



# INTELIGENCIA ARTIFICIAL

Facultad de Ing. de Sistemas e  
Informática - EPIS

UNMSM

# Agenda

- ❖ Razonamiento aproximado
- ❖ Conjuntos difusos
  - Conjuntos clásicos y conjuntos difusos
  - Funciones de pertenencia
  - Operaciones con CDs
- ❖ Lógica Difusa
  - Conceptos
  - Sistemas de Inferencia Difusa
  - Síntesis

# Bibliografía

## ❖ Redes Neuronales y Sistemas Difusos

B. Martín del Brío, A. Sanz Molina, Ed. Alfaomega 2000

## ❖ Fuzzy Sets and Fuzzy Logic

J. Klir, Bo Yuan, Ed. Prentice Hall 1995

## ❖ Disponible en INTERNET

libro electrónico

[http:// www.imse.cnm.es/Xfuzzy/Fleb/Fleb.htm](http://www.imse.cnm.es/Xfuzzy/Fleb/Fleb.htm)

artículo "Computación Suave"

<http://www.redcientifica.com> → Inteligencia Artificial

# Clasificación de Sistemas Expertos

## Por el Tipo de Razonamiento

- ❖ Determinista
- ❖ No determinista o Aproximado
  - Razonamiento probabilístico
  - Razonamiento difuso o borroso

# Incertidumbre

- ❖ Tipos principales de incertidumbre: estocástica y **léxica**
- ❖ Disciplinas matemáticas p/ estudiar incertidumbre:  
teoría de la probabilidad, teoría de la información y la teoría de conjuntos difusos

# Incertidumbre

## ❖ Incertidumbre estocástica

Trata de la incertidumbre sobre la ocurrencia de un cierto evento.

EJMS.

La probabilidad de clasificar al Mundial de fútbol es 0.4

La probabilidad de obtener la visa para los EEUU es 0.7

## ❖ Incertidumbre léxica

Imprecisión inherente a la mayoría de las palabras que el ser humano usa para evaluar conceptos y sacar conclusiones

EJMS. Hay un nivel alto de corrupción en esa entidad

# Conceptos básicos

- ❖ Fundamento: lenguaje natural  
razonamientos aproximados con sentencias imprecisas

EJM.

A1: Normalmente. los coches antiguos son difíciles de encontrar.

A2 : Lo difícil de encontrar suele ser caro

C1: Por lo general, los coches antiguos son caros

# Conceptos básicos

- ❖ La lógica clásica o bivaluada es demasiado restrictiva:

Una afirmación puede no ser ni VERDAD ni FALSA

EJMS.

“Él es bueno en Java!”: ¿Es bueno, muy bueno o un poco mejor que regular?





# CONJUNTOS DIFUSOS

Ing. Mg. Rolando A. Maguiña Pérez

# Ejms de cjtos clásicos y difusos

Una mujer embarazada

Clásico

Los hombres altos

Difuso

Los números pares

Clásico

Los mayores de edad

Clásico

Un carro barato

Difuso

Jorge sabe inglés

Difuso

Julissa tiene brevete

Clásico

Diagnóstico complejo

Difuso

# Ejms de cjtos clásicos y difusos

Correlación

baja, media, alta, perfecta

Errores

grande, baja, media, muy grande,  
muy pequeña, casi cero

Frecuencia

baja, alta, ultra-alta

Tasa de muestreo

baja, media, alta, muy alta

.....

En contextos borrosos contiene  
información más útil!

# Conceptos básicos

## Conjuntos Difusos y su Lógica Difusa

- ❖ La palabra fuzzy viene del inglés fuzz (pelusa, vello) y se traduce por difuso
- ❖ La teoría de conjuntos difusos, base de la lógica difusa, se debe a L. Zadeh (1965)

**Importancia:** En la actualidad es un campo de investigación muy importante, tanto por sus implicaciones matemáticas o teóricas como por sus aplicaciones prácticas.



Ing. Mg. Rolando A. Maguiña Pérez

# Conceptos básicos

**Aplicaciones** (Sur, Omron, 1997; Zimmermann, 1993)

**Control de sistemas:** Control de tráfico, control de vehículos (helicópteros...), control de compuertas en plantas hidroeléctricas, control en máquinas lavadoras, control de metros, ascensores...

**Reconocimiento de patrones y Visión por ordenador:** Seguimiento de objetos con cámara, reconocimiento de escritura manuscrita, reconocimiento de objetos, compensación de vibraciones en la cámara

**Predicción y optimización:** Predicción de terremotos, optimizar horarios...

**Sistemas de información o conocimiento:** Bases de datos, sistemas expertos...

# Conceptos básicos

## Aplicaciones

### ❖ Industriales:

- Control de horno de cemento (Dinamarca)
- Control de horno de fundición (NKK Fukoyama)
- Operación automática del metro (Sundai, Japón)
- Acondicionador de aire doméstico (Mitsubishi)
- Lavadora (Viessmann, Fagor)
- Cámara autofoco (Sanyo)

### ❖ De laboratorio:

- Reconocedor de habla (NTT, Japón)
- Sistema experto en medicina (Univ. California)
- Control de robot autónomo (SRF, USA)

# **Cuándo usar tecnología difusa**

- ❖ En procesos complejos, si no existe un modelo de solución sencillo
- ❖ En procesos no lineales  
Cuando haya que introducir el conocimiento de un “experto” que se base en conceptos imprecisos obtenidos de su experiencia
- ❖ Cuando ciertas partes del sistema a controlar son desconocidas y no pueden medirse de forma fiable

**En general, cuando se quieran representar y operar con cptos que tengan imprecisión o incertidumbre**



# Conjuntos clásicos

- ❖ Un conjunto crisp  $A$  en un universo de discurso  $U$  puede definirse mediante una lista de todos sus elementos o identificando los elementos  $x \in A$

$$A = \{x \mid x \text{ cumple alguna condición}\}$$

- ❖ Podemos usar tbn una función de pertenencia denotado por  $\mu_A(x)$  /

$$A \Rightarrow \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

# Conjuntos clásicos

- ❖ El conjunto  $U$  de todos los automóviles en cierta ciudad esta dado por:

EJM. Considere  $U$  el cjto de todos los carros de Lima

Carros de Lima	4 cilindros
Carros que no son de Lima	<b>6 cilindros</b>
	<b>8 cilindros</b>
	<b>Otros</b>

$$A = \{x \in U \mid x \text{ tiene 4 cilindros}\}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U \text{ y } x \text{ tiene 4 cilindros} \\ 0 & \text{si } x \notin U \text{ y } x \text{ no tiene 4 cilindros} \end{cases}$$

# Conjuntos clásicos vs difusos

“Alta temperatura”

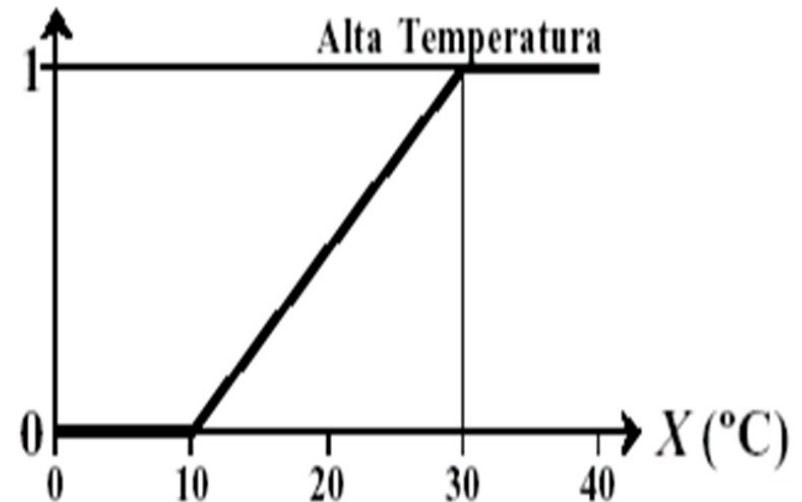
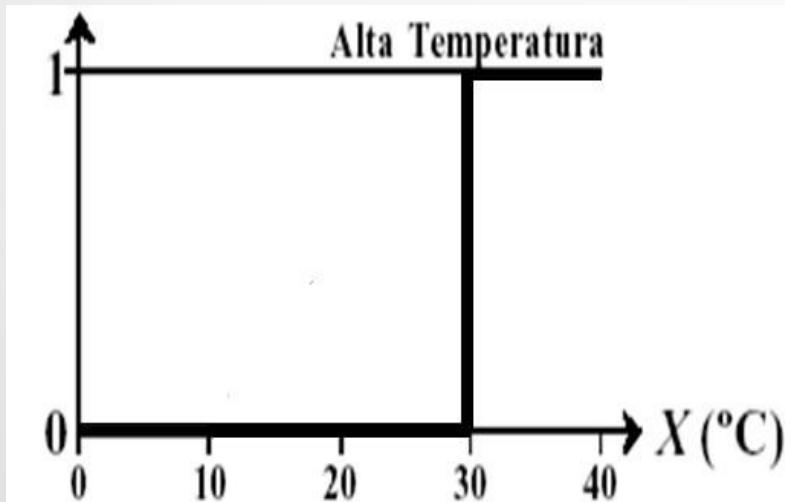
$$A = \{ (x, \mu_A(x) \mid x \in X \}$$

Cjto clásico

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 30 \\ 0 & \text{si } x < 30 \end{cases}$$

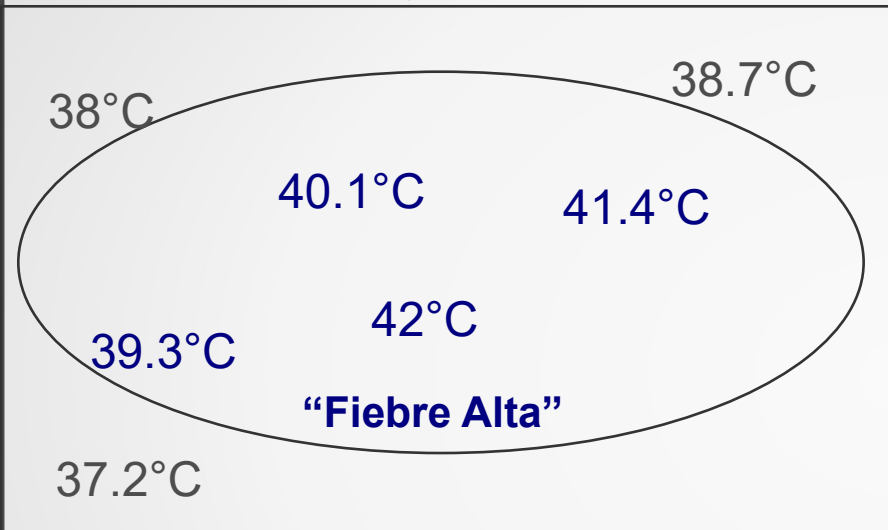
Cjto difuso

$$\mu_A(x) = x / 20 - 0.5$$

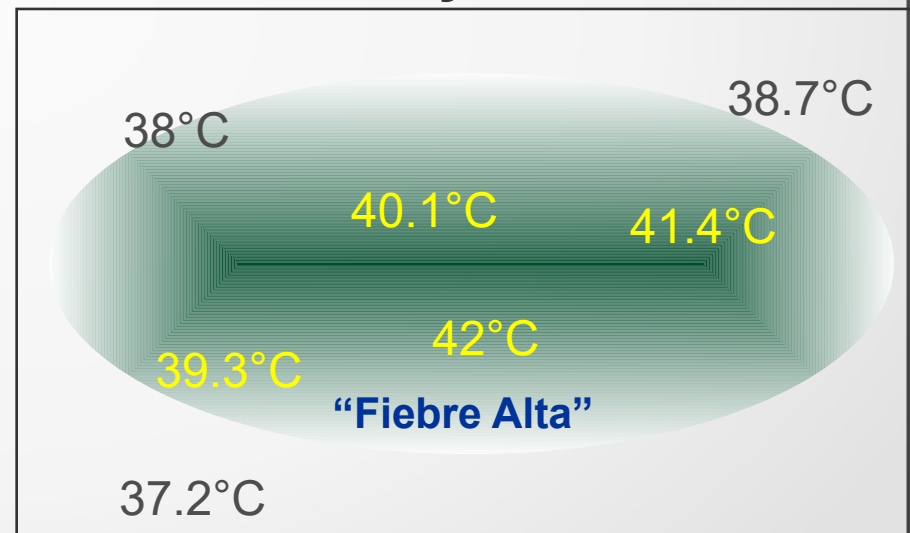


# Conjuntos clásicos vs difusos

## Teoría de Conjuntos Clásicos:



## Teoría de Conjuntos Borrosos:



# Conjuntos difusos

## ❖ Definición formal

Un conjunto difuso en  $U$  se expresa como un conjunto de pares ordenados

$$A = \{(x | \mu_A(x)) / x \in U\}$$

CD

Función de  
membresía


Universo o  
universo de  
discurso

Un conjunto difuso queda totalmente caracterizado por una función de pertenencia

# Conjuntos difusos

❖ Para un elemento  $x$  de un conjunto  $A$  su pertenencia al conjunto está dado por un cierto valor  $\mu_A(x) \in [0,1]$

❖ Si  $\mu_A(x)$  tiene sólo 2 valores

$\mu_A(x)$    $\begin{matrix} 1 \text{ (pertenencia)} \\ 0 \text{ (no pertenencia)} \end{matrix}$

$\Rightarrow$  es un conjunto ordinario o clásico

# Conjuntos difusos

## Conjunto "clásico":

- elemento pertenece o no a un determinado conjunto

## Conjunto "difuso":

- admite grados de pertenencia o membresía
- permite formalizar conceptos tales como "alto", "bajo", "frío", "rápido"
- vastamente usados
- por esencia no precisos

# Universos de discurso

- ❖ Sea  $U$  una colección de objetos al que se denominará universo de discurso.

EJM.

Universo de las edades  $U = \{5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$

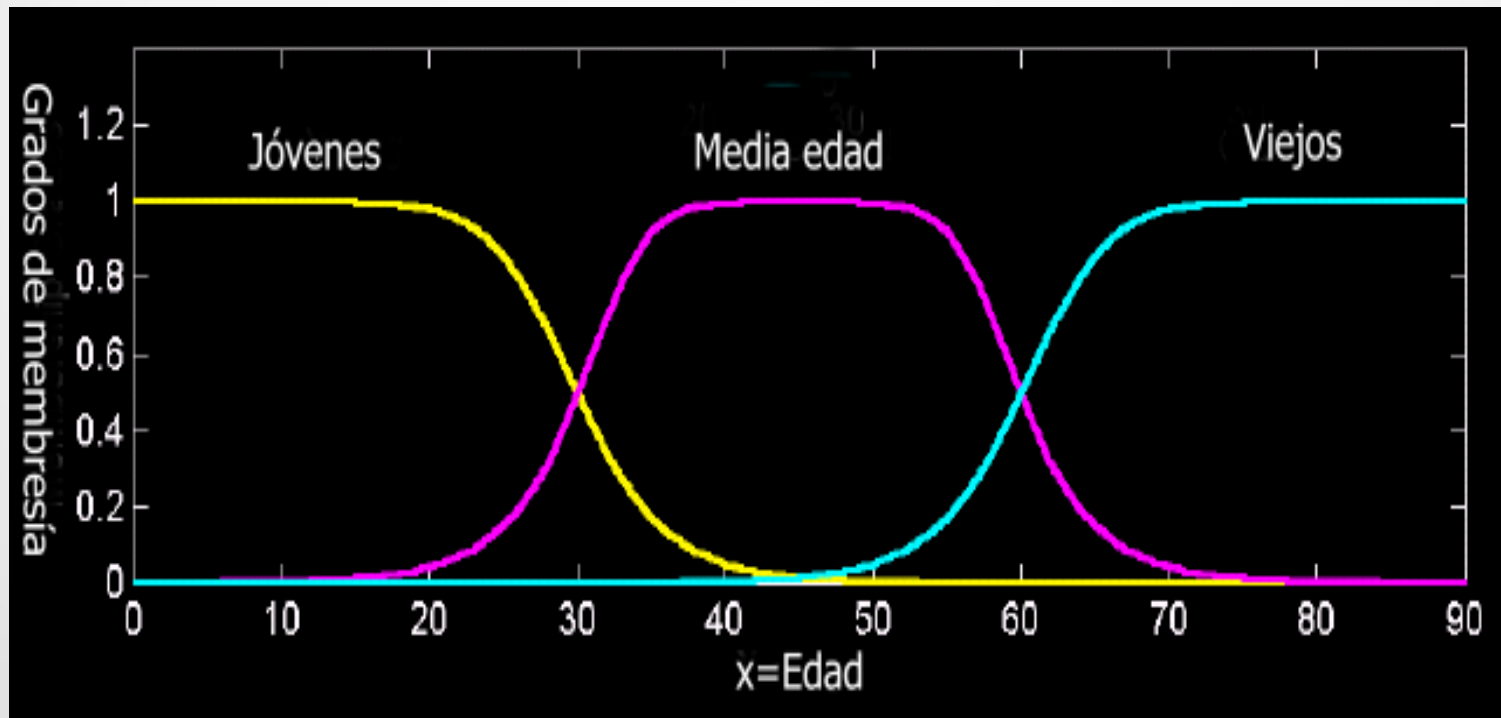
$$U = \mathbb{R}^n$$

- ❖ Los universos de discurso pueden ser:
  - Universos Discretos
  - Universos Continuos



# Universos de discurso

- ❖ Un Universo de Discurso  $U$  es el espacio borroso (fuzzy) completo de una variable del modelo



# Universos de discurso

## Universos de discurso Discretos

❖ Discretos y no ordenados:

$U = \{\text{Lima, Chiclayo, Arequipa, Puno}\}$

$A = \text{"buena para vivir"} = \{\text{Lima}|0.8, \text{Chiclayo}|0.7, \text{Arequipa}|0.7, \text{Puno}|0.1\}$

❖ Discretos y ordenados:

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20\}$

$A = \text{"número sensato de hijos"} = \{0|0.1, 1|0.3, 2|0.8, 3|1, \dots\}$

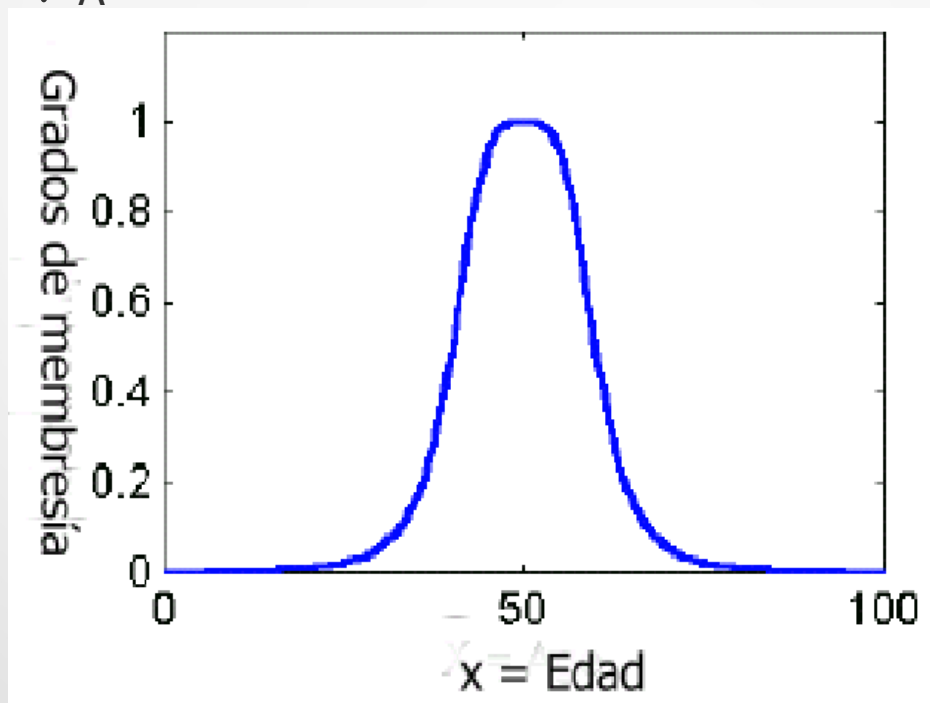
# Universos de discurso

## Universos de discurso Continuos

$U = \mathbb{R}^+$  posibles edades de las personas

$A = \text{"más o menos 50"} = \{x \mid \mu_A(x)\}$

$$\mu_A(x) = 1 / (1 + 10(x - 50)^2)$$



La especificación de las funciones de membresía es bastante subjetiva

# Conjuntos difusos (Zadeh, 1965)

- ❖ Un conjunto borroso  $A$  definido sobre un universo de discurso  $U$  es caracterizado por una función de pertenencia o membresía  $\mu_A(x)$  la cual toma valores en el intervalo  $[0,1]$
- ❖ Para un elemento  $x$  de un conjunto  $A$  su condición de membresía al cjto está dado por un cierto valor  $\mu_A(x)$

# Representación de CD

## ❖ En Universos Discretos

También puede representarse como una “suma” de pares:

$$A = \left\{ \sum_{x \in X} \mu_A(x) \mid x \right\}$$

EJM. Sea  $A$  = enteros próximos de 10:

$$A = \{7|0.1, 8|0.5, 9|0.8, 10|1, 11|0.8, 12|0.5, 13|0.1\}$$

$$A = \{7|0.1 + 8|0.5 + 9|0.8 + 10|1 + 11|0.8 + 12|0.5 + 13|0.1\}$$

# Representación de CD

Sea el Universo de las edades  $U=\{5,10,20,30,40,50,60,70,80\}$

Elementos	bebés	jóvenes	adultos	viejos
5	0	1	0	0
10	0	1	0	0
20	0	0.8	0.8	0.1
30	0	0.5	1	0.2
40	0	0.2	1	0.4
50	0	0.1	1	0.6
60	0	0	1	0.8
70	0	0	1	1
80	0	0	1	1

bebés = { }

jóvenes = {5|1, 10|1, 20|0.8, 30|0.5, 40|0.2, 50|0.1}

adultos = {20|0.8, 30|1, 40|1, 50|1, 60|1, 70|1, 80|1}

viejos = {20|0.1, 30|0.2, 40|0.4, 50|0.6, 60|0.8, 70|1, 80|1}

# Representación de CD

## ❖ En Universos Continuos

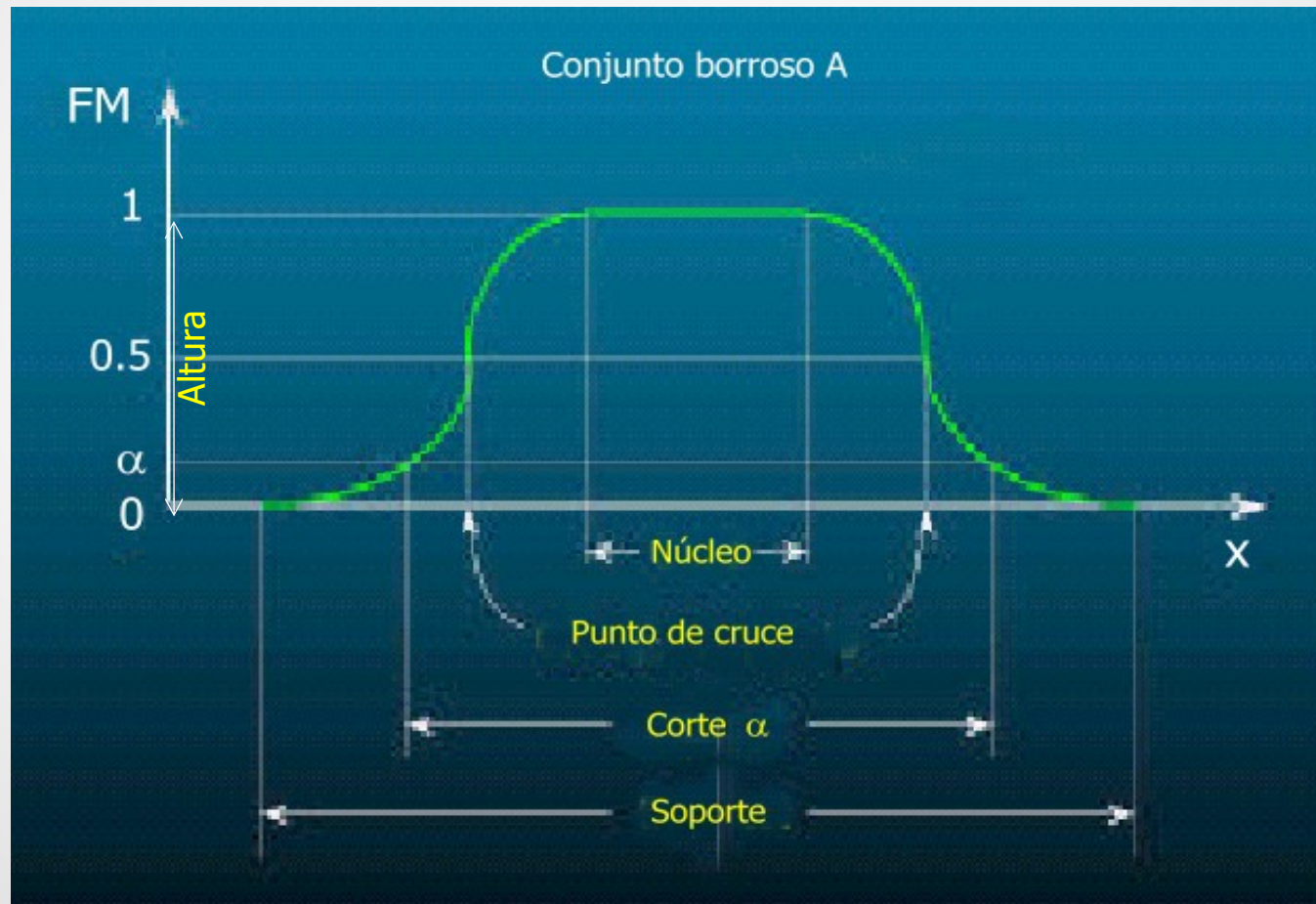
$$A = \int_X \mu_A(x) | x$$

- Representación mediante funciones de pertenencia basadas en modelos matemáticos
- Se dispone de una biblioteca de funciones de pertenencia estándares

La **suma** y la **integral** no deben considerarse como operaciones algebraicas!

# Definiciones básicas de cjtos difusos

Las definiciones en forma gráfica:





# Definiciones básicas de cjtos difusos

❖ Sea un conjunto borroso **A** definido sobre el universo **U**

**Soporte:** los elementos de **U** que pertenecen a **A** con grado mayor a cero

$$\text{Soporte}(A) = \{x \in U / \mu_A(x) > 0\}$$

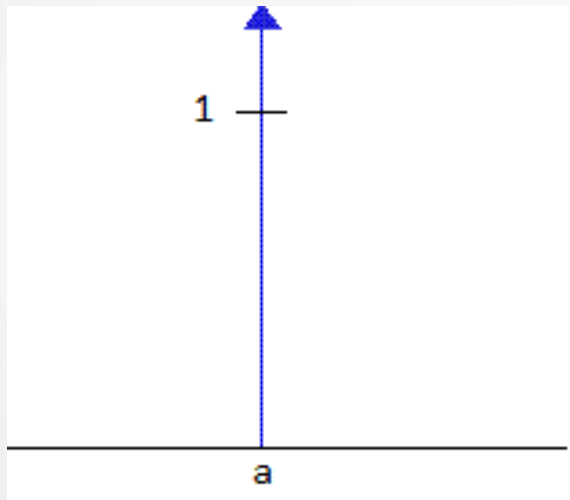
**Núcleo:** los elementos de **U** que pertenecen a **A** con grado 1

$$\text{Nucleo}(A) = \{x \in U / \mu_A(x) = 1\}$$

Un CB A es **normal** si su núcleo no es vacío.

# Definiciones básicas de cjtos difusos

**Singleton" difuso** si el soporte de **A** es un único punto  $x$  con  $\mu_A(x)=1$ .

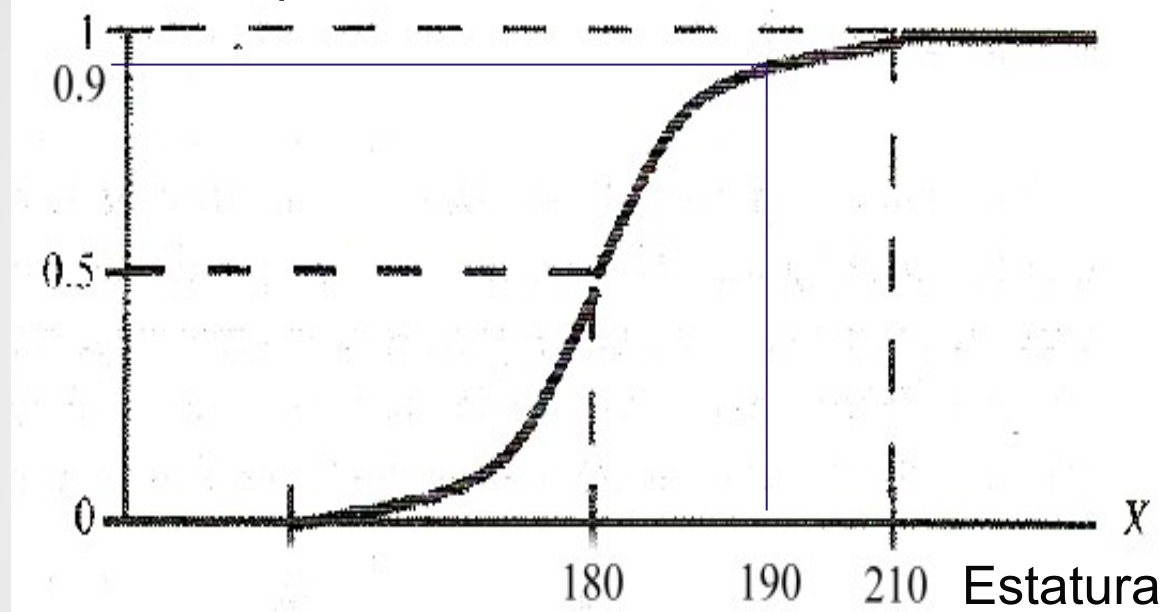


$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

**Punto de cruce** es el punto  $x$  para el que  $\mu_A(x) = 0.5$

# Interpretación de cjtos difusos

Grados de pertenencia



EJM. CD "Los hombres altos"

Supongamos:

$x=180$  cm

$\mu_A(x)=0.5$

Interpretación: 50% de personas concordarían en que alguien q mide 180 cm es un hombre "alto".

Para 190 cm, el porcentaje sería el 90%,

Para personas con 210 cm o más, todas concordarían

# Conceptos

Idea: sobre los conjuntos difusos así definidos, se puede re-edificar la teoría de conjuntos, estableciendo las operaciones de Unión, Intersección, Negación, Producto Cartesiano, Relaciones borrosas, etc.

# Conceptos

## Operaciones con conjuntos difusos

- Intersección
- Unión
- Negación

# Operaciones básicas de CD

## ❖ Intersección

La intersección de dos CD, "**A** y **B**", es el CD obtenido asignando a cada elemento del **U** el mínimo valor de sus respectivos grados de pertenencia a los cjtos

bebés = { }

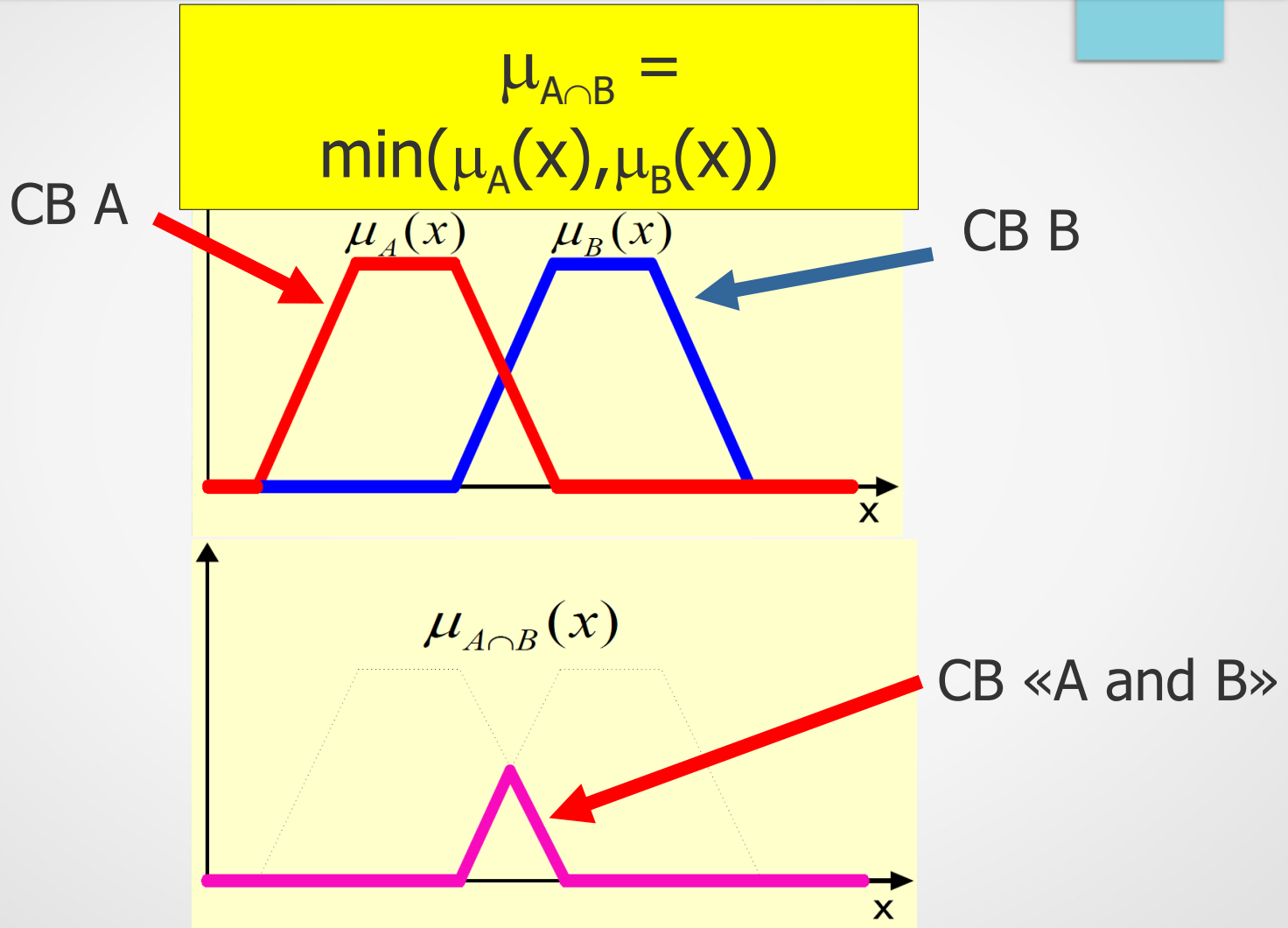
jóvenes = { 5|1, 10|1, 20|0.8, 30|0.5 , 40|0.2 , 50|0.1 }

adultos = { 20|0.8 , 30|1, 40|1, 50|1, 60|1, 70|1, 80|1 }

viejos = { 20|0.1, 30|0.2, 40|0.4, 50|0.6, 60|0.8, 70|1, 80|1 }

{jóvenes y viejos} = { 20|0.1, 30|0.2, 40|0.2, 50|0.1 }

# Intersección de CD



# Unión de CD

$$\mu_{A \cap B} = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Generalización: t-normas



# Operaciones básicas de CD

## ❖ Unión

La unión de dos CB, "**A** **o** **B**", es el CB obtenido asignando a cada elemento del U el máximo valor de sus respectivos grado de pertenencia a los cjtos.

bebés = { }

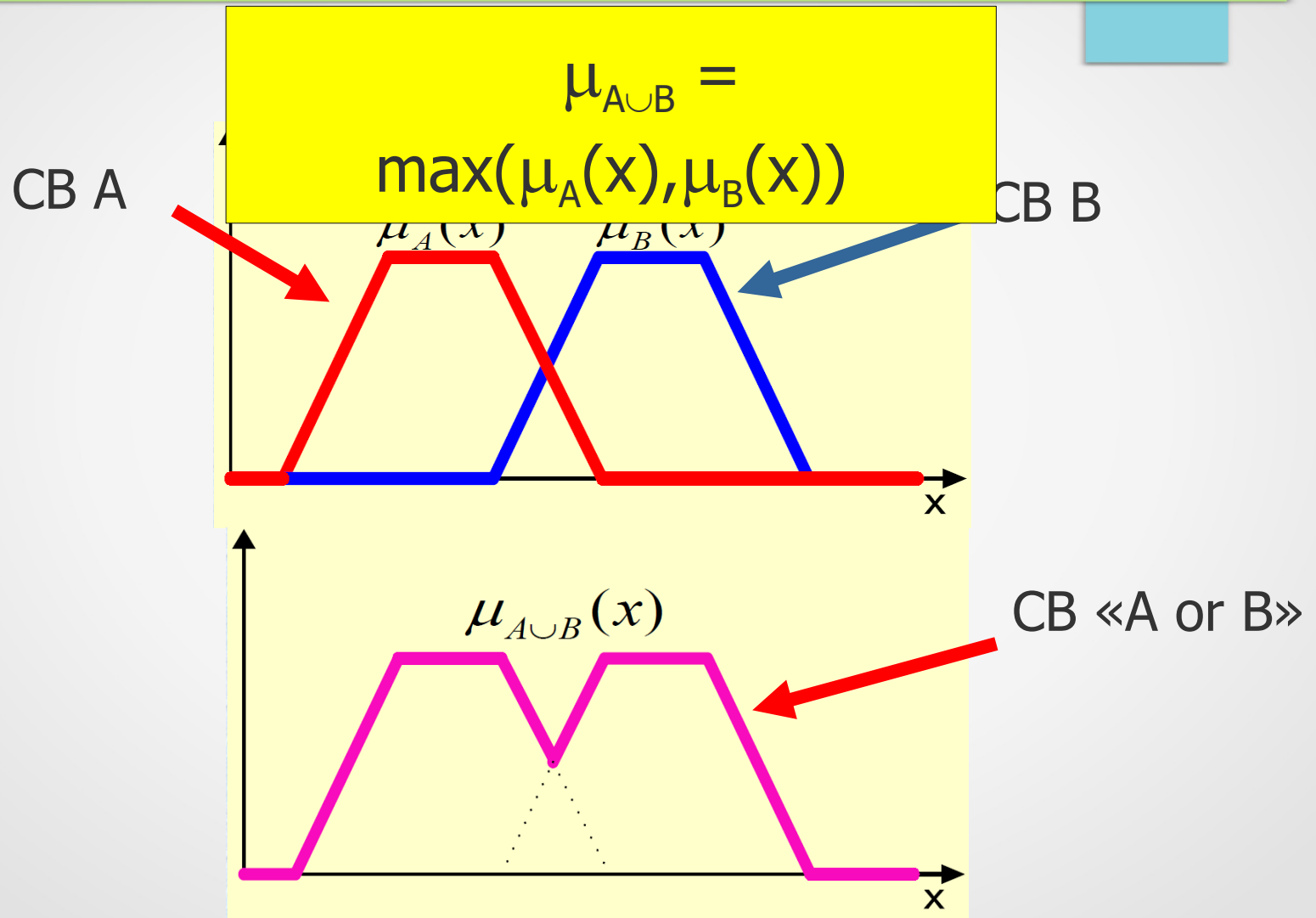
jóvenes = {5|1, 10|1, 20|0.8, 30|0.5, 40|0.2, 50|0.1}

adultos = {20|0.8, 30|1, 40|1, 50|1, 60|1, 70|1, 80|1}

viejos = {20|0.1, 30|0.2, 40|0.4, 50|0.6, 60|0.8, 70|1, 80|1}

{jóvenes o viejos} = {5|1, 10|1, 20|0.8,..., 80|1}

# Unión de CD



# Unión de CD

$$\mu_{A \cup B} = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Generalización: t-conormas

# Operaciones básicas de CD

## ❖ Complemento

El complemento de un CD, **A**, con respecto al **U**, es el CD obtenido al asignar a cada elemento del **U** el complementario a 1 de su grado de pertenencia en **A**

bebés = { }

jóvenes = {5|1, 10|1, 20|0.8, 30|0.5 , 40|0.2 , 50|0.1}

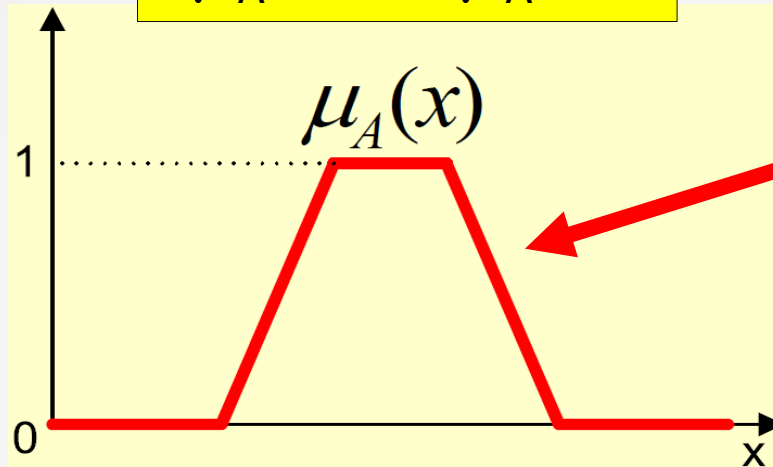
adultos = {20|0.8 , 30|1, 40|1, 50|1, 60|1, 70|1, 80|1}

viejos = {20|0.1, 30|0.2, 40|0.4, 50|0.6, 60|0.8, 70|1, 80|1}

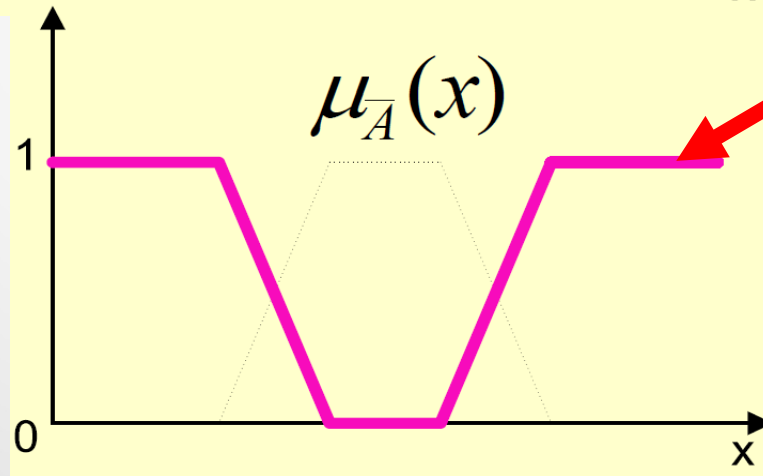
{Complemento de viejos}={no viejos}={5|1, 10|1, 20|0.9,..., 60|0.2}

# Complemento de un CD

$$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A(x)$$



CD A



CD «NOT A »

# Sistema Experto basado en Lógica Difusa

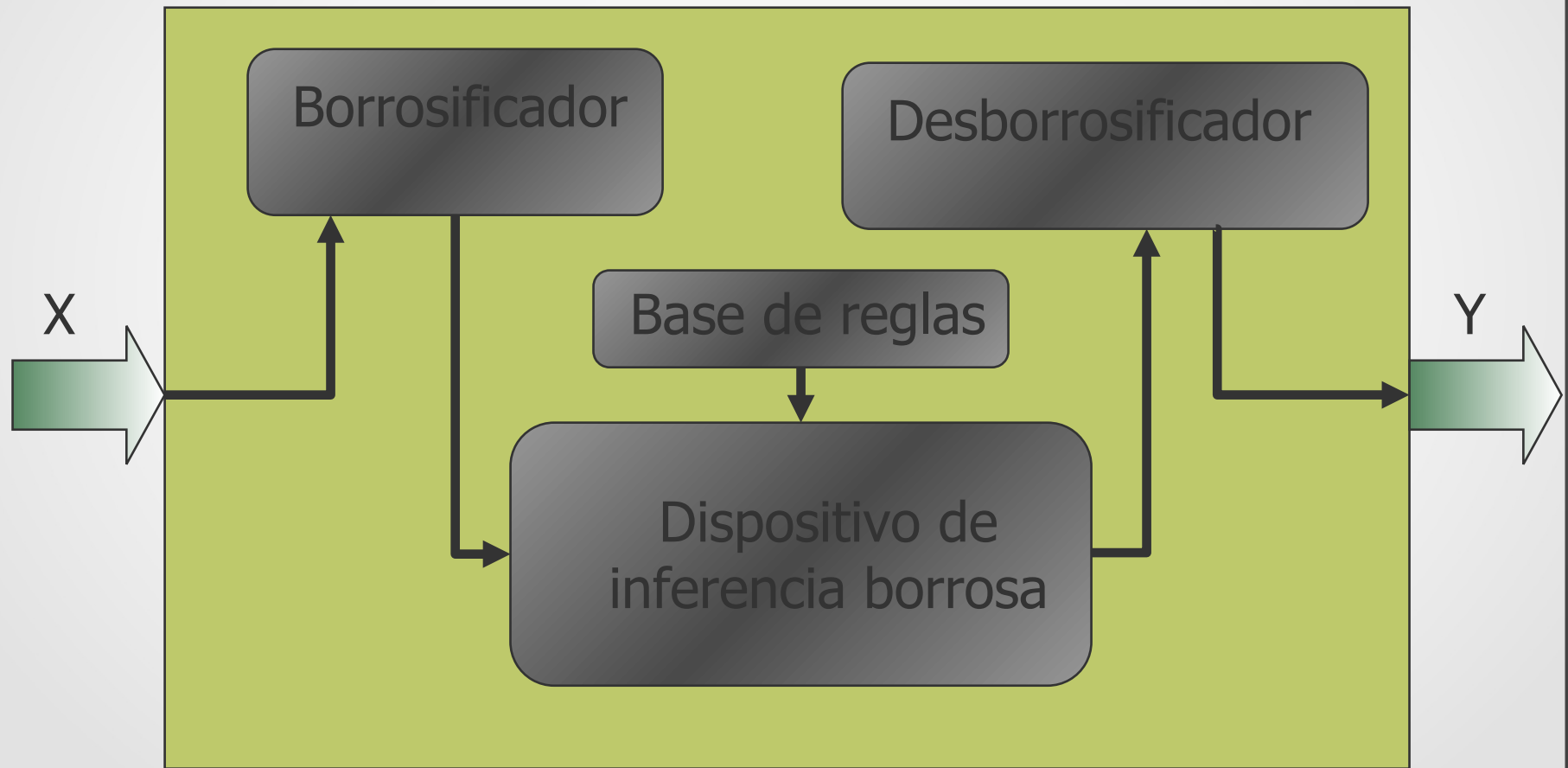
## Sistemas de Inferencia Difusa (SID) o Fuzzy Inference System (FIS)

- ❖ Son SE con razonamiento aproximado
- ❖ SID constituye un método que interpreta los valores de un vector de entrada y basado en un conjunto de reglas lógicas difusas, asigna valores a un vector de salida (mapea un vector de entrada a una salida de tipo escalar)



# Sistema Experto basado en Lógica Difusa

## Arquitectura de un SID



# EJM. Selección de jugadores de baloncesto

Desea seleccionar candidatos para su equipo

## Condiciones:

- ❖ Altura
- ❖ Buen encestador

## Solución clásica:

- ❖  $\text{Altura} > 185 \text{ cm}$
- ❖ De 16 tiros al aro debe encestar al menos 13:  
13/16



# EJM. Selección de jugadores de baloncesto

## Solución "clásica"

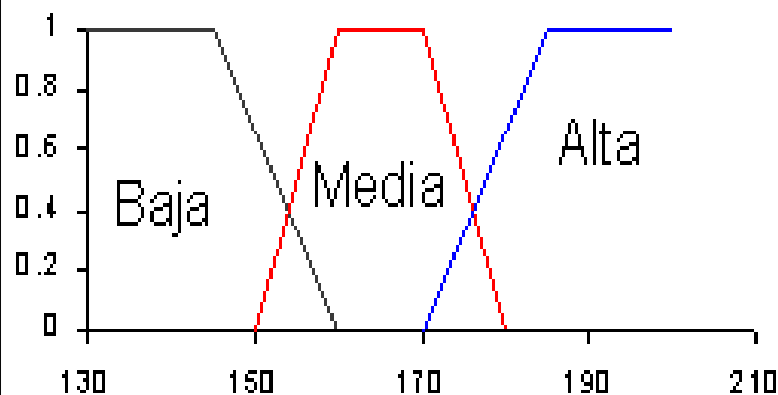
Candidato	Estatura (cm)	Aciertos (16 tiros)		Solución clásica
A	167	12		0
B	169	6		0
C	175	15		0
D	179	12		0
E	183	16		0
F	186	13		1
G	187	12		0
H	190	10		0
J	200	13		1

# EJM. Selección de jugadores de baloncesto

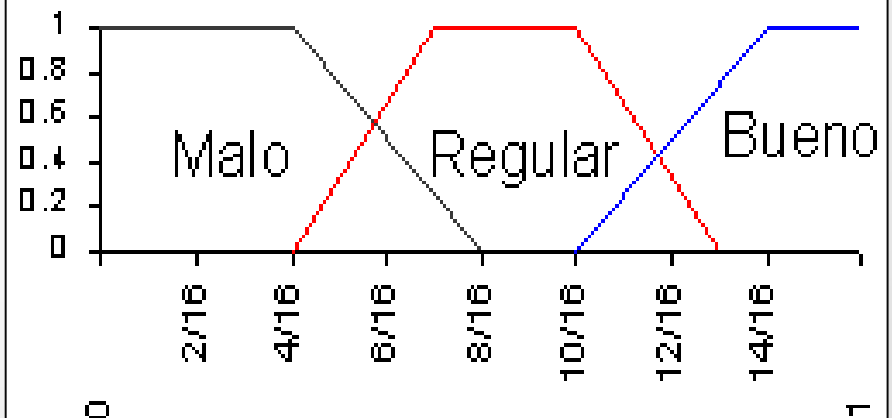
## ❖ Solución utilizando conjuntos borrosos

- Se definen conjuntos difusos para cada variable
- Combinación por lógica borrosa

Estatura (cm)



Encestador (con 16 tiros)

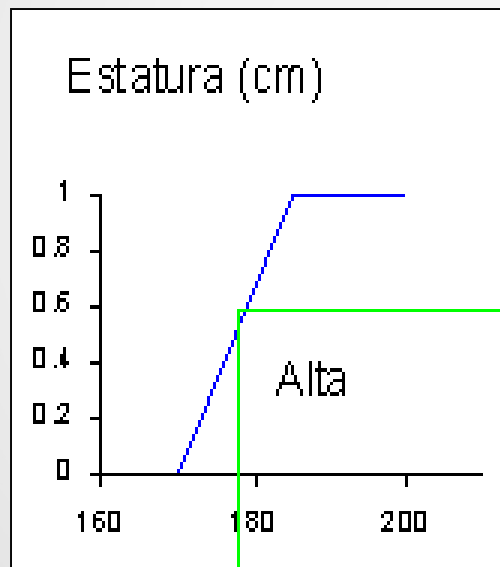


# EJM. Selección de jugadores de baloncesto

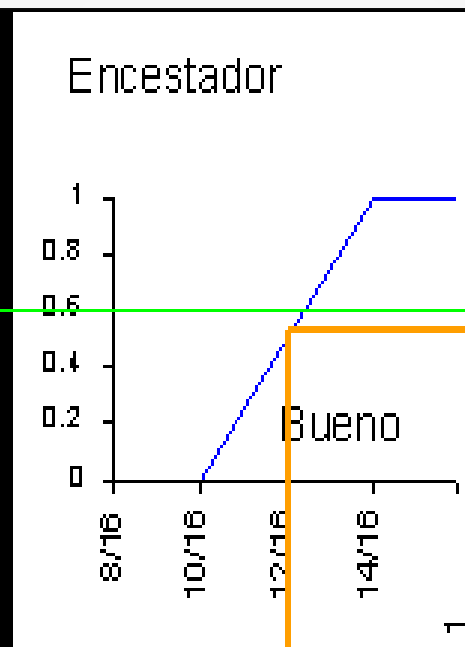
Candidato exitoso:

- ❖ Estatura "Alta"
- ❖ Encestador "Bueno"

Candidato	Estatura (cm)	Aciertos (16 tiros)	Solución clásica
D	179	12	0

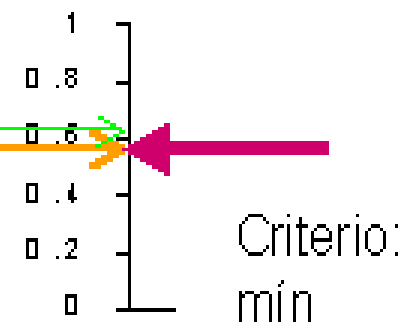


179



12

Combinación de las entradas:



# EJM. Selección de jugadores de baloncesto

## Solución con Lógica Borrosa – Resultados de elección


Candidato	Estatura (cm)	Aciertos (16 tiros)		Lógica Difusa
A	167	12		0
B	169	6		0
C	175	15		0.33
D	179	12		0.50
E	183	16		0.87
F	186	13		0.75
G	187	12		0.50
H	190	10		0
J	200	13		0.75

# EJM. Selección de jugadores de baloncesto

## Solución con Lógica Borrosa – Resultados de elección

Candidato	Estatura (cm)	Aciertos (16 tiros)		Solución clásica	Lógica Difusa
E	183	16		0	0.87
F	186	13		1	0.75
J	200	13		1	0.75
D	179	12		0	0.50
G	187	12		0	0.33
C	175	15		0	0.33
A	167	12		0	0
B	169	6		0	0
H	190	10		0	0

Evita dejar afuera del equipo a un gran encestador que mide 183 cm



Tal como haría el entrenador (Experto Humano)!