

Polarización como un espacio hiper-geométrico o espín-tiempo

Miguel Jafert Serrano Mantilla

Universidad Industrial De Santander

Grupo De Óptica Y Tratamiento De Señales

Índice

1. Formulación en variedades diferenciables geométricas	2
2. Solución geodésica en el límite de campo débil	8

Resumen

1. Formulación en variedades diferenciables geométricas

Vamos a proponer una variedad geométrica de cuatro dimensiones, la cual es un subconjunto de \mathbb{R}^4 dotado de una métrica pseudo-Riemanniana y una conexión de Levi-Civita (esto para evitar lidiar con efectos de torsión en el modelo matemático), es decir nuestro espacio será $(\mathbb{R}^4, \mathbb{G}, \vec{\nabla})$ y vamos a usar el convenio de sumatoria de Einstein y la siguiente convención: en el momento de usar super índices o sub índices, cuando estos sean representados por una letra griega van de 0 a 3, es decir $\alpha = 0, 1, 2, 3$, cuando sean índices latinos estos irán de 1 a 3, es decir $i = 1, 2, 3$ y cuando sean letras del alfabeto latino representarán cantidades tensoriales más no componentes de tensores.

Vamos a definir una *curva integral suave* tal que el vector tangente de dicha curva tenga norma negativa (esto se justificará físicamente más adelante pues veremos que todo vector tangente en dicha curva suave representará un estado parcialmente polarizado). La curva integral estará parametrizada con un parámetro ν y la curva la denotaremos como $\lambda(\nu)$ y vamos a definir un parámetro afín I el cual varía a lo largo de la curva $\lambda(\nu)$ de la siguiente forma

$$\frac{dI}{d\nu} = \sqrt{-g_{\alpha\beta} S^\alpha S^\beta}, \quad (1.0.1)$$

el signo negativo en la ecuación 1.0.1 se debe a que hemos escogido una métrica mayormente positiva es decir $(-, +, +, +)$. La ecuación 1.0.1 está escrita en una carta coordenada $\phi = \{S^0, S^1, S^2, S^3\}$, entonces podemos integrar a lo largo de la curva y encontrar el valor de nuestro parámetro afín I

$$I = \int_{\nu_0}^{\nu_f} \left[-g_{\alpha\beta} \frac{dS^\alpha}{d\nu} \frac{dS^\beta}{d\nu} \right]_{\lambda(\nu)}^{1/2} d\nu. \quad (1.0.2)$$

Cabe preguntarse ahora ¿Cómo debe ser el integrando para que I sea una integral estacionaria? Desde un punto de vista físico estamos buscando una métrica tal que la intensidad del haz sea mínima o máxima pero esto lo justificaré más adelante, por ahora debemos desarrollar el modelo geométrico. Tenemos entonces una expresión de la forma

$$I[\lambda(\nu)] = \int_{\nu_0}^{\nu_f} G[S(\lambda(\nu)), \dot{S}(\lambda(\nu)), \nu] d\nu \quad (1.0.3)$$

donde

$$G = \left\{ -g_{\alpha\beta} [S(\lambda(\nu))] \dot{S}^\alpha [\lambda(\nu)] \dot{S}^\beta [\lambda(\nu)] \right\}, \quad (1.0.4)$$

mediante una extremación utilizando principios variacional, llegamos a la ecuación de Euler-Lagrange para G :

$$\frac{d}{d\nu} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{S}^\alpha} \right) - \frac{\partial G}{\partial S^\alpha} = 0, \quad (1.0.5)$$

calculando las derivadas parciales tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{S}^\alpha} = -\frac{1}{G} g_{\alpha\beta} \dot{S}^\beta, \quad (1.0.6)$$

$$\frac{\partial G}{\partial S^\alpha} = -\frac{1}{2G} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \dot{S}^\beta \dot{S}^\gamma. \quad (1.0.7)$$

La derivada total respecto a ν la podemos escribir de la siguiente forma

$$G = \frac{\partial I}{\partial \nu} \rightarrow \frac{d}{d\nu} = \frac{dI}{d\nu} \frac{d}{dI} = G \frac{d}{dI}, \quad (1.0.8)$$

utilizando esta ecuación y las derivadas parciales tendremos la siguiente ecuación de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dI} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{S}^\mu} \left(\frac{1}{2} G^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial S^\mu} \left(\frac{1}{2} G^2 \right) &= 0, \\ \frac{1}{2} G^2 &= \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{S}^\alpha \dot{S}^\beta = \mathcal{L}. \end{aligned}$$

\mathcal{L} es en realidad el lagrangiano del sistema, entonces la ecuación de Euler-Lagrange queda escrita como

$$\frac{d}{dI} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{S}^\mu} \mathcal{L} \right) - \frac{\partial}{\partial S^\mu} \mathcal{L} = 0. \quad (1.0.9)$$

Ahora, debemos calcular las derivadas parciales, por lo tanto tenemos lo siguiente

$$\frac{\partial}{\partial S^\mu} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S^\mu} (g_{\alpha\beta} \dot{S}^\alpha \dot{S}^\beta) = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{S}^\alpha \dot{S}^\beta), \quad (1.0.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{S}^\mu} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{S}^\mu} (g_{\alpha\beta} \dot{S}^\alpha \dot{S}^\beta) = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} \delta_\beta^\mu \dot{S}^\alpha + g_{\alpha\mu} \dot{S}^\alpha \delta_\beta^\mu) = \frac{1}{2} (g_{\mu\beta} \dot{S}^\beta + g_{\alpha\mu} \dot{S}^\alpha). \quad (1.0.11)$$

Utilizando ambas ecuaciones en la ecuación de Euler-Lagrange tenemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dI} \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{S}^\alpha \dot{S}^\beta) \right] &= \frac{1}{2} (g_{\mu\beta} \ddot{S}^\beta + \partial_l g_{\mu\beta} \dot{S}^\beta \dot{S}^\alpha + g_{\alpha\mu} \ddot{S}^\alpha + \partial_l g_{\alpha\mu} \dot{S}^\alpha \dot{S}^l), \\ \frac{1}{2} (g_{\mu\beta} \ddot{S}^\beta + \partial_l g_{\mu\beta} \dot{S}^\beta \dot{S}^\alpha + g_{\alpha\mu} \ddot{S}^\alpha + \partial_l g_{\alpha\mu} \dot{S}^\alpha \dot{S}^l) &- \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{S}^\alpha \dot{S}^\beta), \end{aligned}$$

en los dos primeros términos podemos utilizar los índices mudos para reescribirlos como $\alpha = \beta$, en el tercer término $l = \alpha$, y en el cuarto término $\beta = l$ entonces

$$g_{\alpha\mu}\ddot{S}^\alpha + \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta})\dot{S}^\alpha\dot{S}^\beta = 0. \quad (1.0.12)$$

Multiplicando la ecuación 1.0.12 por $g^{\mu\lambda}$ tendremos

$$\delta^\lambda_\alpha\ddot{S}^\alpha + \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta})\dot{S}^\alpha\dot{S}^\beta = 0, \quad (1.0.13)$$

$$\ddot{S}^\lambda + \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta})\dot{S}^\alpha\dot{S}^\beta = 0. \quad (1.0.14)$$

$$\frac{d^2 S^\lambda}{dI^2} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \frac{dS^\alpha}{dI} \frac{dS^\beta}{dI} = 0 \quad (1.0.15)$$

donde

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(\partial_\alpha g_{\beta\mu} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}). \quad (1.0.16)$$

La ecuación 1.0.15 es entonces la ecuación de Euler-Lagrange par las componentes del cuadri-vector \mathbf{S} , es necesario clarificar que, gracias al hecho de que hemos escogido una teoría libre de torsión, el símbolo de Cristoffel $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ lo podemos escribir como se muestra en la ecuación 1.0.16. Vamos a darle un poco de forma a la ecuación 1.0.15 y luego darle interpretación física

$$\frac{d^2 S^\alpha}{dI^2} = \frac{d}{dI} \left[\frac{d}{dI} S^\alpha \right] = \frac{d}{dI} S^\alpha (S(I)) = \frac{dS^\beta}{dI} \frac{\partial S^\alpha}{\partial S^\beta}, \quad (1.0.17)$$

reemplazando

$$\frac{dS^\mu}{dI} [\partial_\mu S^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} S^\nu] = 0 \quad (1.0.18)$$

pero el término dentro de las llaves en realidad representan la *derivada covariante de \mathbf{S}* a lo largo de si misma, es decir

$$\frac{dS^\mu}{dI} \vec{\nabla}_\mu S^\mu = \vec{\nabla}_\mathbf{S} \mathbf{S} = 0. \quad (1.0.19)$$

De esta forma, hemos demostrado que a partir de la ecuación 1.0.15 llegamos a que en realidad \mathbf{S} obedece a la ecuación de una geodésica 1.0.19, es decir, bajo esta formulación todo cuadri vector \mathbf{S} sigue geodésicas.

Antes de seguir adelante, es necesario hacer unas observaciones. Este desarrollo tiene en si propiedades de torsión y curvatura bien establecidas desde la geometría diferencial, cantidades como

$$T(X, Y) = \vec{\nabla}_X Y - \vec{\nabla}_Y X - [X, Y] \quad (1.0.20)$$

conocido como *tensor de torsión* el cual me habla sobre la estructura de nuestra variedad geométrica bajo la conexión $\vec{\nabla}$, en nuestra caso dicha conexión es la *conexión de Levi-Civita* o también conocida como *conexión métrica* la cual implica que la métrica de nuestro sistema es covariantemente constante sobre la variedad geométrica

$$\vec{\nabla} \mathbb{G} = 0. \quad (1.0.21)$$

Esta estructura está intrínsecamente dotada de una curvatura en donde dada una conexión $\vec{\nabla}$ el *tensor de curvatura de Riemann* se define por

$$R^a_{bcd} Z^b X^c Y^d = [R(X, Y)Z]^a, \quad (1.0.22)$$

$$R(X, Y)Z = \vec{\nabla}_X \vec{\nabla}_Y Z - \vec{\nabla}_Y \vec{\nabla}_X Z - \vec{\nabla}_{[X, Y]} Z. \quad (1.0.23)$$

Vamos a establecer una analogía entre la relatividad y la óptica, primeramente nuestra variedad geométrica la representaremos como el diagrama mostrado en la figura 1

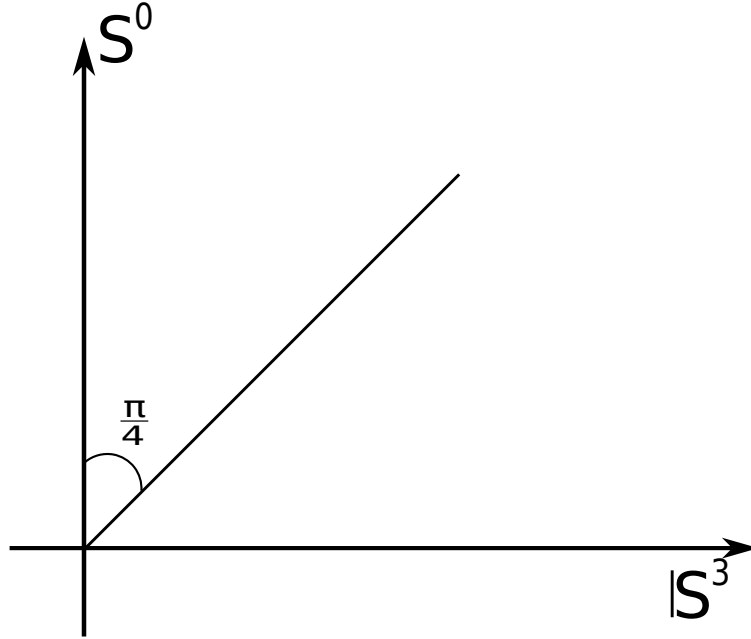


Figura 1: Representación de la variedad geométrica M la cual es un subconjunto de \mathbb{R}^4 en donde en el eje vertical se encuentra la componente S^0 y en el eje horizontal un subconjunto de \mathbb{R}^3 conformado por los vectores $\vec{S} = [S^1, S^2, S^3]^T$.

Es bajo esta representación que vamos a introducir la interpretación física de las componentes del cuadri-vector \mathbf{S} , el cual corresponde al vector conformado por los cuatro parámetros de Stokes, en este orden de ideas, como nuestra signatura es mayormente positiva, todo vector de Stokes vive dentro del cono representado en la figura 2. Si nos damos cuenta, como el cono tiene un ángulo de

$\frac{\pi}{4}$ es decir, tiene una pendiente $\tan(\pi/4) = 1$ implica que un vector de Stokes sobre el borde del cono debe cumplir que

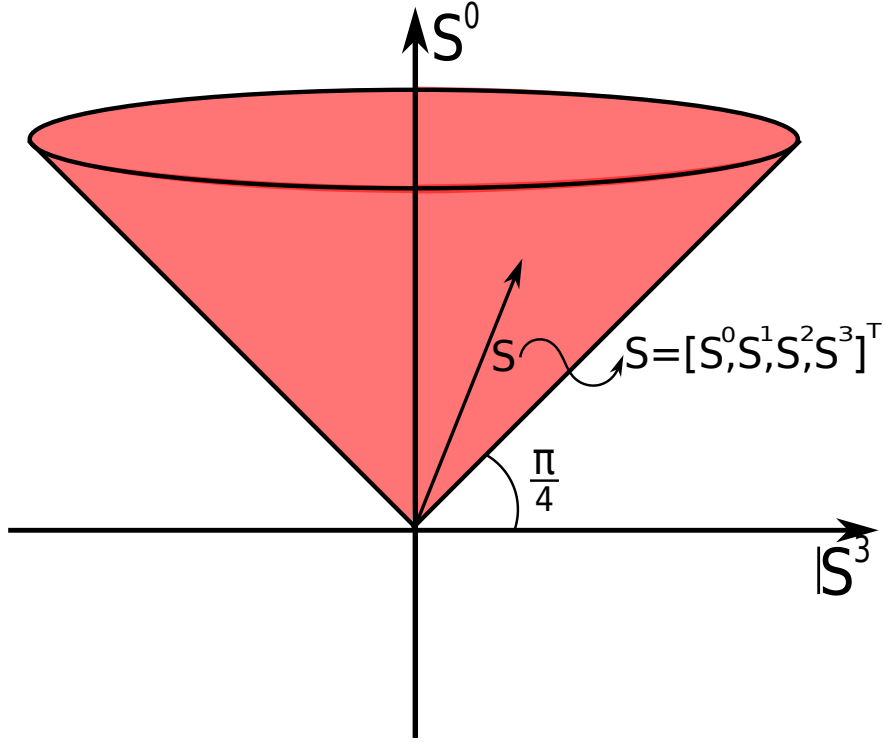


Figura 2: Representación gráfica de un cuatri-vector de Stokes \mathbf{S} el cual está parcialmente polarizado y vive dentro del cono de grado de polarización.

$$S^2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = \mathbb{G}(\mathbf{S}, \mathbf{S}) = -(S^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (S^i)^2 = 0, \quad (1.0.24)$$

$$\frac{(S^1)^2 + (S^2)^2 + (S^3)^2}{(S^0)^2} = P^2 = 1 \rightarrow P = \left[\frac{(S^1)^2 + (S^2)^2 + (S^3)^2}{(S^0)^2} \right]^{1/2} = 1. \quad (1.0.25)$$

Definition 1 *El grado de polarización de primer orden de un haz caracterizado con un cuatri vector de Stokes \mathbf{S} dentro del cono de grado de polarización (DOP) es la pendiente de dicho vector en un diagrama S^3 vs S^0 .*

Observación: Un haz perfectamente polarizado vive sobre el cono y un haz parcialmente polarizado vive dentro del cono.

Hasta el momento, con lo que hemos desarrollado hemos podido concluir varias cosas, primeramente los parámetros de Stokes siguen geodésicas energéticas que obedecen principios variacionales como lo demostramos en las ecuaciones 1.0.15 y 1.0.19, ahora debemos hablar sobre qué representa físicamente el parámetro propio I .

Cuando hacemos ocnteo de fotones la intensidad es directamente proporcional al número de fotones medidos en un tiempo dado, es decir tenemos una medida de n fotones por segundo cada uno con una intensidad (propia) característica de su longitud de onda, en este orden de ideas podemos relacionar el parámetro de Stokes S^0 con la intensidad propia de cada fotón por unidad de tiempo I como

$$S^0 = It. \quad (1.0.26)$$

Acá podemos ver un poco más, físicamente hablando, el porqué escogí a I como el parámetro afín propio, pues es bien sabido que cuando un haz de luz atraviesa un material, digamos un material translúcido, el haz se divide en su espectro, es decir, todos los fotones de distinta longitud de onda sigue trayectorias distintas en un mismo material, es por eso mismo que escogimos a esta intensidad propia I como el parámetro propio que me parametriza las geodésicas que seguirán los fotones en un material. De esta forma podemos normalizar todo respecto a I y tendríamos un diagrama como el de la figura 3

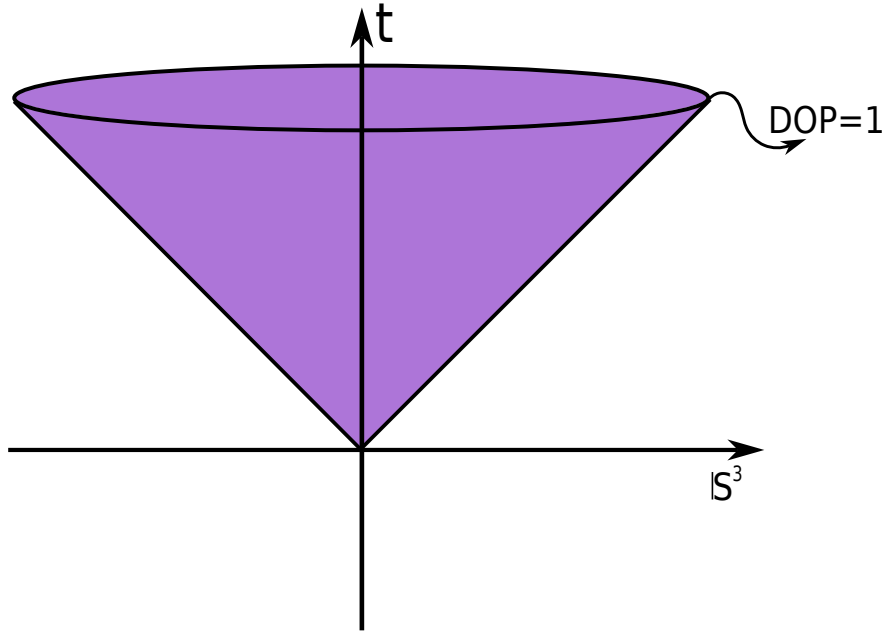


Figura 3: Representación gráfica de la variedad geométrica normalizada respecto al parámetro propio I y el cono de grado de polarización el cual en su borde contiene a todo estado perfectamente polarizado.

Este tipo de diagramas los llamaremos *Espín-tiempo* esto debido a que los observables macroscópicos del espín del fotón son los parámetros de Stokes. Los parámetros de Stokes así normalizados serán representados por un s^i minúscula y hacemos la distinción con notación entre el cuadri vector de Stokes $\mathbf{S} = [S^0, S^1, S^2, S^3]^T$ con el vector de Stokes $\vec{s} = [s^1, s^2, s^3]^T$.

2. Solución geodésica en el límite de campo débil

Hasta el momento solo hemos hecho una formulación hiper geométrica de los parámetros de Stokes, los cuales en la variedad geométrica (la cual no es espacial, sino energética) no tienen torsión pero si pueden presentar curvatura pero para ver si esto tiene o no validez física debemos llevar toda esta teoría hasta un régimen analítico que nos permita ver si todo esto desarrollado hasta ahora tiene o no sentido físico, para esto, vamos a solucionar la ecuación de las geodésicas 1.0.15 en el límite de campo débil. Vamos a suponer que la luz pasa por un medio el cual cumple las siguientes propiedades

1. El haz está parcialmente polarizado tal que

$$\frac{d\mathbf{S}}{dI} \ll \frac{dS^0}{dI}, \quad (2.0.1)$$

es decir, el haz incidente es más intensidad pura que un haz polarizado.

2. La interacción electromagnética del haz con el material es estacionaria (es equivalente a cuando tenemos una estadística independiente del tiempo) y débil, es decir, transforma linealmente el vector de Stokes más cierta perturbación.

Analicemos entonces la ecuación 1.0.15

$$\frac{d^2 S^\mu}{dI^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dS^\alpha}{dI} \frac{dS^\beta}{dI} = 0, \quad (2.0.2)$$

$$\frac{d\mathbf{S}}{dI} = \frac{d\mathbf{S}}{dS^0} \frac{dS^0}{dI} \ll \frac{dS^0}{dI} \rightarrow \left| \frac{d\mathbf{S}}{dS^0} \right| \ll 1, \quad (2.0.3)$$

$$\frac{d^2 S^\mu}{dI^2} + \Gamma_{00}^\mu \frac{dS^0}{dI} \frac{dS^0}{dI} + \Gamma_{ij}^\mu \frac{dS^i}{dI} \frac{dS^j}{dI} \quad (2.0.4)$$

el segundo término tiende a cero pues como vemos en la ecuación 2.0.3 este producto sería tan pequeño que lo podemos considerar despreciable, entonces la ecuación se reduce a

$$\frac{d^2 S^\mu}{dI^2} + \Gamma_{00}^\mu \frac{dS^0}{dI} \frac{dS^0}{dI} = 0, \quad (2.0.5)$$

donde

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_0 g_{\sigma 0} + \partial_0 g_{0\sigma} - \partial_\sigma g_{00}). \quad (2.0.6)$$

Como vimos en la ecuación 1.0.26 S^0 está directamente relacionado con el tiempo entonces ∂_0 corresponde a una derivada parcial temporal ¹ y como la interacción es estacionaria, tenemos entonces

$$\partial_0 g_{\sigma 0} + \partial_0 g_{0\sigma} = 0. \quad (2.0.7)$$

Continuando tenemos entonces

$$\frac{d^2 S^0}{dI^2} - \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \partial_0 g_{00} \left(\frac{dS^0}{dI} \right)^2 = 0, \quad (2.0.8)$$

como la interacción es débil, entonces la geometría del espacio es plana más una pequeña perturbación en cierto lugar, es decir, si $\eta_{\alpha\beta}$ es la métrica de Minkowski, entonces nuestra métrica en el límite de campo débil bajo una perturbación $h_{\alpha\beta}$ sería

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1. \quad (2.0.9)$$

Podemos entonces calcular el símbolo de Cristoffel

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} (\eta^{\mu\sigma} + h^{\mu\sigma}) \partial_\sigma (\eta_{00} + h_{00}) \quad (2.0.10)$$

teniendo en cuenta que la métrica de Minkowski es constante y que la perturbación es pequeña y todo producto entre estas se puede despreciar tenemos entonces

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} (\eta^{\mu\sigma} + h^{\mu\sigma}) \partial_\sigma h_{00} \approx \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} \partial_\sigma h_{00}, \quad (2.0.11)$$

$$\frac{d^2 S^\mu}{dI^2} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} \partial_\sigma h_{00} \left(\frac{dS^0}{dI} \right)^2. \quad (2.0.12)$$

Como la métrica de Minkowski es diagonal tenemos dos casos, uno para la parte temporal $\mu = \sigma = 0$ y otro para la parte espinorial (equivalente a la espacial) $\mu = \sigma = i$

$$\frac{d^2 S^0}{dI^2} = 0. \quad (2.0.13)$$

Desde un punto de vista geométrico quiere decir que S^0 e I son parámetros afinmente relacionados, desde el punto de vista físico quiere decir que en estos medios S^0 e I son *prácticamente indistinguibles* es decir, la intensidad total coincide con S^0 .

$$\frac{d^2 S^i}{dI^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dS^0}{dI} \right)^2 \eta^{ij} \partial_j h_{00}. \quad (2.0.14)$$

Vamos a llevar la ecuación 2.0.14 a un régimen aún más local, vamos a imponer entonces que el gradiente de la perturbación h_{00} sea despreciable y, por facilidad algebraica vamos a tomar solo una dimensión, es decir tendremos algo así

¹normalizada por el parámetro afín I

$$\frac{d^2 S^1}{dI^2} \approx 0, \quad (2.0.15)$$

otra vez, desde el punto de vista geométrico, esto implica que entre S^1 e I hay una transformación afín de por medio, pero también, por la ecuación 1.0.26 S^0 e I están relacionados por una transformación afín, entonces entre S^0 y S^1 hay una transformación afín, calculemos dicha transformación y luego démosle interpretación física. La transformación afín de los parámetros al atravesar este medio está dada por

$$\bar{S}^0 = AS^0 + BS^1, \quad (2.0.16)$$

$$\bar{S}^1 = CS^0 + DS^1, \quad (2.0.17)$$

$$\bar{S}^2 = S^2 \quad (2.0.18)$$

$$\bar{S}^3 = S^3. \quad (2.0.19)$$

Así como en la relatividad se conserva el intervalo espacio-temporal acá vamos a observar una conservación de intervalo energético, es decir la diferencia entre la energía de la parte del haz puramente aleatorio con el haz polarizado se mantiene al atravesar el medio, es decir, tenemos un medio no dispersivo, matemáticamente lo vemos así

$$-(S^0)^2 + (S^1)^2 + (S^2)^2 + (S^3)^2 = -(\bar{S}^0)^2 + (\bar{S}^1)^2 + (\bar{S}^2)^2 + (\bar{S}^3)^2, \quad (2.0.20)$$

utilizando las ecuaciones para las transformaciones afines tenemos

$$-(S^0)^2 + (S^1)^2 = -(A^2 - C^2)(S^0)^2 + (D^2 - B^2)(S^1)^2 + 2(CD - AB)S^0S^1, \quad (2.0.21)$$

tenemos así entonces el siguiente sistema de cuatro incógnitas y tres ecuaciones

$$A^2 - C^2 = 1, D^2 - B^2 = 1, CD - AB = 0. \quad (2.0.22)$$

A simple vista parece que tenemos un sistema subdeterminado e irresoluble pero recordemos la siguiente propiedad de las funciones hiperbólica

$$\cosh^2 \delta - \sinh^2 \delta = 1 \quad (2.0.23)$$

fácilmente entonces podemos encontrar los valores para nuestras incógnitas

$$A = D = \cosh \delta, \quad (2.0.24)$$

$$C = B = -\sinh \delta. \quad (2.0.25)$$

Podemos representar entonces dicha transformación afín, matricialmente como

$$\begin{bmatrix} \bar{S}^0 \\ \bar{S}^1 \\ \bar{S}^2 \\ \bar{S}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\delta & -\sinh\delta & 0 & 0 \\ -\sinh\delta & \cosh\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^0 \\ S^1 \\ S^2 \\ S^3 \end{bmatrix}. \quad (2.0.26)$$

Podemos darle interpretación física a estas funciones hiperbólicas, para ello tomemos las transformaciones de \bar{S}^1 cuando esta es igual a cero

$$0 = -S^0 \sinh\delta + \frac{S^1}{S^0} \cosh\delta = -I \sinh\delta + \gamma S^0 \cosh\delta, \quad (2.0.27)$$

$$\gamma = \tanh\delta = \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2\delta}, \quad (2.0.28)$$

$$\operatorname{sech}^2\delta = 1 - \gamma^2, \quad (2.0.29)$$

$$\cosh\delta = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}}, \quad (2.0.30)$$

$$\sinh\delta = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}}. \quad (2.0.31)$$

Así la transformación, en forma matricial, se ve como

$$\begin{bmatrix} \bar{S}^0 \\ \bar{S}^1 \\ \bar{S}^2 \\ \bar{S}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} & -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^0 \\ S^1 \\ S^2 \\ S^3 \end{bmatrix}. \quad (2.0.32)$$

Antes de seguir avanzando en la interpretación física de esta transformación (que corresponde a un boost de Lorentz), la cual es solución a la ecuación geodésica para los parámetros de Stokes 1.0.15 podemos postular el siguiente teorema

Theorem 1 *Es imposible tener un grado de polarización de primer orden $P = 1$.*

Demostración: Calculemos el grado de polarización para la anterior transformación que coincide con un boost de Lorentz en la dirección X

$$(S^0)^2 = \bar{S}^0^2 \left(1 - \frac{(S^1)^2 + (S^2)^2 + (S^3)^2}{(S^0)^2} \right) = \bar{S}^0^2 (1 - \bar{P}^2), \quad (2.0.33)$$

$$\bar{S}^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{P}^2}} S^0. \quad (2.0.34)$$

Si $\bar{P} = 1$, es decir, el haz emerge perfectamente polarizado, entonces

$$\lim_{\bar{P} \rightarrow 1} \bar{S}^0 = \infty. \quad (2.0.35)$$

Esto implica que un grado de polarización perfecto, implica una energía infinita, queda así entonces demostrado que no se puede tener un grado de polarización de primer orden igual a 1.

Hasta acá llega el desarrollo geométrico, ahora vamos a ver si la matriz 2.0.32 tiene o no sentido físico. Vamos a hacer los siguientes cambios de variables

$$e^{-\delta} = (T_1 T_2)^{1/2}, \quad (2.0.36)$$

$$T = (T_1 T_2)^{1/2} \quad (2.0.37)$$

entonces

$$\cosh \delta = \frac{e^{\delta} + e^{-\delta}}{2} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2), \quad (2.0.38)$$

$$\sinh \delta = \frac{1}{2}(T_1 - T_2), \quad (2.0.39)$$

$$\cosh^2 \delta - \sinh^2 \delta = 1 = (T_1 T_2)^{1/2} = 2T. \quad (2.0.40)$$

Así, la transformación en forma de matriz 2.0.32 se convierte en

$$\begin{bmatrix} \bar{S}^0 \\ \bar{S}^1 \\ \bar{S}^2 \\ \bar{S}^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T_1 + T_2 & T_1 - T_2 & 0 & 0 \\ T_1 - T_2 & T_1 + T_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(T_1 T_2)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(T_1 T_2)^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^0 \\ S^1 \\ S^2 \\ S^3 \end{bmatrix}. \quad (2.0.41)$$

Con este formalismo geométrico solucionando la ecuación geodésica para los parámetros de Stokes hemos obtenido la matriz de Mueller para un dióptico lineal con eje en dirección x así que todo apunta a que este formalismo geométrico contiene toda la dinámica de la polarización hasta aquí desarrollada.

Proposición: *La formulación en el espín-tiempo es isomorfa a la de la esfera de Poincaré.*

Demostración: La ecuación del hiper cono de DOP es la de un cono $4D$ esférico, a todo vector que vive dentro o sobre este cono lo podemos proyectar sobre \mathbb{R}^3 de la siguiente forma

$$\vec{S}_p = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{G}(\mathbf{S}, \mathbf{S})}} \mathbb{G} \left[\mathbf{S}, \left(\hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \hat{S}_3 \right) \right] \left(\hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \hat{S}_3 \right), \quad (2.0.42)$$

lo cual $\forall \mathbf{S} \in \mathbb{R}^4$ nos da un $\vec{S}_p \in \mathbb{R}^3$. Pero dicho de una forma más apropiada, no es todo \mathbb{R}^3 sino un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^3 contenido en el cono $4D$ y utilizando el **teorema de Poincaré**

que dice que *toda 3-variedad cerrada, simplemente conexa es homeomorfa a una 3-esfera* queda demostrado que el subconjunto de \mathbb{R}^3 en donde viven los vectores de Stokes es una esfera, conocida como *esfera de Poincaré*.

Como una última conclusión, vimos que para el espín-tiempo hay una ecuación geodésica

$$\vec{\nabla}_S \mathbf{S} = 0, \quad (2.0.43)$$

la cual responde a un principio variacional energético, pero desde un punto de vista geométrico, esto me define trayectorias geodésicas para las intensidades, proporcionales al cuadrado del campo eléctrico, esto corresponde con el fotón, el cual es descrito en términos de cuántos de energía, así que desde esta formulación podemos intuir que *los fotones se mueven por geodésicas dadas por la ecuación 1.0.15 y que la presencia de la materia perturba las geodésicas del campo del fotón*.

Referencias