M_{\xi_2}$

Дисперсия

Определение. Дисперсией D_ξ называется

$$D_\xi = M(\xi - M_\xi)^2 = \sum_i (X_i - M_\xi)^2 p_i \ - \ \text{для дискретных с.в}$$

$$D_\xi = M(\xi - M_\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_\xi)^2 p_\xi(x) dx \ - \ \text{для непрерывных с.в}$$

$$D_\xi = M_{(\xi)^2} - (M_\xi)^2 \ - \ \text{универсальная формула}$$

Определение. Вторым(начальным) моментом с.в ξ называется мат. ожидание квадрата ξ

$$M_{(\xi^2)} = \sum_i X_i^2 p_i \ - \ \text{для дискретной с.в}$$

$$M_{(\xi^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\xi(x) dx \ - \ \text{для непрерывной с.в}$$

Определение. Начальным моментом с.в ξ называется мат. ожидание $k -$ой степени с.в ξ :

$$M_{(\xi)^k} = \sum_i X_i^k p_i \ - \ \text{для дискретных с.в}$$

$$M_{(\xi)^k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p_\xi(x) dx \ - \text{для непрерывных с.в}$$

Определение. Центральным моментом с.в ξ называется мат. ожидание $k -$ой степени с.в $\xi = \xi - M_\xi$:

$$M(\xi - M_\xi)^k = \sum_i (X_i - M_\xi)^k p_i \ - \ \text{для дискретных с.в}$$

$$M(\xi - M_\xi)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_\xi)^k p_\xi(x) dx \ - \ \text{для непрерывных с.в}$$

Свойства дисперсии

Свойство 1.

$D(const) = 0$

Доказательство.

$D_a = M(a - M_a)^2 = M(a - a)^2 = 0$

Свойство 2.

$D(a\xi + b) = a^2 D_\xi$

Доказательство.

$D(a\xi) = M(a\xi - M(a\xi)) = M(a^2(\xi - M_\xi)) = a^2 D(\xi)$

Свойство 3. Если с.в независимы

$D(\xi+\eta)=D_\xi+D_\eta$

Свойство 4. Если с.в зависимы

$D(\xi+\eta)=D_\xi+D_\eta+2Cov(\xi,\eta)$

Доказательство.

$D(\xi+\eta)=M((\xi+\eta)-M(\xi+\eta))^2=M(\xi+\eta-M\xi-M\eta)^2=M((\xi-M\xi)+(\eta-M\eta))^2=M(\xi-M\xi)^2+M(2(\xi-M\xi)(\eta-M\eta))+M(\eta-M\eta)^2=D\xi+D\eta+2Cov(\xi,\eta)$

Ковариация

Определение. Ковариацией с.в ξ и η называется мат. ожидание произведения центрированных с.в

$\xi=\xi-M_\xi$

$\eta=\eta-M-\eta$

$$Cov(\xi,\eta)=M(\xi,\eta)=M[(\xi-M_\xi)(\eta-M_\eta)]$$

$$Cov(\xi,\eta)=\sum_i\sum_j(X_i-M_\xi)(Y_j-M_\eta)p_{ij}\ -\ \text{для дискретных с.в}$$

$$Cov(\xi,\eta)=\iint(x-M_\xi)(y-M_\eta)p_{\xi\eta}(x,y)dxdy\ -\ \text{для непрерывных с.в}$$

Свойства ковариации

Свойство 1.

$Cov(\xi,\xi)=D_\xi$

Доказательство.

$Cov(\xi,\xi)=M((\xi-M\xi)(\xi-M\xi))=M(\xi-M\xi)^2=D\xi$

Свойство 2. Если с.в независимы

$Cov(\xi,\eta)=0$

Свойство 3.

$Cov(a\xi+b,c\eta+d)=acCov(\xi,\eta)$

Свойство 4.

$-\sqrt{D_\xi \cdot D_\eta} \leq Cov(\xi, \eta) \leq \sqrt{D_\xi \cdot D_\eta}$

Свойство 5. Только, когда с.в линейно зависимы

$Cov(\xi, \eta) = \pm\sqrt{D_\xi \cdot D_\eta}$

Свойство 6. Расчетная формула

$Cov(\xi, \eta) = M_{(\xi \cdot \eta)} - M_\xi \cdot M_\eta$

$M_{(\xi \cdot \eta)} = \sum_i \sum_j X_i Y_j p_{ij}\ -$ для дискретных с.в

$M_{(\xi \cdot \eta)} = \iint_{-\infty}^{+\infty} xyp_{\xi\eta}(x, y)dxdy\ -$ для непрерывных с.в

Коэффициент корреляции

Определение. Коэффициентом корреляции с.в ξ и η называется число, определяемое выражением:

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{Cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D_\xi \cdot D_\eta}}$$

Свойства корреляции

Свойство 1.

$\rho_{\xi\xi} = 1$

Свойство 2. Если с.в независимы

$\rho_{\xi\eta} = 0$

Свойство 3.

$\rho_{a_1\xi+b_1, a_2\eta+b_2} = \pm\rho_{\xi,\eta}$

Причем знак "+" берется, если $a_1, a_2 > 0$ и знак "-", если $a_1, a_2 < 0$

Свойство 4.

$-1 \leq \rho_{\xi,\eta} \leq 1$

Свойство 5. Только, когда с.в линейно зависимы

$\rho_{\xi,\eta} = \pm 1$

Квантили

Определение. $\alpha -$ квантилю $Q_\alpha (0 < \alpha < 1)$ с.в ξ называется число, удовлетворяющее неравенствам $P\{\xi < Q_\alpha\} \leq \alpha$ и $\{\xi > Q_\alpha\} \leq 1 - \alpha$

$1/2 -$ квантиль называется медианой M с.в ξ

Мода

Непрерывные

Определение. Модой непрерывной с.в называется точка (локального) максимума плотности распределения $p(x)$.

1. Унимодальное распределение - распределение, имеющее 1 моду.
2. Бимодальное распределение - распределение, имеющее 2 моды.
3. Мультимодальное распределение - распределение, имеющее несколько мод.

Дискретные

Пусть $X_1, ..., X_n$ расположены в порядке возрастания.

Определение. Модой дискретной с.в называется такое значение X_i, что $p_{i-1} < p_i$ и $p_{i+1} < p_i$.

1. Унимодальное распределение - распределение, имеющее 1 моду.
2. Бимодальное распределение - распределение, имеющее 2 моды.
3. Мультимодальное распределение - распределение, имеющее несколько мод.

Энтропия

Дискретный случай

Определение. Энтропия $H = H(\xi)$ дискретной с.в ξ определяется формулой :

$$H = H(\xi) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$$

$$H(\xi, \eta) = -\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \ln p_{ij}$$

Непрерывный случай

$$H(\xi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x) \ln p_\xi(x) dx$$

$$H(\xi, \eta) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta(x,y)} \ln p_{\xi\eta}(x, y) dx dy$$

Условное математическое ожидание

Дискретный случай

$$M(\xi|\eta = Y_j) = \sum_{i=1}^{n} X_i p_{ij}$$

Свойства

1. $M(const|\eta) \equiv const$
2. $M(a\xi + b|\eta) = aM(\xi|\eta) + b$
3. $M(\xi_1 + \xi_2|\eta) = M(\xi_1|\eta) + M(\xi_2|\eta)$
4. $M(\xi_1 \cdot \xi_2|\eta) = M(\xi_1|\eta) \cdot M(\xi_2|\eta)$
5. $M_\xi = M[M(\xi|\eta)]$
6. $M[f(\xi) \cdot h(\eta)|\eta] = h(\eta)M[f(\xi)|\eta]$, где $f(\xi), h(\eta)-$ произвольные функции от с.в
7. $M(\xi|\eta) \equiv M_\xi$

Непрерывный случай

$$M(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x|\eta = y) dx,$$

где $p_\xi(x|\eta = y)-$ условная плотность распределения с.в ξ

Основные распределения

1. Распределение Бернулли - число успехов в 1 испытании

ξ 0 1

p_ξ q p

Мат ожидание

$M_\xi = 0 * q + 1 * p = p$

$M_{(\xi)^2} = 0 * q + 1^2 * p = p$

Дисперсия

$D_\xi = M_{(\xi)^2} - (M_\xi)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$

2. Биномиальное распределение - числов успехов в n испытаниях

$P\{\xi = i\} = C_n^i p^i q^{n-i}$

Мат ожидание

$M_\xi = ... = np$

$M_{(\xi)^2} = np + p^2 \cdot n(n-1)$

Дисперсия

$D_\xi = M_{(\xi)^2} - (M_\xi)^2 = np + p^2 \cdot n(n-1) - (np)^2 = npq$

3. Распределение Пуассона

$M_\xi = D_\xi = \lambda$

4. Геометрическое распределение

$\xi -$ число неудач до первого успеха

$P\{\xi = i\} = pq^i$

Мат ожидание

$M_\xi = \frac{1}{p}$

$M_{(\xi)^2} = \frac{q}{p} + \frac{2q^2}{p^2}$

Дисперсия

$D_\xi = M_{(\xi)^2} - (M_\xi)^2 = \frac{q}{p^2}$

5. Равномерное распределение на [a,b]

$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a,b] \\ 0, x \notin [a,b] \end{cases}$

Мат ожидание

$M_\xi = \int_a^b x * \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{2} \frac{x^2}{b-a}|_a^b = \frac{a+b}{2}$

$M_{(\xi)^2} = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3} \frac{x^3}{b-a}|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$

Дисперсия

$D_\xi = M_{(\xi)^2} - (M_\xi)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

6. Экспоненциальное распределение

$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$

Мат ожидание

$M_\xi = \frac{1}{\lambda}$

$M_{(\xi)^2} = \frac{2}{\lambda^2}$

Дисперсия

$D_\xi = \frac{1}{\lambda^2}$

7. Гамма распределение

$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\gamma x^{\gamma-1}}{(\gamma-1)!} e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$

Мат ожидание

$M_\xi = \frac{\gamma}{\lambda}$

$M_{(\xi)^2} = \frac{\gamma(\gamma+1)}{\lambda^2}$

Дисперсия

$D_\xi = \frac{\gamma}{\lambda^2}$

8. Нормальное распределение

$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$

Мат ожидание

$M_\xi = m$

Дисперсия

$D_\xi = \sigma^2$

2. Неравенство Чебышева. Слабый и усиленный законы больших чисел – определения и теоремы. Типы сходимости случайных величин. Слабая сходимость функций распределения. Теорема непрерывности и центральная предельная теорема. Доказательства основных теорем.

Неравенство Чебышева

Для каждой с.в ξ, имеющей дисперсию $D_\xi = \sigma^2$, при любом $\epsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P\{|\xi - M_\xi| \geq \epsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Доказательство

$D_\xi = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M_\xi)^2 p_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{M_\xi - \epsilon}(x - M_\xi)^2 p_\xi(x)dx + \int_{M_\xi - \epsilon}^{M_\xi - \epsilon}(x - M_\xi)^2 p_\xi(x)dx + \int_{M_\xi + \epsilon}^{\infty}(x - M_\xi)^2 p_\xi(x)dx = \int_{|x - M_\xi| \geq \epsilon}(x - M_\xi)^2 p_\xi(x)dx \geq \int_{|x - M_\xi| \geq \epsilon}\epsilon^2 p_\xi(x)dx = \epsilon^2 \int_{|x - M_\xi| \geq \epsilon} p_\xi(x)dx = \epsilon^2 \cdot P\{|\xi - M_\xi| \geq \epsilon\}$

$P\{|\xi - M_\xi| \geq \epsilon\} \leq \frac{D_\xi}{\epsilon^2}$

Закон больших чисел:

Пусть $\xi_1, ..., \xi_n -$ последовательность нормально распределенных с.в: $\exists M(\xi_i) = m$ и $D(\xi_i) = \sigma^2$. Тогда

$$P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - m| > \epsilon\} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Доказательство

$M(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i) = m$

$D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i) = \frac{\sigma^2}{n}$

Воспользуемся нер-вом Чебышева:

$$P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - m| \geq \epsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Закон больших чисел можно понимать как сходимость по вероятности

Усиленный закон больших чисел

Пусть $\xi_1, ..., \xi_n -$ последовательность независимых и одниково распределенных с.в. Постоянная a совпадает с мат ожиданием $M(\xi_i)$. Существование мат ожидания является необходимым и достаточным условием для выполнения усиленного закона больших чисел.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow{n\to\infty} M(\xi_i)$$

Усиленный закон больших чисел можно понимать как сходимость с вероятностью, равной 1.

Центральная предельная теорема.

Пусть $\xi_1, ..., \xi_n -$ последовательность независимых одинаково распределенных с.в: $\exists M(\xi_i) = m$ и $D(\xi_i) = \sigma^2$. Тогда

$$P\{\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\} \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x)$$

Теорема непрырывности

Пусть $f_\xi(t) -$ характеристическая функция с.в ξ, $F_\xi(x) -$ функция распределения с.в ξ. Тогда для любых точек непрерывности x_1 и x_2 $F_\xi(x)$ верно, что

$$F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{+T}\frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \cdot f_\xi(t)dt$$

3. Характеристическая функция, преобразование Лапласа-Стилтьеса, производящая функция – определение и свойства (с доказательствами), вывод для базовых распределений.

Преобразования Лапласа-Стильтьеса

$$\tilde{f}(s) = Me^{-s\xi}$$

Проивзодящая функция

$$f^*(z) = Mz^\xi$$

Характеристическая функция

Характеристической функцией $f(t) = f_\xi(t)$ с.в ξ наз. мат ожидание с.в $e^{it\xi}$, где $i = \sqrt{-1}$, а $t-$ произвольное действительное число.

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = \begin{cases} \sum_k e^{itk} p\{\xi = k\} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_\xi(x) dx \end{cases}$$

Свойства

1. $f(0) = 1, f(t)-$ непрерывная функция.

$$f(0) = \sum_j e^{it0} p_j = \sum_j p_j = 1$$

2. Если $\eta = a\xi + b$, то $f_\eta(t) = f_\xi(at)e^{ibt}$

$$f_\eta(t) = Me^{it\eta} = Me^{it(a\xi+b)} = e^{ibt} Me^{iat\xi} = e^{ibt} f_\xi(at)$$

3. Пусть ξ_1, ξ_2- независимы, и $\eta = \xi_1 + \xi_2$. $f_\eta(t) = f_{\xi_1}(t) \cdot f_{\xi_2}(t)$

$$Me^{it\eta} = Me^{it(\xi_1+\xi_2)} = M(e^{it\xi_1} e^{it\xi_2}) = Me^{it\xi_1} Me^{it\xi_2}$$

4. $f^{(k)}(0) = i^k m_k$

Характеристические функция для базовых распределений

1. Бернулли

ξ	0	1
p_ξ	q	p

$f_\xi(t) = e^{it0} \cdot q + e^{it1} \cdot p = q + pe^{it}$

2. Биномиальное

$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} e^{itk} \cdot C_n^k p^k q^{n-k}}_{\text{разложение по степеням}} = (q + pe^{it})^n$$

3. Геометрическое

$P\{\xi = k\} = pq^k$

$f_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot pq^k = \underbrace{p\sum_{k=0}^{\infty}(e^{it}q)^k}_{\text{бесконечно убывающая геом прогрессия}} \leq p\sum_{k=0}^{\infty}|e^{it}q|^k \Rightarrow f_\xi(t) = p \cdot \frac{1}{1-qe^{it}}$

4. Пуассоновское

$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k \geq 0$

$f_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} \overset{\lambda' = \lambda e^{it}}{=\!=\!=} e^{-\lambda}e^{\lambda'}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda')^k}{k!}e^{-\lambda'}}_{\eta \sim Pois(\lambda')} = e^{\lambda'} \cdot e^{-\lambda} \cdot 1 = e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda + \lambda e^{it}}$

5. Равномерное

$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a},\ x \in [a, b] \\ 0,\ x \notin [a, b] \end{cases}$

$f_\xi(t) = \int_a^b e^{itx} \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{it} \cdot e^{itx}|_a^b = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$

6. Экспоненциальное

$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0,\ x < 0 \end{cases}$

$f_\xi(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} \cdot \lambda e^{-\lambda x}dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-x(\lambda - it)}dx = -\frac{\lambda}{\lambda - it}e^{-x(\lambda - it)}|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$

7. Гамма

$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\gamma x^{\gamma-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\gamma)}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$

$f_\xi(t) = \int_0^\infty e^{itx}\frac{\lambda^\gamma x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}e^{-\lambda x}dx = \int_0^\infty \frac{\lambda^\gamma x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}e^{-x(\lambda - it)}dx = \frac{\lambda^\gamma}{(\lambda - it)^\gamma}\underbrace{\int_0^\infty \frac{(\lambda - it)^\gamma x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}e^{-x(\lambda - it)}}_{p_\eta(x) \sim Gamma(\lambda - it, \gamma)} = (\frac{\lambda}{\lambda - it})^\gamma$

8. Стандартное нормальное распределение

$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}},\ x \in \mathbb{R}$

$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2} + itx}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2itx)}dx =$
$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}((x-it)^2 - (it)^2)}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} \cdot e^{\frac{(it)^2}{2}}dx = e^{-\frac{t^2}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}}_{p_\eta(x) \sim Norm(it, 1)} = e^{-\frac{t^2}{2}}$

9. Нормальное распределение

Пусть с.в $\xi \sim Norm(0,1)$ тогда $\eta = \sigma\xi + m$

По св-вам хар. функции:

$f_\eta(t) = Me^{it\eta} = Me^{it(\sigma\xi+m)} = e^{itm} \cdot e^{it\sigma\xi} = e^{itm} \cdot f_\xi(\sigma t) = e^{itm} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

4. Основные задачи математической статистики. Основные понятия и определения математической статистики. Основные распределения математической статистики:

Основные задачи

1. Оценка неизвестных параметров

2. Проверка некоторых априорных предположений или статистических гипотез

Основные понятия

Генеральная совокупность.

Пусть имеется $N-$ объектов, каждому из которых присуще значение некоторой числовой характеристики X. Совокупность этих объектов и есть генеральная совокупность.

Выборка.

Это полученный ряд чисел за n испытаний из генеральной совокупности. $X_1, ..., X_n-$ выборка из n элементов. X_i- элемент выборки

Теоретическая функция распределения.

В выборке $X_1, ..., X_n$ каждый элемент X_i имеет функцию распределения $F(x) = P\{X_i < x\}$ Функцией распределения $F(x)$ наз. теоритической функцией распределения.

Основные распределения математической статистики.

1. Нормальное распределение

$$\phi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

2. $\mathbf{X}^2-$ распределение

$$h(x) = H'(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}}$$

3. $t-$ распределение

$$t(x) = T'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

4. $F-$ распределение

$$\psi(x) = \Psi'(x) = \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} n^{\frac{n_1}{2}} n^{\frac{n_2}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1} (n_2 + n_1 x)^{\frac{-(n_1+n_2)}{2}},\ x > 0$$

5. Распределение Колмогорова

$$K(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2x^2},\ x > 0$$

6. ω^2- распределение

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+\frac{1}{2})\sqrt{4j+1}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(j+1)} e^{-\frac{(4j+1)^2}{16x}} \times [I_{-\frac{1}{4}}(\frac{(4j+1)^2}{16x}) - I_{\frac{1}{4}}(\frac{(4j+1)^2}{16x})],\ x > 0$$

5. Оценка неизвестных параметров – метод моментов и метод максимального правдоподобия. Пример оценки параметров базовых дискретных и непрерывных распределений.

Метод моментов

Биномиальное распределение

$\overline{m}_1 = k \cdot p \Rightarrow k^* = \frac{\overline{m_1}}{p}$

$\overline{m}_1 = k \cdot p \Rightarrow p^* = \frac{\overline{m_1}}{k}$

$s^2 = D_\xi = kp(1-p) = \overline{m}_1 \cdot (1-p) = 1 - p = \frac{s^2}{\overline{m}_1} \Rightarrow p^* = \frac{\overline{m}_1 - s^2}{\overline{m}_1}$

$k^* = \frac{\overline{m}}{p^*} = \frac{(\overline{m}_1)^2}{\overline{m} - s^2}$

Геометрическое распределение

$\overline{m}_1 = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1 = \overline{m}_1 + 1 \Rightarrow \frac{1}{1+\overline{m}_1}$

Пуассоновское распределение

$\lambda^* = \overline{m}_1$

Экспоненциальное распределение

$\overline{m}_1 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda^* = \frac{1}{\overline{m}_1}$

Гамма распределение

$\overline{m}_1 = \frac{\gamma}{\lambda} \Rightarrow \lambda^* = \frac{\gamma}{\overline{m}_1}$

$\gamma^* = \lambda \cdot \overline{m}_1$

$s^2 = \frac{\gamma}{\lambda^2} = \overline{m}_1 \cdot \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda^* = \frac{\overline{m}_1}{s^2}$

$\gamma^* = \lambda^* \cdot \overline{m}_1 = \frac{(\overline{m}_1)^2}{s^2}$

Нормальное распределение

$m = \overline{m}_1$

$\sigma = \sqrt{s^2}$

Равномерное распределение

$\overline{m}_1 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a^* = 2 \cdot \overline{m}_1 - b$

$b^* = 2 \cdot \overline{m}_1 - a$

$\begin{cases} \overline{m}_1 = \frac{a+b}{2} \\ s^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \end{cases} = \begin{cases} 2 \cdot \overline{m}_1 = a + b \\ 12s^2 = b - a \end{cases} =$

$$\begin{cases} 2 \cdot \overline{m}_1 = a + b \\ 2\sqrt{3s^2} = b - a \end{cases} = \begin{cases} b^* = \overline{m}_1 + \sqrt{3s^2} \\ a^* = \overline{m}_1 - \sqrt{3s^2} \end{cases}$$

Метод максимального правдоподобия

1. Составить функцию правдоподобия $L(X_1, ..., X_n; \theta_1, ..., \theta_k) = L(\theta_1, ..., \theta_k)$, где $X_1, ..., X_n$— элементы выборки, а $\theta_1, ..., \theta_k$— неизвестные параметры теретического распределения, оценки которых нужно вычислить

$$L(\theta_1, ..., \theta_k) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P\{\xi = X_i; \theta_1, ..., \theta_k\} - \text{дискретная выборка} \\ \prod_{i=1}^{n} p_\xi(X_i; \theta_1, ..., \theta_k) - \text{непрерывная выборка} \end{cases}$$

2. Записываем логарифм функции правдоподобия $L(\theta_1, ..., \theta_k)$ и упрощаем
3. Составляем систему уравнений: $\begin{cases} (\ln L(\theta_1, ..., \theta_k))'_{\theta_1} = 0 \\ ... \\ (\ln L(\theta_1, ..., \theta_k))'_{\theta_k} = 0 \end{cases}$

Решаем полученную систему относительно неизветсных параметров.

6. Статистическая гипотеза – основные определения и характеристики выбора гипотез. Классификация статистических гипотез, областей принятия решений, ошибок при принятии решений.

Определение. Статистической гипотезой называется предположение о теоретическом распределени, которому подчиняется выборка и генеральная совокупность. H_0— основная гипотеза, H_1— альтернативная гипотеза.

Определение. Правило, позволяющее выбрать гипотезу называется статистическим критерием.

Гипотеза считается простой, если в ней полностью задано теоретическое распределение.

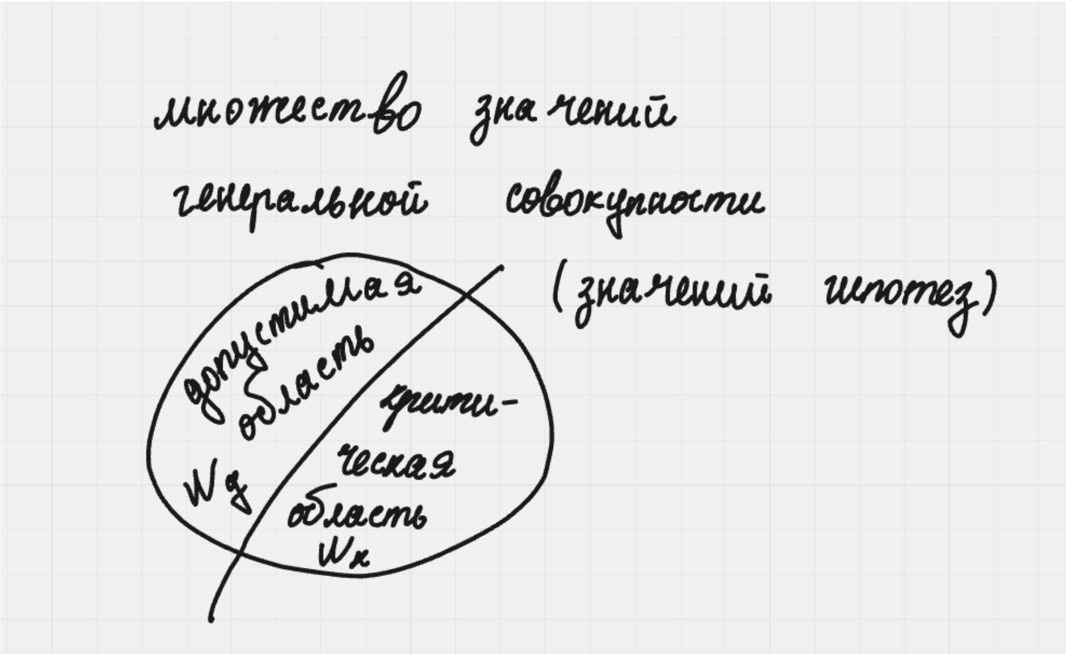
- Сложная, если она не простая
- Параметрическая, если указаны значения/область значений параметров теоретического распределения
- Не параметричская, если гипотеза не является параметрической.

Пример.

$H_1: \ X_1, ..., X_n \sim Binom(k = 10, p_1 = \frac{1}{2})$— простая параметрическая

$H_2: \ X_1, ..., X_n \sim Binom(k = 10, p_2 > \frac{1}{2}) -$ сложная параметрическая

$H_3 : X_1, ..., X_n \sim Exp(\lambda) -$ сложная не параметрическая



Определение. $\alpha -$ вероятность ошибки первого рода - уровень значимости статистического критерия.

$\alpha = P\{\text{выбрали } H_1 | \text{верна } H_0\}$

$\beta' -$ веротяность ошибки второго рода(оперативная характеристика критерия) $= P\{\text{выбрали } H_0 | \text{верна } H_1\}$

$\beta = 1 - \beta' -$ сещенность критерия $= P\{\text{выбрали } H_1 | \text{верна } H_1\}$

$\beta' + \alpha \neq 1 -$ т.к они не связаны

7. Критерий отношения правдоподобия и критерий согласия Пирсона для выборки из дискретной генеральной совокупности и для выборки из непрерывной генеральной совокупности.

Критерий отношения правдоподобия

Пример 1

H_0 : выборка $X_1, ..., X_n$ подчиняется биномиальному закону $Binom(k, p_0)$

H_1 : выборка $X_1, ..., X_n$ подчиняется биномиальному закону $Binom(k, p_1)$

1. Функции правдоподобия

$L_0 = (\prod_{i=1}^n C_k^{X_i}) p_0^{\sum_{i=1}^n X_i} (1-p_0)^{nk-\sum_{i=1}^n X_i}$

$L_1 = (\prod_{i=1}^n C_k^{X_i}) p_1^{\sum_{i=1}^n X_i} (1-p_1)^{nk-\sum_{i=1}^n X_i}$

2. Статистика критерия $\wedge = \frac{L_1}{L_0}$

$\wedge = \frac{L_1}{L_0} = \frac{(\prod_{i=1}^n C_k^{X_i}) p_1^{\sum_{i=1}^n X_i} (1-p_1)^{nk-\sum_{i=1}^n X_i}}{(\prod_{i=1}^n C_k^{X_i}) p_0^{\sum_{i=1}^n X_i} (1-p_0)^{nk-\sum_{i=1}^n X_i}} = (\frac{p_1}{p_0})^{\sum_{i=1}^n X_i} \cdot (\frac{1-p_1}{1-p_0})^{nk-\sum_{i=1}^n X_i}$

3. Логарифмируем

$\ln \wedge = \ln((\frac{p_1}{p_0})^{\sum_{i=1}^n X_i} \cdot (\frac{1-p_1}{1-p_0})^{nk-\sum_{i=1}^n X_i}) = \sum_{i=1}^n \ln(\frac{p_1}{p_0}) + (nk - \sum_{i=1}^n) \ln(\frac{1-p_1}{1-p_0}) = \sum_{i=1}^n X_i \ln \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} + nk \ln(\frac{1-p_1}{1-p_0})$

В итоге получаем

$\sum_{i=1}^n X_i \ln \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} + nk \ln(\frac{1-p_1}{1-p_0}) \vee \ln C_{\text{крит}}$

$\sum_{i=1}^n X_i \vee \frac{\ln C_{\text{крит}} - nk \ln \frac{1-p_1}{1-p_0}}{\ln \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}}$

Обозначим левую часть как $C^*_{\text{крит}}$

$\frac{\ln C_{\text{крит}} - nk \ln \frac{1-p_1}{1-p_0}}{\ln \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}} = C^*_{\text{крит}}$

$\sum_{i=1}^n \vee C^*_{\text{крит}}$

1. Первый Случай: $\ln \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} > 0$

2. Второй Случай: $\ln \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} < 0$

Первый случай

$\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} > 1 \Rightarrow p_1 > p_0$

Если $\sum_{i=1}^n X_i > C^*_{\text{крит}} \Rightarrow H_1$

Если $\sum_{i=1}^n X_i < C^*_{\text{крит}} \Rightarrow H_0$

Выведем формулу $C^*_{\text{крит}}(\alpha)$

$\alpha = P\{\sum_{i=1}^n X_i > C^*_{\text{крит}} | \text{верна гипотеза } H_0\}$

$1 - \alpha = P\{\sum_{i=1}^n X_i < C^*_{\text{крит}} | \text{верна гипотеза } H_1\}$

Для наших условий справедлива ЦПТ

$P\{\sum_{i=1}^n X_i < C^*_{\text{крит}}\} \approx \frac{1}{2} + \Phi_0(\frac{C^*_{\text{крит}} - M(\sum_{i=1}^n X_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n X_i)}})$

$1 - \alpha = P\{\sum_{i=1}^n X_i < C^*_{\text{крит}}\} \approx \frac{1}{2} + \Phi_0(\frac{C^*_{\text{крит}} - M(\sum_{i=1}^n X_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n X_i)}})$

$\Phi_0(\frac{C^*_{\text{крит}} - M(\sum_{i=1}^n X_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n X_i)}}) \approx \frac{1}{2} - \alpha$

$M(\sum_{i=1}^n X_i) = nkp_0 = nM(X_i)$

$D(\sum_{i=1}^n X_i) = nkp_0q_0 = nD(X_i)$

$\Phi_0(\frac{C^*_{\text{крит}} - nM(X_i)}{\sqrt{nD(X_i)}}) \approx \frac{1}{2} - \alpha$

По таблицам для функции Лапласа $\Phi_0(x)$ находим такое значение $\phi_{\frac{1}{2}-\alpha}$, что $\Phi_0(\phi_{\frac{1}{2}-\alpha}) = \frac{1}{2} - \alpha$

$\frac{C^*_{\text{крит}} - nM(X_i)}{\sqrt{nD(X_i)}} = \phi_{\frac{1}{2}-\alpha}$

Выразим $C^*_{\text{крит}}$

$C^*_{\text{крит}} = nM(X_i) + \phi_{\frac{1}{2}-\alpha}\sqrt{nD(X_i)}$

Далее сравниваем с $\sum_{i=1}^n X_i$

Если $\sum_{i=1}^n X_i > C^*_{\text{крит}} \Rightarrow H_1$

Если $\sum_{i=1}^n X_i < C^*_{\text{крит}} \Rightarrow H_0$

Второй случай

$\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} < 1 \Rightarrow p_1 < p_0$

Если $\sum_{i=1}^n X_i > C^*_{\text{крит}} \Rightarrow H_0$

Если $\sum_{i=1}^n X_i < C^*_{\text{крит}} \Rightarrow H_1$

Далее аналогично выводим формулу $C^*_{\text{крит}}$

$C^*_{\text{крит}} = nM(X_i) - \phi_{\frac{1}{2}-\alpha}\sqrt{nD(X_i)}$

Пример 2

H_0 : выборка $X_1, ..., X_n$ подчиняется гамма распределению $Gamma(\gamma, \lambda_0)$

H_1 : выборка $X_1, ..., X_n$ подчиняется гамма распределению $Gamma(\gamma, \lambda_1)$

1. Функции правдоподобия

$$L_0 = \frac{\lambda_0^{n\gamma} \prod_{i=1}^{n} X_i^{\gamma-1}}{(\Gamma(\gamma))^n} e^{-\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$$L_1 = \frac{\lambda_1^{n\gamma} \prod_{i=1}^{n} X_i^{\gamma-1}}{(\Gamma(\gamma))^n} e^{-\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

2. Статистика критерия

$$\wedge = \frac{L_1}{L_0} = \frac{\frac{\lambda_0^{n\gamma} \prod_{i=1}^{n} X_i^{\gamma-1}}{(\Gamma(\gamma))^n} e^{-\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} X_i}}{\frac{\lambda_1^{n\gamma} \prod_{i=1}^{n} X_i^{\gamma-1}}{(\Gamma(\gamma))^n} e^{-\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} X_i}} = (\frac{\lambda_1}{\lambda_0})^{n\gamma} e^{(\lambda_0-\lambda_1) \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

3. Логирифмируем

$$\ln \wedge = n\gamma \ln(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}) + (\lambda_0 - \lambda_1) \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vee \frac{C^*_{\text{крит}} - n\gamma \ln(\frac{\lambda_1}{\lambda_0})}{\lambda_0 - \lambda_1}$$

Далее аналогично выводим формулы $C^*_{\text{крит}}$ для двух случаев

Критерий Пирсона

0. Находим неизвестные параметры распределения. $l =$ кол-во неизвестных параметров в распределении
1. Перестраиваем статистический ряд, чтобы $n_i \geq 5, i = \overline{1,k}$
2. Находим веротяности для каждого интервала или элемента выборки по формуле плотности распределения или по формуле вероятности.
3. Вычсиляем статистику критерия $X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
4. Вычисляем $C_{\text{крит}} = h_{1-\alpha}(k-1-l)$
5. Сравниваем X^2 и $C_{\text{крит}}$

Если $X^2 < C_{\text{крит}}$, то соглашаемся с гиптезой

Если $X^2 > C_{\text{крит}}$, то отвергаем гипотезу