1 Билет

# Неопределённый интеграл. Свойства. Замена переменной интегрирования.

**Определение.**
Неопределёнынй интеграл это совокупность всех первообразных функций $f$ на множестве $x$.

**Определение.**
Первообразной для функции $f$ называется такая функция $F$, производная которой равна данной функции.

**Свойства.**

- $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
- $(\int f(x)dx)' = f(x)$
- $\int dF(x) = F(x) + C$
- $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
- $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$
- $\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))dx = \alpha_1 \int f_1(x)dx + \alpha_2 \int f_2(x)dx$

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм:
$\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$
14. «Длинный» логарифм:
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

1. Замена переменной

Доказательство:

Пуст функция $x = \varphi(t) -$ определена и дифференцируема на некотором промежутке $T$, а $X -$ множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если функция $f(x)$ имеет первообразную на множестве $X$, то на множестве $T$ справедлива формула

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Надём дифференциалы обеих частей неравенства:

$d(\int f(x)dx) = f(x)dx = f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

$d(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Пример:

$\int 2xe^{x^2}dx = \left[\begin{aligned} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{aligned}\right. = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c$

$\int \cos x \sin^3 x dx = \left[\begin{aligned} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{aligned}\right. = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c$

**2 Билет**

# Интегрирования по частям и замена переменной интегрирования в неопределённом интеграле. Примеры.

1. Интегрирование по частям

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Доказательство:

Известно, что $\int (uv)'dx = \int (u'v + v'u)dx = \int vdu + \int udv.$

Но так же справедливо, что

$\int (uv)'dx = uv$

Тогда:

$uv = \int vdu + \int udv$

$\int udv = uv - \int vdu$

Пример:

$\int xe^x dx = \left[\begin{aligned} u = x \xrightarrow{\text{произв}} du = 1 * dx \\ dv = e^x dx \xrightarrow{\text{первообр}} v = e^x \end{aligned}\right. = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c\backslash$

Проверка:

$(xe^x - e^x + c)' = xe^x$

2. Замена переменной Доказательство:

Пуст функция $x = \varphi(t) -$ определена и дифференцируема на некотором промежутке $T$, а $X -$ множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если функция $f(x)$ имеет первообразную на множестве $X$, то на множестве $T$ справедлива формула

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Надём дифференциалы обеих частей неравенства:

$d(\int f(x)dx) = f(x)dx = f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

$d(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Пример:

$$\int 2xe^{x^2}dx = \left[\begin{aligned} t &= x^2 \\ dt &= 2xdx \end{aligned}\right. = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c$$

$$\int \cos x \sin^3 x dx = \left[\begin{aligned} t &= \sin x \\ dt &= \cos x dx \end{aligned}\right. = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

### 3 Билет

# Интегрирование рациональный функция. Примеры.

- Рациональные функции

  Пример метода неопределённых коэффициентов:

  Зам.степень знаменателя должна быть больше степени числителя, если не так, то метод выделения целой части

  $$\frac{2x^2+4x-8}{x^3-4x} = \frac{2x^2+4x-8}{x(x^2-4)} = \frac{2x^2+4x-8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{Ax^2-4A+Bx^2+2Bx+Cx^2-2Cx}{x^3-4}$$
  $$\begin{cases} A+B+C=2 \\ 2B-2C=4 \\ -4A=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \\ C=-1 \end{cases} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$$

  https://www.youtube.com/watch?v=MJPSck6t4Y4

### 4 Билет

# Интегрирование тригонометрических функций. Примеры.

- Тригонометрия:
  - $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx;\ m, n \in Z$, если $m, n < 0$, то $t = \operatorname{tg} x$, если $m, n > 0$, то вносим под дифференциал.
  - $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$
  - $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$
  - $\int R(\sin x, \cos x)dx$ универсальная тригонметрическая подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$
    $\sin x = \frac{2t}{t^2+1} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$
  - если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то $\cos x = t$
  - если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то $\sin x = t$
  - если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то $\operatorname{tg} x = t$

1. Если хотя бы одно из чисел $m, n-$ нечётное, положительное цело, то от чётной степени отделяем один множитель, затем оставшуюся чётную степень выражаем, используя основное тригонометрическое тождество и сводим интеграл к табличному.

Пример:

а) $\int \cos^3 xdx = \int \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}\underbrace{\cos xdx}_{d(\sin x)} = \int(1-\sin^2 x)d(\sin x) = \int d(\sin x) - \int \sin^x d(\sin x) =$ $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$

б) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \sin^3 x \cdot \cos^{-\frac{1}{2}} xdx = \int \sin x \cdot \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} \cdot \cos^{-\frac{1}{2}} xdx = -\int(1-\cos^2 x)\cdot$ $\cos^{-\frac{1}{2}} xd(\cos x) = -\int \cos^{-\frac{1}{2}} xd(\cos x) + \int \cos^{1\frac{1}{2}} xd(\cos x) = -\frac{\cos^{\frac{1}{2}} x}{\frac{1}{2}} + \frac{\cos^{2\frac{1}{2}} x}{2\frac{1}{2}} + c$

2. Если $m, n-$ чётные, целые неотрицательные числа, то применяем тригонометрические формулы понижения степени:

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$

Пример:

а) $\int \sin^2 x \cos^4 xdx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 xdx = \int(\sin x \cos x)^2 \cos^2 xdx = \int(\frac{\sin 2x}{2})^2 \cdot$ $\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot (1+\cos^2 x)dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2xdx + \frac{1}{8}\int \sin^2 x \cos 2xdx =$ $\frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2xd(\sin 2x) = \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{64}\int \cos 4xd(4x) + \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^3 2x}{3} + c = \frac{x}{16} -$ $\frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + c$

3. Если $(m+n)-$ чётное отрицательное число, то подстановка $\operatorname{tg} x = t \quad \operatorname{ctg} x = t$

Пример:

а) $\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \underbrace{\frac{1}{\sin^2 x}}_{1+\operatorname{ctg}^2 x} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sin^2 x}}_{-d(\operatorname{ctg} x)} = -\int(1+\operatorname{ctg}^2 x)\cdot d(\operatorname{ctg} x) = -\int d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg}^2 x \cdot$ $d(\operatorname{ctg} x) = -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + c$

б) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx = \int \underbrace{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}_{\operatorname{ctg}^2 x} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sin^2 x}}_{1+\operatorname{ctg}^2 x} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sin^2 x}}_{-d(\operatorname{ctg} x)} = -\int \operatorname{ctg}^2 x \cdot (1+\operatorname{ctg}^2 x)\cdot d(\operatorname{ctg} x) = -\int \operatorname{ctg}^2 x \cdot$ $d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg}^4 x \cdot d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + c$

# 5 Билет

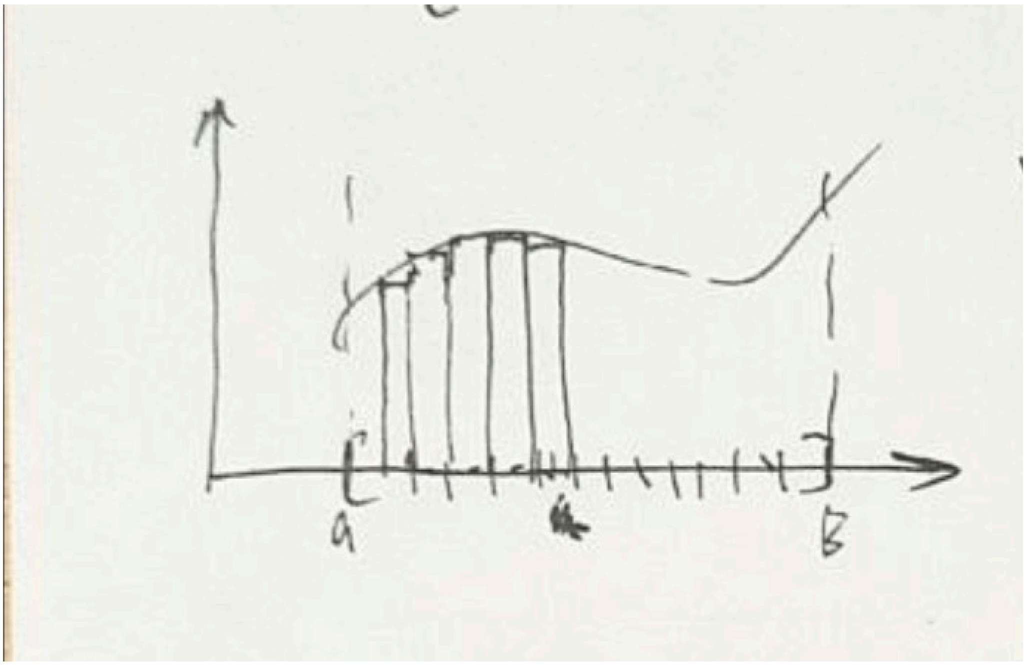
## Определение интеграла Римана. Верхние и нижние суммы Дарбу

Определённый интеграл - предел интегральных сумм Римана при стремлении диаметра разбиения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ к нулю.

Если предел существует, то функция интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$

$\tau = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}-$ разбиение отрезков

$\tau_\xi = \{\tau, \xi \in [x_{i-1}, ..., x_i],\ i = \overline{1, n}\}-$ тау отмеченные точками кси




Ищем площадь каждого прямоугольника и складываем

$\sigma_{\tau_\xi}(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Отрезки всё меньше, если найти их предел, то он и будет интегралом

### Определение.

Наибольшая длина-диаметр разбиения (мелкость)=$\max\{\Delta x_i\}$

$I = \lim \sigma_{\tau_\xi}(f) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (\forall \tau_\xi, \delta(\tau_\xi) < \delta \Rightarrow |\sigma_{\tau_\xi}(f) < \epsilon|)$

Замечание: длина $\Delta x_i$ и $I$ от кси не зависит

### Верхние и нижние суммы Дарбу

Обозначим:

$$M_i - sup\{f(x)\} \quad m_i = inf\{f(x)\} \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Пусть $f(x)$— ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция и $\{x_i\}$— произвольное разбиение этого сегмента. Так как $f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на любом частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, а поэтому у функции $f(x)$ существует точная нижняя грань $m_i$ и точная верхняя грань $M_i$ на частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$

$\overline{S} = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$— верхняя сумма Дарбу

$\underline{s} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$— нижняя сумма Дарбу

### Свойства.

1. Суммы Дарбу существуют для ограниченных функций (и сверху, и снизу)
   #Если предел существует, то функция ограничена
   Ограниченность вытекает из существования предела Римана, каждое слагаемое ограничено

$\Rightarrow$ сумма ограничена
#Если предел не существует, то $f$ не интегрируема на $[a, b]$

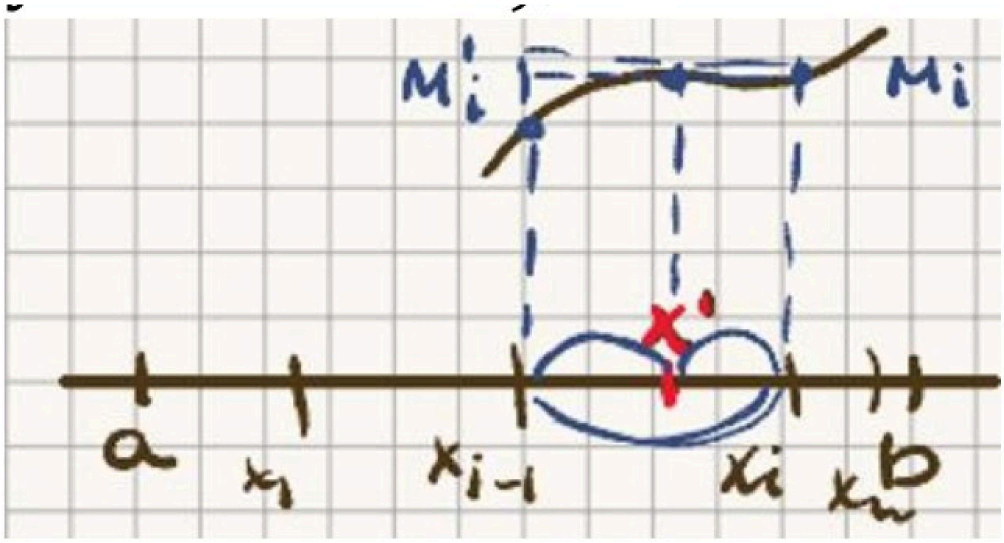
2. Пусть $\sigma_{\tau_\xi}(x_i, \xi_i)-$ интегральная сумма, отвечающая данному разбиению $\{x_i\}$. Тогда при любом выборе промежуточных точек $\xi_i$ всегда справедливы неравенства

$$\underline{s_\tau} \le \sigma_{\tau_\xi}(f) \le \overline{S_\tau}$$

Док-во

По определнию чисел $m_i, M_i$ заключаем, что $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ для любого $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Умножая неравенства на $\Delta x_i$ и суммируя по всем $i$ от 1 до $n$, получаем требуемое утверждение леммы

3. При измельчении разбиения верхняя сумма Дарбу не увеличивается(может только уменьшиться), а нижняя - не уменьшается(может только увеличиться).




Док-во

а) Если $x'$ попало на одну из точек разбиения, то ничего не изменится.
б) Если $x'$ попало в $i-$ый отрезок, то было 1 слагаемое, а теперь станет 2.
Очевидно, что в 1 из половинок $M_i' \le M_i$
$M_i'(x' - x_{i-1}) + M(x_i - x) \le M(x' - x_{i-1}) + M(x_i - x) = M(x_i - x_{i-1}) = M_i \Delta x$
Для минимума наоборот

При добавлении некоторого набора точек получаем, добавляя по одной, что новая $M_i$ не увеличивается

4. Любая нижняя сумма Дарбу меньше любой верхней:

$\forall \tau_1$ и $\tau_2 \Rightarrow \underline{s_{\tau_1}} \le \overline{S_{\tau_2}}$

Составим разбиение $\tau$, в которое входит $\tau_1, \tau_2$ :
$\tau = \tau_1 \cup \tau_2$
$\underline{s_{\tau_1}} \le \underline{s_\tau} \le \overline{S_\tau} \le \overline{S_{\tau_2}}$

Следствие:

Множество верхних сумм данной функции, отвечающих всевозможным разбиением сегмента $[a, b]$, ограничено снизу. Множество нижних сумм - ограничено сверху.
Дейсвтительно, любая верхняя сумма не меньше некоторой фиксированной нижней суммы, следовательно, множество верхних сумм огрничено снизу. Аналогично проводятся рассуждения

для нижних сумм. Также существует точная нижняя грань множества $\{S\}$ и точная верхняя грань множества $\{s\}$

### 6 Билет

# Интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости.

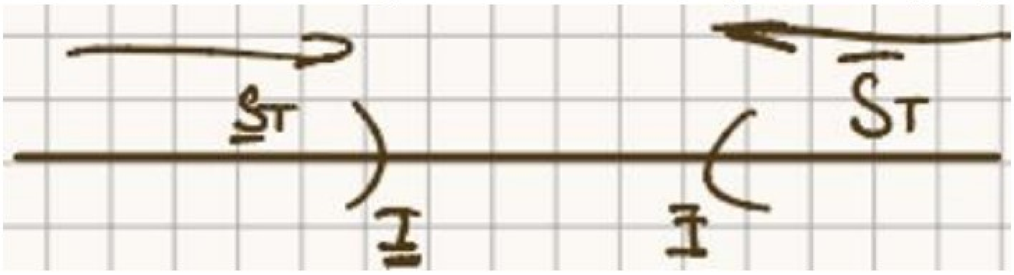
**Интеграл Дарбу.**

Верхним интегралом Дарбу от функции $f(x)$ называется число $\overline{I}$, равное точной нижней грани множества верхних сумм $\{S\}$ данной функции для всевозможных разбиений сегмента $[a, b]$

Нижним интегралом Дарбу от функции $f(x)$ называется число $\underline{I}$, равное точной верхней грани множества нижних групп сумм $\{s\}$ данной функции для всевозможных разбиений сегмента $[a, b]$

$\sup \underline{s_{\tau_1}} = \underline{I}-$ нижний интеграл Дарбу

$\inf \overline{S_{\tau_2}} = \overline{I}-$ верхний интеграл Дарбу



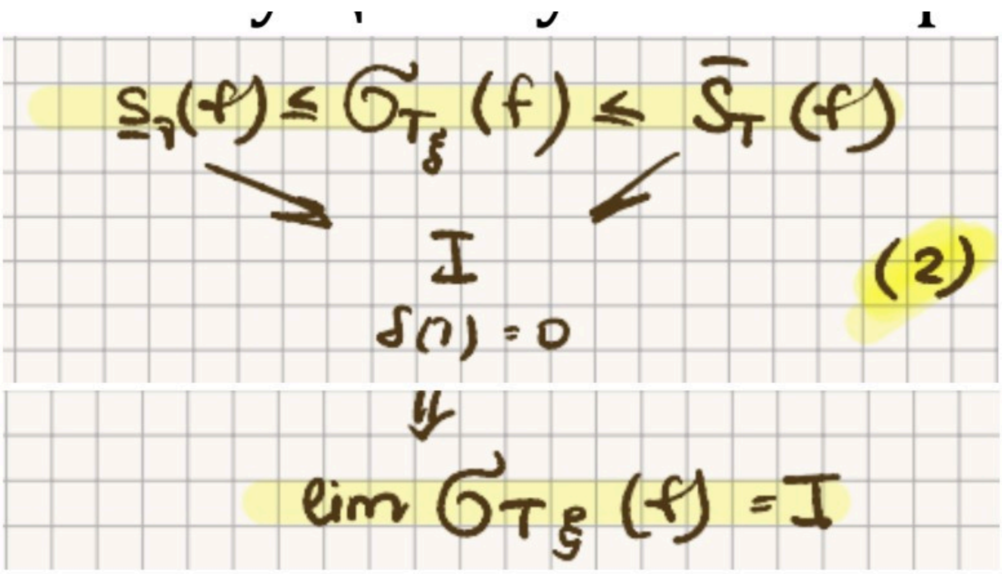
$\Rightarrow \underline{I} \leq \overline{I}$

Если $\underline{I} = \overline{I} \Rightarrow$ существует интеграл Дарбу
Если $\underline{I} = \overline{I} \Rightarrow \;\; f(x)$ интегрируема по Дарбу

По теоремам о сходимости монотонной величины имеем:
$\underline{I} = \lim\limits_{\delta(\tau)\to 0} \underline{s_\tau}$
$\overline{I} = \lim\limits_{\delta(\tau)\to 0} \overline{S_\tau}$

**Теорема.**

Если существует интеграл Дарбу, то существует интеграл Римана и они равны.




Применяя теорему о промежуточной величине, находящейся между двумя сходящимися к одному пределами

### Лемма.

Нижний интеграл Дарбу всегда не превосходит верхнего интеграла Дарбу, т.е. $\underline{I} \le \overline{I}$

Док-во

Допустим противное, т.е. что $\overline{I} > \underline{I}$. Тогда $\underline{I} - \overline{I} = \epsilon < 0$. Для указанного $\epsilon$, согласно определению числа $\overline{I}$, найдется такое разбиение $\{x_i\}$ сегмента $[a, b]$, что для соответсвующей верхней суммы $\overline{S}$ будет выполнено неравенство $\overline{S_\tau} < \overline{I} + \frac{\epsilon}{2}$.
Точно так же можно указать такое разбиение $\{x_i'\}$ сегмента $[a, b]$, что для соответствующей нижней суммы $\underline{s}$ будет выполнено неравенство $\underline{s} > I - \frac{\epsilon}{2}$
Вычтем второе неравенство из первого. Получим $\overline{S} - \underline{s} < \overline{I} - \underline{I} + \frac{\epsilon}{2}$.
Но $\overline{I} - \underline{I} = -\epsilon$, поэтому $\overline{S} - \underline{s} < 0$, т.е. $\underline{s} > \overline{S}$

Получившееся неравенство противоречит утверждению леммы (Любая нижняя сумма Дарбу меньше любой верхней). Таким образом, доказываемое утверждение справедливо, т.е. $\underline{I} \le \overline{I}$

Число А называется пределом верхних сумм при стремлении к нулю диаметра разбиений $d$, если для любого положительного числа $\epsilon$ можно указать положительное число $\delta$ такое, что при условии $d < \delta$ выполняется неравенство $|\overline{S} - A| < \epsilon$.
Для обозначения указанного предела естественно употреблять символ $A = \lim\limits_{d \to 0} \overline{S}$.
Аналогично для B нижних сумм.

### Основная лемма Дарбу

Верхний интеграл Дарбу $\overline{I}$ является пределом верхни сумм $\overline{S}$ при стремлении диаметра $d$ к нулю, т.е. $\overline{I} = \lim\limits_{d \to 0} \overline{S}$. Аналогично $\underline{I} = \lim\limits_{d \to 0} \underline{s}$.

Док-во

Проведём доказательство первого утверждения леммы.
Заметим, что если функция $f(x) = c = const$, то $M = \sup\{f(x)\} > m = \inf\{f(x)\}$.
Фиксируем произвольное положительное число $\epsilon$
По определению числа $\overline{I}$ существует такое разбиение $\{x_i^*\}$, что верхняя сумма $\overline{S^*}$ этого разбиения будет удовлетворять условию $\overline{S^*} - \overline{I} < \frac{\epsilon}{2}$

Обозначим через l число точек разбиения $\{x_i^*\}$, не совпадающих с концами сегмента $[a, b]$. Пусть $\{x_i\}-$ произвольное разбиение сегмента $[a, b]$, диаметр которого удоавлетворяет неравенству $d < \delta = \frac{\epsilon}{2l(M-m)}$, и пусть $\overline{S}-$ верхняя сумма этого разбиения. Произведём измельчение разбиения $\{x_i\}$, добавив к нему отмеченные l точек разбиения $\{x_i^*\}$.

Полученное при этом разбиение обозначим $\{x_i'\}$.
По лемме (Для разностей $\overline{S} - \overline{S^*}$ выполяется следующее неравенство $\overline{S} - \overline{S^*} \leq (M-m)ld$.
Аналогично для $\underline{S}$) верхняя сумма $\overline{S'}$ этого последнего разбения удовлетворяет условию $0 \leq \overline{S} - \overline{S^*} \leq (M-m)ld < \frac{\epsilon}{2}$.

Но разбиение $\{x_i'\}$ можно рассматривать как измельчение разбиения $\{x_i^*\}$, к которому добавляются точки разбиения $\{x_i\}$, не совпадающие с концами сегмента $[a, b]$

Поэтому в силу определения $\overline{I}$ и леммы(При измельчении данного разбиения верхняя сумма может только уменьшиться, а нижняя сумма - только увеличиваться) $\overline{I} \leq \overline{S'} \leq \overline{S^*}$, т.е. $0 \leq \overline{S'} - \overline{I} < \overline{S^*} - \overline{I}$.

Выше было показано, что $\overline{S^*} - \overline{I} < \frac{\epsilon}{2}$, поэтому $0 \leq \overline{S'} - \overline{I} < \frac{\epsilon}{2}$

Объединяя эти неравенства с установленными выше неравенствами $0 \leq \overline{S} - \overline{S'} < \frac{\epsilon}{2}$, получаем, что $0 \leq \overline{S} - \overline{I} < \epsilon$, если только $d < \delta$.

Следовательно: $\overline{I} = \lim\limits_{d \to 0} \overline{S}$.

**Теорема 1.** (свойства сумм Дарбу). **Д1.**. Для любого размеченного разбиения$(\tau, \xi)$ отрезка $[a, b]$ справедливы равенства:

$$\underline{s}_\tau(f) \leq \sigma_\tau(f, \xi) \leq \overline{S}_\tau(f),$$

причём $\underline{s}_\tau(f) = \inf\limits_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi),\ \overline{S}_\tau(f) = \sup\limits_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi)^*$

$^*inf$ и $sup$ берутся по всевозможным совокупностям отмеченных точек.

**Доказательство** : Докажем утверждение для верхних сумм.

$\forall k = \overline{1, n}$ и $\forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ выполнено $f(\xi_k) \leq M_k$. Умножая это неравенство на $\Delta x_k$ и суммируя по $k$, получим:

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \overline{S}_\tau(f).$$

Далее по определению $\sup : \forall \epsilon > 0\ \exists \xi_k^* \in [x_{k-1}, x_k] :\ f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\epsilon}{b-a}$. Откуда,

$$\sigma_\tau(f, \xi^*) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^*)\Delta x_k > \overline{S}_\tau - \frac{\epsilon}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \overline{S_\tau}(f) - \epsilon$$

**Теорема 7. Д7.** (Критерии интегрируемости). Для любой ограниченной функции

$$f : [a, b] \to R$$

следующие утверждения равносильны:
а) $f-$ интегрируема на $[a, b]$
б) $I_* = I^*$ (критерий Дарбу)
в) $\lim\limits_{d_\tau \to 0} (\overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f)) = 0^*$ (критерий Римана);

*т.е. $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall \tau,\ d_\tau < \delta(\epsilon)$ выполено $\overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau < \epsilon$

**Доказательство** :(a$\Rightarrow б)$ Пусть $f$ — интегрируема на $[a,b]$, тогда

$$\exists I \in R : \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon) : \forall \tau,\ d_\tau < \delta(\epsilon) \text{ и } \forall \xi \Rightarrow |\sigma_\tau(f,\xi) - I| < \epsilon$$

Беря в последнем неравенстве $sup$ и $inf$ повсем $\xi$, получаем:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall \tau,\ d_\tau < \delta(\epsilon) \Rightarrow \begin{bmatrix} |\overline{S}_\tau(f) - I| \le \epsilon \\ |\underline{s}_\tau(f) - I| \le \epsilon \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{d_\tau \to 0} \overline{S}_\tau(f) = \lim_{d_\tau \to 0} \underline{s}_\tau(f) = I.$$

По основной лемме Дарбу: $\lim\limits_{d_\tau \to 0} \overline{S}_\tau(f) = I^* \quad \lim\limits_{d_\tau \to 0} \underline{s}_\tau(f) = I_* \Rightarrow I_* = I^*$

**Доказательство** :(б$\Rightarrow$ в) Пусть $I_* = I^*$, тогда по основной лемме Дарбу получим:

$$\lim_{d_\tau \to 0} \underline{s}_\tau(f) = \lim_{d_\tau \to 0} \overline{S}_\tau(f) \Rightarrow \lim_{d_\tau \to 0} (\overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f)) = 0$$

**Доказательство** : (в$\Rightarrow$ a) Пусть $\lim\limits_{d_\tau \to 0} (\overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f)) = 0$. Т.к. для любого разбиения $\tau$ :

$$\underline{s}_\tau(f) \le I_* \le I^* \le \overline{S}_\tau(f), \text{ то } 0 \le I^* - I_* \le \overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f) \xrightarrow[d_\tau \to 0]{} 0 \Rightarrow I_* = I^* = I.$$

Покажем, что $\lim\limits_{d_\tau \to 0} \sigma_\tau(f,\xi) = I$. По свойству **Д1** :

$$\underline{s}_\tau(f) \le \sigma_\tau(f,\xi) \le \overline{S}_\tau(f); \quad \underline{s}_\tau(f) \le I \le \overline{S}_\tau(f) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\sigma_\tau(f,\xi) - I| \le \overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f) < \epsilon.$$

Получаем, что:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall \tau,\ d_\tau < \delta(\epsilon), \quad \forall \xi \Rightarrow |\sigma_\tau(f,\xi) - I| < \epsilon.$$

7 Билет

# Интегрируемость непрерывных и монотонных функций

**Теорема 1.**
Непрерывная на отезке функция интегрируема на этом отрезке

**Доказательство**
По теореме Кантора-Гейне $f-$ равномерно непрерывна на $[a,b] \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a,b] : (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{b-a})$.

$\exists \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ возьмём такое $T : \delta(T) < \delta \Rightarrow \forall i,\ |x_i - x_{i-1}| < \delta \Rightarrow$ по т. Вейерштрассе $m_i = f(\overline{x_i}),\ M_i = \overline{\overline{x_i}} \Rightarrow M_i - m_i = f(\overline{\overline{x_i}}) - f(\overline{x_i}) < \frac{\epsilon}{b-a}$

**Теорема 2.**
Монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

**Доказательство**
Пусть $f(x)-$ возрастает на $[a,b]$
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall T : \delta(T) < \delta \quad S_T - s_T = \sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \delta \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = \delta(f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(b)) = \delta(f(b) - f(a)) < \epsilon$

8 Билет

# Интегрируемость кусочно-непрерывных функций

**Теорема.**

Кусочно-непрерывная*, ограниченная на отрезке, функция интегрируема на нём

*Непрерывная за исключением конечного числа точек разрыва 1ого рода.

**Утверждение.**

Если значение интегральной функции изменить на конечном множестве точек, то интегрируемость при этом не нарушиться и интеграл не изменится

**Доказательство.**

Пусть функция $f-$ интегрируема на $[a, b],\ F$ отличается от $f$ в $m$ точках: $x_1, x_2, ..., x_m$. Т.к. $f-$ ограничена некоторыми числами $L$, то $\overline{f}$ ограничена числом $\overline{L} = \max\{L, |f(x_1)|, ..., |\overline{f}(x_m)|\}$.

Заметим, что для $f$ и $\overline{f}$ в интегральных суммах различны не более $2m$ слагаемых, тогда:
$|\sigma_\tau(f, \xi) - \sigma_\tau(\overline{f}, \xi)| \leq 2m(L + \overline{L})d_\tau \to 0$
Следовательно: $\exists \lim\limits_{d_\tau \to 0} \delta(\overline{f}, \xi),$ и $\lim\limits_{d_\tau \to 0} \sigma_\tau(\overline{f}, \xi) = \lim\limits_{d_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi)$
Данное утверждение позволяет определить интеграл для функций, заданных на отрезке за исключением конечного множества точе, и говорить об интегрируемости этих функций.

9 билет

# Интегрируемость неравенств. Оценка модуля

1. Если $a < b$; $f(x) \leq \varphi(x)$, они обе интегрируемы на $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x) \leq \int\limits_a^b \varphi(x)$

Доказательство

$$\int\limits_a^b f(x) - \int\limits_a^b \varphi(x) = \int\limits_a^b (f(x) - \varphi(x))dx = \lim \sum_{i=1}^n (\varphi(\xi_i) - f(\xi_i))\Delta x_i$$

Так как $\varphi(x) > f(x)$, то каждая сумма $> 0 \Rightarrow \lim > 0 \Rightarrow \int\limits_a^b \varphi > \int\limits_a^b f$

2. Оценка модуля: если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то и $|f|$ тоже интегрируема на $[a, b]$, причём $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq \int\limits_a^b f(x)dx$

Доказательство

Известно, что $|a| - |b| \leq |a - b|$. Тогда $M_{|f|} - m_{|f|} \leq |M_f - m_f|$

$$|\sigma_\tau(f)| = |\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i| \leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i = \sigma_\tau(|f|)$$

10 Билет

# Линейность и аддитивность определенного интеграла

**Аддитивность**

Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, а $c \in [a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Доказательство

Составляя разбиение $\tau$ сделаем так, чтобы точка $c$ в него входила. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} f(\xi)\Delta x_i + \sum_{i=k}^{n} f(\xi)\Delta x_i \quad (1)$$

По свойству сумм: $\sigma = \sigma' + \sigma''$

Переходя от сумм к пределам получим (1)

**Линейность**

Если $f$ и $g$ - интегрируемы на $[a,b]$, то справедливо равенство

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$$

Доказательство

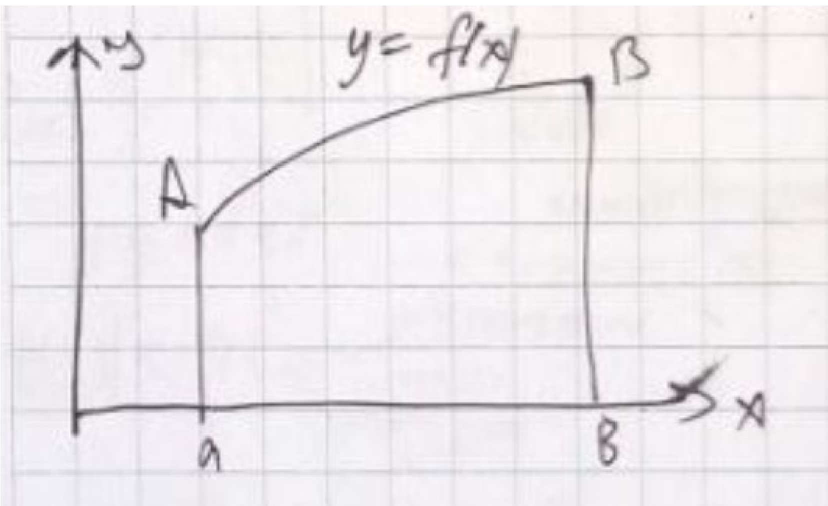
$$\lim \sum_{i=1}^{n}(f(\xi)+g(\xi))\Delta x_i + \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i + \lim \sum_{i=1}^{n} g(\xi)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

### 11 Билет

# Непрерывность интеграла по переменному верхнему пределу интегрирования.

$\phi(x) = \int_a^x f(t)dt -$ определённый интеграл с переменным верхним пределом

Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то она интегрируема на любом вложенном отрезке $[a,x] \subset [a,b]$



- Обладает всеми свойствами определенного интеграла по $[a, b]$, но является функцией своего верхнего предела
- Геометрический смысл: $\int\limits_a^x f(t)dt-$ переменная площадь криволинейной трапеции, которая меняется взависимости от $x$

**Теорема.**

Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то на этом отрезке функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ непрерывна.

**Доказательство.**

$x \in [a, b]. \quad f(t)-$ интегрируема, $t \in [a, b] \Rightarrow F(x)$ определена для $x \in [a, b]$.

$$\forall x \in [a, b], \quad |F(x + \Delta x) - F(x)| = | \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt|;$$

$$|f(t)| \leq M, \quad t \in [a, b]$$

$| \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt| \leq | \int\limits_x^{x+\Delta x} Mdt| \leq M|\Delta x| < M\delta = \epsilon$, если $\delta = \frac{\epsilon}{M}, \ \forall \epsilon > 0$

## 12 Билет

# Дифференцируемость интеграла по переменному верхнему пределу интегрирования.

**Теорема.**

$f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, тогда $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt-$ дифференцируема, причём $F'(x) = f(x), \ x \in [a, b]$

Суть: Производная от определённого интеграла с переменным верхним пределом равна подинтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена этим пределом.

**Доказательство.**

1. Найдём $\phi'(x)$ по определению:
   $\phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\phi(x)}{\Delta x}. \quad \forall x \in [a, b] \quad (x + \Delta x) \in [a, b]$
2. $\Delta\phi(x) = \phi(x + \Delta x) - \phi(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt =$\по свойству аддитивности первый интеграл расписываем\ $= \int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_a^{\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_a^{\Delta x} f(t)dt =$\ по теореме о среднем значении\ $= f(c)(x + \Delta x - x)$, где $c \in [x, x + \Delta x] = f(c)\Delta x$
3. Подставляем полученное наверх в производную.
   $\phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c)$. Так как $\Delta x \to 0$, а $c \in [x, x + \Delta x]$, то $x + \Delta x \geq c \geq x \Rightarrow c \to x$. Подставляем $\phi'(x) = \lim\limits_{c \to x} f(c)$
   Тогда по определению непрерывности: $\lim\limits_{c \to x} f(c) = f(x)$. Получается, что $\phi'(x) = f(x), \ (\int\limits_a^x f(t)dt)' = f(x)$
   Вывод: Каждая непрерывная на отрезке функция имеет первообразную $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$

## 13 Билет

# Формула Ньютона-Лейбница

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $\varphi-$ некая её первообразная, то имеет место следующая формула:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Согласно теореме о дифференцировании интеграла по переменному верхнему пределу:

$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, где $F(x)-$ некая первообразная

Значит, $F(x) = \varphi(x) + c$

Полагая, что $x = a$ можно сказать, что $\varphi(a) + c = 0 \Rightarrow c = -\varphi(a)$

Тогда $\int\limits_a^x f(t)dt = \varphi(x) - \varphi(a)$.

Теперь заменим $x$ на $b$ и получим $\int\limits_a^b f(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)$

### 14 Билет

# Интегрирование по частям и замена переменной интегрирования в определенном интеграле.

**Теорема** (интегрирование по частям).

Пусть функции $u, v-$ диффференцируемы на $[a, b]$, а $u', v' \in R[a, b]$. Тогда справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx.$$

**Доказательство**

Заметим, что из условий теоремы и соответсвующих утверждений из предыдущих пунктов, следует, что функции $u'v$ и $v'u-$ интегрируемы на $[a, b]$. Следовательно и производная $(uv)' = u'v + uv'-$ интегрируема на $[a, b]$. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx + \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx = \int\limits_a^b (u(x)v(x))'dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Остаётся перенести второе слагаемое из левой части вправую.

Иногда формулу интегрирования по частям записывают в виде:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu,$$

трактуя $u'(x)dx$ и $v'(x)dx$ как дифференциалы.

**Теорема**(замена переменной в определённом интеграле).

Доказательство:

Пуст функция $x = \varphi(t)-$ определена и дифференцируема на некотором промежутке $T$, а $X-$ множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если функция $f(x)$ имеет первообразную на множестве $X$, то на множестве $T$ справедлива формула

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Надём дифференциалы обеих частей равенства:

$d(\int f(x)dx) = f(x)dx = f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

$d(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

### 15 Билет

# Параметрически заданные кривые. Длина кривой

### Параметрически заданные кривые

Рассмотрим в декартовой прямоугольной системе координат параметрические уравнения кривой:

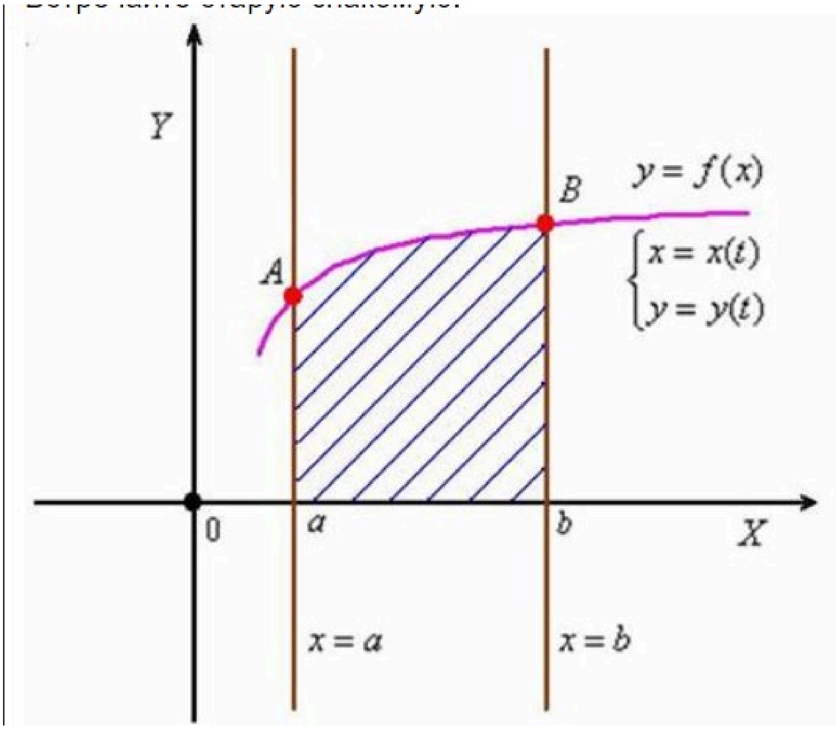
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$t$ - параметр кривой. Область изменения параметра определяется как пересечение максимально возможных областей определения функций $x = x(t), y = y(t)$. Исключение параметра $t$ из системы (если оно возможно) приводит к уравнению, связывающему $x$ и $y$, т.е. к уравнению вида $f(x, y) = 0$
Для приближенного построения графика кривой, заданной параметрически, достаточно построить таблицу значений $x$ и $y$ в зависимости от возможных значений параметра $t$. При этом надо учитывать $t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $t_1$ | $t_2$ | ... | $t_n$ |
| $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
| $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_n$ |

Затем на плоскости построить декартову систему координат и отметить точки с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, соединить эти точки в порядке увеличения параметра t.

### Нахождение площади




Для нахождения площади криволинейной трапеции заданной $y = f(x)$ : $\quad S = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b ydx (1)$

При некоторых конкретных значениях $t_1, t_2$, параметрические уравнения будут определять точки $A, B$

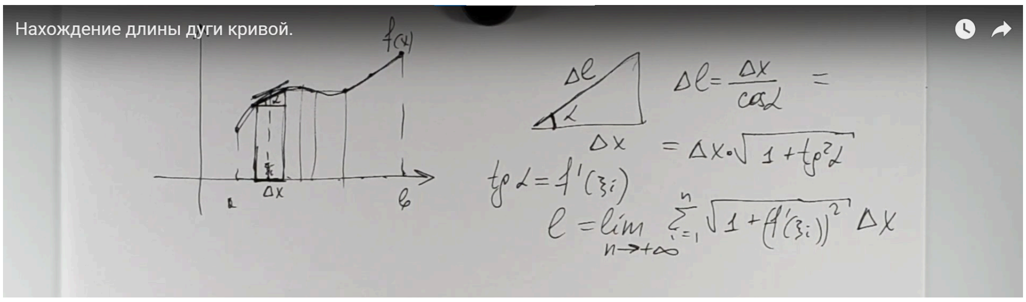
Подставляем в (1) функции $x(t), y(t)$ и раскрываем дифференциал:

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)d(x(t)) = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

Примечание: подразумевается, что функции $x(t), y(t), x(t)$ непрерывны на промежутке интегрирования и, кроме того, функция $x(t)$ монотонна на нём.

### Длина параметрически заданной кривой

Для функции заданной уравнением:




1. Рассмотрим кривую заданную функцией $y = f(x)$. Разделим интервал на $n$ частей точками $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$, где $\Delta x = x_{i+1} - x_i$
2. Длину небольшой части кривой можно приближенно найти как длину гипотенузы. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_1)$ Тогда гипотенуза равна $\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$

3. Для нахождения точной длины отрезков можно использовать $f'(x)$.

Когда $\Delta x_i$ достаточно мало, $\Delta y_i$ можно выразить через $f'(x)$

$$\Delta y_i \approx f'(x_i)\Delta x_i$$

Подставим под корень:

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(x_i)\Delta x_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2(1 + (f'(x_i))^2)} = \Delta x_i\sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Для нахождения всей длины: $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i\sqrt{1 + (f'(x))^2}$

В пределе при $n \to \infty, \quad \Delta x_i \to 0$ сумма переходит в интеграл

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx,$$

где $f(x) = y,\ x \in [a, b]$

Пусть кривая $L$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

где $t \in [t_0, t_1]$.

Если функции непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, t_1]$, то кривая $L$ спрямляема и её длина вычисляется по формуле:

$$L = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt$$

Док-во:

$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}. \quad dx = \phi'(t)dt$

$L = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + (\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)})^2}\phi'(t)dt$

После преобразования получаем:

$$L = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt$$

https://www.youtube.com/watch?v=GSKYlFey3J8&t

### 16+17 Билет

# Несобственный интеграл первого, второго рода. Определение, свойства.

При построении определённого интеграла Римана(или собственного) $\int\limits_a^b f(x)dx$ было существенно выполнение следующих условий:\

1. Отрезок $[a, b]-$ конечен, т.е. $-\infty < a < b < +\infty$;
2. Функция $f$ ограничена на $[a, b]$;

3. Функция $f$ непрерывна почти всюду на $[a, b]$.

Если не выполнено условие 1, то по меньшей мере один из отрезков разбиения $[a, b]$ будет бесконечным, и поэтому теряет смысл интегральная сумма $\sigma_\tau(f, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$. При невыполнении условия 2, не выполняется необходимое условие интегрируемости по Риману. Если не выполнено 3, то не выполняется условие из критерия Лебега.

Далее считаем, что условие 3 выполнено.

**Определение.** Интегралы, для которых не выполнено условие 1 и 2 называются *несобственными интегралами*

**Определение.** *Особыми точками несобственного интеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ будем называть все точки отрезка $[a, b]$, в окресностях которых функция $f$ не ограничена. К особым точкам причисляют также точки $\pm\infty$.

**Определение.** Функция $f$ называется локально интегрируемой (по Риману) на промежутке $E$, если $f-$ интегрируема (по Риману) на каждом отрезке, содержащемся в $E$. $f \in R_{loc}(E)$.

**Определение.** Пусть $f \in R_{loc}([a, +\infty))(\text{т.е.} f \in R[a, A],\ \forall A > a)$. Предел (частичного) интеграла $\int\limits_a^A f(x)dx$(конечный или бесконечный) при $A \to +\infty$ называют *несобственным интегралом первого рода от функции f по лучу* $[a, +\infty]$.
$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)dx.$

**Определение.** Пусть $f \in R_{loc}([a, b])(\text{т.е.} f \in R[a, b-\epsilon],\ \forall \epsilon > 0)$. Предел интеграла $\int\limits_a^B f(x)dx$ (конечный или бескочнечный), при $B \to b - 0$ называют *несобственным интегралом второго рода от функции f по промежутку* $[a, b]$. Суть этого определения состоит в том, что в любой окресности конечной точки функция $f$ может оказаться неограниченной.

**Свойства.** Пусть $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ и $f \in R_{loc}([a, \omega]), \text{тогда}\backslash$

1. Если $\omega \in R$, то значение интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)dx$, понимаемого, как в собсвенном так и в несобственном смысле совпадают, т.е.

$$\int\limits_a^{\to\omega} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{A\to\omega \\ A\in[a,\omega]}} \int\limits_a^A f(x)dx = \int\limits_a^\omega f(x)dx$$

**Доказательство.**

Следует из непрерывности интеграла с переменным верхним пределом $F(a) = \int\limits_a^A f(x)dx$ на отрезке $[a, \omega]$, на котором функция $f$ интегрируема.

2. Если $c \in [a, \omega]$, то $\int\limits_a^\omega f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_a^{\to\omega} f(x)dx$

**Доказательство.**\ Если $A \in [c, \omega]$, то $\int\limits_a^A f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^A f(x)dx$. При $A \to \omega,\ A \in [c, \omega)$ предел обеих частей последнего равенства существует или нет одновременно, т.е. несобственные интегралы $\int\limits_a^{\to\omega} f(x)dx$ и $\int\limits_c^{\to\omega} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3. Замена переменной в несобственном интеграле: если

$$\phi : [\alpha, \gamma) \to [a, \omega)$$

-непрерывно дифференцируемое, строго монотонное отображение. Причём, $\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) \to \omega$, при $\beta \to \gamma,\ \beta \in [\alpha, \gamma)$. То несобственный интеграл от функции $(f \circ \phi)\phi'$ на $[\alpha, \gamma)$ существует, и справедливо равенство:

$$\int\limits_{\alpha}^{\to\gamma} (f \circ \phi)(t) \cdot \phi'(t) dt = \int\limits_{a}^{\to\omega} f(x) dx.$$

Замена переменной в собственном интеграле может привести к несобственному интегралу, и обратно.

**Доказательство.**

Следует из формулы $\int\limits_{a=\phi(\alpha)}^{b=\phi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \phi)(t)\phi'(t)dt$ замены переменной в определенном интеграле.

4. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле. Если функция $f$ и $g-$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a, \omega]$ и $\exists \lim\limits_{\substack{x\to\omega \\ x\in[a,\omega]}} (fg)(x)$, то функция $fg'$ и $f'g$ одновременно интегрируемы или не интегрируемы в несобственном смысле на $[a, \omega]$, и в случае интегрируемости справедливл равенство:

$$\int\limits_{a}^{\to\omega} (fg')(x)dx = fg(x)\Big|_{a}^{\to\omega} - \int\limits_{a}^{\to\omega} (f'g)(x)dx,$$

где $(fg)(x)\Big|_{a}^{\to\omega} = \lim\limits_{\substack{x\to\omega \\ x\in[a,\omega]}} (fg)(x) - (fg)(a)$

**Доказательство.**

Для доказательства нужно устремить $A \to \omega,\ A \in [a, \omega)$ в формуле

$$\int\limits_{a}^{A} (fg')(x)dx = fg(x)\Big|_{a}^{A} - \int\limits_{a}^{A} (f'g)(x)dx$$

интегрирования по частям в собственном интеграле.

18 Билет

# Критерий сходимости несобственных интегралов от положительных функций

Если $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b)$, где $b-$ конечное число или $+\infty$, то чтобы несобственный интеграл сходился - нужно, чтобы первообразная $F(x)$ была ограничена сверху

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{сходится},\ p > 1 \\ \text{расходится},\ p \leq 1 \end{cases}$

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} ln\Big|_{1}^{+\infty},\ p = 1 \Rightarrow\ \text{расходится} \\ \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{1}^{+\infty},\ p \neq 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} = \begin{cases} +\infty,\ -p+1>0 \Rightarrow \text{ расходится},\ p<1 \\ 0,\ -p+1<0 \Rightarrow \text{ сходится}, p>1 \end{cases}$

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{сходится},\ p<1 \\ \text{расходится},\ p\geq 1 \end{cases}$

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} ln|x|\Big|_0^1,\ p=1 \Rightarrow \text{ расходится} \\ \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_0^1,\ p\neq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} = \begin{cases} 0,\ -p+1>0 \Rightarrow \text{ сходится},\ p<1 \\ -\infty,\ -p+1<0 \Rightarrow \text{ расходится},\ p>1 \end{cases}$

19 Билет

# Признаки сравнения для сходимости несобственных интегралов. Эквивалентность

1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,c]:\forall c\in[a,b]$, причём $0\leq f(x)\leq g(x)$

Тогда, если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, то и $\int\limits_a^b f(x)dx-$ сходится, причём $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,c]:\forall c\in[a,b]$.

$f(x)\sim g(x)$, то они одновременно сходятся или расходятся

3. Если функции $f(x), g_1(x), g_2(x)$ интегрируемы на $[a,c]:\forall c\in[a,b]$, причём $g_1(x)\leq f(x)\leq g_2(x)$

То если $g_1, g_2$ сходятся, то сходится и $f(x)$

Следствие:

Если $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ сходится, то и $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится

1. $|f(x)|\leq F(x),\ x\geq a$
   а) Если $\int\limits_a^{+\infty} F(x)dx-$ сходится $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx-$ сходится
   Т.е. если больший сходится, то и меньший тоже сходится
   Пример: $\int\limits_0^8 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}};\quad \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}};\quad \int\limits_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}-$ сходится $\Rightarrow \int\limits_0^8 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}-$ сходится по первому признаку

б) Если $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx-$ расходится, то $\int\limits_a^{+\infty} F(x)dx-$ расходится

Т.е. если меньший расходится, то и больший тоже расходится

2. $\tau(x)>0,\ \phi(x)=0(\tau(x))$(функция того же порядка и величины)
   Т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\tau(x)}{\phi(x)} = k = const \quad (\neq\pm\infty;\ \neq 0)!$

При этих условиях выполянется:
$\int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \tau(x)dx$ сходятся(или расходятся одновременно)

Примеры функций и с чем их сравнивать

1. $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx \quad \phi(x) = \frac{1}{x^p}$
2. $\int\limits_{a}^{b^*} f(x)dx \quad \phi(x) = \frac{1}{(b-x)^p}$
3. $\int\limits_{a^*}^{b} f(x)dx \quad \phi(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$

*Особенные точки

### 20 Билет

# Абсолютная сходимость несобственного интеграла. Связь с простой сходимостью

Несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_{a}^{b} |f(x)|dx$

Критерий Коши

Для сходимости $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta \in (a,b) : \forall\xi', \xi'' \in (a,b) \to |\int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx| < \epsilon$$

Критерий Коши абсолютной сходимости интеграла

Чтобы интеграл абсолютно сходился необходимо и достаточно, чтобы $\forall\epsilon > 0 \quad \exists\xi', \xi'' \in [a,b) :$ $|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} |f(x)|dx|$

Теорема

Если интеграл сходится абсолютно, то он и просто сходится

$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx-$ сходится абсолютно, если: $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|dx-$ сходится.

Если $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|dx-$ расходится, то $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx-$ сходится условно.

Если $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$ расходятся, то $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx-$ расходится

### 21 Билет

# Признак Абеля-Дирихле сходимости несобственного интеграла

Если условия выполняются:
$$\begin{cases} 1)\ \phi(x) - \text{монотонно стремится к нулю при } x \to +\infty. \\ 2) f(x) - \text{имеет ограниченную первообразную (т.е. } F(x) = \int\limits_a^x f(\xi)d\xi - \text{ограниченная функция)} \end{cases},$$
то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\phi(x)dx -$ сходится

Пример:
$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx\backslash$

1. $\frac{\sin x}{x} \approx 1$(при $x \to 0$ по замечательному пределу) $\Rightarrow$ сходится
2. $\phi(x) = \frac{1}{x} \quad \phi'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,\ x > 0 \Rightarrow$ монотонно стремится к нулю при $x \to 0$
3. $F(x) = \int\limits_1^x sin(\xi)d\xi = -\cos(x) + cos(x) < 2 \Rightarrow$ ограничена. Следовательно,
   $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx -$ сходится

## 22 Билет

# Сходимость в $R^n$. Теоремы о пределах.

---

$R^n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

**Определение** : последовательность $P_n \to P_0 \Leftrightarrow ||P_n - P_0|| \to 0 \Rightarrow \forall\epsilon > 0 \exists N : (\forall n > N : ||P_n - P_0|| < \epsilon)$

### Теорема.

Сходимость $P_n \to P_0$ означает покоординатную сходимость:
$P_n(x_{1_n}; x_{2_n}) \to P_0(x_{1_0}; x_{2_0}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1_n} \to x_{1_0} \\ x_{2_n} \to x_{2_0} \end{cases}$

### Доказательство

1. Из общей к покоординатной.

Если $P_n \to P_0$, то $\exists N : \forall n > N : ||P_n - P_0|| < \epsilon$, а значит, $\forall n > N : \begin{cases} |x_n - x_0| < \epsilon \\ |y_n - y_0| < \epsilon \end{cases}$

Это покоординатная сходимость

### Теорема

Многомерная последовательность $P_m$ сходится к $P_0$ тогда и только тогда, когда имеет место покоординатная сходимость, то есть:

$x_{i_m} \to x_{i_0}$.
$P_m \to P_0 \Leftrightarrow x_{i_m} \to x_{i_0}$.
$\lim\limits_{m\to\infty} P_m = P_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} x_{i_m} = x_{i_0}$
$\lim x_m = x$, если $\lim x_{i_m} = x_i$

1. $\forall\epsilon > 0\ \exists M$, что $\forall m > M : ||x_m - x_0|| < \epsilon$, и тогда $\forall i$ при $m > M$ верно, что $\lim\limits_{m\to\infty} x_{i_m} = x_{i_0}$
2. Теперь наоборот. $x_{i_m} \to x_{i_0}$
   Допустим, $\exists M_i$, что $\forall m > M_i$ верно, что $|x_{i_m} - x_{i_0}| < \epsilon$.

Возьмём max из всех $M_i \Rightarrow \forall m > maxM_i$ верно, что $|x_{i_m} - x_{i_0}| < \epsilon -$ для каждой координаты.
Значит, все $x_{i_m}$ попадут в окрестность $\epsilon \Rightarrow \lim x_m = x_0 \Rightarrow P_m \to P_0 \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists M > 0 : \forall m > M : |P_m - P_0| < \epsilon.$

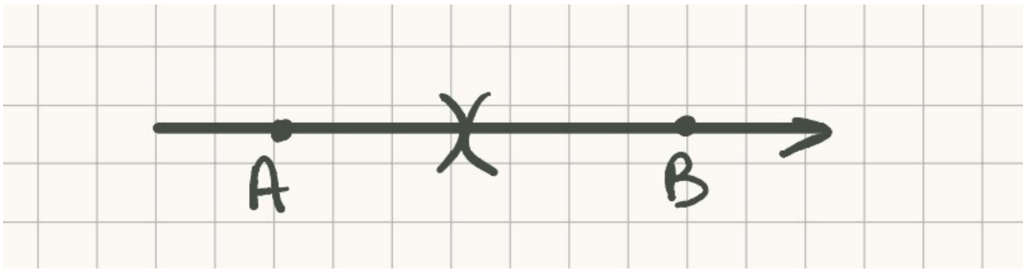
### Теоремы о пределах

Последовательность, у $\alpha$ существует предел - сходящийся. Преполагается, что далее рассмотрим по след. $P_n \to P_0$ покоординатно, а $P_0 -$ некоторое число.

$$P_{m_n} = \{x_{1_n}, x_{2_n}, ..., x_{m_n}\}$$

1. У последовательности может быть только 1 преде.

Док-во: допустим последовательность $P_n$ имеет 2 предела: $A, B$. Пусть $\epsilon = \frac{|B-A|}{2}$




$$\left.\begin{array}{l} \exists N_1 : \forall n > N_1 : |P_n - A| < \epsilon \\ \exists N_2 : \forall n > N_2 : |P_n - B| < \epsilon \end{array}\right\} N = \max\{N_1, N_2\}$$

Тогда $\forall n > N$ верно следующее:
$P_n \in U_\epsilon(B)$
$P_n \in U_\epsilon(A)$
Но $U_\epsilon(B) \cap U_\epsilon(A) = \emptyset \Rightarrow$ предел всего один

2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

   Возьмём $\epsilon = 1$. Тогда:
   $\lim x_{i_m} = A \Rightarrow \exists N_i > 0 : \forall m > N_i$ верно, что $A - \epsilon < x_{i_m} < A + \epsilon \quad A - 1 < x_{i_m} < A + 1$
   Пусть $c_i -$ максимальное из $\{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_N}, |A-1|, |A+1|\}$
   тогда $\{x_i\} < c$, все точки попадают в $[-c_i, c_i]$.
   Так же рассуждае для всех $x_i, i = \overline{1, n}$.
   Возьмём $c = \max\{c_i\}$, тогда все подполсдедовательности попадут в окрестность точки $c$.

3. Теорема о двух миллиционерах.

Если $P_n, Q_n, T_n \in R^n$ и $T_n < P_n < Q_n$, а $\lim T_n = \lim Q_n = A$, то $\lim P_n = A$

Доказательство:

Пусть $\forall \epsilon > 0 \exists N_1, N_2$ такое, что: $\forall n > N_1 : T_n \subset U_\epsilon(A). \forall n > N_2 : Q_n \subset U_\epsilon(A).$
Возьмём $max\{N_1, N_2\} : [T_n, Q_n] \subset U_\epsilon(A).$
Тогда т.к. $T_n < P_n < Q_n \Rightarrow P_n \subset [T_n, Q_n]$, значит $\forall n > max\{N_1, N_2\} \; P_n \subset U_\epsilon$

4. Если $\lim P_n = A, \; \lim Q_n = B$, причём $A < B$, (при условии, что пределы существуют) то $\exists N : \forall n > N : P_n < Q_n$

Доказательство
Возьмём $\epsilon_1, \epsilon_2$ так, чтобы их окружности не пересекались. Тогда $\exists N_1, N_2 : \forall n > N_1 : P_n \subset U_{\epsilon_1}; \; \forall n > N_2 \; Q_n \subset U_{\epsilon_2}$. Пусть $N = max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n.N : P_n < Q_n$, т.к. окружности не пересекаются

5. Пусть $\exists \lim P_n = A$ и $\forall n$ верно, что $P_n \leq B$, то $A \leq B$

Действительно, в противном случае при $A > B$ нашёлся бы такое номер, начиная с которого $P_n > B$, что противоречит условию

6. Сумма/разность сходящихся последовательностей сходится, а её $\lim = \sum \lim$

$$\left.\begin{array}{r}\lim P_n = A \\ \lim Q_n = B\end{array}\right\} P_n = A + \alpha,\ Q_n = B + \beta$$

$$P_n \pm Q_n = (A \pm B) + (\alpha \pm \beta) \Rightarrow \lim(P_n \pm Q_n) = A \pm B = \lim_{n\to\infty} P_n \pm \lim_{n\to\infty} Q_n$$

7. Произведение сходящихся последовательностей сходится последовательно и её $\lim = \lim_1 \cdot \lim_2$

$$\lim P_n = A, \quad \lim Q_n = B \Rightarrow P_n = A + \alpha, \quad Q_n = B + \beta$$

$$P_n \cdot Q_n = (A+\alpha)(B+\beta) = AB + A\beta + \alpha B + \alpha\beta$$

$$\lim(P_n \cdot Q_n) = A \cdot B = \lim P_n \cdot \lim Q_n$$

8. $\lim \frac{P_n}{Q_n} = \frac{A}{B} = \frac{\lim P_n}{\lim Q_n}$

$$\frac{A+\alpha}{B+\beta} = \frac{A}{B} + (\frac{A+\alpha}{B+\beta} - \frac{A}{B}) = \frac{A}{B} + \frac{\alpha B + A\beta}{B(B+\beta)} = \lim \frac{\alpha B + A\beta}{B(B+\beta)} = \frac{0}{B^2} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha B + A\beta}{B(B+\beta)}$$

**23 Билеты**

# Теорема Больцано-Вейештрасса

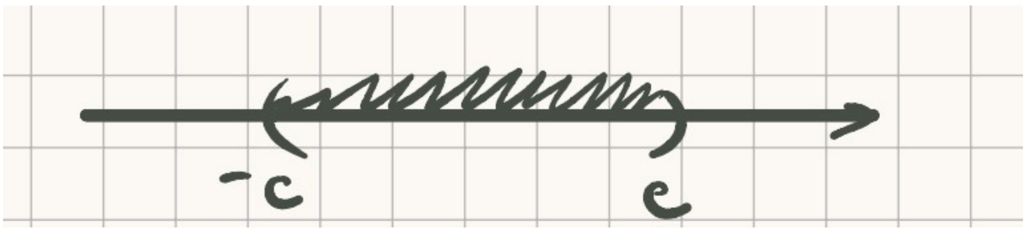
Из любой ограниченной последовательности точек в $R^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Пусть $x^k = \{x_i^k\}$. Тогда согласно теореме Больцано-Вейерштрасса для одномерного случая, из любой ограниченной последовательности $x_i^k$ можно выделить сходящуюся последовательность $x_i^{k_m}$

Проделав это, получим, что все сходящиеся последовательности $\{x_i^{k_m}\}$ сходятся, $\forall i = \overline{1, n}.$ Тогда согласно теореме о покоординатной сходимости, сходится и последовательность $x^{k_m} = \{x_i^{k_m}\}$

Теорема Б-В для одномерного случая:

Пусть $x_n -$ ограничена. Значит $\forall n \quad x_n < c$



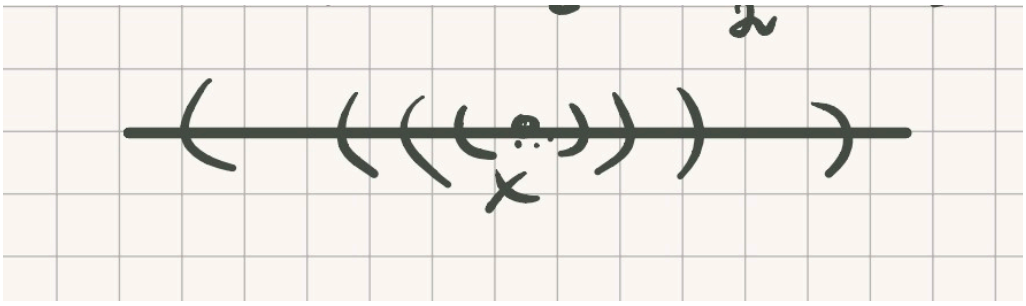

Если множество значений последовательности ограничено, то хотя бы одно из них принимается бесконечное количество раз. Тогда $\forall k \quad a_{n_k} = x; \quad \lim a_{n_k} = x$

Множество значений бесконечно: $\Rightarrow \exists x =$ предельной точке.

$\epsilon_1 \Rightarrow$ в $U_\epsilon(x) -$ бесконечно много элементов последовательности.

$n_1: \quad x_{n_1} \in U_1(x)$

$\epsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow U_\epsilon(x) -$ бесконечное множество элементов $\Rightarrow n_2 > n_1 : x_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}} \in U_1$

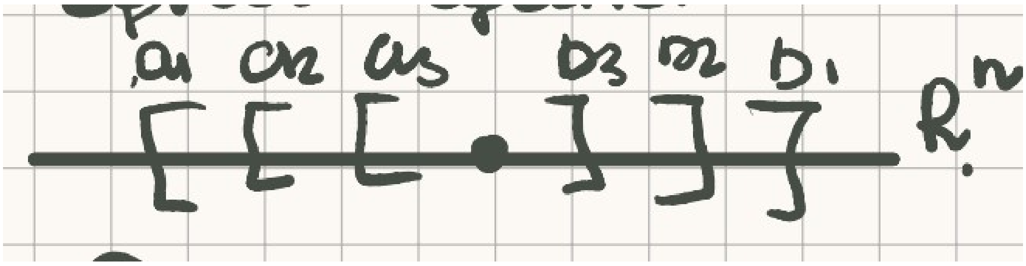


$\epsilon = \frac{1}{k} \Rightarrow U_\epsilon -$ бесконечно много точек последовательности $\Rightarrow n_k > n_{k-1} > ... > n_1 \Rightarrow a_{n_k} \in U_{\frac{1}{n}} \Rightarrow \lim a_{n_k} = x$

24 Билет

# Теорема Кантора о вложенных шарах

Пересечение последующих вложенных замкнутых шаров не пусто. Если радиус $\to 0$, то в пересечении есть 1 единственная точка.



**Доказательство**

Доказательство строится на основе покоординатной сходимости и соображении о том, что радиусы - это вложенные отрезки, а их длинны стремятся к нулю, то есть $\forall \epsilon > 0 \; \exists$ радиус, что $|b_n - a_n| < \epsilon$

Последовательность шаров $B_n$ с центрами $x_n$ и радиусами $r_n$.

Тогда $x_n -$ фундаментальна, т.к. $\rho(x_n, x_{n+1}) < r_n, \text{ а } r_n \to 0, \; \lim r_n = 0$; ведь шары вложены и расстояние от центра $x_n$ до $x_{n+1} < r_n$.

Тогда $\exists \lim x_n = x$, ведь $R^n -$ полно.

Теперь возьмём шар $B_n$, он содержит все $x_n$, кроме, возможно $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$(центры других шаров). $\Rightarrow x -$ точка прикосновения для всех шаров, т.к. они замкнуты.

Допустим, $\exists y \in$ всем шара, а $\rho(x, y) > 0 = \delta \quad y \in B_n$, как и $x :$ по правилу треуегольника.

$\rho(x, y) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_n, y) \Rightarrow x = y.$

25 Билет

# Предел, непрерывность функции многих переменных. Связь с повторными пределами

$f(x) = f(x, y); \qquad f(x_0) = f(x_0, y_0).$

## Предел

### Определение по Коши :

Число $A$— предел функции $f$ по множеству $E$ в точке $x_0$ при $x \to x_0$, если
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ \forall x \in U_\delta(x_0) : \ |f(x) - A| < \epsilon.$

Или же:
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$

### Определение по Гейне :

Число $A$ называется пределом функции $f(x)$, при $x \to x_0$, если для любой последовательности $x_n$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $A$, т.е.
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A.$
Это записывается:
$\lim\limits_{x\to x_0} = A$

### Коши~Гейне

- Гейне $\to$ Коши.
  Пусть выполняется условие предела по Гейне, то есть:
  1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$
  2) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$
  Но не выполняется условие предела по Коши, то есть:
  $\exists \epsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \quad \exists x \in U_\delta(x_0)$, но $f(x) \in U_\epsilon(A)$
  Пусть $\delta = \frac{1}{n}$. Тогда для $\exists x_n$ верно, что:
  $x_n \in U(x_0)$, но $f(x) \notin U_\epsilon(A)$, что нарушает второе условие предела по Гейне

- Коши $\to$ Гейне
  Пусть $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) :$
  $|f(x) - A| < \epsilon.$
  Влзьмём произвольную последовательность
  $\{x_n\}$ сходящуюся к $x_0$.
  Тогда $\forall \delta > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad x_n \in U_\delta(x_0)$
  И по определению предела по Коши: $f(x_n) \in U_\epsilon(A)$ при $\forall n > N$
  Что соответсвует определению предела по Гейне

## Непрерывность

- Функция $f$ непрерывна в точке $x_0$, если $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0)$ верно, что $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, или же $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(x_0, y_0)$ по переменному $x$, если функция $f(x, y_0)$ непрерывна в $(x_0, y_0)$
- Функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(x_0, y_0)$ по переменному $y$, если функция $f(x_0, y)$ непрерывна в $(x_0, y_0)$
- Функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных, если $f(x, y)$ непрерывна в т. $f(x_0, y_0)$.
- Функция непрерывна, если она непрерывна в каждой точке своего множества определений.
- Функция непрерывна на множестве, если непрерывно её сужение на этом множество

### Связь с повторными пределами

Пусть $f:(E\subset R^2)\to R-$ функция 2ух независимых переменных, $u=f(x_1,x_2)$, и точка $a(a_1,a_2)-$ предельная точка множества $E\subset R^2$, тогда:\

1. В смысле метрики пространства $R^2$, $\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\x_2\to a_2}} f(x_1,x_2)-$ это двойной предел2
2. Если при $(\forall x_1,(x_1,x_2)\in E)$ существует $\lim\limits_{x_2\to a_2} f(x_1,x_2)=\varphi(x_1)$ и существует $\lim\limits_{x_1\to a_1} = \varphi(x_1)$, то предел $\lim\limits_{x_1\to a_1}\lim\limits_{x_2\to a_2} f(x_1,x_2)$ называется повторным пределом.

**Теорема**(о связи между двойным и повторным пределом)

Пусть выполнены условия:

1. $\exists\lim\limits_{x_1\to a_1}\lim\limits_{x_2\to a_2} f(x_1,x_2),\ a(a_1,a_2)-$ предельная точка множества
2. При $\forall x_1,(x_1,x_2)\in E$ существует конечный предел $\lim\limits_{x_2\to a_2} f(x_1,x_2)=\varphi(x_1)$, тогда существует повторный предел и равен двойному

**Доказательство**

Пусть для определённости двойной предел существует и он конечен $\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\x_2\to a_2}} f(x_1,x_2)=A\Leftrightarrow$ $(\forall\xi>0)(\exists\delta_1(\xi,a)>0).\ (\forall(x_1,x_2)\in E,\ 0<d(x,a)<d_1(\xi,a)):|f(x_2,x_1)-A|<\frac{\epsilon}{2},\ d(x,a)=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2},\ d<d(x,a)<\delta_1-$ очевидно, что неравенство выполняется если одновременно

$0<|x_1-a_1|<\frac{\delta_1}{\sqrt{2}}$ и $0<|x_2-a_2|<\frac{\delta_1}{\sqrt{2}}.\quad d(x,a)=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}<\sqrt{\frac{\delta_1^2}{2}+\frac{\delta_1^2}{2}}=\delta_1$. Из того, что существует конечный предел при $\Leftrightarrow(\forall\xi>0)(\exists\delta_2(\xi,a)>0)(\forall x_2,(x_1,x_2)\in E,\ 0<|x_2-a_2|<\delta_2(\xi,a)):|f(x_1,x_2)-\varphi(x_1)|<\frac{\epsilon}{2}$. Выберем $\delta(\xi,a)=\min\{\frac{\delta_1}{\sqrt{2}},\delta_2\}$. Составим разность
$|\varphi(x_1)-A|=|\varphi(x_1)-f(x_1,x_2)+f(x_1,x_2)-A|\le|f(x_1,x_2)-\varphi(x_1)|+|f(x_1,x_2)-A|<\frac{\xi}{2}+\frac{\xi}{2}=\xi$, тогда $\exists\lim\limits_{x_1\to a_1}\varphi(x_1)=A$

### 26 Билет

# Теоремы Вейерштрасса о непрерывных на компакте функциях

1. Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $M$ функция ограничена на нём.

**Доказательство**

Допустим это не так, и $f(x)$ не ограничена. Тогда $\forall n\in N:\exists x_n\in M:f(x_n)>n$.
По теореме Больцано-Вейертштрасса из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся под последовательность

$\Rightarrow x_{n_k}$ сходится к $x_0$
$x_{n_k}\in M;\ \lim x_{n_k}\in M;$ т.е. $x_0\in M$

$(f(x_n)>n\to f(x_{n_k})>n_k;\ k\to\infty)$.

Но т.к. $f(x)-$ непрерывна $\Rightarrow f(x)$ непрерывна в $x_0\Rightarrow\lim\limits_{x_{n_k}\to x_0} f(x_{n_k})=f(x_0)$. Это противоречие и доказывает, что $f(x)-$ ограничена сверху и снизу

2. Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция принимает на нём минимальное и максимальное значение

**Доказательство**(для минимума, для максимума-аналогичное)

Пусть $f(x)$ непрерывна на компакте $P$, а m - её точная нижняя грань.

Тогда

1. $f(x) \geq m \quad \forall x \in P.$
2. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists x_\epsilon$, такое, что $f(x_\epsilon) < m + \epsilon$

Пусть $\epsilon = \frac{1}{n}$, тогда $x_n \in P$;
$f(x_n) < m + \frac{1}{n}$
$f(x_n) - m < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim f(x_n) = m.$

$x_n -$ ограничена $\Rightarrow x_{n_k} -$ сходится $\Rightarrow \lim x_{n_k} = c; \quad c \in P$

В случае непрерывности:

$\lim f(x_{n_k}) = f(c)$, но также $\lim f(x_n) = m \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = m \Rightarrow f(c) = m \Rightarrow$ в некоторой точке $c \in P$ принимается $min$ значение

### 27 Билет

# Частные производные и дифференциал. Эквивалентные записи. Необходимое условие дифференцируемости.

Пусть в некоторой области $D$ мы имеем функцию $u = f(x, y) \quad M(x_0, y_0) \in [x, y]$.

Тогда если зафиксировать $y = y_0$, то функция $f(x, y)$ станет зависеть лишь от одной переменной $x$ (в окрестности $x_0$)

Можно вычислить в точке $x_0$ производную по $x$ (частная производная по аргументу при фиксированном другом)\

1. Придадим $x_0$ приращение $\Delta x$, тогда функция получит приращение:
$$_{\Delta x}u = {}_{\Delta x}f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$
2. Разделим приращение функции на приращение аргумента и перейдя к $\lim$, получим:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{_{\Delta x}u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Это частная производная по $x$ в точке $(x_0, y_0)$
Её можно обозначить как:

$$\frac{du}{dx}; \quad u'_x; \quad f'(x_0, y_0)$$

Для $y$ всё аналогично.

Пример: $f(x, y) = x^y$
$\frac{df}{dx} = y \cdot x^{y-1}; \quad \frac{df}{dy} = x^y \cdot \ln y.$

**Дифференциал** это произведение частной производной на соответсвующее приращение.
Например, произведение частной производной по $x$ на приращение $\Delta x -$ частный дифферниал по $x$.

$$dxu = \frac{du}{dx}\Delta x$$

Если под диффернциалом $dx$ переменной $x$ подразумевать приращение $\Delta x$, то

$$dxu = \frac{du}{dx}dx$$

Функция называется дифференцируемой в точке $(x_0, y_0)$, если её приращение в этой точке можно представить как:

$$_\Delta f(x_0, y_0) = A_{\Delta x} + B_{\Delta y} + 0(\sqrt{_\Delta x^2 + {_\Delta y^2}}), \quad (1)$$

$_\Delta x, {_\Delta y} \to 0.$

$x = (x, y)$
$x_0 = (x_0, y_0)$
$\overline{_\Delta x} = (_\Delta x, {_\Delta y})$
$||_\Delta x|| = \sqrt{_\Delta x^2 + {_\Delta y^2}}$
$\overline{F} = (A, B)$
$_\Delta f(x_0) = \overline{F}\overline{_\Delta x} + 0(||_\Delta x||), \quad {_\Delta x} \to 0$

**Необходимое условие дифференцируемости**

Если функция дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$, то она имеет в этой точке все частные производные

**Доказательство :**

1. Зафиксируем $y(_\Delta y = 0)$ в $(1)$
   $_\Delta f_x = A_{\Delta x} + 0(_\Delta x) \Rightarrow \frac{_\Delta f_x}{_\Delta x} \to A = f'_x, \quad {_\Delta x} \to 0$
2. Зафиксируем $x; \quad {_\Delta x} = 0$ и получим:
   $_\Delta f_y = B_{\Delta y} + 0(_\Delta y) \Rightarrow \frac{_\Delta f_y}{_\Delta y} \to B = f'_y; \quad {_\Delta y} \to 0.$
   Как следствие имеем
   $_\Delta f = \overline{f'} \cdot \overline{_\Delta x} + 0(||_\Delta x||)$

**Эквивалентная запись**

Функция f(x,y) называтеся дифференцируемой в точке $(x_0, y_0)$, если её полное приращение в это точке представимо в виде:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{df}{dx}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{df}{dy}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где функция $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) -$ бесконечно малые при $\Delta x, \ \Delta y \to 0$

## 28 Билет

# Производные по направлению. Дифференцирование композиции

**Производная по направлению**

Пусть на некоторой области определена функция $f(M)$.
Задана точка $M(x_0, y_0, z_0)$ и через неё проходит некоторая ось $e$
$M(x, y, z)$ так же принадлежит этой оси.\

$M_0M-$ длина отрезка $M_0M$, взятая с $"+"$ если направление совпадает с $e$, и с $"-"$, если у $e$ дургое направление

Пусть $M$ неограничено приближается к $M_0$, тогда предел:

$$\lim_{M\to M_0} = \frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M} = \frac{df(M_0)}{de} - \text{ производная по направлению } e$$

Теперь есть точка $M_0$ и $M$; $\quad M_0M = S-$ расстояние между ними.

$\Delta x = x - x_0; \quad \Delta y = y - y_0; \quad \Delta z = z - z_0$
Зададим направляющие косинусы:

$x - x_0 = S\cos\alpha; \quad y - y_0 = S\cos\beta; \quad z - z_0 = S\cos\varphi$

Тогда $f(M)$ можно представить как $f(S)$ :

$$f(x_0 + S\cos\alpha;\ y_0 + S\cos\beta;\ z_0 + S\cos\varphi).$$

Пусть они дифференцируема в $f(x_0, y_0, z_0)$.

Тогда:

$\frac{df(M_0)}{de} = \lim\limits_{M\to M_0} = \frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M} = \lim\limits_{S\to 0} \frac{f(x_0+S\cos\alpha;\, y_0+S\cos\beta;\, z_0+S\cos\varphi)-f(x_0,y_0,z_0)}{S} = \frac{df}{ds} = \frac{df(M_0)}{dx}\cdot \frac{dx}{dS} + \frac{df(M_0)}{dy}\cdot\frac{dy}{dS} + \frac{df(M_0)}{dz}\cdot\frac{dz}{ds}$

Но! $\frac{dx}{dS} = (x_0 + S\cos\varphi)' = \cos\alpha$ и т.п.

То есть:
$\frac{df}{dS} = \frac{df(M_0)}{dx}\cos\alpha + \frac{df(M_0)}{dy}\cos\beta + \frac{df(M_0)}{dz}\cos\varphi$

И если $f(M)$ дифференцируема в $(x_0, y_0, z_0)$ можно по формуле вычислить любую производную по направлению по формуле.

## Дифференциал композиции

$d(f(g)) = \overline{f'}(g)\cdot d\overline{g}$

Если f(g) дифференцируема в точке $g(x_0)$, а $g$ дифференцируема в точке $x_0$.

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$x = (x, y) \quad x_0 = (x_0, y_0) \quad x(t) = (x(t), y(t))$

$\frac{\vartriangle x}{\vartriangle t} = (\frac{\vartriangle x}{\vartriangle t};\ \frac{\vartriangle y}{\vartriangle t}) \to (x'(t)dt, y'(t)dt).$

$dx(t) = x'(t)dt = (x'(t)dt,\ y'(t)dt) = (dx(t),\ dy(t))$

## Доказательство

Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, а $x(t)$ в точке $t_0$
Тогда
$\vartriangle F(t) = d(f(x(t),\ y(t))) = f'_x(x_0)\vartriangle x + f'_y(x_0)\vartriangle y + \alpha(\vartriangle x,\ \vartriangle y) = f'_x(x_0)(x'(t_0)\vartriangle t + \beta(\vartriangle t)) + f'_y(x_0)(y'(t_0)\vartriangle t + \gamma(\vartriangle t)) = f'_x(x_0)x'(t_0)\vartriangle t + f'_y(x_0)y'(t_0)\vartriangle t + \overline{\alpha}(\vartriangle t) = \overline{f'}(x_0)\overline{x}(t_0)\vartriangle t + \overline{\alpha}(\vartriangle t);$

$\overline{f'}(x_0)d\overline{x}(t_0) = dF(t_0)$, где $F(t_0) = f = (x(t_0))$

29 Билеты

# Производные высших порядков. Теорема о смешанных производных

Производной $n-$ого порядка называется производная от производной $n-1$ порядка

Частные производные $\frac{df(x,y)}{dx}$ и $\frac{df(x,y)}{dy}$ называют частным производными первого порядка. Их модно рассматривать как функции от $(x, y) \in D.$ Эти функции могут иметь частные производные, которые называются частынми производными второго порядка. Они определяются и обозначаются следующим образом:

1. $\frac{d}{dx}(\frac{dz}{dx}) = \frac{d^2z}{dx^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x, y)$
2. $\frac{d}{dx}(\frac{dz}{dy}) = \frac{d^2z}{dydx} = z''_{xy} = f''_{xy}(x, y)$
3. $\frac{d}{dy}(\frac{dz}{dx}) = \frac{d^2z}{dxdy} = z''_{yx} = f''_{yx}(x, y)$
4. $\frac{d}{dy}(\frac{dz}{dy}) = \frac{d^2z}{dy^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x, y)$

### Теорема Шварца о равенстве смешанных производных

Если:

1. f(x) определена в некоторой области D и имеет в этой области:
   - Первые производные $f'_x(x)$ и $f'_y(x)$
   - Вторые производные (смешанные) $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$
2. $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ определены в некоторой окрестности $U(x_0)$
3. $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ непрерывны в $x_0$

То $f''_{xy} = f''_{yx}$

Или же:
Функция определена в n-мерной области и имеет в этой области $(k-1)$-ые производные - всевозможные частные производные и смешанные производные k-ого порядка, $\alpha$ к тому же непрерывна в точке $x_0$ и существует в её окрестности, то все смешанные производные k-ого порядка равны

### Теорема о неявной функции

Теорема о неявной функции — общее название для теорем, гарантирующих локальное существование и описывающих свойства неявной функции, т. е. функции

$y = f(x), \quad f : X \to Y,$
заданной уравнением
$F(x, y) = z_0, \quad F : X \times Y \to Z$
и значение $z_0 \in Z$ фиксирован

### Одномерный случай

Если функция $F : R \times R \to R$

- непрерывна в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0)$
- При фиксированном $x$, функция $F(x, y)$ строго монотонна по $y$ в данной окрестности, тогда найдётся такой двумерный промежуток $I = I_x \times I_y$, являющийся окрестностью точки $(x_0, y_0)$, и такая непрерывная функция $f : I_x \to I_y$, что для любой точки $(x, y) \in I$ $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$

Теорема о неявной функции/рамка
Обычно дополнительно предполагается, что функция $F$ непрерывно дифференцируема, в этом случае условие монотонности следует из того, что $F'_y(x_0, y_0) \neq 0,$ здесь $F'_y$ обозначает частную производную $F$ по $y.$ Более того, в этом случае производная функции $f$ может быть вычислена по формуле

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

**30 Билет**

# Экстремумы. Необходимое и достаточное условие экстремума.

Экстремум функции - локальный минимум или максимум.

Точка $m(x_0, y_0) -$ локальный минимум, если $\exists U_{x_0} : \forall x \in x_0 : f(x) \geq f(x_0)$

Тока $m(x_0, y_0) -$ локальный максимум, если $\exists U_{x_0} : \forall x \in x_0 : f(x) \leq f(x_0)$

Это не строгое условие, в строгом условии знаки <>.

### Необходимое условие экстремума

Если $f(x)$ имеет в точке $x_0$ экстремум, то в этой точке частные производные первого порядка равны 0 или не существуют. Это стационарная точка.

Доказательство:

Допустим у нас есть $f(x, y)$ и точка $m(x_0 \overset{c}{,} y_0) - \text{экстремум}$
Зафиксировав $\Delta y = 0 (y = y_0),$ получим функцию от 1 переменной $f(x, y_0),$ и по теореме Ферма, в точке $c$ её производная $f'_x(x_0, y_0) = 0$ или не существует.
Аналогично для $f'_y(x_0, y_0)$

### Достаточное условие экстремума

Для этого понадобится формула Тейлора

$f(x + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + o(||\Delta x||^3)$

Теорема:

Если функция дважды дифференцируема в точке $x_0$ и её второй дифференциал $d^2 f > 0,$ то это точка минимума.

Если в точке $x_0$ $d^2 f < 0,$ то это точка максимума.

Если же в точке $x_0$ $d^2 f = 0,$ то нужны дополнительные исследования - берём формулу Тейлора для $d^3 f$ и $d^4 f$(в 3м меняем знак!)

Можно считать 2мя способами:

1. $d^2 f = f''_{xx}(x_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0)\Delta x \Delta y + f''_{yy}\Delta y^2 = \Delta y^2 (f''_{xx}(x_0)(\frac{\Delta x}{\Delta y})^2 + 2f''_{xy}(x_0)\frac{\Delta x}{\Delta y} + f''_{yy}(x_0)).$
   $f''_{xx}(x_0)t^2 + 2f''_{xy}t + f''_{yy}$
   Считаем дискриминант: а) $D > 0 \Rightarrow d^2 f > 0$

б) $D < 0 \Rightarrow d^2 f < 0$
в) $D = 0 ...?????$

2. Критерий Сильвестра
   Найти при помощи $\frac{df}{dx} = 0 \quad \frac{df}{dy} = 0$ точку $M(x_0, y_0)$

   Составим матрицу:

   $$\begin{pmatrix} \frac{d^2 f}{dx^2} & \frac{d^f}{dxdy} \\ \frac{d^f}{dydx} & \frac{d^f}{dy^2} \end{pmatrix} M(x_0, y_0)$$

   Если все определители по минорам $> (<) 0 \Rightarrow d^2 f > (<) 0$

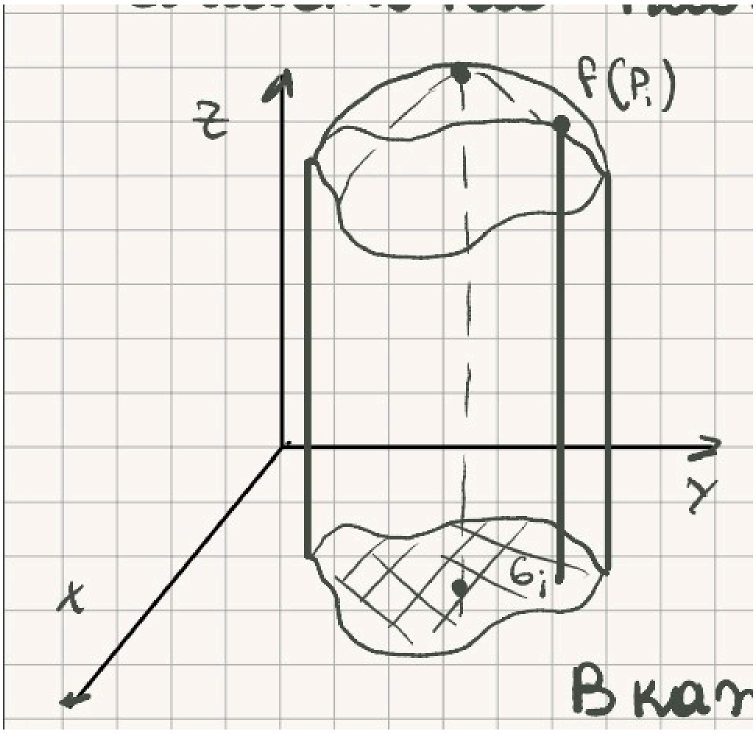
31 Билет

# Двойной и тройной интеграл. Определение. Свойства.

Стоит сказать, что свойства обычного интеграла(от 1 переменной) ничем не отличаются от свойст двойного и тройного интеграла.

### Двойной интеграл

- Объём кривоповрехностного цилиндра. Пусть $G-$ квадрируемое множество - область на плоскости




На этом компакте задана $f(x, y) = z$.

Делим компакт $G$ на области $G_i$ так, что $G_i \cap G_j = \emptyset; \quad i \neq j;$

$T = \{G_i; \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i = G, \ i = \overline{1, n}\}$

В каждой области выбираем произвольно $P_i$, тогда
$V_i = f(P_i) \cdot S(G_i)$.

$\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot S(G_i).$

Теперь скажем о диаметре. Внутри каждого $G_i$ есть диаметр:

$$S(G_i) = max||P_1 - P_2||, \quad P_1, P_2 \in G$$

Выберем $\delta(T) - max\{S(G_i)\}$

Тогда при измельчении областей $G_i$ будет уменьшаться и $\delta(T) \to 0$.

$\lim\limits_{\delta(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot S(G_i) = I = \iint\limits_G f(x)dS$

https://youtu.be/THJdwU5Ng-Y?si=WpcuQzAfy5xwHXX3

Двойной интеграл - предел интегрируемых сумм при диаметре разбиения $\to 0$ не зависит от выбора точек $P_i$ и разбиения

### Свойства

1. $\iint\limits_G dS = S(G) \quad (\text{т.к. } h = 0)$
   $\sum_{i=1}^{n} S(G_i) = S(G).$
2. $\iint\limits_G cf(P)dS = c\iint\limits_G f(P)dS$
3. $\iint\limits_G (f(P) + g(p))dS = \iint\limits_G f(P)dS + \iint\limits_G g(P)dS$
   Если все $\iint$ существуют
4. Если $f(P) и g(P)$ интегрируемы на $G$
   $f(P) < g(P)$, то
   $$\iint\limits_G f(P)dS < \iint\limits_G g(P)dS$$
5. Аддитивность по площади
   $$\iint\limits_{G_1+G_2} f(P)dS = \iint\limits_{G_1} f(P)dS + \iint\limits_{G_2} f(P)dS$$
6. $|\iint\limits_G f(P)dS| \le \iint\limits_G |f(P)|dS$
   $-|f(P)|dS < f(P)dS < |f(P)|dS$
   $-\iint\limits_G f(P)dS < \iint\limits_G f(P)dS < \iint\limits_G |f(P)|dS$
7. Если f(P) интегрируема на компакте $G$ и непрерывна на нём, то $\exists c \in G$ :
   $$f(c) = \frac{\iint\limits_G f(P)dS}{S(G)}$$

По т.2 Вейештрасса:
$f(P)$ имеет максимум и минимум значений на $G$.

$$m \le f(p) \le M \quad \forall P \in G.$$

$mS(G) \le \iint\limits_G f(P)dS \le MS(G)\backslash$

$$m \le \frac{\iint\limits_G f(P)dS}{S(G)} \le M$$

Соответсвенно т.к. $f(P)-$ непрерывна, то $m < c < M$, значит, $\exists c: \; f(c) = \frac{\iint\limits_G f(P)dS}{S(G)}$

8. Если $f(P)$ сегментируема на координатном компакте $G$, а квадрируемый компакт $D$ такой, что $D \subset G$, то
   $f(P)$ интегрируема на $G$. Если $f$ ограничена на $G$, то ограничена и на $D$.
   Разобьём $G$ на отрезки $\mathrm{T}_1 - \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta$, что $\overline{S_G} - \underline{s_G} < \epsilon$. Сделав тоже самое с $D$, дополним его разбиение $\mathrm{T}_2$ до $\mathrm{T}_3$, чтобы его мелкость была $< \delta$.
   $\overline{S_D} - \underline{s_D} < \overline{S_G} - \underline{s_G} < \epsilon. \quad$ ч.т.д.

**Тройной интеграл**

Значение: масса фигуры

Пусть $G-$ кубируемая область пространства. Тогда рзобьём её на области:

$$T\{G_i;\; G_i \cap G_j = \emptyset;\; \cup G_i = G\}.$$

$\delta(G_i) = max||P_1 - P_2||, \quad P_1, P_2 \subset G_i$

$\delta T = max\{\delta(G_i)\}$
Тогда выберем $P_i$ в каждом $G$

$m_i = f(P_i) \cdot V(G_i)-$ масса одной области.

$\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot V(G_i)-$ интегрируемая сумма.

Пусть $\delta T \to 0$, тогда $\lim\limits_{\delta T \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot V(G_i) = I$

Тройной интеграл - предел интегрируемой суммы при мелкости разбиения $\to 0$, не зависящий от способа разбиения, и выбора точек $P_i$

Свойства аналогичны двойному, только с тройным интегралом

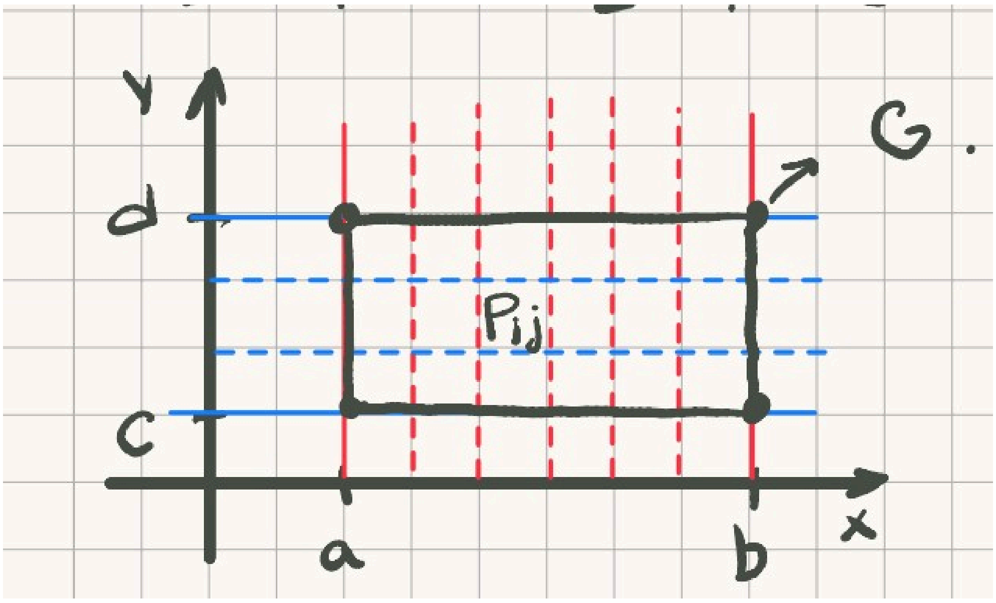
https://www.youtube.com/watch?v=SJRV49TikqI

### 32 Билет

# Сведение двойного интеграла к повторным интегралам

**Теорема 1.**

Пусть $f(x, y)$ определена в области $G = [a, b] \times [c, d]$ :

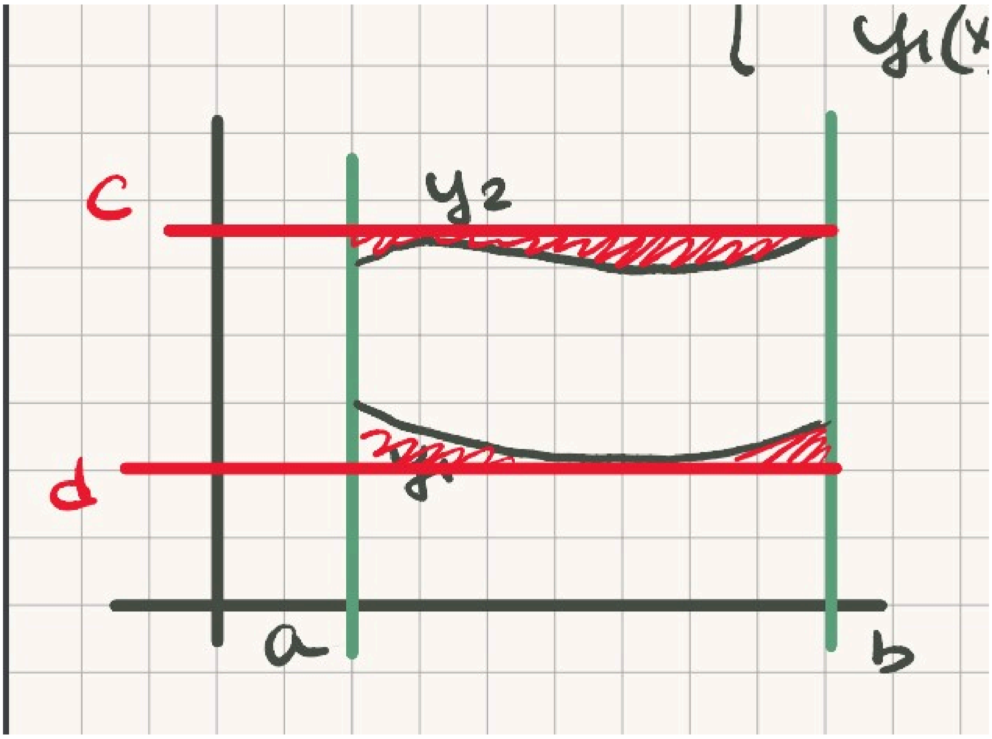



Для $f(x,y)$ в $G$

1. $\exists \iint\limits_G f(x,y)dxdy$
2. $\forall x \in [a,b] \quad \exists I[x] = \int\limits_c^d f(x,y)dy.$

Тогда $\exists \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \iint\limits_G f(x,y)dxdy.$

**Теорема 2.**



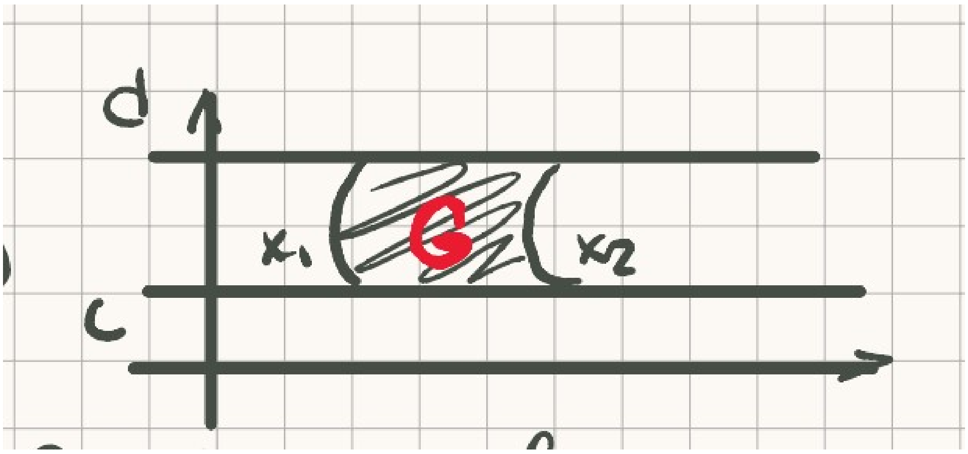

Пусть $G : \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$

Тогда, если $f(x, y)$ определена на $G$ :
$\exists \iint\limits_G f(x,y)dxdy$

$\forall x \in [a,b] \quad \exists I[x] = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$

$\Rightarrow \exists \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \iint\limits_G f(x,y)dxdy$

**Теорема 3.**




$G = \begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$

Если $f(x,y)$ определена на компакте $G$ и $\exists$ интегралы:

$\begin{cases} \iint\limits_G f(x,y)dxdy \\ \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \end{cases} \Rightarrow \exists I_y = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$

33 Билет

# Полярные, цилиндрические, сферичиские координаты. Замена переменных интегрирования.

### Замена переменной в двойном интеграле

Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема в некоторой области $D$ :

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

Можно выполнить замену:

$x = \phi(u,v)$
$y = \psi(u,v)$

Тогда важен ещё Якобиан-определитель матрицы $2\text{x}2$

$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix} \neq 0$

Тогда:

$$\iint\limits_D f(\phi, \psi) \cdot |J| \cdot dudv$$

### Замена переменной в тройном интеграле

Пусть функция $f(x, y, z)$ интегрируема в некоторой области $D$ :

$$\iiint\limits_D f(x, y, z) dxdydz$$

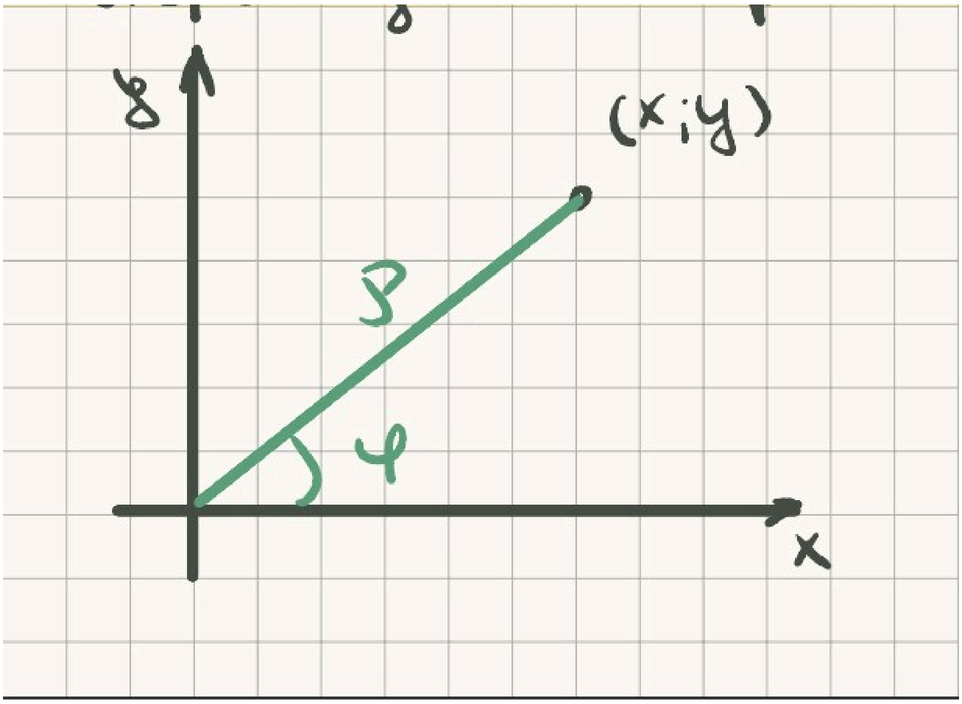
$x = \phi(u, v, \mu)$
$y = \psi(u, v, \mu)$
$z = \omega(u, v, \mu)$

$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} & \frac{dx}{d\mu} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} & \frac{dy}{d\mu} \\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} & \frac{dz}{d\mu} \end{vmatrix} \neq 0$

Тогда:

$$\iiint\limits_D f(\phi, \psi, \omega) \cdot |J| \cdot dudvd\mu$$

### Переход к полряным координатам




$f(x, y)$ определена и интегрируема на компакте $D$.

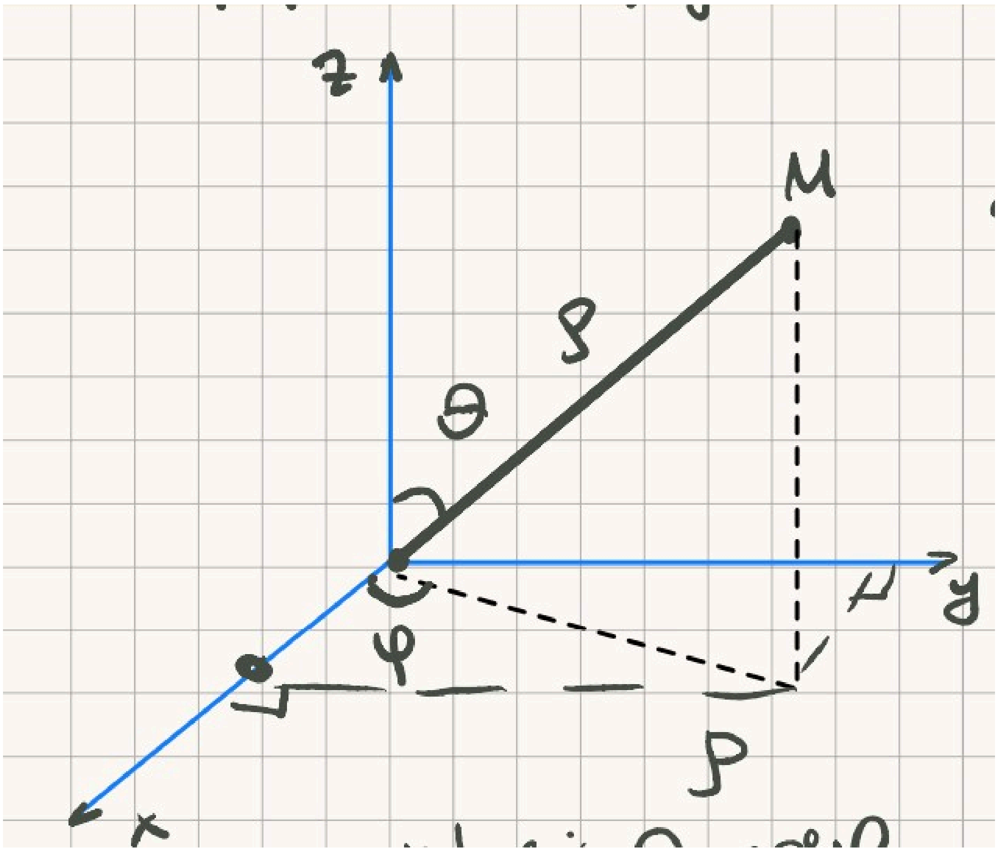
$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$

$$J=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi=\rho - \text{всегда} > 0$$

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi$$

в полярных координатах

**Переход к сфеерическим координатам**

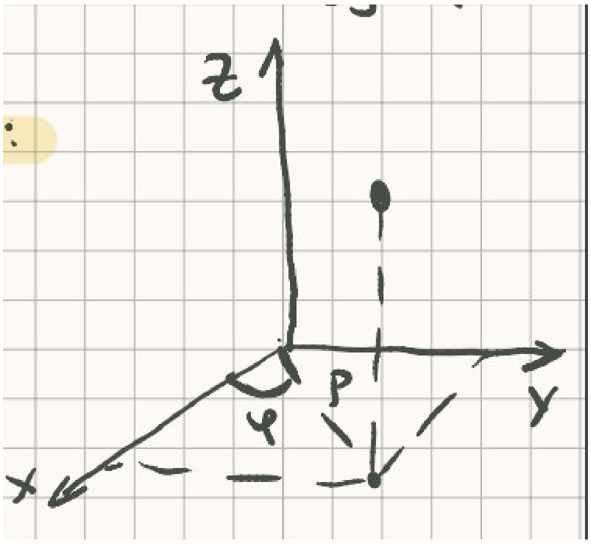



$$\begin{cases}x=\rho\sin\theta\cdot\cos\varphi\\ y=\rho\sin\theta\cdot\sin\varphi\\ z=\rho\cos\theta\end{cases}$$

$$J=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\rho & \theta & \varphi\end{array}\\ \begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\cdot\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\end{vmatrix}\end{array}=-r^2\sin\theta$$

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint=f(\rho\sin\theta\cos\varphi;\ \rho\sin\theta\sin\varphi;\ \rho\cos\theta)\cdot-r^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$$

**Переход к цилиндрическим координатам**




$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$J = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \rho & \varphi & z \end{array} \\ \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = r \neq 0 \Rightarrow \iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_D f(\rho\cdot\cos\varphi;\ \rho\cdot\sin\varphi; z)\cdot$$

$$\rho d\rho d\varphi dz$$