S1 : Étude générale des fonctions polynomiales de degré 2 ou 3

Fiche d'exercices

Exercice 1 (Niveau 1) Forme canonique

Calculer le discriminant du polynôme P suivant et en déduire sa forme canonique.

$$P(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2}.$$

Exercice 2 (Niveau 2) Forme canonique

Soient P et Q les deux polynômes définis pour tout réel x par :

$$P(x) = x^2 + 6x + 3 \quad \text{et} \quad Q(x) = x^2 + 4x + 9.$$

1. Déterminer la forme canonique des polynômes P et Q.
2. Résoudre l'équation $P(x) = 10$.
3. Résoudre l'équation $Q(x) = 1$.

Exercice 3 (Niveau 1) Racines d'un polynôme

Dans chacun des cas suivants, déterminer les racines du polynôme P sans calculer son discriminant, ni sa forme canonique.

1. $P(x) = 9x^2 - 9x$
2. $P(x) = 9 - 9x^2$
3. $P(x) = x^2 + 2x + 1$
4. $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$
5. $P(x) = -x^2 + 3x - 2$

Exercice 4 (Niveau 1) Racines d'un polynôme

Dans chacun des cas suivants, déterminer, si elles existent, les racines du polynôme P.

1. $P(x) = 4x^2 + 4x - 2$
2. $P(x) = -4x^2 - 4x + 2$
3. $P(x) = 3x^2 + 2x - 2$
4. $P(x) = x^2 + x + 1$
5. $P(x) = 6x^2 - 6x - 6$

Exercice 5 (Niveau 3) Équation polynomiale à paramètre

Soit $m \in \mathbb{R}$, on suppose $m \neq 1$. On considère l'équation suivante :

$$(m - 1)x^2 - 4mx + 4m - 1 = 0.$$

1. Pour quelles valeurs de m, l'équation admet-elle une unique solution ?
2. Pour quelles valeurs de m, l'équation admet-elle deux solutions distinctes ?

Exercice 6 (Niveau 1) Polynôme de degré 3

Soit f la fonction polynomiale f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$.

1. Étudier le signe de f.
2. Déterminer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 7 (Niveau 2) Polynôme de degré 3

Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3, tel que :

$$P(0) = 1,\ P(1) = 0,\ P(-1) = -2 \text{ et } P(2) = 4.$$

Exercice 8 (Niveau 2) Polynôme de degré 3

Étudier les variations de la fonction polynomiale f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Exercice 9 (Niveau 2) Factorisation d'un polynôme de degré 3

Soit f la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2.$$

1. Trouver une racine r_1 en essayant plusieurs valeurs simples (-1,0,1,2).
2. Par identification, déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

   $$f(x) = (x - r_1)(ax^2 + bx + c).$$

   Remarque : on appelle cela la factorisation de f par $(x - r_1)$.
3. Trouver les deux racines r_2 et r_3 de la fonction $g(x) = ax^2 + bx + c$.
   La fonction f s'écrit alors $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$
4. En déduire le signe de f.

Exercice 10 (Niveau 1) Factorisation d'un polynôme de degré ≥ 3

Dans chacun des cas, exprimer le polynôme P comme un produit de polynômes de degré minimal et déterminer ses racines.

1. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
2. $P(x) = x^3 - 1$
3. $P(x) = x^4 - 1$

Exercice 11 (Niveau 2) Optimisation

On dispose d'une corde de longueur 1 mètre que l'on coupe en deux. Avec un des morceaux, on forme un carré et, avec l'autre, on forme un rectangle dont la longueur est le double de la largeur.
Problème : Peut-on couper la corde de façon à minimiser la somme des aires du carré et du rectangle ?

1. Notons x la longueur de la corde utilisée pour le carré. Déterminer l'aire du carré et l'aire du rectangle en fonction de x.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{18}(1-x)^2$.
   a) Développer le polynôme f.
   b) Étudier les variations de f.
   c) Conclure.

Exercice 12 (Niveau 2) Optimisation

Le bénéfice, en millions d'euros, d'un nouveau médicament qui arrive sur le marché est modélisé par la fonction polynomiale f définie sur l'intervalle $[1,5\,;7]$ par

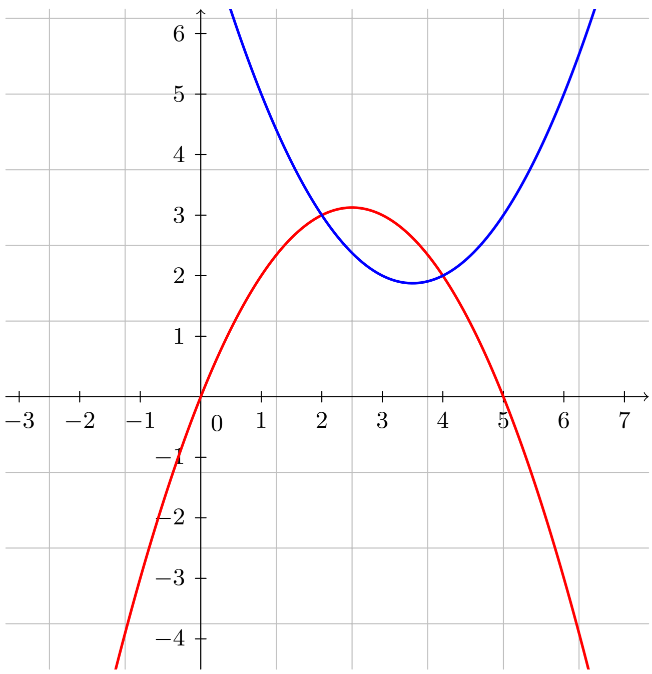
$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$$

où x représente la quantité de milliers de boites vendues.
Questions : Pour quelle quantité de boites vendues, le bénéfice sera-t-il maximal ? Quel sera alors le bénéfice réalisé ?

Exercice 13 (Niveau 2) Représentation graphique

Sur le dessin ci-dessous sont représentées deux fonctions polynomiales du second degré f et g.

1. On sait que le discriminant de f est positif et celui de g négatif. Indiquer laquelle des deux courbes représente f et laquelle représente g.
2. On sait que f a pour racines 0 et 5 et que $f(1) = 2$. Déterminer l'expression de $f(x)$.
3. On sait que g a un minimum en $\frac{7}{2}$ et que les courbes de f et de g se coupent en $A(2\,;3)$ et $B(4\,;2)$. Déterminer l'expression de $g(x)$.
4. Calculer les extrema de f et g.



Exercice 14 (Niveau 2) Lecture graphique

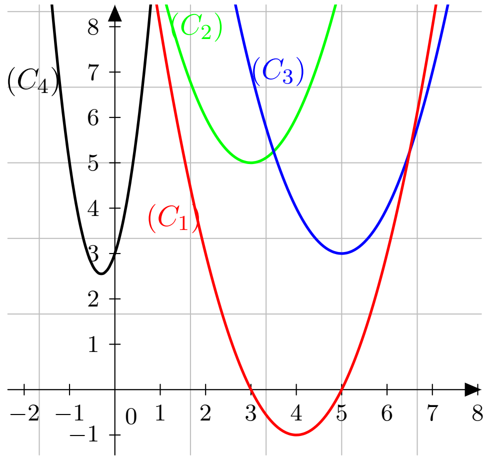
1. Associer à chaque fonction la courbe représentative correspondante en justifiant :

$f_1(x) = (x-3)^2 + 5$

$f_2(x) = (x-5)^2 + 3$

$f_3(x) = 5x^2 + 3x + 3$

$f_4(x) = (x-3)(x-5)$



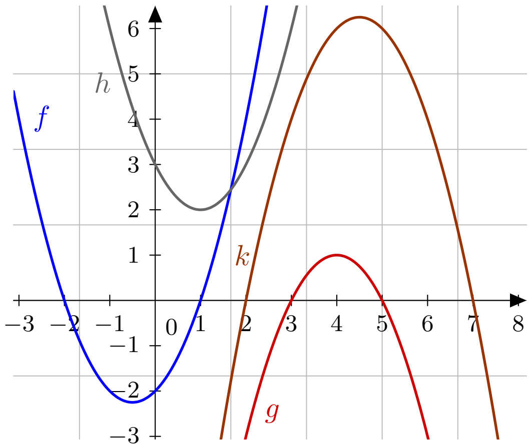
2. En s'aidant des représentations graphiques, compléter les expressions des fonctions suivantes :

$f(x) = (x + \dots)(x - \dots)$

$g(x) = -(x - \dots)^2 + \dots$

$h(x) = (x - \dots)^2 + \dots$

$k(x) = -(x - \dots)(x - \dots)$



3. a) On donne les deux expressions suivantes de la fonction g_1 :

$$g_1(x) = (x+2)^2 - 1 \text{ et } g_1(x) = (x+3)(x+1)$$

Vérifier que ces deux expressions sont égales.

b) Représenter graphiquement la fonction g_1.

c) Reprendre les deux questions précédentes pour chacune des fonctions g_2, g_3 et g_4 :

$$g_2(x) = (x-1)^2 - 4 \text{ et } g_2(x) = (x+1)(x-3)$$

$$g_3(x) = -2(x+3)^2 + 2 \text{ et } g_3(x) = -2(x+4)(x+2)$$

$$g_4(x) = -\frac{1}{2}(x-7)^2 + 2 \text{ et } g_4(x) = -\frac{1}{2}(x-5)(x-9)$$

Exercice 15 (Niveau 3) Lecture graphique

1. Trouver a, b et c tels que la fonction polynomiale $f(x) = ax^2 + bx + c$ soit représentée par la courbe de la figure 1.
2. Trouver a, b, c et d tels que la fonction polynomiale $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ soit représentée par la courbe de la figure 2.

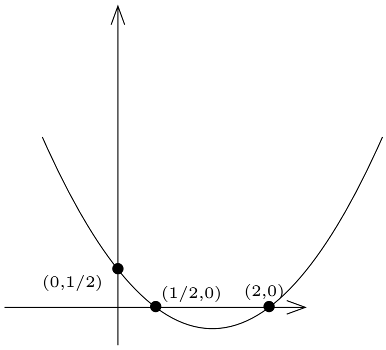


Figure 1

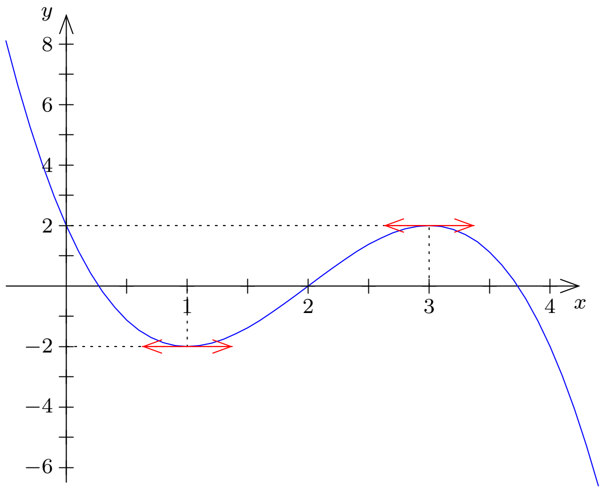


Figure 2

Exercice 16 (Niveau 1) Fractions rationnelles

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et lorsqu'elles sont définies les équations suivantes :

1. $$\frac{x-7}{x-1} = \frac{x-3}{x+1}$$
2. $$\frac{x^2-9}{x^2-1} = 0$$
3. $$\frac{x-1}{x+2} + \frac{x+3}{2x+3} = 0$$
4. $$\frac{1-x}{3x+2} - \frac{1}{2(x+1)} = 0$$

Exercice 17 (Niveau 2) Fractions rationnelles

Soit F la fraction rationnelle définie par :

$$F(x) = \frac{(x^2-3x+2)(x-3)}{(x+1)(x^2-5x+6)}$$

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Exprimer F sous forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont deux polynômes de degré 1.
3. Résoudre $F(x) = 0$.
4. Quelle est la limite de $F(x)$ quand x tend vers 2, quand x tend vers $+\infty$?

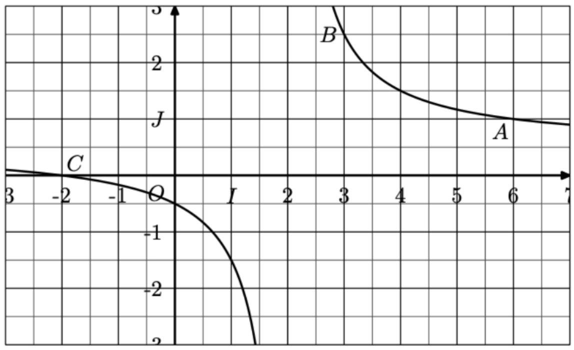
Exercice 18 (Niveau 2) Fractions rationnelles

Soit F la fraction rationnelle définie par :

$$F(x) = \frac{ax+b}{2x+c}$$

où a, b et c sont des réels fixés. On représente ci-dessous la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé (O ; I ; J) et A, B et C sont trois points de le courbe et du quadrillage.

Déterminer les réels a, b et c.



Exercice 19 (Niveau 2) Fractions rationnelles

Soit F la fraction rationnelle définie par :

$$F(x) = \frac{5x - 11}{x^2 - 5x + 4}$$

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$F(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-4}.$$

Exercice 20 (Niveau 2) Somme et produit de racines

Soit P le polynôme défini, pour tout réel, x par $P(x) = 9x^2 + 3x - 6$.

1. Trouver une racine évidente de P.
2. En utilisant la somme et le produit des racines, trouver l'autre racine de P.
3. En déduire la forme factorisée de P.

Exercice 21 (Niveau 2) Somme et produit de racines

1. Soit P le polynôme défini pour tout réel x par $P(x) = 4x^2 + 4x - 24$.
   a) Vérifier que 2 est racine de P.
   b) En utilisant la somme ou le produit des racines, trouver l'autre racine de P.
   c) En déduire la forme factorisée de P.
2. Soit Q le polynôme défini pour tout réel x par $Q(x) = 3x^2 - 5x + 2$.
   Déterminer, si elle existe, la forme factorisée de Q.