

Reporte Veranos Científicos México 2024: Classical and quantum properties of the spin-boson Dicke model

Estudiante: Miguel Jafert Serrano Mantilla
Profesor a Cargo: Dr. Jorge Gustavo Hirsch

7 de octubre de 2024

1. Introducción

En este proyecto teórico, comprendido entre el 10 de Julio del 2024 hasta el 12 de Agosto del 2024 realizamos una revisión teórica del artículo [Villaseñor et al., 2024] publicado por el **Dr. Jorge G. Hirsch** y sus colaboradores. La idea principal era hacer un estudio completo del artículo con la intención de familiarizarme con estos temas y llegar a replicar algunos resultados.

Debido a que el profesor y yo trabajamos en campos, un tanto similares, pero a la vez diferentes acordamos en que solo serían reuniones periódicas semanales en las cuales discutiríamos temas en particular del artículo en la medida en que estudiaba este tema. En nuestras reuniones surgieron dos temas, planteados en su artículo, los cuales fueron nuestros mayores temas en común, estos temas fueron las *cuasi-distribuciones de probabilidad* y el *caos clásico y caos cuántico*.

En este reporte nos centramos solo en esos dos temas, puesto que, a pesar de ser un proyecto teórico, yo al encontrarme finalizando mi pegrado tengo acceso completo al laboratorio de óptica de mi universidad lo que nos permite llevar estos resultados teóricos a un nivel experimental. Estos experimentos no corresponden al tema central del artículo que estudiamos, en ningún momento en este reporte pretendemos mostrar resultados teóricos en relación al modelo de Dicke, solo mostraremos el resultado de estudiar temas afines en ambos campos y aplicados a la óptica de polarización y óptica cuántica.

2. Cuadri-distribuciones de probabilidad

Convencionalmente, en la óptica cuántica, se trabaja en el lenguaje del espacio de Hilbert, sin embargo, para varios propósitos el formalismo en el espacio de fase permite entender el origen de las distribuciones sobre el espacio de fase. La idea es explotar la correspondencia de Weyl entre las funciones ordinarias tipo C-número [Goldberg et al., 2021] en el espacio de fase y los operadores cuánticos en el espacio de Hilbert. La simetría $SU(2)$ inherente a la estructura matemática de la

polarización simplifica en gran medida la tarea de encontrar esta correspondencia entre operadores y funciones. A la fecha, Stratonovich [Stratonovich, 1957], Berezin [Berezin, 1975] y Alfredo Luis [Luis, 2006, 2016] trabajaron en desarrollar cuasi-distribuciones de probabilidad sobre esferas tales que satisficieran todos los requisitos pertinentes. Empecemos desarrollando un poco las cuasi-distribuciones de probabilidad sobre la esfera.

Las cuasi-distribuciones de probabilidad nos permiten comparar estados clásicos y cuánticos desde una misma perspectiva y prueban ser una poderosa herramienta para simulaciones clásicas de evolución cuántica y también son un descripción conceptual muy bueno de la dinámica cuántica. Son por estas razones que estas distribuciones han sido investigadas desde los orígenes de la mecánica cuántica por Wigner en 1932 [Wigner, 1932], Husimi en 1940 [Husimi, 1940], por Glauber y Sudarshan [Sudarshan, 1963].

Las distribuciones de cuasi-probabilidad son funciones reales de las variables del espacio de fases, pero, como su nombre lo indica, no son distribuciones de probabilidad propiamente dichas: relajan algunas de las propiedades que usualmente asociamos con las distribuciones de probabilidad. Por ejemplo, la función de Wigner toma valores negativos, y la distribución marginal de la función de Husimi en posición o momento es diferente de la distribución que surge de la correspondiente función de onda. A pesar de que en el artículo original sobre el que estudiamos en esta estancia trabaje principalmente con las distribuciones Q de Husimi, a mí en lo personal, me pareció interesante profundizar solo un poco en las distribuciones de Wigner sobre la esfera de Poincaré y ver si esta puede ser medible a nivel experimental.

Poco después de tocar el tema, el profesor Hirsch encontró un artículo reciente de este año en el cual se mide la función de correlación de intensidad en la representación de Wigner [Najafabadi et al., 2024]. En este artículo se logra medir, de dos maneras diferentes, la función de Wigner. Al revisar con detalle este artículo se muestra que la función de Wigner para estados Gaussianos coherentes es

$$W(\xi) = \frac{1}{2\pi \det(\Sigma)} \exp \left[\frac{1}{2} (\xi - \hat{\xi})^T \Sigma^{-1} (\xi - \hat{\xi}) \right], \quad (1)$$

donde Σ es la matriz de covarianza y $\hat{\xi}$ es el vector unitario que apunta en la dirección de la media de la distribución. Si en lugar de tomar a ξ como un vector $2D$ lo tomamos como uno $3D$ en coordenadas esféricas al cual llamamos \vec{s} y a su vector unitario en dirección media como $\vec{\mu}$ en realidad la forma de esta función de Wigner será la misma que tiene la distribución de Fisher-Bingham [Kume and Walker, 2009].

En mi trabajo de grado, el cual pueden encontrar en el siguiente repositorio <https://github.com/JafertSerrano/Datos-QKD.git>, estudiamos las distribuciones de la polarización sobre la esfera de Poincaré desde la estadística direccional, en donde encontramos que la distribución de Fisher-Bingham generaliza bastante bien las distribuciones de fuentes led, diodos laser y láseres. Con esto en mente surge directamente la relación que existe entre la función de Wigner y su completa

equivalencia a la distribución de Fisher-Bingham, lo que nos lleva a concluir que, aparentemente, podemos hacer medidas de la función de Wigner en la polarización a partir de polarimetría sobre la esfera de Poincaré.

Distribución de Wigner sobre una esfera

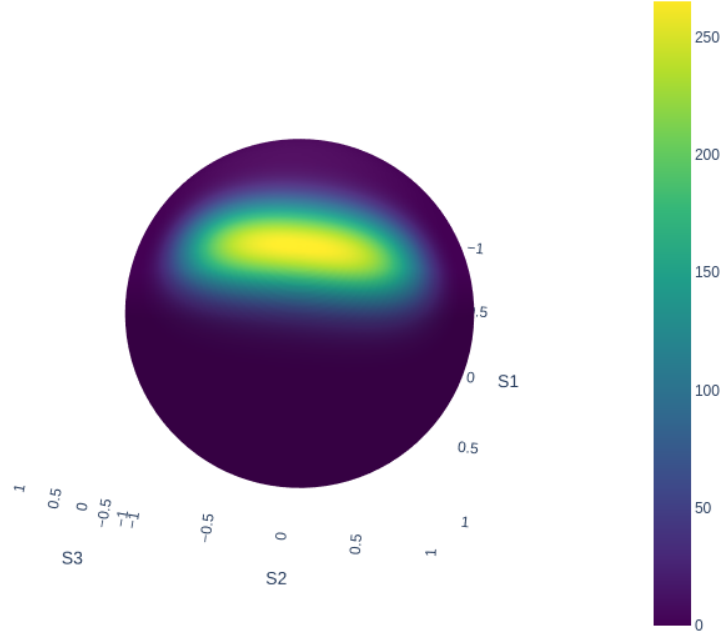


Figura 1

En la figura 1 se muestra la función de Wigner en coordenadas esféricas y normalizada sobre la variedad \mathcal{S}_2 y en la figura 2 se muestra la distribución de Fisher-Bingham para los parámetros $\kappa = 50$, $\beta = 25$ y $\eta = 1$, estos representan la concentración de la distribución al rededor del valor medio, y la dispersión de los datos, respectivamente. Estos valores se encuentran ya dentro de la matriz de covarianza Σ como los autovectores de esta. Podemos observar un gran parentesco tanto en la fórmulas matemática como en la forma de la distribución, sin embargo, a la fecha de escrito este reporte aún no hemos ajustado completamente el modelo matemático, sin embargo hemos visto esa similitud y la accesibilidad a esta mediante polarimetría.

Distribución de Wigner sobre una esfera

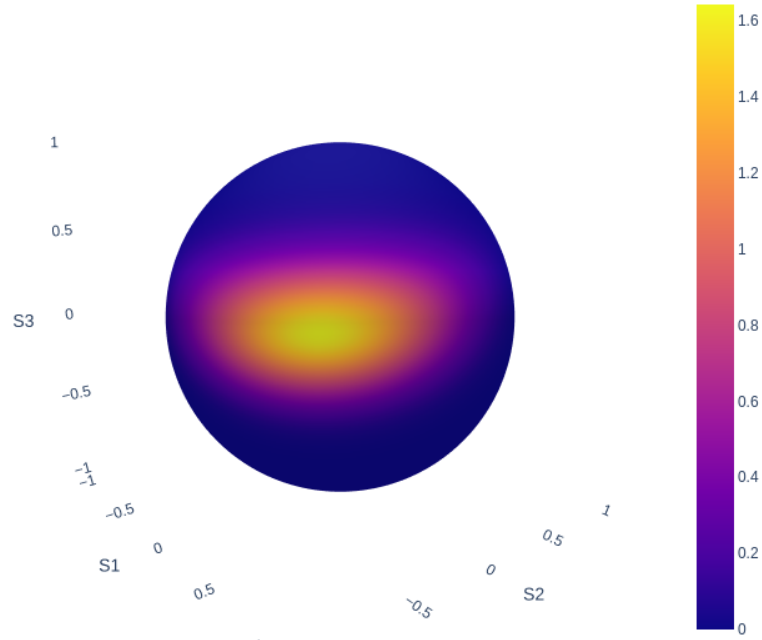


Figura 2

3. Caos

En el tema de Caos clásico y caos cuántico nos detuvimos un buen tiempo debido a que me pareció un tema realmente interesante y surgió la idea de tal vez ver si existía este caos, cuanto mínimo el clásico, en la polarización y dimos con el artículo [Bonatto, 2018] en donde reportan caos sobre la esfera de Poincaré. Sobre este modelo se hizo un cuaderno en *Jupyter* el cual pueden encontrar en el repositorio <https://github.com/JafertSerrano/Datos-QKD.git>.

En el código que se encuentra en el repositorio se soluciona numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para las componentes transversales del campo eléctrico es decir, las componentes del vector de Jones E_x, E_y . Variando los parámetros empezamos a ver trayectorias particulares, y al analizar la distribución para un diodo Laser que tenemos en el laboratorio encontramos el siguiente comportamiento sobre la esfera de Poincaré mostrado en la figura 3.

Quedó abierta la posibilidad de tal vez llevar a un régimen un poco más cuántico el modelo de [Bonatto, 2018] y ver si surge caos cuántico en la polarización así como surge con el modelo de Dicke

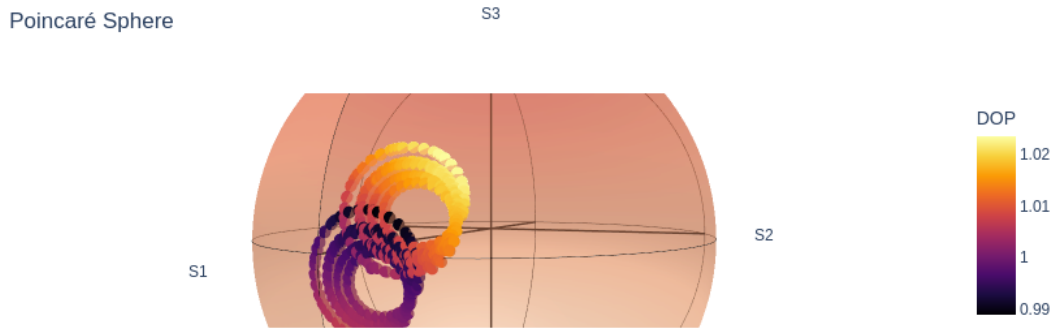


Figura 3: Distribución de estados de polarización para una diodo laser, observamos un comportamiento, aparentemente, convergente de estas distribuciones, comportamiento que se asemeja al atractor de Lorenz.

del profesor, [Villaseñor et al., 2024].

4. Conclusión

En esta estancia se logró hacer todo un barrido sobre los estudios que ha llevado el Dr. Hirsch a lo largo de varios años, en donde surgieron varias ideas que se podían abordar tanto a nivel teórico como experimental, sin embargo todo lo teórico y experimental acá desarrollado no fue sobre el tema central del proyecto, el cual era el modelo de Dicke, sobre este solo hicimos un estudio completo en el cual se buscaba aprender conceptos nuevos y brindar una mayor perspectiva sobre los modelos de interacción luz-materia, modelos que solo estudiamos pero en ningún momento llegué a abordar al 100 % teóricamente ni computacionalmente.

Referencias

- Berezin, F. A. (1975). General concept of quantization. *Communications in Mathematical Physics*, 40:153–174.
- Bonato, C. (2018). Hyperchaotic dynamics for light polarization in a laser diode. *Physical review letters*, 120(16):163902.
- Goldberg, A. Z., De La Hoz, P., Björk, G., Klimov, A. B., Grassl, M., Leuchs, G., and Sánchez-Soto, L. L. (2021). Quantum concepts in optical polarization. *Advances in Optics and Photonics*, 13(1):1–73.

- Husimi, K. (1940). Some formal properties of the density matrix. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, 22(4):264–314.
- Kume, A. and Walker, S. G. (2009). On the fisher–bingham distribution. *Statistics and Computing*, 19:167–172.
- Luis, A. (2006). Nonclassical polarization states. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 73(6):063806.
- Luis, A. (2016). Polarization in quantum optics. In *Progress in optics*, volume 61, pages 283–331. Elsevier.
- Najafabadi, M. S., Sánchez-Soto, L. L., Huang, K., Laurat, J., Jeannic, H., Leuchs, G., et al. (2024). Intensity correlations in the wigner representation. *arXiv preprint arXiv:2407.12901*.
- Stratonovich, R. (1957). On distributions in representation space. *SOVIET PHYSICS JETP-USSR*, 4(6):891–898.
- Sudarshan, E. (1963). Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Physical Review Letters*, 10(7):277.
- Villaseñor, D., Pilatowsky-Cameo, S., Chávez-Carlos, J., Bastarrachea-Magnani, M. A., Lerma-Hernández, S., Santos, L. F., and Hirsch, J. G. (2024). Classical and quantum properties of the spin-boson dicke model: Chaos, localization, and scarring. *arXiv preprint arXiv:2405.20381*.
- Wigner, E. (1932). On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Physical review*, 40(5):749.