Problem 1. FTIAD. Buykov.V.V

$$Q(a) = \frac{1}{2}\|\Phi\Phi^T a - y\|^2 + \frac{\lambda}{2} a^T\Phi\Phi^T a =$$

$$= \frac{1}{2}\|Ka - y\|^2 + \frac{\lambda}{2} a^T K a \to \min_a$$

$$(Ka - y)^T(Ka - y) + \lambda a^T K a \to \min_a$$

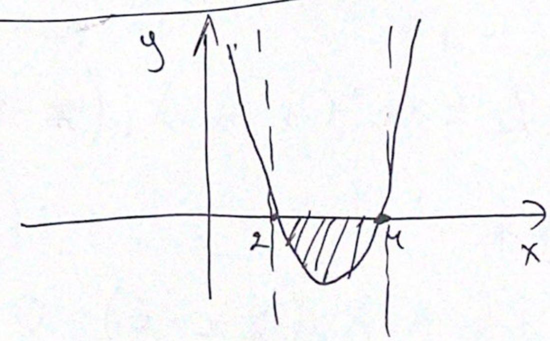
$$L'_a = (a^T K^T K a - 2a^T K^T y + y^T y + \lambda a^T K a)'_a =$$

$$= 2K^T K a - 2K^T y + 2\lambda K^T a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (K^T K a + \lambda K^T a) = K^T y \Rightarrow (K^T)^{-1}(K^T K + \lambda K^T) a =$$

$$= (K^T)^{-1}(K^T) y \Rightarrow (K + \lambda I) a = y \Rightarrow \boxed{a = (K + \lambda I)^{-1} y}$$

Problem 2



$$\begin{cases} x^2 + 1 \to \min \\ (x-2)(x-4) \le 0 \end{cases}$$

1). Согласно ограничению $(x-2)(x-4) \le 0 \Rightarrow$

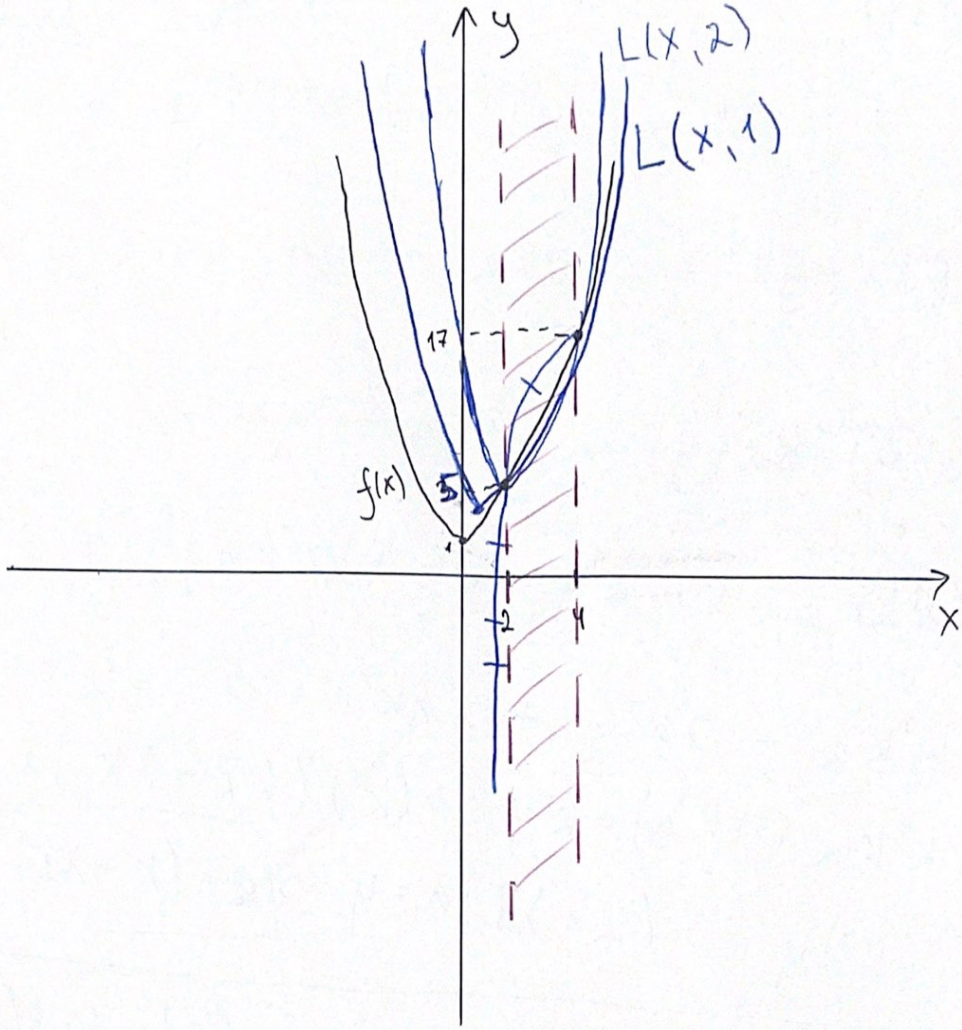
$\Rightarrow x \in [2, 4]$; $f(x) = x^2 + 1$ на этом

отрезке монотонно возрастает $\Rightarrow f_{min} = f(2) = 2^2 + 1 =$

$= 5$; $f_{max} = f(4) = 4^2 + 1 = 17$

$$x_* = 2 \quad f(x_*) = 5$$

2)



$L = x^2 + 1 + \lambda_1 (x-2)(x-4)$

KKT:

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1(2x-6) = 0 \\ (x-2)(x-4) \le 0, \ \lambda_1 \ge 0, \ \lambda_1 (x-2)(x-4) = 0 \end{cases}$$

1) $\lambda_1 = 0$; $(x-2)(x-4) \le 0$; $\lambda_1 \ge 0$

$2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ x_* = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ contradiction as $(x_*-2)(x_*-4) > 0$, where $x_* = 0$

2) $(x-2)=0 \Rightarrow x=2$

$2 \cdot 2 + \lambda_1(4-6)=0$

$\lambda_1 = 2$

$x=2$
$\lambda_1=2$

3) $x=4 \Rightarrow \lambda_1=-4 \rightarrow$ violation of $\lambda_1 \geq 0$

$$f(x_*=2)=5 \geq \inf_x L(x,\lambda) = L(2,2) = \\ =5$$

3

$$g(\lambda) = \inf_x L(x,\lambda) \; ; \; x = \frac{3\lambda_1}{1+\lambda_1}$$

$$g(\lambda) = \inf_x L\left(\frac{3\lambda}{1+\lambda}, \lambda\right) = \left(\frac{3\lambda}{1+\lambda}\right)^2 + 1 +$$

$$+ \lambda\left(\frac{3\lambda_1}{1+\lambda} - 2\right)\left(\frac{3\lambda}{1+\lambda} - 4\right) = \frac{9\lambda^2 + (1+\lambda)^2}{(1+\lambda)^2} +$$

$$+ \lambda\left(\frac{9\lambda^2}{(1+\lambda)^2} - \frac{18\lambda}{1+\lambda} + 8\right) =$$

$$= \frac{9\lambda^2 + \lambda^2 + 2\lambda + 1}{(1+\lambda)^2} + \frac{9\lambda^3 - 18\lambda^2(1+\lambda) + 8\lambda(1+\lambda)^2}{(1+\lambda)^2}$$

$$= \frac{-\lambda^3 + 8\lambda^2 + 10\lambda + 1}{(1+\lambda)^2} = \frac{-(\lambda^2 - 9\lambda - 1)(\lambda + 1)}{(\lambda+1)^2}$$

$$g(\lambda) \to \max_{\lambda} \Rightarrow \frac{(1 + 9\lambda - \lambda^2)(\lambda + 1)}{(\lambda+1)^2} =$$

$$= \frac{(1 + 9\lambda - \lambda^2)}{(1+\lambda)} \to \max_{\lambda}$$

$$g'_{\lambda}(\lambda) = -\frac{\lambda^2 + \lambda \cdot 2 - 8}{(1+\lambda)^2} = 0$$

local min

$\lambda \neq -1$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4$$

$$\lambda_2 = 2$$

local max

$$\lambda^* = 2 \quad g(\lambda^*) = g(2) = \frac{1 + 18 - 4}{3} = 5$$

Строгая двойственность $g(\lambda^*) = f(x_*) = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ выполнена

(4*)

$$f_u(x_*) = x^2+1 + \lambda\left((x-2)(x-4) - u\right) =$$

$$= x^2+1 + \lambda\left(x^2 - 6x + 8 - u\right)$$

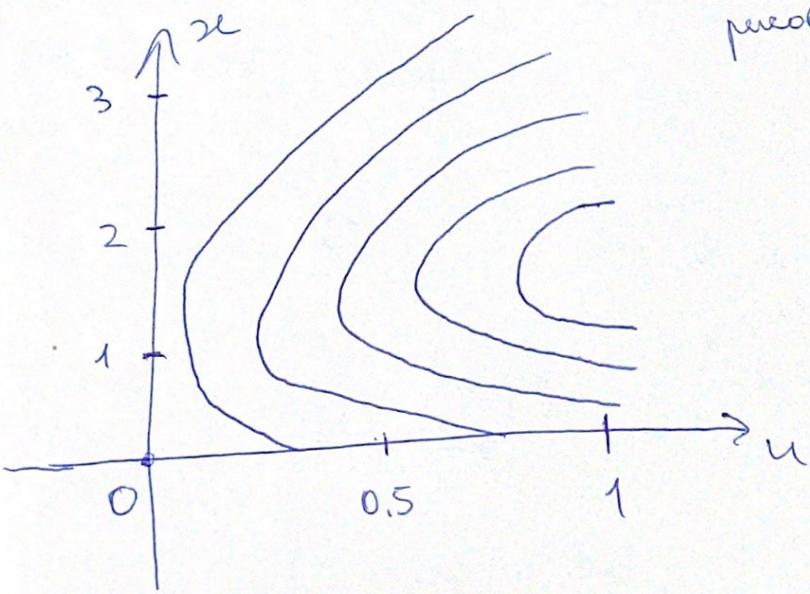
$$\frac{\partial f_u(x_*)}{\partial u} = \left(x^2+1+\lambda x^2 - 6\lambda x + 8\lambda - u\lambda\right)'_u =$$

$$= -\lambda$$

$\lambda = 1$:

$f_u(x_*) = 2x^2 - 6x + 9 - u$ - parabolic cylinder

Линии уровня -> (я немного не понял нужно ли было рисовать в общем).



Problem 3

$$K(x, z) = \cos(x - z)$$

Ядро $K(x,z)$:

1) $k(x, z) = K(z, x)$

2) $k = \left(K(x_i, x_j)\right)_{i,j=1}^{l}$ – неотрицательно определена

$\cos(x - z)$ – симметричная функция =>

=> $\cos(x - z) = \cos(z - x)$ 1) – TRUE

Также по определению ядро – функция $K(x,z)$ представимая в виде скалярного произведения

$$\cos(x - z) = \cos x \cos z + \sin x \sin z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \quad \varphi(z) = \begin{pmatrix} \cos z \\ \sin z \end{pmatrix}$$

$$\langle \varphi(x), \varphi(z) \rangle = \cos(x - z)$$

Problem 4

$$K(x,z) = \frac{1}{1+e^{-xz}} \quad - \forall x, z \in \mathbb{R}$$

$$K(x,z) = K(z,x) = \frac{1}{1+e^{-xz}}$$ – симметрич-

ная функция

Возьмем $x = -10^{10}$; $z = 0$ =>

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} K(x,x) & K(x,z) \\ K(z,x) & K(z,z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{1+e^{+10^{20}}} & \frac{1}{1+e^{-0}} \\ \frac{1}{1+e^{-0}} & \frac{1}{1+e^{-0}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \approx 0 & \frac{1}{1+1} \\ \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \approx 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

p.7.

По критерию сильвестора

L_k - leading principal minor of order k

$$\left.\begin{aligned} L_1 &\approx 0 > 0 \\ L_2 &\approx 0 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \approx -\frac{1}{4} < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow ?$$

=> not positive definite or semidefinite.

Контр-пример.

Problem 5.

Assume $x, z \in \mathbb{R}^2$

$$K_1(x, z) = (1 + xz)^2$$

$$K_1((x_1, x_2), (z_1, z_2)) = (1 + x_1 z_1 + x_2 z_2)^2 =$$

$$= 1 + 2x_1 z_1 + 2x_2 z_2 + x_1^2 z_1^2 + 2x_1 z_1 \times$$

$$\times x_2 z_2 + x_2^2 z_2^2 = \langle \varphi(x), \varphi(z) \rangle$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \qquad \varphi(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_1 z_2 \\ z_1^2 \\ z_2^2 \end{pmatrix}$$

$$K_2(x, z) = (1 + xz + x^2 z^2)$$

$$K_2((x_1, x_2), (\cancel{z}_1, x_2)) = 1 + x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_1^2 \times$$

$$\times (z_1^2 + z_2^2) + x_2^2 (z_1^2 + z_2^2)$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \qquad \varphi(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_1^2 + z_2^2 \\ z_1^2 + z_2^2 \end{pmatrix}$$

$$K_1(x, z) + K_2(x, z) = 1 + 2xz +$$

$$+ x^2 z^2 + 1 + xz + x^2 z^2 = 2 + 3xz + 2x^2 z^2$$

$\cancel{z}$ $K_1((x_1, x_2)(z_1, z_2)) + K_2((x_1, x_2)(z_1, z_2)) =$

$= 2 + 3(x_1 z_1 + x_2 z_2) + 2(x_1^2 + x_2^2)(z_1^2 + z_2^2)$

$= 2 + 3x_1 z_1 + 3x_2 z_2 + 2x_1^2(z_1^2 + z_2^2) +$

$+ 2(z_1^2 + z_2^2) x_2^2$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} x_1 \\ \sqrt{3} x_2 \\ \sqrt{2} x_1^2 \\ \sqrt{2} x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} x_1 \\ \sqrt{3} x_2 \\ \sqrt{2} \cancel{x_1^2} (z_1^2 + z_2^2) \\ \sqrt{2} (z_1^2 + z_2^2) \end{pmatrix}$$