L2 ISTN notes personelles

Alex Videcoq

Mathematics 3$^{\text{ème}}$ semestre

vPre 0.0.1

ISTIC

Responsable AN2	Prof. Laurence Pasquereau
Responsable OM	Prof. Matthieu Davy
Cursus	L2 ISTN

Rennes 2025
(Draft - January 26, 2025)

Contents

Contents ii

Introduction iv

Résumé Rapide v

1 Fonctions - Comparaison et ordres de grandeur. 1
- 1.1 Rappels 1
  - Fonctions à variables Réelles 1
- 1.2 Comparaison des fonctions 1
  - Adhérence 1 • Limites 1 • Fonctions négligeables 2 • Continuité 4 • Dérivabilité 4
- 1.3 Ordres de grandeur 4
- 1.4 Applications 4
- 1.5 Hors programme 4
- 1.6 Exercices 4
  - TD1 4

2 Fonctions - Développement de Taylor, calcul de limites. 6
- 2.1 Rappels 6
- 2.2 Séries de Taylor 6
- 2.3 Applications 6
- 2.4 Hors programme 6

3 Intégrales Généralisées 7
- 3.1 Définition 7
- 3.2 Convergence et Divergence 7
- 3.3 Applications 7

4 Séries Numériques 8
- 4.1 Définition 8
- 4.2 Convergence et Divergence 8
- 4.3 Applications 8

5 Séries Entières 9
- 5.1 Définition 9
- 5.2 Rayon et Divergence 9
- 5.3 Applications 9

6 Équations Différentielles 10
- 6.1 Résolution des Équations Différentielles 10
  - Équations du Premier Ordre 10 • Équations du Second Ordre 10
- 6.2 Applications des Équations Différentielles 10

Mécanique 10 • Circuits Électriques 10

6.3 Méthodes Générales pour les Équations Complètes 11

6.4 Récapitulatif et Étapes Clés pour la Résolution 11

6.5 Exemples Pratiques et Exercices 11

7 Systèmes de Coordonnées 12

7.1 Systèmes cartésiens, cylindriques et polaires 12

7.2 Transformations et applications 12

8 Séries de Fourier 13

8.1 Calculs et coefficients 13

8.2 Propriétés de convergence et exemples pratiques 13

References 14

Introduction

Les mathématiques constituent le pilier de nombreuses disciplines scientifiques et d'ingénierie, fournissant les outils et les méthodes nécessaires pour résoudre des problèmes complexes et modéliser des phénomènes réels. Ce document est une compilation complète de notes et de concepts pour deux cours fondamentaux suivis au cours du troisième semestre du programme du portail ISTN : *Analyse 2 (AN2)* et *Outils Mathématiques (OM)*. Ces cours sont conçus pour s'appuyer sur les bases mathématiques couvertes en première année, dotant les étudiants de compétences analytiques avancées et de résolution de problèmes essentielles pour leur parcours académique et professionnel.

Le cours *Analyse 2 (AN2)* se concentre sur le développement d'une compréhension approfondie des fonctions, des intégrales et des séries. Il met l'accent sur l'application pratique des méthodes de calcul avancées tout en favorisant une approche rigoureuse et précise du raisonnement mathématique. Les sujets tels que **le comportement des fonctions** **Chapter 1** → p.1, **les sériés de Taylor** **Chapter 2** → p.6, **les intégrales généralisées** **Chapter 3** → p.7, **les séries numériques** **Chapter 4** → p.8, et **les séries entières** **Chapter 5** → p.9, sont introduits, posant les bases pour des études ultérieures en probabilités, en analyse quantitative et dans d'autres cours avancés du programme. L'approche structurée et méthodique de la résolution de problèmes mise en avant dans ce cours garantit que les étudiants non seulement maîtrisent les concepts théoriques, mais les appliquent également efficacement.

Le deuxième cours, *Outils Mathématiques (OM)*, fournit les techniques mathématiques nécessaires à une large gamme d'applications en physique, en ingénierie et au-delà. En explorant des sujets tels que **les équations différentielles** **Chapter 6** → p.10, **les systèmes de coordonnées** **Chapter 7** → p.12, et **les séries de Fourier** **Chapter 8** → p.13, ce cours dote les étudiants d'outils polyvalents pour analyser et modéliser des systèmes dynamiques. Il comble le fossé entre les connaissances théoriques et leur application pratique, permettant aux étudiants d'aborder des problèmes complexes avec confiance.

Résumé Rapide

Comparaison et ordre de grandeur **Chapter 1** →p.1 : Traite des comparaisons, des ordres de grandeur.

Developpement et series de Taylor **Chapter 2** →p.6

Intégrales Généralisées **Chapter 3** →p.7 : Couvre les concepts d'intégrales étendus au-delà des définitions standard et leur importance dans la résolution de problèmes.

Séries Numériques **Chapter 4** →p.8 : Explore les propriétés des séries numériques, y compris les tests de convergence et des exemples.

Séries Entières **Chapter 5** →p.9 : Examine le développement et l'analyse des séries entières, en mettant l'accent sur leur convergence et leur utilité dans les applications.

Équations Différentielles **Chapter 6** →p.10 : Explique les méthodes de résolution des équations différentielles du premier et du second ordre avec des coefficients constants, en se concentrant sur les applications pratiques.

Systèmes de Coordonnées **Chapter 7** →p.12 : Détaille les transformations entre les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et polaires, en mettant en avant leur pertinence dans divers contextes.

Séries de Fourier **Chapter 8** →p.13 : Décrit le processus de calcul des coefficients de Fourier, les propriétés de convergence et des exemples pratiques de développements en séries.

1 Fonctions - Comparaison et ordres de grandeur.

1.1 Rappels

Fonctions à variables Réelles

1.2 Comparaison des fonctions

Adhérence

Definition 1.1. Adhérence :
Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$
L'adhérence de $\mathcal{D}$ note $\overline{\mathcal{D}}$, est le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé qui contient $\mathcal{D}$.

Example 1.2. .
Si $\mathcal{D} =]1; 2[$ alors $\overline{\mathcal{D}} = [1; 2]$
Si $\mathcal{D} =]-\infty; 2[$ alors $\overline{\mathcal{D}} =]-\infty; 2]$
Si $\mathcal{D} =]1; +\infty[$ alors $\overline{\mathcal{D}} = [1; +\infty[$

Note. Notation :
L'infini est exclu de $\overline{\mathcal{D}}$ car l'adhérence d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et donc ne peut contenir l'infini [●].

Todo. Hors programme :
Détailler l'adhérence d'un point de vue topologique, dans la section :
Hors programme section 2.4

Voir :
`https://en.wikipedia.org/wiki/Closure_(topology)`

Limites

Soit f définie sur $\mathcal{D}$ avec :

$$a \in \overline{\mathcal{D}} \tag{1.3}$$
$$\ell \in \mathcal{D} \tag{1.4}$$

On dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(a) - \ell| < \varepsilon \tag{1.5}$$
$$\text{On note } f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \tag{1.6}$$

Fonctions négligeables

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$ et $a \in \mathcal{D}$

Definition 1.7. négligeable
On dit que f est négligeable devant g quand x tend vers a ssi :

$$\frac{f(x}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0 \tag{1.8}$$

On note alors :

$$f(x) = \underset{x \to a}{o} g(x) \tag{1.9}$$

Example 1.10. .

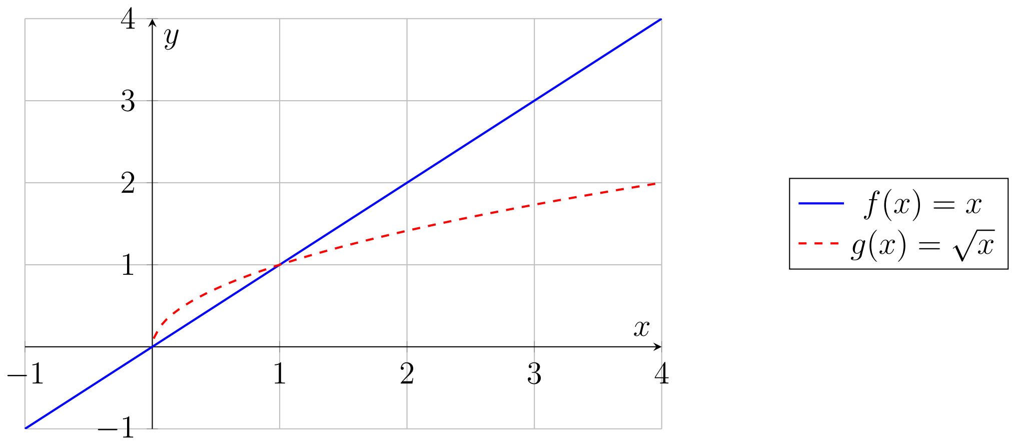

Figure 1.11 / Graph des fonctions $f(x)$ et $g(x)$

En 0 :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \text{ donc } f(x) = \underset{x \to 0}{o} g(x) \tag{1.12}$$

En $+\infty$:

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \text{ donc } g(x) = \underset{x \to +\infty}{o} f(x) \tag{1.13}$$

Note. Exemples à connaître :
On compare les fonctions :

$$x \mapsto (\ln x)^\alpha \quad , \alpha > 0 \tag{1.14}$$
$$x \mapsto x^\beta \quad , \beta > 0 \tag{1.15}$$
$$x \mapsto \gamma^x = e^{x \ln \gamma} \quad , \gamma > 1 \tag{1.16}$$

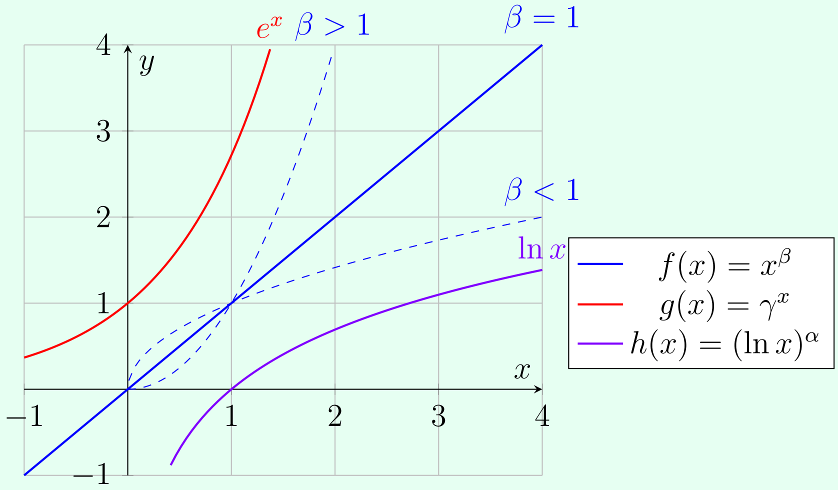

Figure 1.17 / Graph de valeurs remarquables des fonctions listées plus haut

En $+\infty$:

$$(\ln x)^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right),\ ie. \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \tag{1.18}$$
$$x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}(\gamma^x),\ ie. \frac{x^\beta}{\gamma^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \tag{1.19}$$

Remark 1.20. Quelques équivalences :
Un polynôme est équivalent a son monôme de plus haut degré quand x tend vers $+\infty$:

$$P(x) = 2x + 7x^2 - 8x^3 \tag{1.21}$$
$$P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -8x^3 \tag{1.22}$$
$$P(x) \underset{x\to0}{\sim} 2x \tag{1.23}$$

$$\sin x \underset{x\to0}{\sim} x \tag{1.24}$$

$$\ln 1 + x \underset{x\to0}{\sim} x \tag{1.25}$$

Continuité

Definition 1.26. Continuité
f est continue en x ssi :

$$f(x) \underset{x \to \alpha}{\to} f(\alpha) \tag{1.27}$$

Continuité des fonctions $f+g, f \circ g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ vue en L1.

Todo. Rappels
Mettre les démonstrations de continuité des fonctions ci-dessus dans la section Section 1.1 →p.1.

Dérivabilité

Definition 1.28. Dérivabilité
f est dérivable en α ssi :

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \underset{x \to \alpha}{\to} \ell \in \mathbb{R} \tag{1.29}$$

Dérivabilité des fonctions $f+g, f \circ g, f \cdot g, \frac{f}{g}$, dérivées successives vue en L1.

Todo. Rappels
Mettre les démonstrations de dérivabilité des fonctions ci-dessus dans la section Section 1.1 →p.1.

1.3 Ordres de grandeur

1.4 Applications

1.5 Hors programme

1.6 Exercices

TD1

Exercice 1 :
Soit $f\colon [0;1] \longrightarrow [0;1]$ une fonction continue.
Montrer que $\exists x \in [0;1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 2 :
Donner la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \tag{1.30}$$

$$g(x) = \ln \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| \tag{1.31}$$

Exercice 3 :

Exercice 4 :

2 Fonctions - Développement de Taylor, calcul de limites.

2.1 Rappels

2.2 Séries de Taylor

2.3 Applications

2.4 Hors programme

3 Intégrales Généralisées

3.1 Définition

3.2 Convergence et Divergence

3.3 Applications

4 Séries Numériques

4.1 Définition

4.2 Convergence et Divergence

4.3 Applications

5 Séries Entières

5.1 Définition

5.2 Rayon et Divergence

5.3 Applications

6 Équations Différentielles

6.1 Résolution des Équations Différentielles

Équations du Premier Ordre

- Forme générale : $F(x, y, y') = 0$.
- Méthodes de résolution analytique :
  - Normalisation.
  - Résolution des équations sans second membre.
  - Cas des coefficients constants.
- Exemples pratiques.

Équations du Second Ordre

- Forme générale : $F(x, y, y', y'') = 0$.
- Méthodes analytiques pour les équations linéaires à coefficients constants.
- Applications :
  - Mécanique (système masse-ressort, chute libre).
  - Circuits électriques (RLC).

6.2 Applications des Équations Différentielles

Mécanique

- Principe fondamental : $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$.
- Exemples :
  - Chute libre.
  - Mouvement amorti (masse-ressort).

Circuits Électriques

- Cas du premier ordre : décharge d'un condensateur.
- Cas du second ordre : oscillations dans un circuit RLC.

6.3 Méthodes Générales pour les Équations Complètes

- Théorie des solutions homogènes et particulières.
- Principe de superposition.
- Méthode de variation de la constante de Lagrange.
- Exemples : résolution d'équations différentielles avec second membre.

6.4 Récapitulatif et Étapes Clés pour la Résolution

(1) Mise en forme de l'équation.

(2) Recherche des solutions homogènes (y_H).

(3) Recherche de solutions particulières (y_p).

(4) Combinaison des solutions : $y = y_H + y_p$.

(5) Détermination des constantes à partir des conditions initiales.

6.5 Exemples Pratiques et Exercices

- Résolution d'équations différentielles avec ou sans second membre.
- Applications concrètes (mécanique, circuits, etc.).

Conclusion

- Synthèse des approches méthodologiques.
- Importance des équations différentielles dans les applications scientifiques et techniques.

7 Systèmes de Coordonnées

7.1 Systèmes cartésiens, cylindriques et polaires

7.2 Transformations et applications

8 Séries de Fourier

8.1 Calculs et coefficients

8.2 Propriétés de convergence et exemples pratiques

References

Back-references to the pages where the publication was cited are given by •.

[•] Author Unknown. TODO. **2025**.

1