Exercice 1 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$

Exercice 2 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$

Exercice 3 : Soit $(S_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \dots + n$$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice 4 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{2}{3}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$$

On admet que la fonction $f : x \mapsto x(2-x)$ est croissante sur $[0,1]$.

(Bonus : montrez-le !)

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$

Exercice 5 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 3} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{2^n + 2}{2^n - 2}$