LICENCE 3 EEEA notes personelles

Alex Videcoq

Outils mathématiques

vPre 0.0.1

ISTIC

Responsable de matiere	Prof. John Doe
Cursus	L3 EEEA

Rennes 2025
(Draft - September 13, 2025)

Contents

Résumé Rapide

Espaces vectoriels de fonctions **Chapter 1**→ p.1 : Définit la structure des espaces vectoriels appliquée aux fonctions, polynômes, séries trigonométriques, suites et fonctions continues.

Normes et distances dans les espaces vectoriels **Chapter 2**→ p.3 : Introduit la notion de norme, présente les normes usuelles (ℓ^1, ℓ^2, norme du sup) et leurs applications aux suites et aux fonctions. Ainsi que la définition générale d'une distance, ses propriétés, et la distance induite par une norme dans un espace vectoriel.

Convergences de suites de fonctions **Chapter 3**→ p.6 : Distingue convergence simple, convergence en moyenne (L^1), convergence en moyenne quadratique (L^2) et convergence uniforme, en explicitant leurs relations.

Produit scalaire et norme hermitienne **Chapter 4**→ p.7 : Définit le produit scalaire, expose l'inégalité de Cauchy-Schwarz et introduit la norme hermitienne.

Systèmes orthogonaux **Chapter 5**→ p.8 : Présente les notions d'orthogonalité et d'orthonormalité, ainsi que les propriétés fondamentales des sous-espaces orthogonaux et l'extension du théorème de Pythagore.

1 Espaces vectoriels de fonctions

1.1 Rappel sur les espaces vectoriels

Un *espace vectoriel de fonctions* est un espace dont les vecteurs sont des fonctions. Le concept d'espace vectoriel étant en fait de *créer une structure mathématique abstraite* permettant de faire des calculs géométriques dans des ensembles qui n'ont a priori pas vocation à être appréhendés de façon géométrique, comme des ensembles de **matrices ou de fonctions**.

1.2 Introduction

Dans ce chapitre, les espaces vectoriels considérés sont construits sur un corps quelconque noté $\mathbb{K}$, mais en pratique on aura **toujours** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Note. Pour aller beaucoup plus loin sur les structures algébriques :

- Structures algébriques : THE poster
- *Les maths en tête : Algèbre* par **Xavier Gourdon** [1]

1.3 Exemples

Polynômes de degré $\leq n$

On note :

$$F_n = \left\{ P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \;\middle|\; a_i \in \mathbb{K},\ n \geq 1 \right\}.$$

Muni de l'addition des fonctions et de la multiplication externe par un scalaire, $(F_n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel de dimension $n + 1$.

La base canonique de F_n est

$$\mathcal{B}_n = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}.$$

Soient $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$:

- **Addition :**

$$+ : \begin{cases} E \times E \to E \\ (u, v) \mapsto u + v \end{cases}, \quad (P + Q)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i \in F_n.$$

- **Multiplication par un scalaire :** pour $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times E \to E \\ (\lambda, u) \mapsto \lambda u \end{cases}, \quad (\alpha P)(x) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i) x^i \in F_n.$$

Cas particulier $n = 2$

Si $n = 2$, tout polynôme s'écrit

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

L'espace F_2 est de dimension 3, de base $(1, x, x^2)$, et est en bijection naturelle avec $\mathbb{K}^3$ via

$$P(x) \longmapsto (a_0, a_1, a_2).$$

Séries trigonométriques

On considère l'ensemble

$$G_I = \left\{ f(x) = \sum_{n \in I} \alpha_n e^{inx} \;\middle|\; I \subset \mathbb{Z},\ \alpha_n \in [a, b] \right\}.$$

Pour $f, g \in G_I$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Ainsi, $(G_I, +, \cdot)$ est également un espace vectoriel.

2 Normes et distances dans les espaces vectoriels

2.1 Espaces vectoriels normés

Note. Le développement des espaces vectoriels normés (en particulier de dimensions infinies) est d'abord dû à Hilbert ; Banach compléta largement cette théorie dans les années 1930.

Une *norme* sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une application

$$E \to \mathbb{R}^+, \quad u \mapsto \|u\|$$

qui associe à chaque vecteur $u \in E$ un nombre réel positif, noté $\|u\|$, et vérifie les trois propriétés fondamentales :

- (séparation) $\|u\| = 0 \iff u = 0$: seule la longueur du vecteur nul est nulle ;
- (homogénéité) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
- (inégalité triangulaire) Pour tout $(u, v) \in E^2$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Muni d'une norme, E est appelé un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (en abrégé e.v.n).

Note. *Les maths en tête : Analyse* [2] *Topologie sur les espaces métriques et les espaces vectoriels normés*, `1.1` Normes et Distances.

Ainsi, un *espace vectoriel normé* est un espace vectoriel muni d'une telle norme. Intuitivement, la norme $\|u\|$ représente la «longueur» du vecteur u dans l'espace. L'inégalité triangulaire traduit la propriété géométrique selon laquelle le chemin direct est plus court que tout chemin brisé par un point intermédiaire.

On appelle aussi *boule unité* l'ensemble

$$B(0, 1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

2.2 Exemples de normes

Normes dans $\mathbb{R}^n$

Dans $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, plusieurs normes usuelles sont définies par des formules explicites. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on définit :

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Ces trois applications satisfont bien les axiomes d'une norme. La norme $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne usuelle. Plus généralement, pour tout $\alpha \in [1, \infty)$ on définit la *norme* ℓ^α par :

$$\|x\|_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^\alpha\right)^{1/\alpha}.$$

C'est une conséquence de l'inégalité de Minkowski.

Espaces ℓ^α de suites sommables

Pour $1 \leq \alpha < \infty$, l'espace ℓ^α est l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\geq 1}$ telles que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^\alpha < \infty.$$

On y définit la norme

$$\|x\|_\alpha = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^\alpha\right)^{1/\alpha}.$$

Pour $\alpha = 2$, l'espace $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire usuel. Ces espaces $(\ell^\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ sont des espaces de Banach, c'est-à-dire complets pour la distance associée à la norme.

Fonctions continues sur $[a, b]$

Soit $C([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On y définit plusieurs normes classiques :

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_a^b |f(x)|^\alpha \, dx\right)^{1/\alpha}, \qquad 1 \leq \alpha < \infty,$$

et la norme du *sup* :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

La norme $\|f\|_\alpha$ mesure la « taille moyenne » de la fonction, tandis que $\|f\|_\infty$ mesure la valeur maximale atteinte par la fonction. $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Espaces L^α et égalité presque partout

Dans un cadre plus général, on considère un espace mesuré (X, μ). On définit $L^\alpha(X)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables f telles que

$$\int_X |f(x)|^\alpha \, d\mu(x) < \infty.$$

On identifie deux fonctions f et g si $f(x) = g(x)$ pour presque tout x (c'est-à-dire sauf sur un ensemble de mesure nulle). On pose alors

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_X |f(x)|^\alpha \, d\mu(x)\right)^{1/\alpha}.$$

Ces espaces sont normés, complets pour $\alpha \geq 1$. En particulier, L^1 est l'espace des fonctions absolument intégrables et L^2 celui des fonctions de carré intégrable.

2.3 Distances et espaces métriques

Définition

Une *distance* (ou *métrique*) sur un ensemble E est une application

$$d : E \times E \to [0, +\infty[$$

vérifiant, pour tous $x, y, z \in E$:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Un tel couple (E, d) est appelé *espace métrique*.

Distance associée à une norme

Si E est un espace vectoriel normé, on définit la distance induite par la norme :

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Cette distance satisfait les axiomes précédents et représente la longueur du segment joignant u à v. Grâce à d, on définit les boules ouvertes

$$B(u, r) = \{x \in E : \|x - u\| < r\},$$

ce qui induit une topologie naturelle sur E. Ainsi, tout espace vectoriel normé est aussi un espace métrique.

3 Convergence des suites de fonctions

4 Produit scalaire et norme hermitienne

5 Systèmes orthogonaux

References

Back-references to the pages where the publication was cited are given by ●.

[1] Xavier Gourdon. Algèbre: Mathématiques pour MP. fr. Ellipses-Marketing, **2009**.

1

[2] Xavier Gourdon. Les maths en tête. Analyse - 3e édition. fr. Editions Ellipses, **2020**.

3