



**Universidad Nacional Mayor  
de San Marcos**

# **Sistemas de Inferencia Difusa**

Ingeniería de Sistemas  
**EPIS**

# Logros

- ❖ Comprender los fundamentos del razonamiento aproximado
- ❖ Entender los conceptos básicos de los conjuntos difusos y sus operaciones, y sus diferencias respecto de los clásicos
- ❖ Entender los conceptos básicos de la Lógica Difusa
- ❖ Aprender a desarrollar un sistema experto basado en lógica difusa



# Agenda

- ✓ Razonamiento aproximado
- ✓ Conjuntos difusos
  - Conjuntos clásicos y conjuntos difusos
  - Funciones de pertenencia
  - Operaciones con CDs
- ❖ Lógica Difusa
  - Conceptos
  - Sistema experto basado en lógica difusa
  - Aplicación práctica: sistema experto difuso para una máquina lavadora
- ❖ Síntesis



# LÓGICA DIFUSA



# Conjuntos Difusos “Borrosos” (Zadeh, 1965)

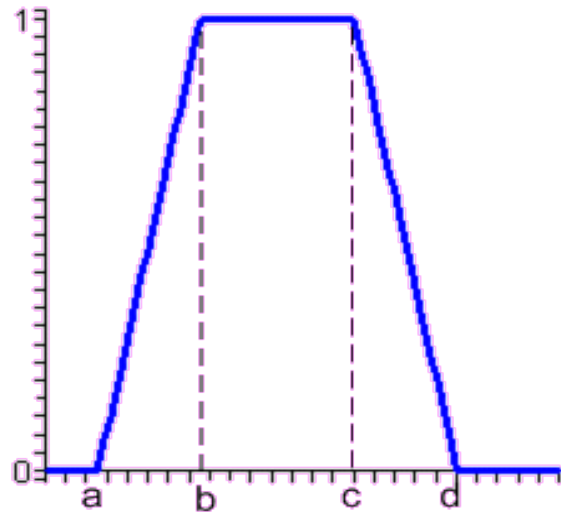
❖ Un conjunto borroso  $A$  definido sobre un universo de discurso  $U$  es caracterizado por una función de pertenencia o membresía  $\mu_A(x)$  la cual toma valores en el intervalo  $[0,1]$

❖ Para un elemento  $x$  de un conjunto  $A$  su condición de membresía al cjto está dado por un cierto valor  $\mu_A(x)$

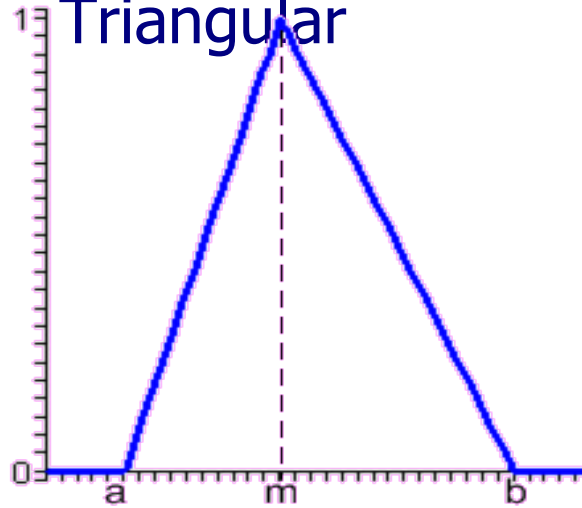


# Funciones de pertenencia típicas

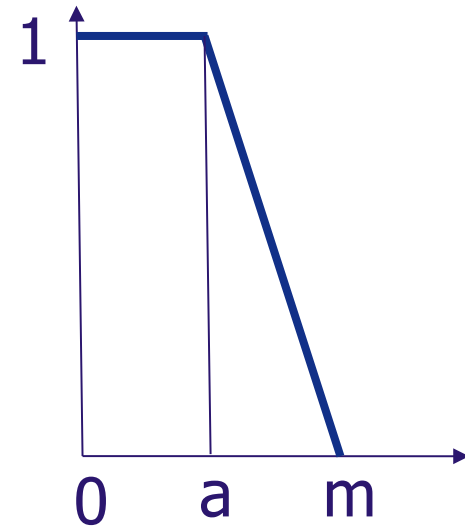
Función Trapezoidal



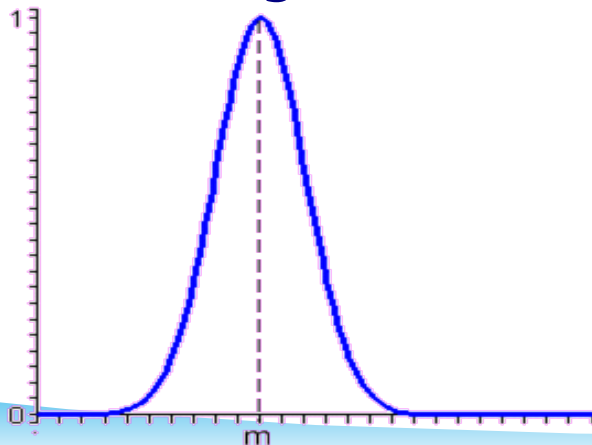
Función Triangular



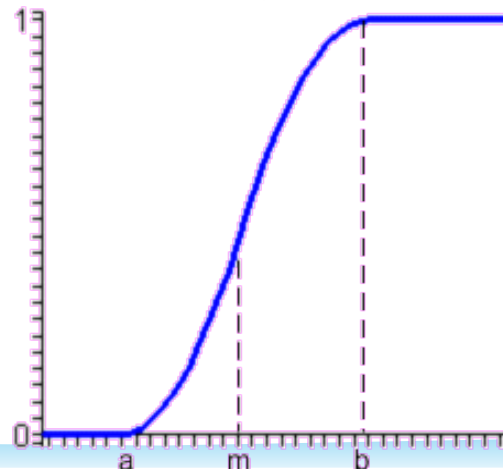
Función L



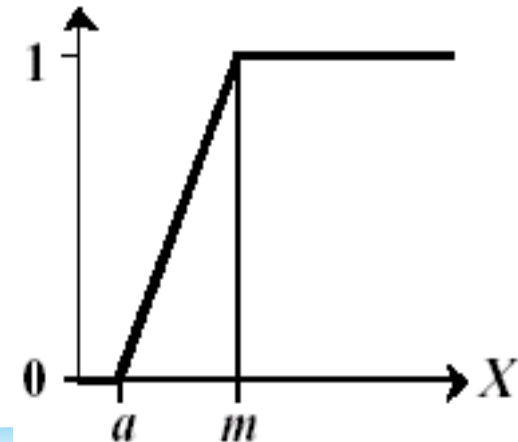
Función gaussiana



Función S

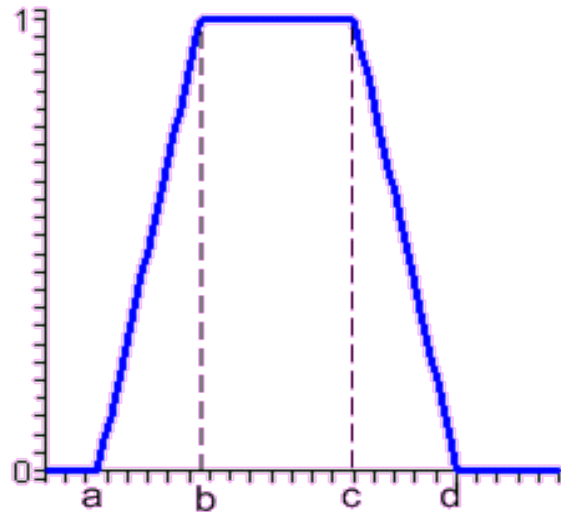


Función  $\Gamma$  (gamma)

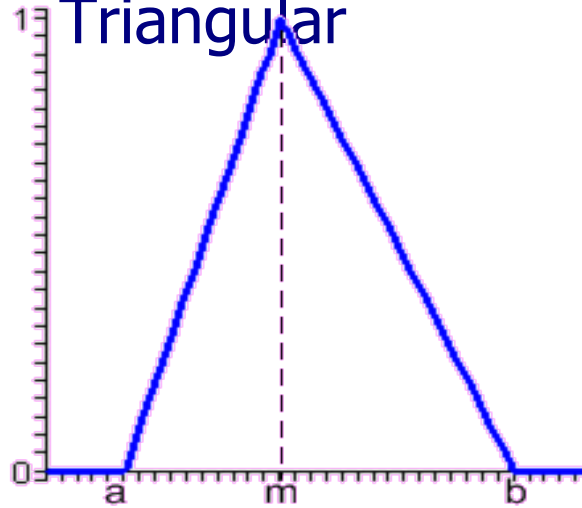


# Funciones de pertenencia típicas

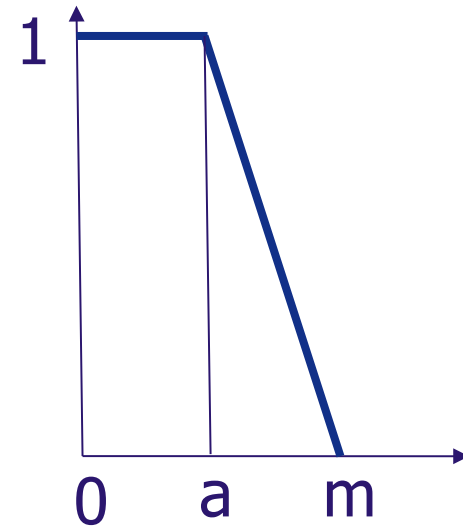
Función Trapezoidal



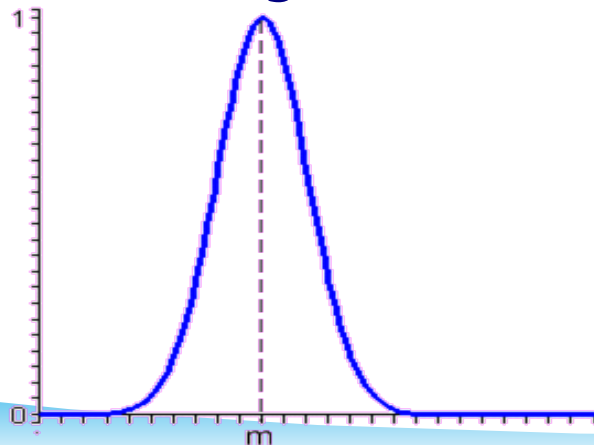
Función Triangular



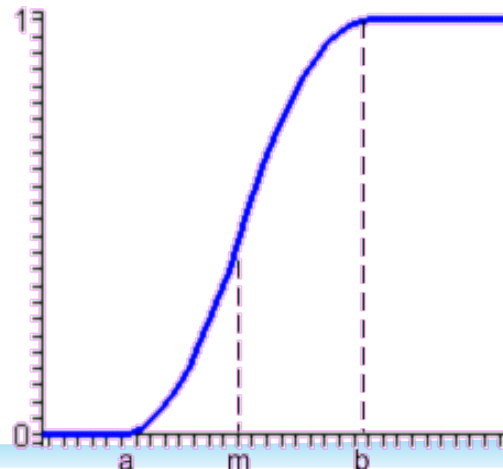
Función L



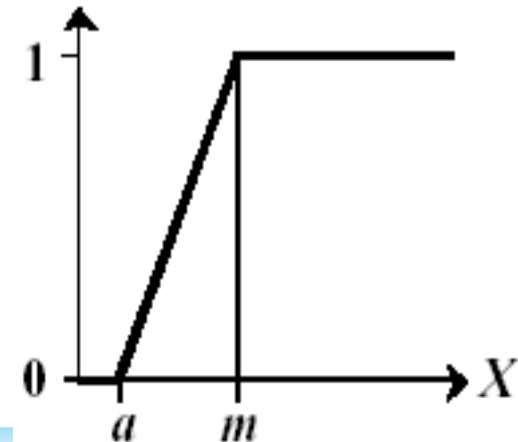
Función gaussiana



Función S

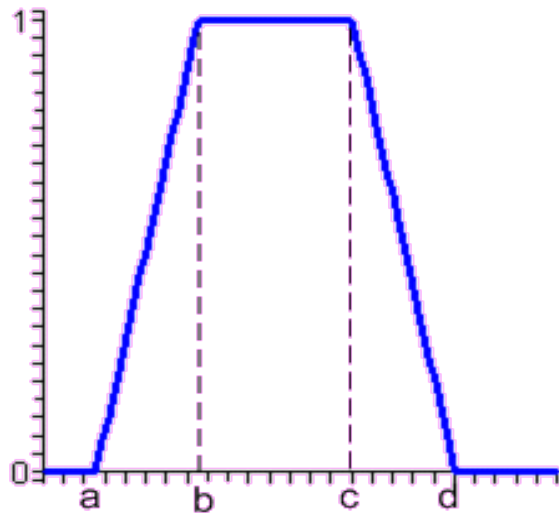


Función  $\Gamma$  (gamma)



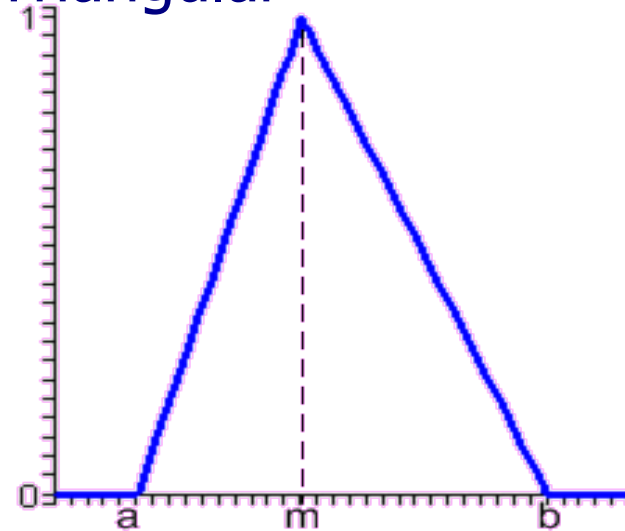
# Funciones de pertenencia típicas

## Función Trapezoidal



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \text{ ó } x > d \\ [(x - a) / (b - a)], & a < x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ [(d - x) / (d - c)], & c \leq x \leq d \end{cases}$$

## Función Triangular



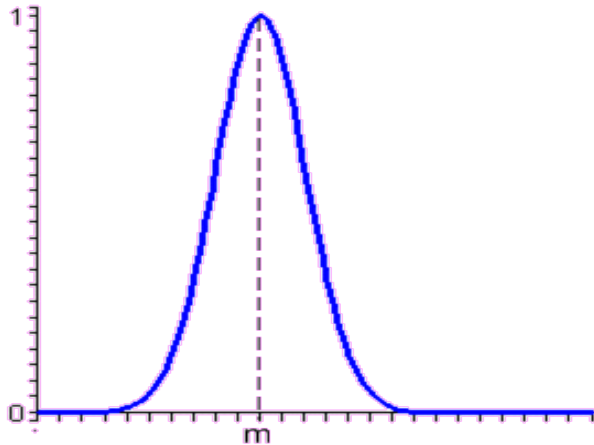
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ [(x - a) / (m - a)], & a < x \leq m \\ [(b - x) / (b - m)], & m < x < b \\ 0, & \text{si } x \geq b \end{cases}$$





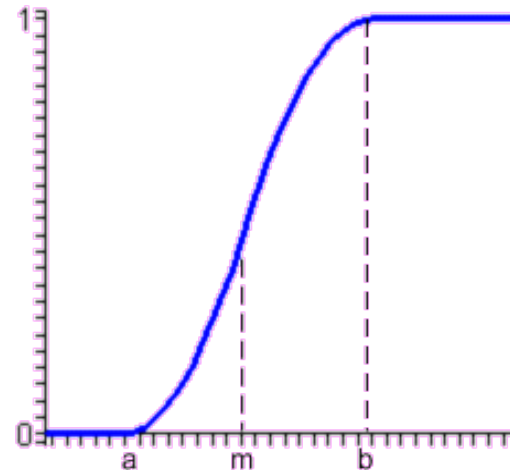
# Funciones de pertenencia típicas

## Función gaussiana



$$\mu_A(x) = \exp [-k (x-m)]^2$$

## Función S

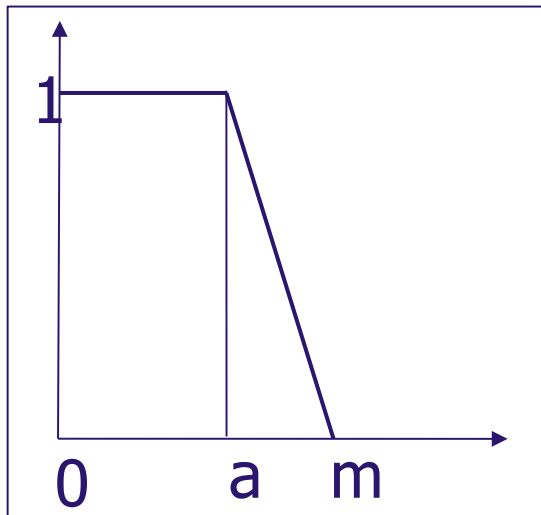


$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 2 [(x - a) / (b - a)]^2, & a < x \leq m \\ 1 - 2 [(x - b) / (b - a)]^2, & m < x < b \\ 1, & \text{si } x \geq b \end{cases}$$



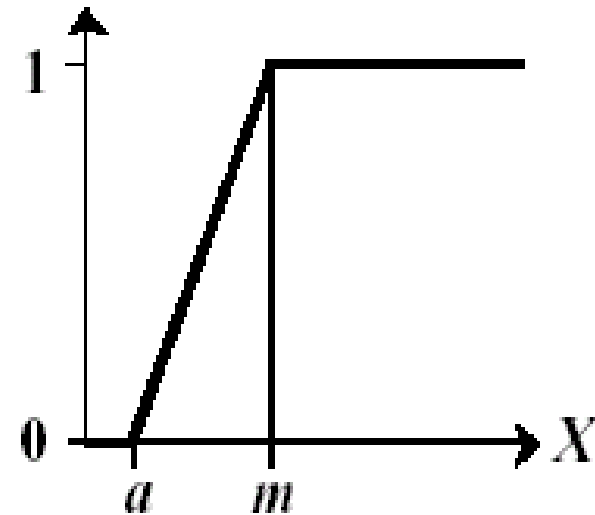
# Funciones de pertenencia típicas

Función L



$$L(x; a, m) = \begin{cases} 1, & x < a \\ \frac{a - x}{m - a}, & a \leq x \leq m \\ 0, & x > m \end{cases}$$

Función  $\Gamma$  (gamma)

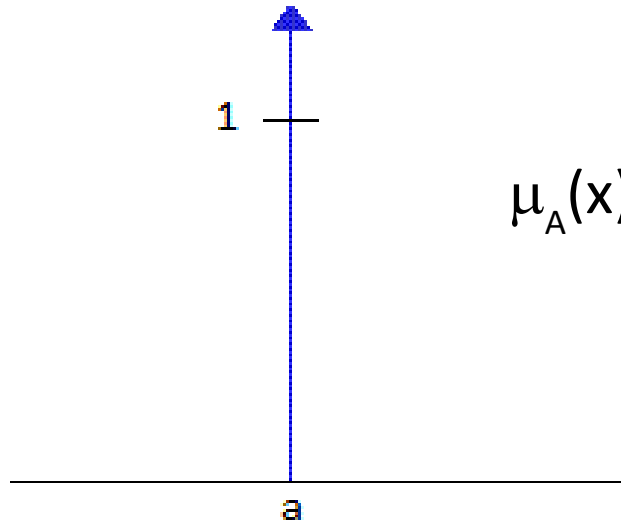


$$\Gamma(x; a, m) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x - a}{m - a}, & a \leq x \leq m \\ 1, & x > m \end{cases}$$



# Funciones de pertenencia típicas

## Función de tipo Singleton

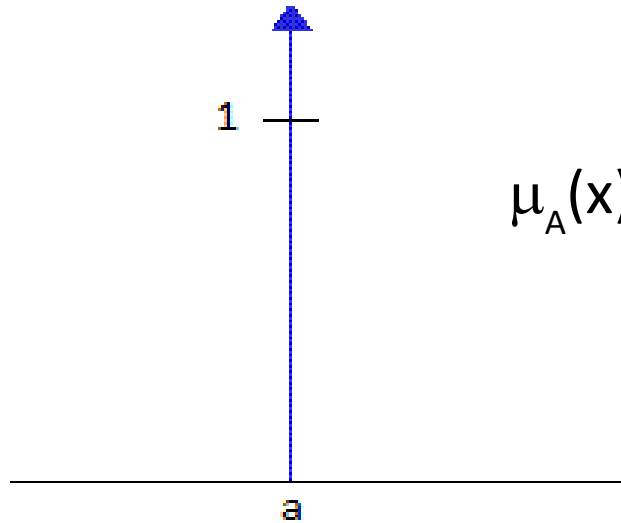


$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & a = x \\ 0 & a \neq x \end{cases}$$



# Funciones de pertenencia típicas

## Función de tipo Singleton

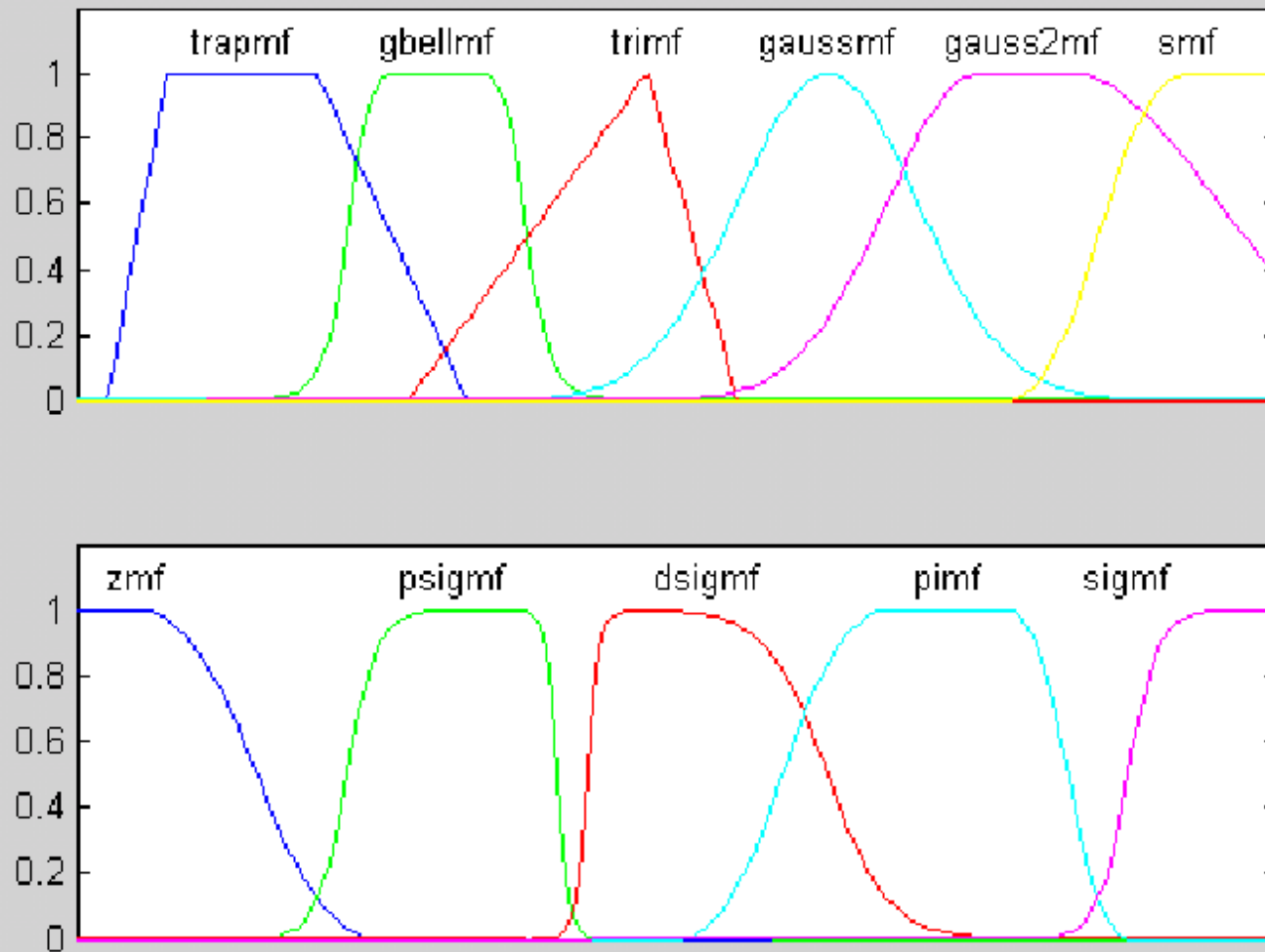


$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & a = x \\ 0 & a \neq x \end{cases}$$





# Funciones de pertenencia típicas



## ❖ Formulado por Zadeh(1975) :

“A medida que aumenta la complejidad de un sistema, nuestra capacidad de establecer sentencias precisas y significativas va disminuyendo hasta que se alcanza un umbral a partir del cual la precisión y el significado se convierten en características mutuamente exclusivas”.



## Sistemas de Inferencia Borroso (SIB) o Fuzzy Inference System (FIS)

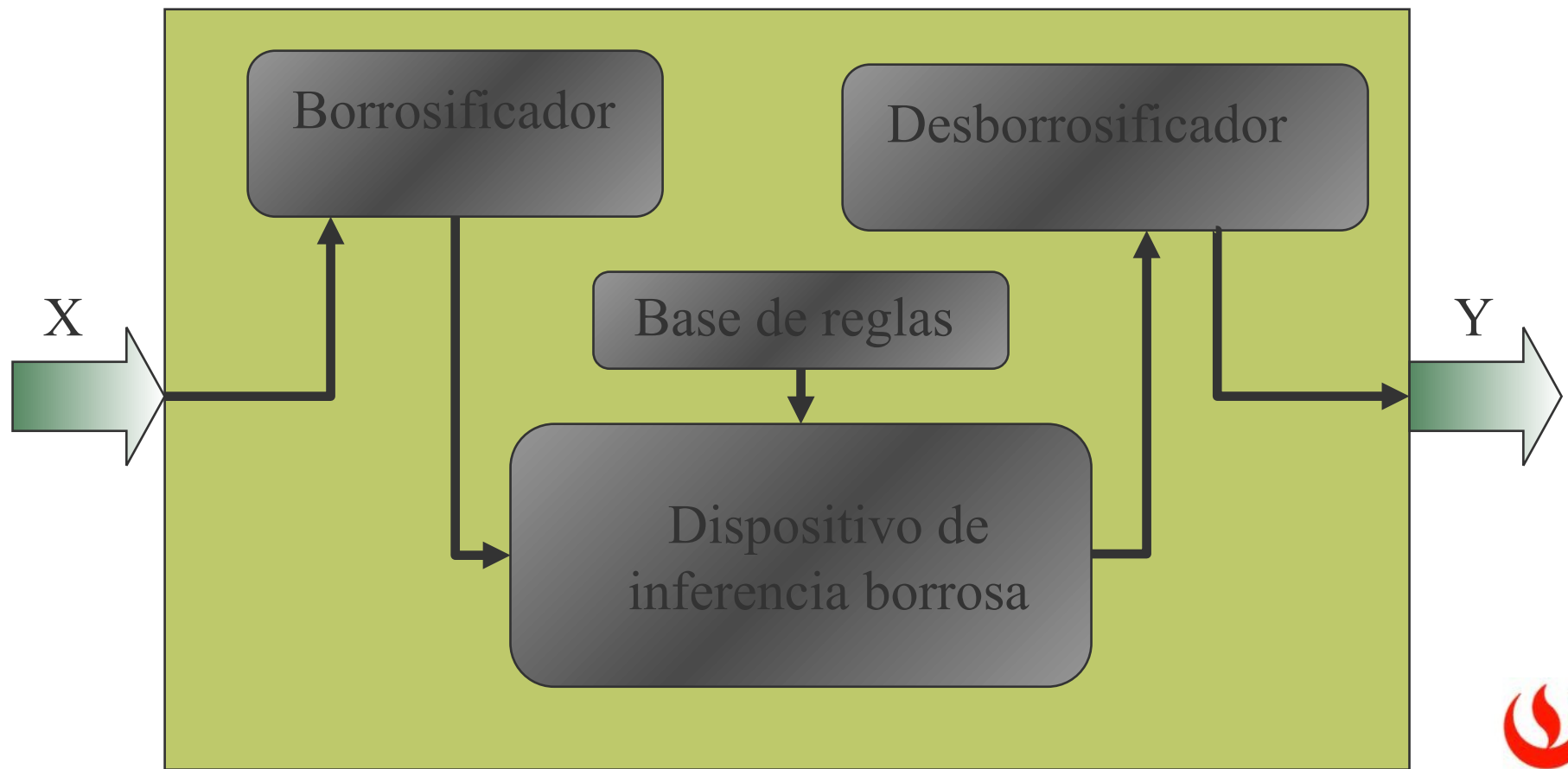
- ❖ son SE con razonamiento aproximado
- ❖ SIB constituye un método que interpreta los valores de un vector de entrada y basado en un conjunto de reglas lógicas borrosas, asigna valores a un vector de salida (mapea un vector de entrada a una salida de tipo escalar)





# Sistema experto basado en Lógica Difusa

## Arquitectura de un SIB



## Problemas a resolver

- 1)                      SI  $u$  es  $A$                        $u \in U$   
                          ENTONCES  $v$  es  $B$                        $v \in V$

$u$ : variable lingüística de entrada

$v$ : variable lingüística de salida

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) \in [0, 1]$$

mide el grado de veracidad  
de la implicación entre  $x$  y  $y$

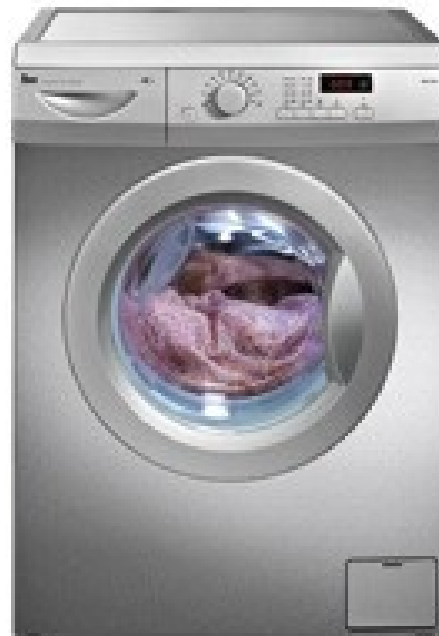
- 2) Y para el conjunto de reglas que se activan?



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Caso de Estudio: Control de una máquina lavadora

- ❖ Esta tarea de control se puede realizar:
  - manualmente
  - control basado en lógica difusa



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Controlador difuso de una máquina lavadora

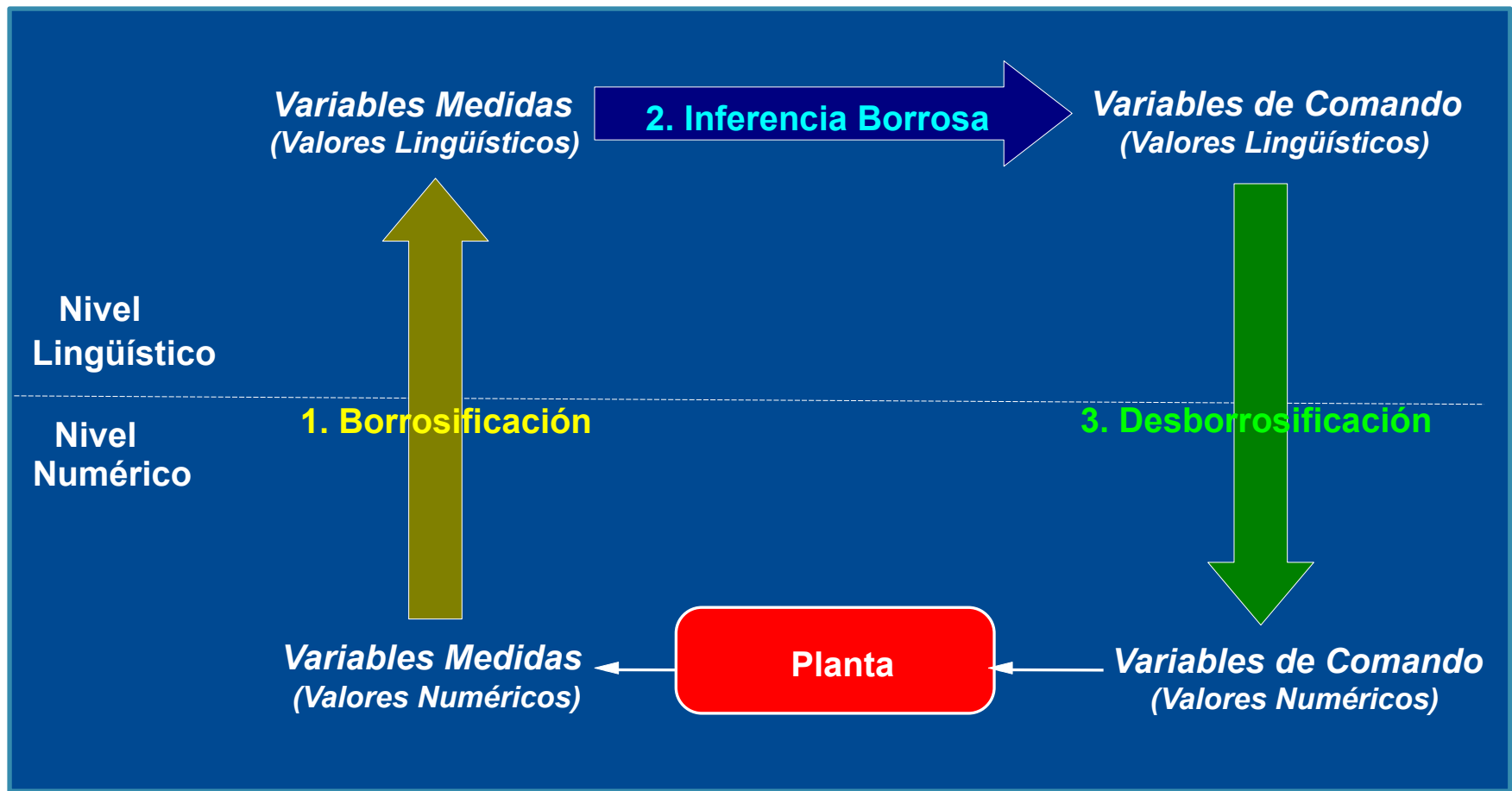
Idea: construir una máquina lavadora totalmente automatizada

Objetivo: diseñar y desarrollar el controlador de una máquina lavadora que proporcione el tiempo de lavado



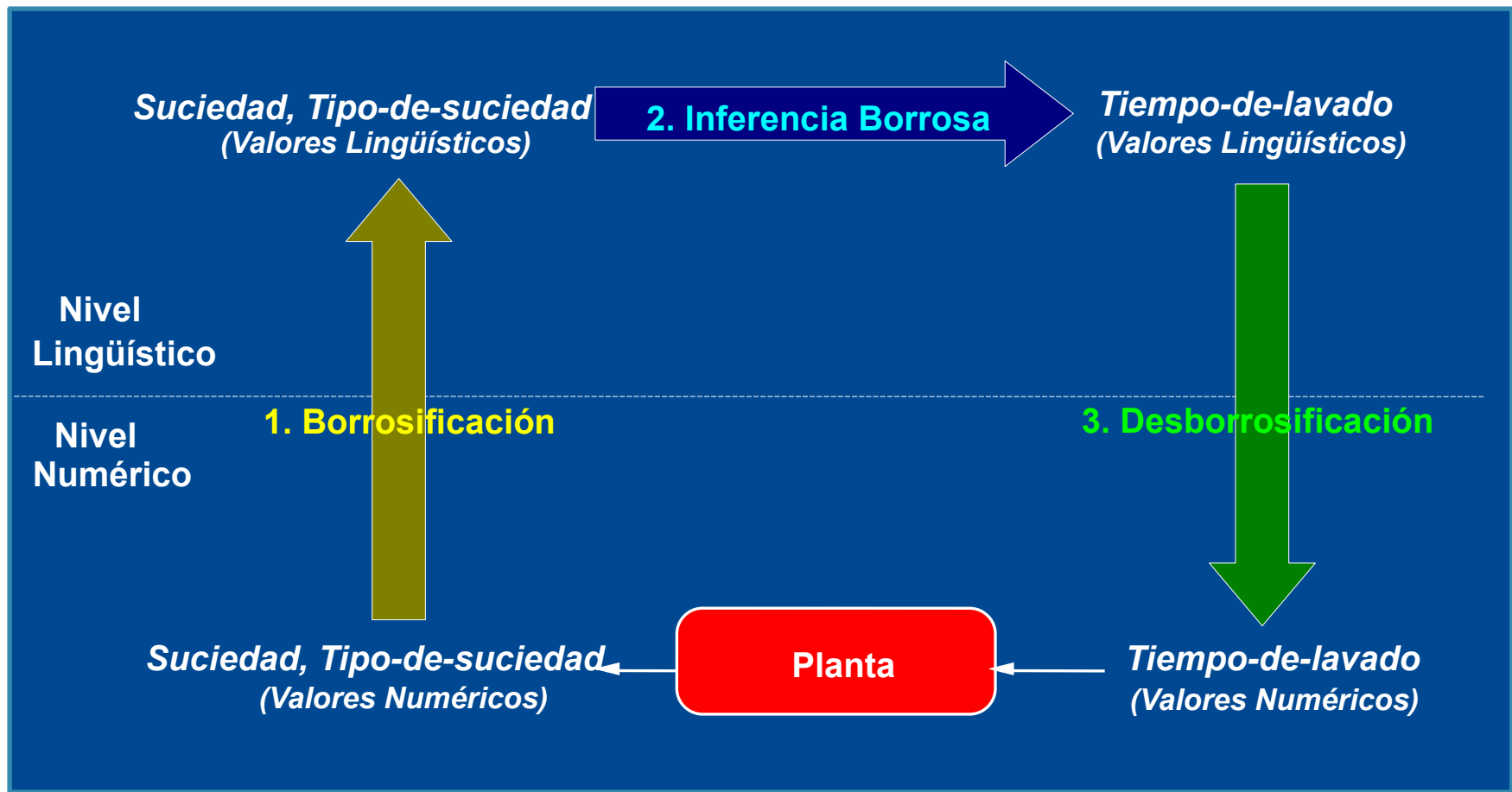
# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Borrosificación, Inferencia difusa, Desborrosificación



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Controlador difuso de una máquina lavadora



## ❖ Elementos de una variable lingüística

Regla práctica:

VARIABLE CUANTITATIVA + término lingüístico ambiguo

EJM.

	<i>alta</i>
temperatura	<i>normal</i>
	<i>baja</i>

A cada término le corresponde un CD



# Variables Lingüísticas

## 1. Universo de discurso

Rango: LIM INF – LIM SUP

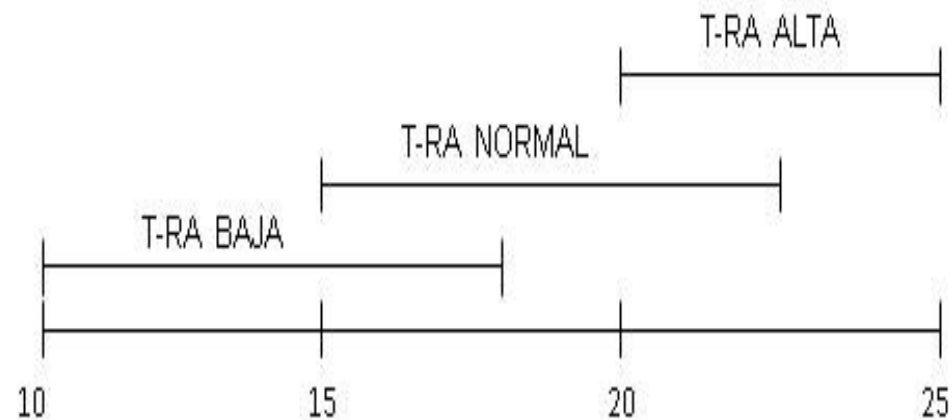
Supongamos: 10 °C - 25 °C

## 2. Partición del Universo de discurso en CBs

t-ra alta 20-25

t-ra normal 15-23

t-ra baja 10-18

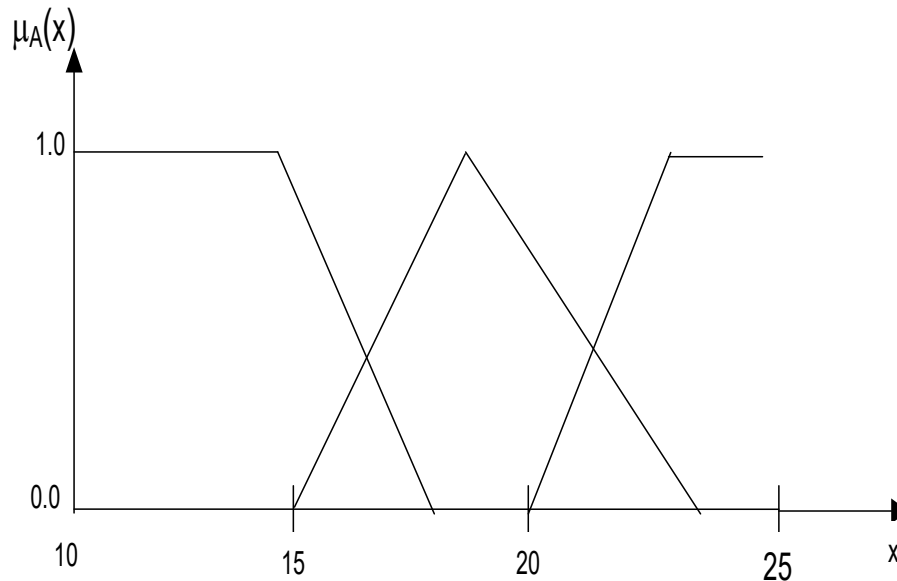


Dominio de los CBs y solapamiento dependen del diseñador





## 3. Funciones de pertenencia



Gralmente nro de funciones de pertenencia es impar (3-9)

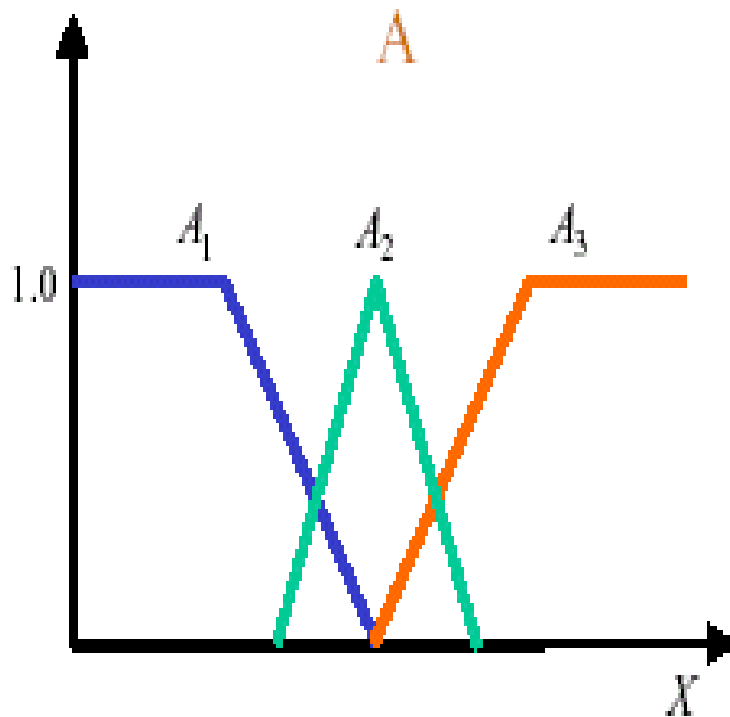
Gralmente traslape de 2 CDs, o de 3 CDs

Regla práctica: cuando se requiere mayor sensibilidad en la salida debido a cambios en las entradas → mayor granularidad en esa región de entrada

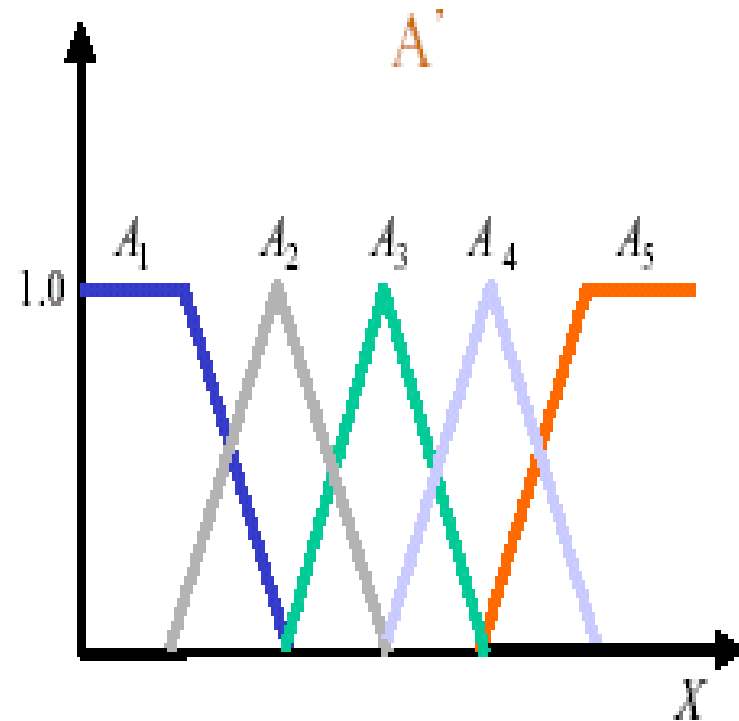
Costo computacional?

# Variables Lingüísticas

## Granularidad



Partición gruesa de  $X$



Partición fina de  $X$



## DESARROLLO DE UN CONTROLADOR BORROSO

### 1) Análisis

Identificar variables  Entrada  
Salida

### 2) Para cada variable

2.1 Universo de discurso

2.2 Partición

2.3 Fc de pertenencia



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## DESARROLLO DE UN CONTROLADOR BORROSO

### 3) Construir una tabla de decisión

VE1	VE2	.....	VEn	VS

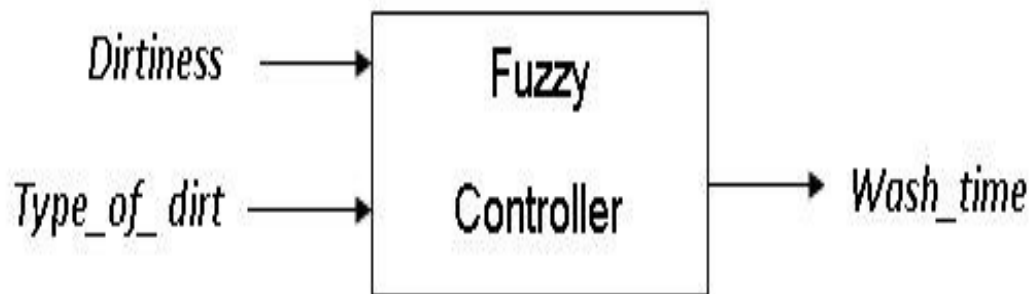
### 4) Construir la base de reglas (BR)



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Desarrollo del controlador borroso de una máquina lavadora

### 0) Diagrama de bloques



### 1) Análisis:

Variables de entrada: Dirtiness (nivel de suciedad)  
Type of dirt (Tipo de suciedad)

Variable de salida: Wash time (tiempo de lavado)



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Desarrollo del controlador borroso de una máquina lavadora

### 2) Para cada variable

#### 2.1 Dirtiness

Universo de discurso 0 – 100 %

##### Términos

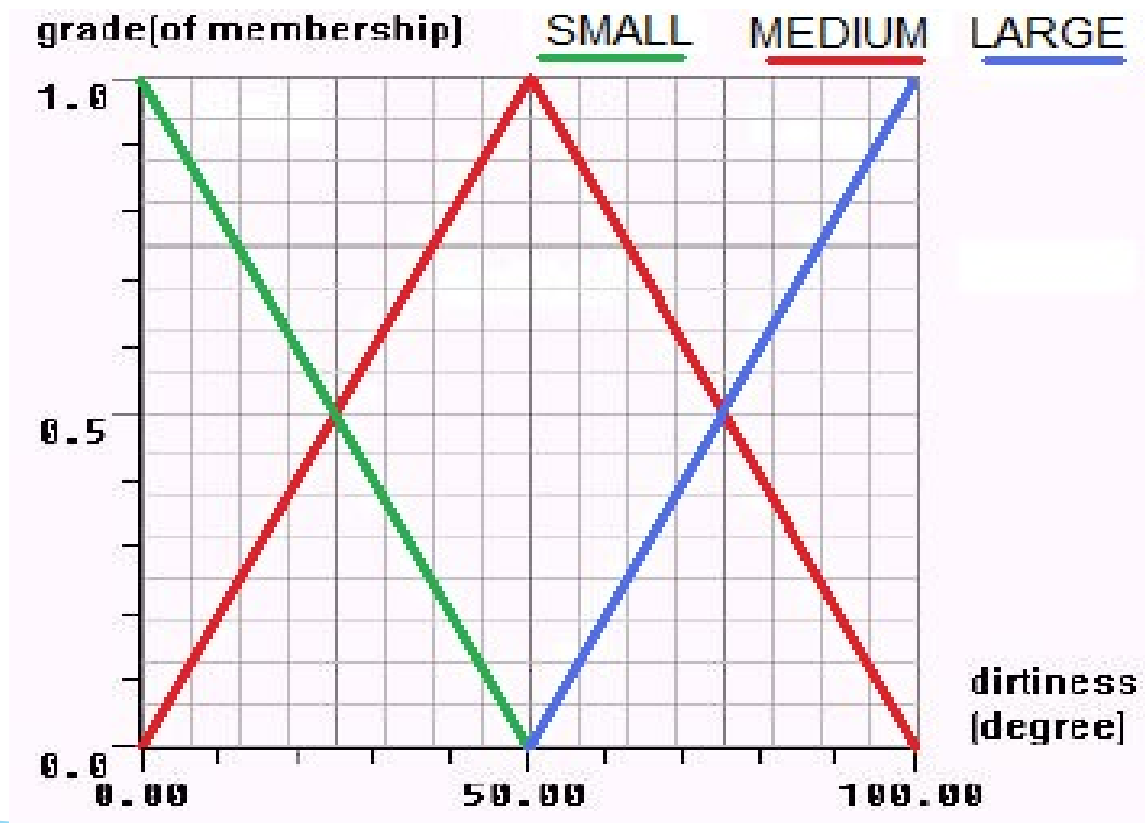
Nivel de suciedad Bajo (Small)	0 - 50
Nivel de suciedad Medio (Medium)	0 - 100
Nivel de suciedad Alto (Large)	50 - 100



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

Desarrollo del controlador borroso de una máquina lavadora

Variable de Entrada **Dirtiness**



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Desarrollo del controlador borroso de una máquina lavadora

### 2.2 Type\_of\_Dirt

Universo de discurso 0 – 100 %

#### Términos

Nivel de suciedad No-grasoso (NotGreasy) 0 - 50

Nivel de suciedad Medio (Medium) 0 - 100

Nivel de suciedad Grasoso (Greasy) 50 - 100

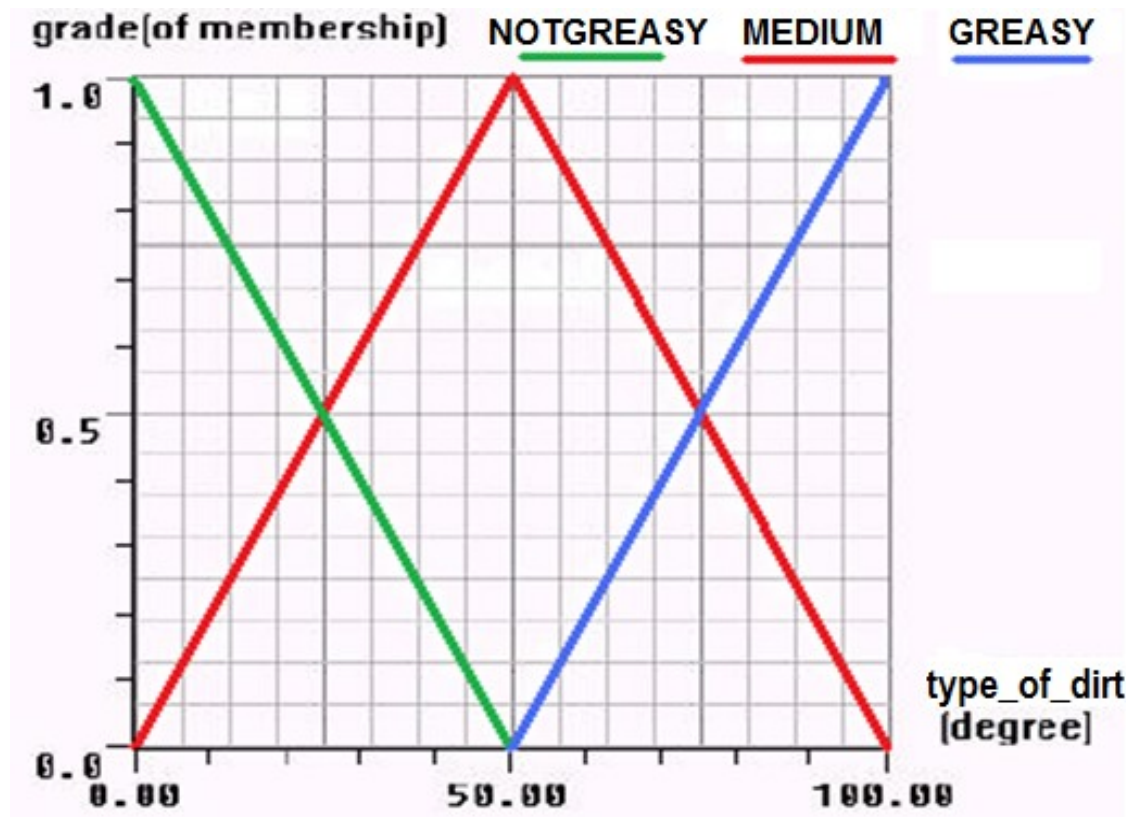




# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Desarrollo del controlador borroso de una máquina lavadora

Variable de Entrada **Type\_of\_dirt**



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

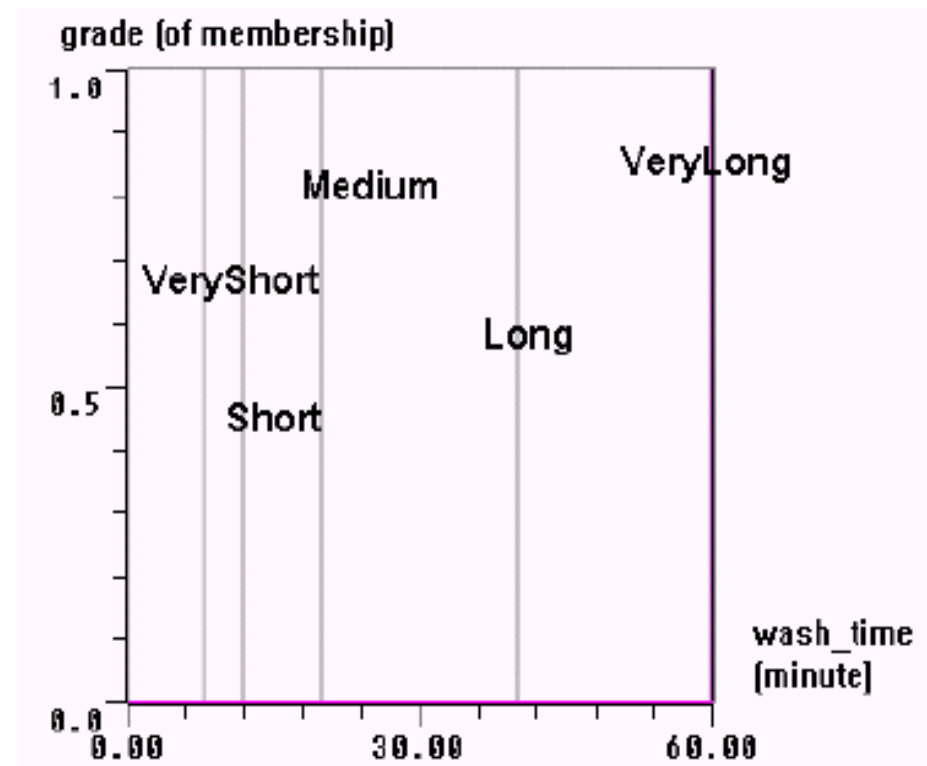
## Desarrollo del controlador borroso de una máquina lavadora

### 2.3 Wash\_time

Universo de discurso 0 – 60 min

#### Términos

Tiempo de lavado	VeryShort	8
Tiempo de lavado	Short	12
Tiempo de lavado	Medium	20
Tiempo de lavado	Long	40
Tiempo de lavado	VeryLong	60



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Desarrollo del controlador borroso de una máquina lavadora

### 3) Construir una tabla de decisión

<b>Dirtiness</b>	<b>Type-of_dirt</b>	<b>Wash_time</b>
LARGE	GREASY	VERYLONG
MEDIUM	GREASY	LONG
SMALL	GREASY	LONG
LARGE	MEDIUM	LONG
MEDIUM	MEDIUM	MEDIUM
SMALL	MEDIUM	MEDIUM
LARGE	NOTGREASY	MEDIUM
MEDIUM	NOTGREASY	SHORT
SMALL	NOTGREASY	VERYSHORT



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Desarrollo del controlador borroso de una máquina lavadora

### 4) Base de Reglas Borrosas

IF dirtiness\_of\_clothes is Large and type\_of\_dirt is Greasy THEN wash\_time is VeryLong  
IF dirtiness\_of\_clothes is Medium and type\_of\_dirt is Greasy THEN wash\_time is Long  
IF dirtiness\_of\_clothes is Small and type\_of\_dirt is Greasy THEN wash\_time is Long  
IF dirtiness\_of\_clothes is Large and type\_of\_dirt is Medium THEN wash\_time is Long  
IF dirtiness\_of\_clothes is Medium and type\_of\_dirt is Medium THEN wash\_time is Medium  
IF dirtiness\_of\_clothes is Small and type\_of\_dirt is Medium THEN wash\_time is Medium  
IF dirtiness\_of\_clothes is Large and type\_of\_dirt is NotGreasy THEN wash\_time is Medium  
IF dirtiness\_of\_clothes is Medium and type\_of\_dirt is NotGreasy THEN wash\_time is Short  
IF dirtiness\_of\_clothes is Small and type\_of\_dirt is NotGreasy THEN wash\_time is VeryShort



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Desarrollo del controlador borroso de una máquina lavadora

### EJERCICIO

Suponga: Dirtiness = 30

Type\_of\_dirt = 15

Valor de salida del controlador difuso?

### SOLUCIÓN

#### 1) Valores crisp (nítidos)

Dirtiness = 30

Type\_of\_dirt = 15



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Desarrollo del controlador borroso de una máquina lavadora

SOLUCIÓN-continuación

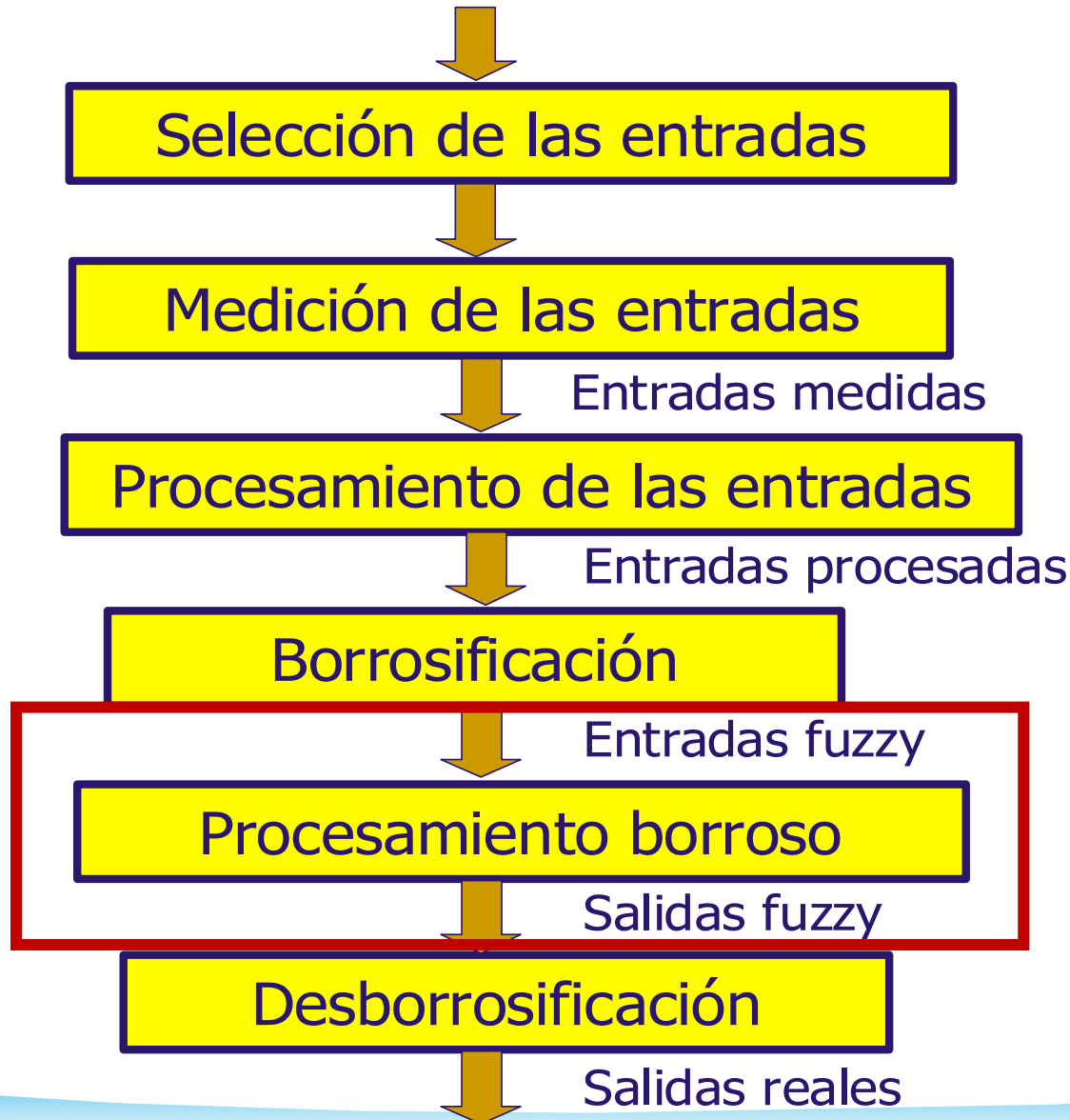
### 2) Borrosificación (método gráfico)

Dirtiness=30  $\left\{ \begin{array}{l} 0.39 \text{ para término } \textit{Small} \\ 0.62 \text{ para término } \textit{Medium} \end{array} \right.$

Type\_of\_Dirt=15  $\left\{ \begin{array}{l} 0.68 \text{ para término } \textit{NotGreasy} \\ 0.32 \text{ para término } \textit{Medium} \end{array} \right.$



# Operación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa





# Inferencia borrosa

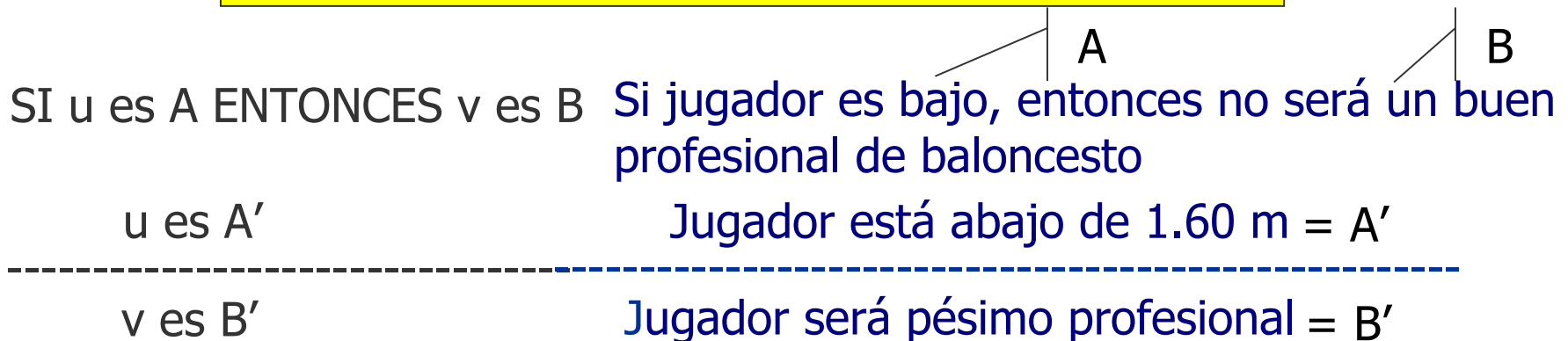
## Modus Ponens Generalizado (MPG)

Conocimiento: SI  $u$  es  $A$  ENTONCES  $v$  es  $B$

Hecho:  $u$  es  $A'$

Consecuencia:  $v$  es  $B'$

$A'$  y  $B'$  no son necesariamente iguales a  $A$  y  $B$  respectivamente, son similares



$A \neq A'$  pero es similar

$B \neq B'$  pero es similar





# Procesamiento borroso – Método Mamdani

Entradas borrosas



Mecanismo de  
Inferencia Difusa



Salidas borrosas

Reglas activadas



Cálculo de la parte SI de cada  
regla (Antecedentes)



Cálculo de la parte ENTONCES  
de cada regla (Consecuentes)



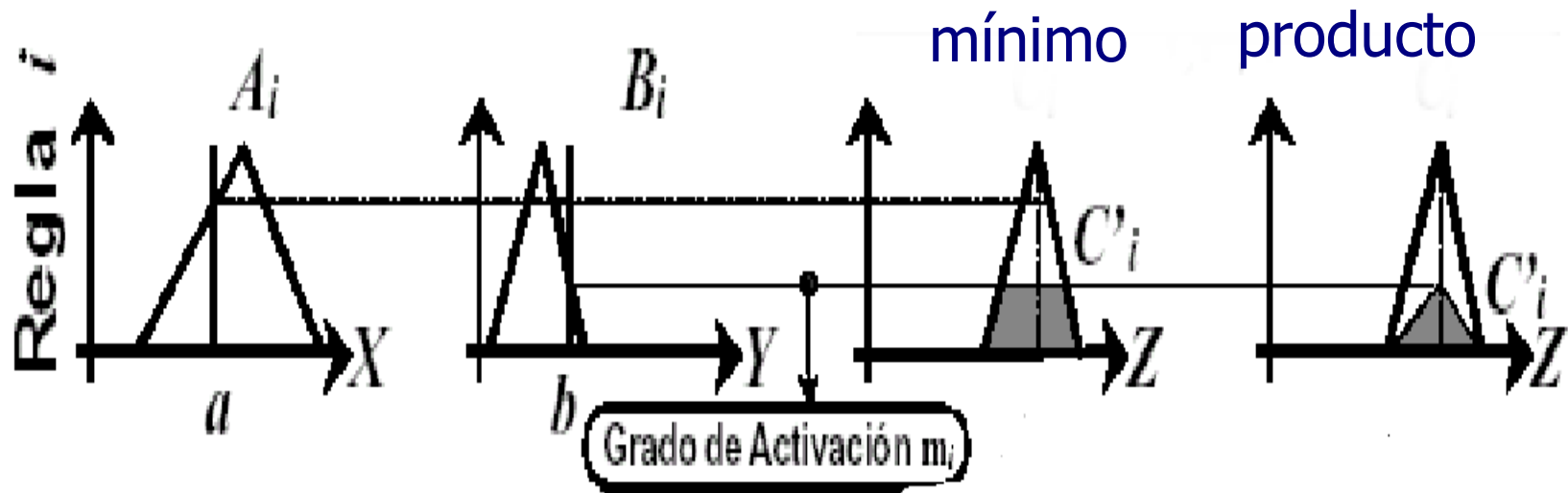
CBs de salida (*max* si se  
requiere)



# Inferencia difusa

Gráficamente:

*Regla 1: Si  $x$  es  $A$  y  $y$  es  $B$  then  $z$  es  $C$*



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Desarrollo del controlador borroso de una máquina lavadora

SOLUCIÓN-continuación

### 3) Reglas activadas

Dirtiness Small	<	Type_of_Dirt	<b>R6</b>
		<i>Medium</i>	
		Type_of_Dirt <i>NotGreasy</i>	<b>R9</b>

Dirtiness <i>Medium</i>	<	Type_of_Dirt	<b>R5</b>
		<i>Medium</i>	
		Type_of_Dirt <i>NotGreasy</i>	<b>R8</b>



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Desarrollo del controlador borroso de una máquina lavadora

SOLUCIÓN-continuación

### 4) Razonamiento borroso o difuso

#### 4.1) Cálculo de la parte IF

**R6**

0.39

0.32

IF Dirtiness is *Small* and Type\_of\_Dirt is *Medium*

$$\min(0.39, 0.32) = 0.32$$

**R9**

0.39

0.68

IF Dirtiness is *Small* AND Type\_of\_Dirt is *NotGreasy*

$$\min(0.39, 0.68) = 0.39$$



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Desarrollo del controlador borroso de una máquina lavadora

SOLUCIÓN-continuación

### 4) Razonamiento borroso o difuso

#### 4.1) Cálculo de la parte IF

**R5**

0.62

0.32

IF Dirtiness is *Medium* AND Type\_of\_Dirt is *Medium*

$$\min(0.62, 0.32) = 0.32$$

**R8**

0.62

0.68

IF Dirtiness is *Medium* AND Type\_of\_Dirt is *NotGreasy*

$$\min(0.62, 0.68) = 0.62$$



# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Desarrollo del controlador borroso de una máq lavadora

SOLUCIÓN-continuación

### 4) Razonamiento borroso o difuso

#### 4.1) Cálculo de la parte THEN

**R6** Wash\_time is *Medium* 0.32

**R9** Wash\_time is *VeryShort* 0.39

**R5** Wash\_time is *Medium* 0.32

**R8** Wash\_time is *Short* 0.62

Wash\_time is *Medium*  $\max(0.32, 0.32) = 0.32$



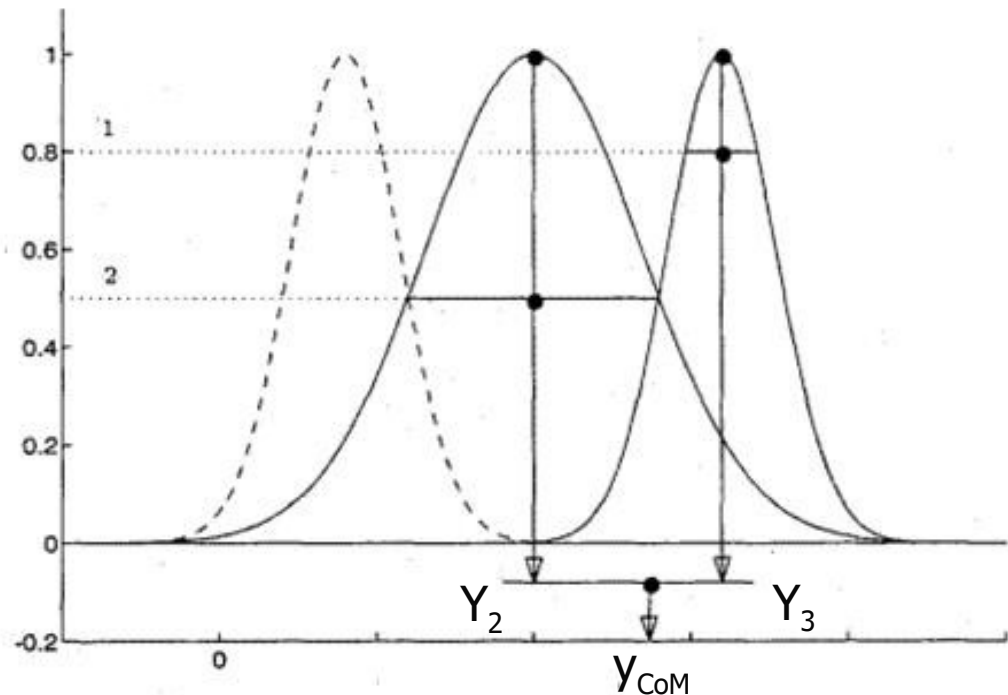
# Desborrosificación

## Centro de Máximos (CoM)

Determina el valor «típico» (máximo) de cada término y lo pondera por sus activaciones

$$y_{\text{CoM}} = \frac{\sum_j (Y_j * \omega_j)}{\sum_j \omega_j}$$

$$\omega_j = \mu_{\text{Resultante},j}$$



Variable de salida

# Aplicación de un sistema inteligente basado en Lógica Difusa

## Desarrollo del controlador borroso de una máq lavadora

### SOLUCIÓN-continuación

#### 5) Desborrosificación

Centro de Máximos (CoM) 
$$y_{\text{CoM}} = \frac{\sum_j (Y_j * \omega_j)}{\sum_j \omega_j}$$

donde  $\omega_j = \mu_{\text{Resultante},j}$

$\mu_{\text{Resultante},j}$  : grado de activación en regla j (LI)

$\omega_j$  : grado de cumplimiento en regla j (LD)

$Y_j$  : valor «típico» (máximo) de cada término

$$y_{\text{CoM}} = \frac{0.32 \times 20 + 0.62 \times 12 + 0.39 \times 8}{0.32 + 0.62 + 0.39}$$

$$y_{\text{CoM}} = 12.75 \text{ min}$$



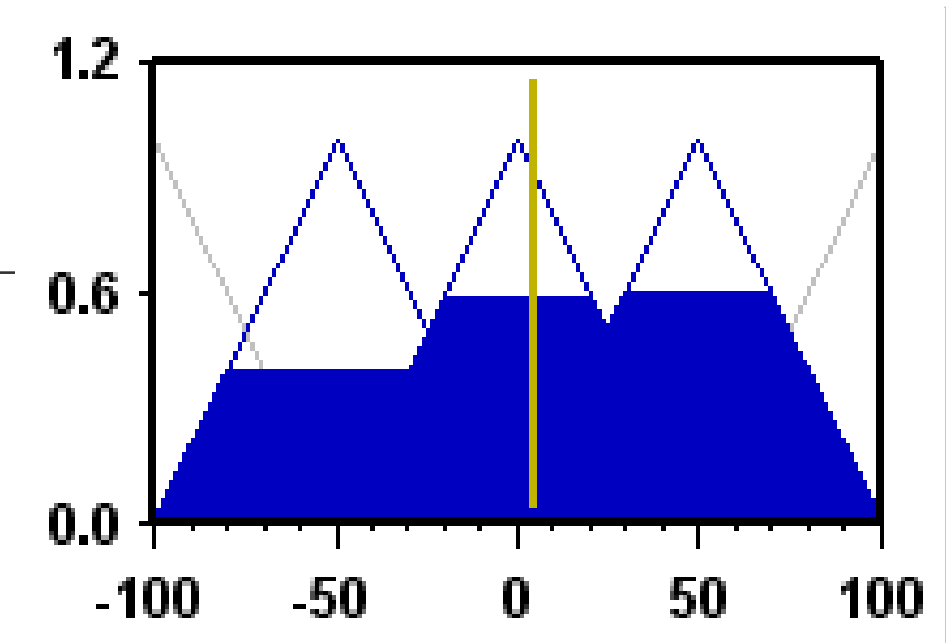


# Desborrosificación

## Centro de áreas (CoA)

$$y_{\text{CoA}} = \frac{\int_S \mu_B(u) u \, du}{\int_S \mu_B(u) \, du}$$

s: soporte de B



# Cálculo de la parte ENTONCES

## Centro de áreas (CoA)

EJM.

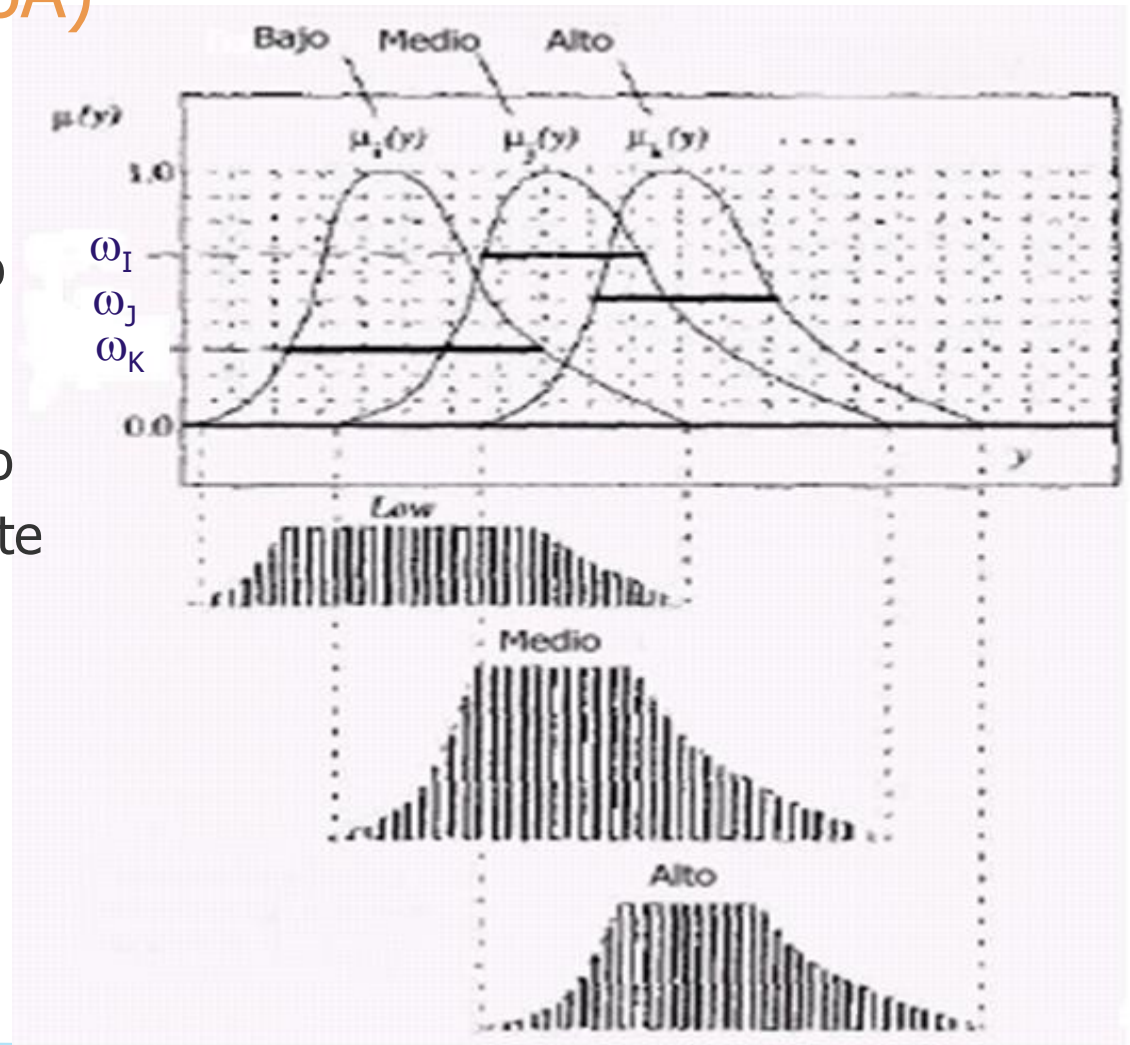
Tres reglas activadas:

I .... ENTONCES Y es medio

J .... ENTONCES Y es Alto

K .... ENTONCES Y es Bajo  
con grados de cumplimiento

$\omega_I$ ,  $\omega_J$  y  $\omega_K$  respectivamente



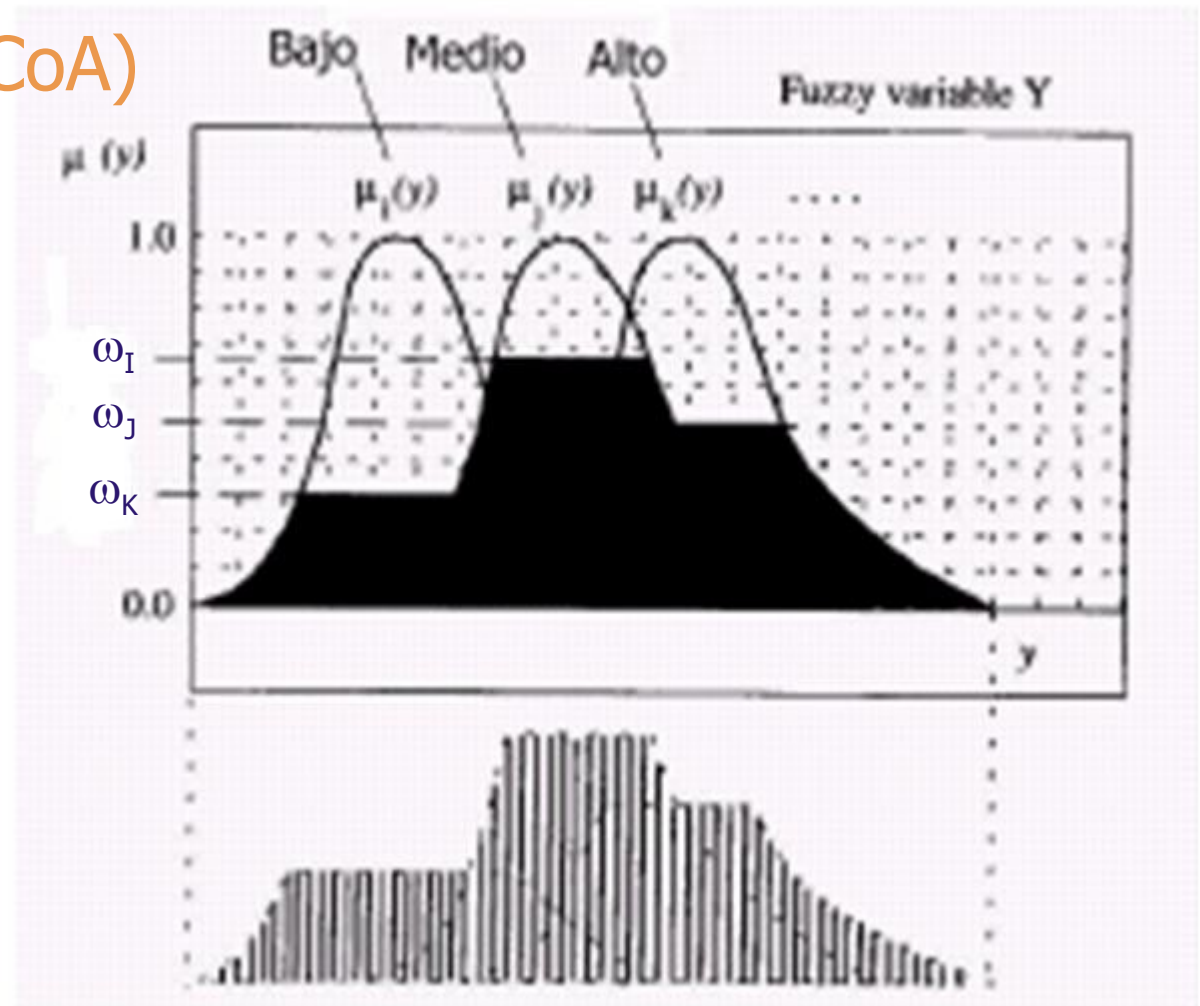
# Unión de las salidas

## Centro de áreas (CoA)

EJM.

Agregación de CBs  
obtenidos se hace,  
normalmente, a través  
de la operación de unión

Para el ejemplo anterior,  
se obtiene un nuevo CB



## Operadores más usados

- ❖ Conectiva AND (y): mínimo (o producto)
- ❖ Conectiva OR (o): máximo
- ❖ Negación:  $\neg A(x) = 1 - \mu_A(x)$
- ❖ Implicación: Mamdani (sup-min)  
Sugeno
- ❖ Agregación de reglas: máximo
- ❖ Desborrosificación: CoM, CoA



## ❖ Herramientas computacionales

1) MATLAB

    Toolbox de Lógica Nebulosa

    Toolbox de Algoritmos Genéticos

2) FuzzyTECH

3) Xfuzzy

4) FuzzyCLIPS

5) FISi Logic, entre otros



# Cierre

- ❖ Se entendió la representación del conocimiento mediante reglas de producción imprecisas
- ❖ Se entendió la diferencia entre probabilidad y borrosidad
- ❖ Se entendió el concepto de cjtos difusos y su diferencia respecto de los clásicos
- ❖ Se entendió el concepto de lógica difusa
- ❖ Se conoció la arquitectura de los denominados Sistemas de Inferencia Borrosa
- ❖ Se entendió el proceso de inferencia en los SIBs 