1. Решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений в случае простых корней. Пример.

Фундаментальная система решений

Фундаментальная система решений - набор из n решений системы

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_{11}(b)x_1 + a_{12}(b)x_2 + \ldots + a_{1n}(b)x_n \\ \dot{x_2} = a_{21}(b)x_1 + a_{22}(b)x_2 + \ldots + a_{2n}(b)x_n \\ \ldots \\ \dot{x_n} = a_{n1}(b)x_1 + a_{n2}(b)x_2 + \ldots + a_{nn}(b)x_n \end{cases}$$

если вектор-функции (x_n) входящие в него линейно-независимые

Теорема о структуре решения однородной системы

Общее решение системы имеет вид

$x_{\text{о.о}} = C_1x^1 + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n,$
где x^i- ФСР; C_i- вещественная константа

$(1)\ \dot{x} = Ax$

$x = \begin{pmatrix} h_1e^{\lambda t} \\ h_2e^{\lambda t} \\ h_3e^{\lambda t} \end{pmatrix} = he^{\lambda t}\ (2)$

$h\lambda e^{\lambda t} = Ah\lambda e^{\lambda t}$
$Ah = \lambda h$

Лемма. Для того, чтобы функция вида (2) была решением системы (1) необходимо и достаточно, чтобы λ было собственным значением матрицы A, а $h-$ соответствовало собствнному вектору

У матрицы $n \times n$ существует n собственных значений(с учетом кратных)

$detA(A - \lambda E) = 0$

Простые корни

Пусть $\lambda_{1,2}-$ простые и вещественные, и пусть h^n соответствующие им собственные векторы. Тогда вектор функции $h^1 e^{\lambda_1 t}, ..., h^n e^{\lambda_n t}$ образуют ФСР.

$W(t) = |h^1 e^{\lambda_1 t}, ..., h^n e^{\lambda_n t}| = e^{\lambda_1 t + ... + \lambda_n t} |h^1, ..., h^n| \neq 0$ т.к $h^1, ..., h^n$ образуют базис

2. Решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений в случае комплексных корней. Пример.

Фундаментальная система решений

Фундаментальная система решений - набор из n решений системы

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_{11}(b)x_1 + a_{12}(b)x_2 + ... + a_{1n}(b)x_n \\ \dot{x_2} = a_{21}(b)x_1 + a_{22}(b)x_2 + ... + a_{2n}(b)x_n \\ ... \\ \dot{x_n} = a_{n1}(b)x_1 + a_{n2}(b)x_2 + ... + a_{nn}(b)x_n \end{cases}$$

если вектор-функции (x_n) входящие в него линейно-независимые

Теорема о структуре решения однородной системы

Общее решение системы имеет вид

$x_{\text{o.o}} = C_1 x^1 + C_2 x^2 + ... + C_n x^n$,
где x^i- ФСР; C_i- вещественная константа

$(1)\ \dot{x} = Ax$

$$x = \begin{pmatrix} h_1 e^{\lambda t} \\ h_2 e^{\lambda t} \\ h_3 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = h e^{\lambda t}\ (2)$$

$h\lambda e^{\lambda t} = Ah\lambda e^{\lambda t}$
$Ah = \lambda h$

Лемма. Для того, чтобы функция вида (2) была решением системы (1) необходимо и достаточно, чтобы λ было собственным значением матрицы A, а $h-$ соответствовало собствнному вектору

У матрицы $n \times n$ существует n собственных значений(с учетом кратных)

$det A(A - \lambda E) = 0$

Комплексные корни

$\dot{x} = Ax$

Пусть z может быть комплексно значным. $\dot{z} = Az$

Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_n -$ простые собственные значения(могут быть как комплексными, так и вещественными) и $h^1, ..., h^n -$ соответствующие им собственные векторы(могут быть комплексными и вещественными).
Тогда $h^1 e^{\lambda_1 t}, ..., h^n e^{\lambda_n t} - \text{ФСР}$

$W(t) = |h^1 e^{\lambda_1 t}, ..., h^n e^{\lambda_n t}| = e^{\lambda_1 t + ... + \lambda_n t} |h^1, ..., h^n| \neq 0$ т.к $h^1, ..., h^n$ образуют базис

Т.к $A -$ вещественная матрица $\Rightarrow |A - \lambda E| = 0 \Rightarrow$ если $\alpha + i\beta -$ корень, то и $\alpha - i\beta -$ Тоже корень

$$\begin{array}{ll} c.\text{з} & \text{с.в} \\ \alpha + i\beta & f + ig \\ \alpha - i\beta & f - ig \end{array}$$

Преобразование Эйлера $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$

$C_1(f + ig)e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2(f - ig)e^{(\alpha-i\beta)t} = C_1(f + ig)e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + C_2(f - ig)e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) = e^{\alpha t}(\underbrace{(C_1 + C_2)}_{A}(f\cos\beta t - g\sin\beta t) + \underbrace{(C_1 - C_2)i}_{B}(g\cos\beta t + f\sin\beta t))$

$A = C_1 + C_2 = 2a_1$
$B = (C_1 - C_2)i = 2b_1 i - i = -2b_1$

$C_1 = a_1 + b_1 i$
$C_2 = a_1 - b_1 i$

3. Решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений в случае кратных вещественных корней. Пример.

Фундаментальная система решений

Фундаментальная система решений - набор из n решений системы

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_{11}(b)x_1 + a_{12}(b)x_2 + ... + a_{1n}(b)x_n \\ \dot{x_2} = a_{21}(b)x_1 + a_{22}(b)x_2 + ... + a_{2n}(b)x_n \\ ... \\ \dot{x_n} = a_{n1}(b)x_1 + a_{n2}(b)x_2 + ... + a_{nn}(b)x_n \end{cases}$$

если вектор-функции (x_n) входящие в него линейно-независимые

Теорема о структуре решения однородной системы

Общее решение системы имеет вид

$x_{\text{о.о}} = C_1x^1 + C_2x^2 + ... + C_nx^n,$
где x^i- ФСР; C_i- вещественная константа

(1) $\dot{x} = Ax$

$x = \begin{pmatrix} h_1e^{\lambda t} \\ h_2e^{\lambda t} \\ h_3e^{\lambda t} \end{pmatrix} = he^{\lambda t}$ (2)

$h\lambda e^{\lambda t} = Ah\lambda e^{\lambda t}$
$Ah = \lambda h$

Лемма. Для того, чтобы функция вида (2) была решением системы (1) необходимо и достаточно, чтобы λ было собственным значением матрицы A, а $h-$ соответствовало собствнному вектору

У матрицы $n \times n$ существует n собственных значений(с учетом кратных)

$detA(A - \lambda E) = 0$

Пусть кратность $\lambda = k$

$r = rank(A - \lambda E)$
$m = n - r$

$m = k$

Найти k векторов

$\dot{x} = Ax$
$x = (h^1t + h^2)e^{\lambda t}$
$h^1e^{\lambda t} + \lambda(h^1t + h^2)e^{\lambda t} = A(h^1 + h^2)e^{\lambda t}$
$h^1 + \lambda h^1t + \lambda h^2 = Ah^1t + Ah^2$
$h^1 + \lambda h^2 = Ah^2$
$Ah^1 = \lambda h^1$

Пусть $n = 3$

1. k=2

   а) Есть 2 собственных вектора или 2 независимых

   б) Есть 1 собственный вектор и 1 присоединенный вектор

2. k=3

   $\underbrace{h_1}_{\text{собственный вектор}}, \underbrace{h_2, h_3}_{\text{присоединенные вектора}}$

   $x^1 = e^{\lambda t} h^1$

   $x^2 = e^{\lambda t}(h^1 t + h^2)$

   $x^3 = e^{\lambda t}(\frac{t^2}{2} h^1 + t h^2 + h^3)$

4. Линейная зависимость и независимость систем функций. Решение примеров на исследование линейной зависимости функций. Определитель Вронского для систем. Теорема об определителе Вронского. Пример.

Система функций $\phi_1, ..., \phi_n$ называется линейно зависимой, если существует такой ненулевой набор констант, что $C_1, \phi_1 + ... + C_n \phi_n = 0$
Если такой комбинации не существует, то функции называются линейно независимыми.

Пусть $x^1(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x_2^1(t) \\ ... \\ x_n^1(t) \end{pmatrix}, ..., x^n(t) = \begin{pmatrix} x_1^n(t) \\ x_2^n(t) \\ ... \\ x_n^n(t) \end{pmatrix} -$ набор вектор функций, который является набором решений системы
$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(b)x_1 + a_{12}(b)x_2 + ... + a_{1n}(b)x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}(b)x_1 + a_{22}(b)x_2 + ... + a_{2n}(b)x_n \\ ... \\ \dot{x}_n = a_{n1}(b)x_1 + a_{n2}(b)x_2 + ... + a_{nn}(b)x_n \end{cases}$

Тогда определителем Вронского системы решений называется:
$W(t) = \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & ... & x_1^n(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & ... & x_n^n(t) \end{vmatrix}$

Теорема об определителе Вронского.

Пусть на промежутке X непрерывны коэффициенты $p_1(x), ..., p_n(x)$ однородного дифференциального уравнения

$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \qquad (1)$

Для того, чтобы решения $y_1, y_2, ..., y_n -$ были линейно независимы на X, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы в одной точке x_0 этого промежутка их вронскиан был отличен от нуля. В этом случае он будет отличен от нуля и в остальных точках того же промежутка.

Доказательство

Система векторов $\begin{cases} y_1 = (y_{11}, ..., y_{1n}), \\ ... \\ y_n = (y_{n1}, ..., y_{nn}) \end{cases}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ линейно независима в том и только в том случае, когда отличен от нуля определитель $\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$, составленный из координат этих векторов.

Множество решений уравнения (1) образует вектороное простарнство S^n. По теореме о существованиии единственности решений ОДУ, если задано начальное условие, то существует единственное решение уравнения. Значит каждому решению в S можно сопоставить вектор в $\mathbb{R}^n$. Тогда решения $y_1, ..., y_n -$ линейно независимы только если линейно независимы соответствуеюшие им векторы $y_1, ..., y_n$ с координатами $y_k = (y_k(x_0), y_k'(x_0), ..., y_k^{(n-1)}(x_0)), \quad 1 \le k \le n$

Это будет только в том случае, когда отличен от 0 определитель $\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_1^1(x_0) & \cdots & y_1^{(n-1)}(x_0) \\ y_2(x_0) & y_2^1(x_0) & \cdots & y_2^{(n-1)}(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n(x_0) & y_n^1(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$ (2), составленный из координат этих векторов.

Определитель (2) является значением в точке x_0 определителя $W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1^1(x) & \cdots & y_1^{(n-1)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n(x) & y_n^1(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$, и называется определителем Вронского(вронскианом)

5. Теорема о 3-х типах фазовых траекторий автономных систем. Классификация особых точек. Особые точки линейной системы: узел, седло. Пример.

Теорема о 3-х типах фазовых траекториях.

Автономная система

$\dot{x} = f(x)$ (1)

в $\mathbb{R}^n$ может иметь только три типа фазовых траекторий:

1. Точка
2. Замкнутая кривая без самопересечения (цикл)
3. Незамкнутая кривая без самопересечения

Доказательство

Если решение $x(t) = const$, то траектория - точка. Если $x(t_1) \neq x(t_2)$ при любых $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$, то траектория незамкнутая кривая без самопересечений. Если $x(t) \neq const$ и $x(t_1) = x(t_2)$ при некоторых $t_1, t_2 \neq t_1$, то траектория - замкнутая кривая.

Классификация особых точек.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Если правые части системы $\neq 0$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$

Точки, в которых $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ называются особыми точками или стационарными или точками равновесия

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A = TJT^{-1}$$
$$J = T^{-1}AT$$

Замена
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\widetilde{x}} \\ \dot{\widetilde{y}} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}$$

Узел

$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\lambda_{1,2}-$ собственные значения матрицы A

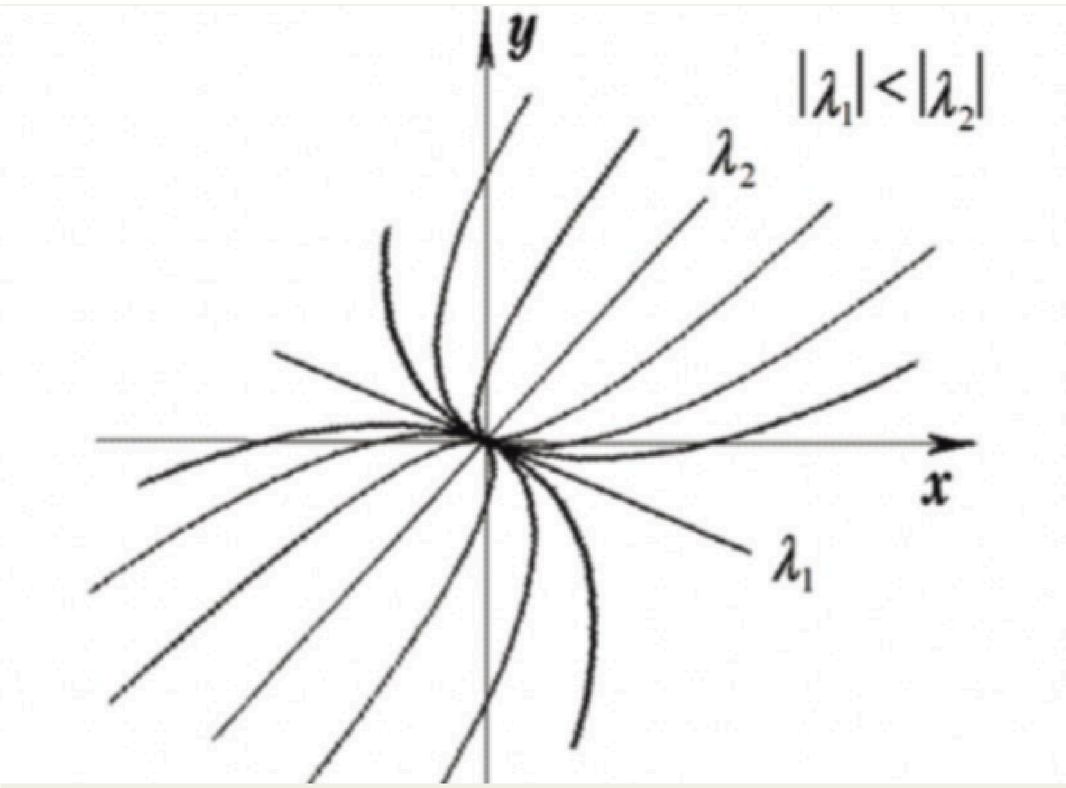
$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \lambda_1 \tilde{x} \\ \dot{\tilde{y}} = \lambda_2 \tilde{y} \end{cases}$

$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

Если $\lambda_{1,2} < 0$, то движемся к особой точке$\Rightarrow$ устойчивый.

Если $\lambda_{1,2} > 0$, то движемся от особой точки $\Rightarrow$ неустойчивый. $|\tilde{y}| = C|\tilde{x}|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$



Седло

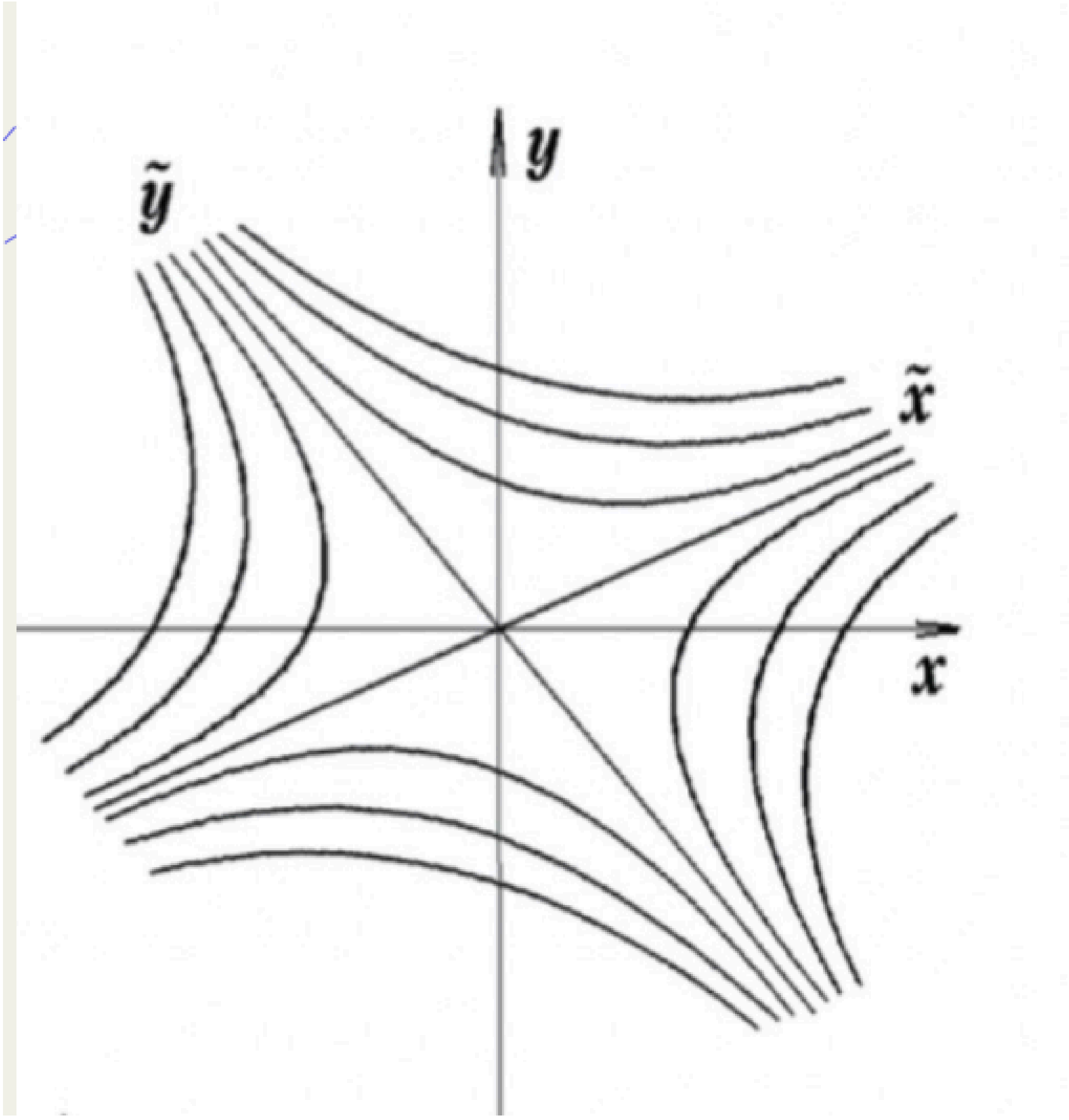
λ_1 и $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ степень отрицательная $|\tilde{y}| = C|\tilde{x}|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$

Если $\lambda_{1,2} < 0$, то движемся к особой точке$\Rightarrow$ устойчивое направление. Движемся вдоль вектора к О.Т

Если $\lambda_{1,2} > 0$, то движемся от особой точки $\Rightarrow$ неустойчивое направление. Движемся вдоль вектора от О.Т



6. Теорема о 3-х типах фазовых траекторий автономных систем. Классификация особых точек. Особые точки линейной системы: центр, фокус. Пример.

Теорема о 3-х типах фазовых траекториях.

Автономная система

$\dot{x} = f(x)$ (1)

в $\mathbb{R}^n$ может иметь только три типа фазовых траекторий:

1. Точка
2. Замкнутая кривая без самопересечения (цикл)
3. Незамкнутая кривая без самопересечения

Доказательство

Если решение $x(t) = const$, то траектория - точка. Если $x(t_1) \neq x(t_2)$ при любых $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$, то траектория незамкнутая кривая без самопересечений. Если $x(t) \neq const$ и $x(t_1) = x(t_2)$ при некоторых $t_1, t_2 \neq t_1$, то траектория - замкнутая кривая.

Классификация особых точек.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Если правые части системы $\neq 0$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$

Точки, в которых $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ называются особыми точками или стационарными или точками равновесия

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A = TJT^{-1}$$
$$J = T^{-1}AT$$

Замена
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\widetilde{x}} \\ \dot{\widetilde{y}} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}$$

Центр

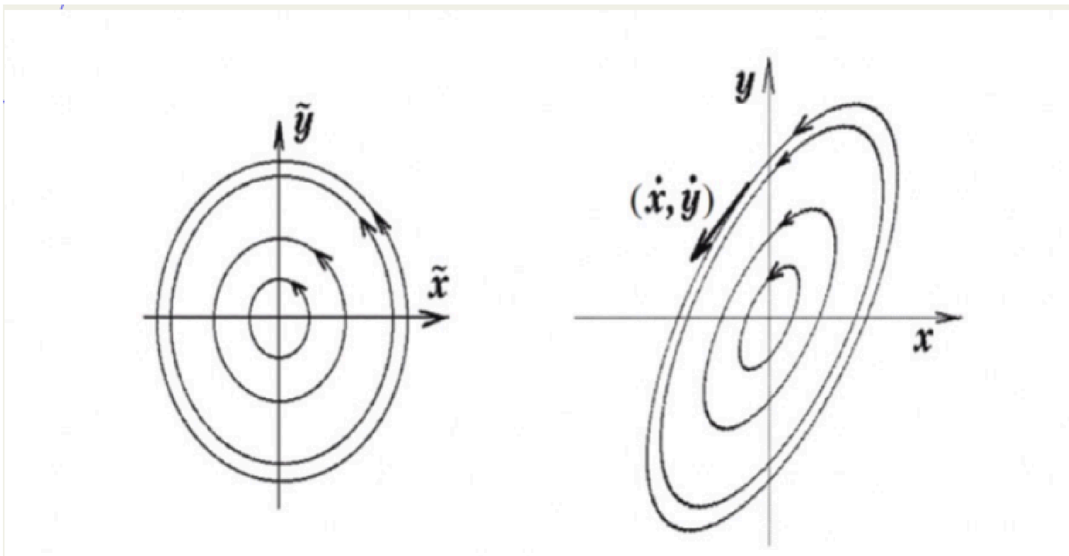
Мнимые собственные значения

$J = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$

$\begin{cases} \tilde{x} = \beta\tilde{y} \\ \tilde{y} = -\beta\tilde{x} \end{cases}$

$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = -\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} \Rightarrow \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = C$



Фокус

Вещественно-комплексные с.з

$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$\dot{\tilde{x}} = \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y}$

$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = -\beta\tilde{x} + \alpha\tilde{y} \end{cases}$

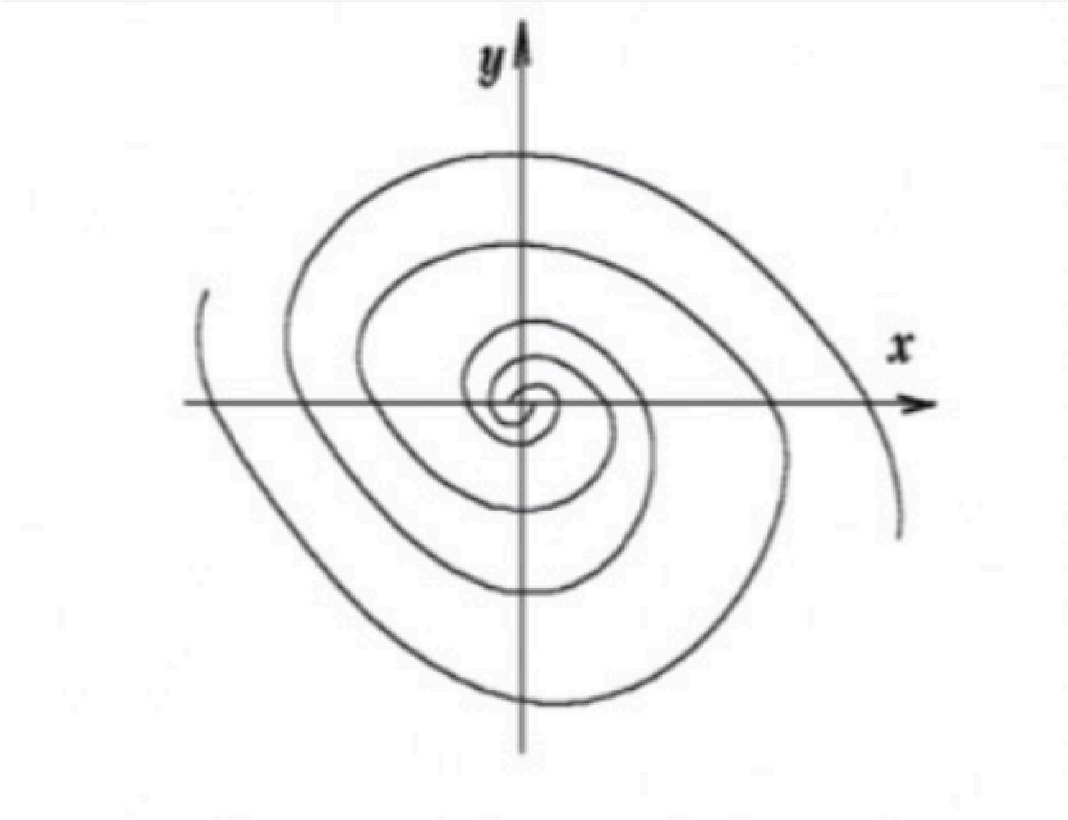
Переходим к (r, ϕ)

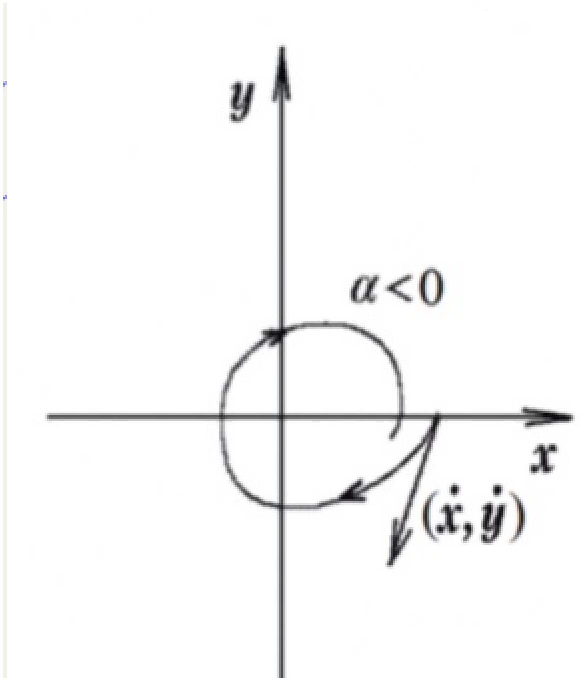
$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$

$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\phi} = -\beta \end{cases}$

$r = C\exp\left(-\frac{\alpha}{\beta}\phi\right)$

Направление определяем по α





7. Теорема о 3-х типах фазовых траекторий автономных систем. Классификация особых точек. Особые

точки линейной системы: вырожденные случаи. Пример.

Теорема о 3-х типах фазовых траекториях.

Автономная система

$\dot{x} = f(x)$ (1)

в $\mathbb{R}^n$ может иметь только три типа фазовых траекторий:

1. Точка
2. Замкнутая кривая без самопересечения (цикл)
3. Незамкнутая кривая без самопересечения

Доказательство

Если решение $x(t) = const$, то траектория - точка. Если $x(t_1) \neq x(t_2)$ при любых $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$, то траектория незамкнутая кривая без самопересечений. Если $x(t) \neq const$ и $x(t_1) = x(t_2)$ при некоторых $t_1, t_2 \neq t_1$, то траектория - замкнутая кривая.

Классификация особых точек.

$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$

Если правые части системы $\neq 0$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$

Точки, в которых $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ называются особыми точками или стационарными или точками равновесия

$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A = TJT^{-1}$
$J = T^{-1}AT$

Замена
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\widetilde{x}} \\ \dot{\widetilde{y}} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}$$

1-ый вырожденный случай: 1 с.з = 0

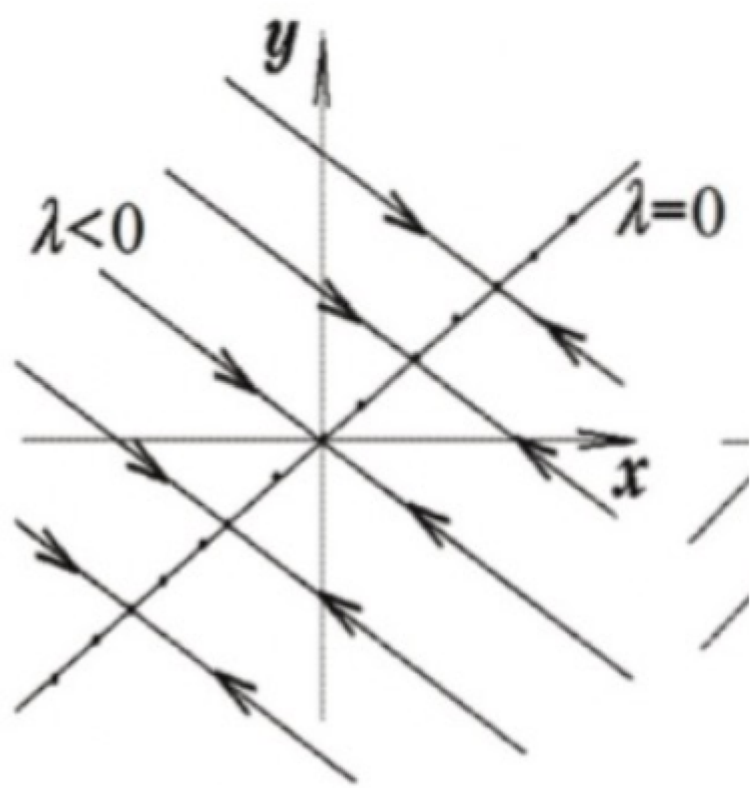
Когда $detA = 0$ или хотя бы 1 с.з = 0

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}} = \lambda \widetilde{x} \\ \dot{\widetilde{y}} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d\widetilde{y}}{d\widetilde{x}} = 0$$

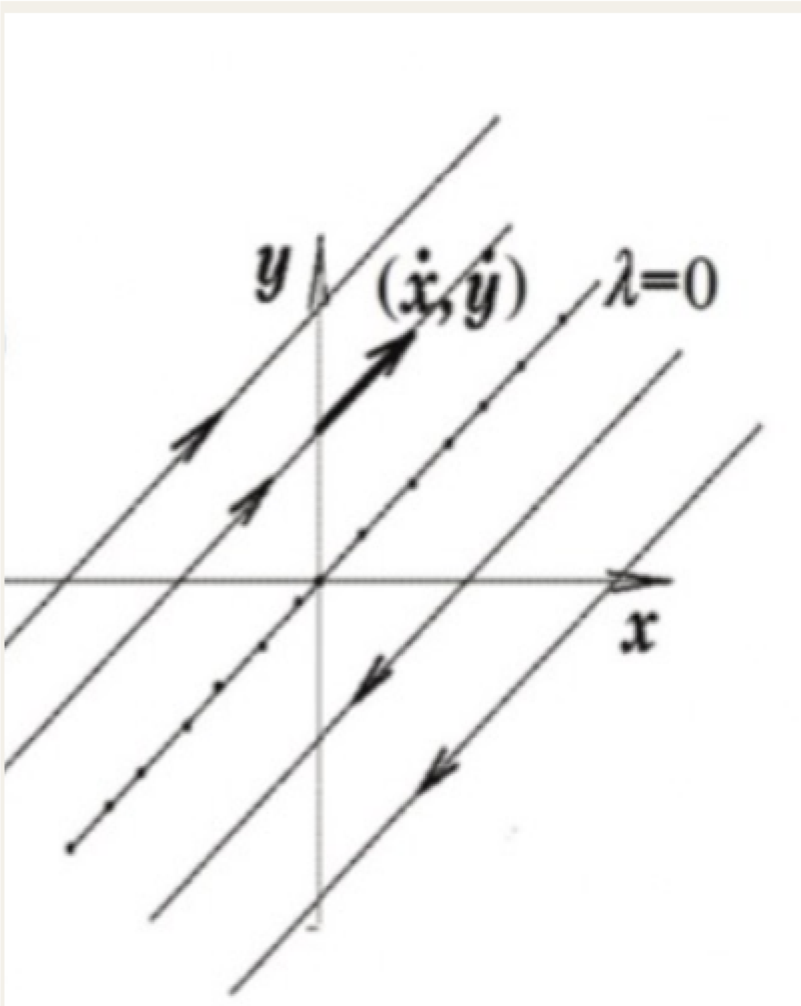
$$\widetilde{y} = 0$$



2-ой вырожденный случай: оба с.з = 0

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = 0 \end{cases}$$



8. Устойчивость. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Функция Ляпунова. Пример.

Устойчивость

$(1)\ \dot{x} = f(t, x),\ x \in \mathbb{R}^n$
$(2)\ \dot{x}(t_0) = \overline{\xi}$

Определение.

Решение $\overline{x}(t)$ системы (1) удовлетворяющее начальным условиям (2) и определенной на всей полуоси называется устойчивым по Ляпунову, если:

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; \delta = \delta(\epsilon)$ такое, что $\forall \xi : ||\xi - \overline{\xi}|| < \delta$ выполняется:

1. Решение $x(t)$ удовлетворяет $x(t_0) = \xi$ существует на $[t_0; +\infty]$
2. $\forall \; t > t_0$ выполняется $||x(t) - \overline{x}(t)|| < \epsilon$

Устойчивость по первому приближению

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

$\dot{x} = f(x), \; x \in \mathbb{R}^n$

Пусть функция $f : \mathbb{R}^n$ удовлетворяет $f(0) = 0$, непрерывна и дифференцируема в нуле и все собственные значения матрицы частных производных $A = (\frac{dt}{dx}(0))$ имеют отрицательную вещественную часть, тогда нулевое решение системы $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ассимптотически устойчиво.

Решение называется ассимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову $\underbrace{||x(t) - \overline{x}(t)||}_{t \to \infty} \to 0$

Если все с.з $\neq 0$, но хотя бы одно >0, то решение неустойчиво

Если хотя бы одно с.з = 0, то используем функцию Ляпунова

Функция Ляпунова

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть $(0; 0) -$ особая точка.

Если особая точка устойчива, то проекция убывает

$z = V(x, y) : V(0, 0) = 0$
$V(x, y) > 0$, если $x, y \neq 0$

$V(x, y) = V(x(t)y(t))$

$$\underbrace{\frac{d(V(x(t)y(t)))}{dt}}_{\text{производная в силу системы}(1)} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot f(x, y) + \frac{dV}{dy} \cdot g(x, y)$$

Если траектория подходит к 0 при $t \to \infty$, то $\frac{dV}{dt} = 0$

Определение. Говорят, что функция $V(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ является функцией Ляпунова системы (1), если:

1. $V(x)$ непрерывно дифференцируема
2. $V(0) = 0,\ V(\infty) = \infty$
3. $V(x) > 0$ при $x \neq 0$
4. Производная функции в силу системы (1) строго отрицательна (или неположительна) или строго положительна на всем $\mathbb{R}^n$, кроме 0

Теорема о функции Ляпунова

Пусть система (1) имеет нулевое положение равновесия(особую точку) $f(0) = 0,\ g(0) = 0$ и пусть $V(x)-$ функция Ляпунова для этой системы.Если при этом ее производная в силу системы неположительна, то нулевое решение системы устойчиво по Ляпунову. Если знак неравенства строгий, то нулевое решение системы ассимптотически устойчиво. Если производная в силу системы положительна, то нулевое решение неустойчиво.