

# Modelowanie deterministyczne - projekt

Jagoda Miedzińska

semestr zimowy 2024/2025

## 1 Wstęp

Celem projektu było wykorzystanie równania ciepła w symulacjach numerycznych. Skupiliśmy się na tematyce dotyczącej ogrzewania mieszkania przy założeniu różnych uproszczeń o charakterze fizycznym.

## 2 Ogrzewanie trzypokojowego mieszkania

### 2.1 Ogólnie

W tym problemie skupiliśmy się na prostokątnym mieszkaniu, składającym się z trzech prostokątnych pokoi. Oprócz tego elementami mieszkania były również okna (mające stałą temperaturę zewnętrzną), ściany z idealną izolacją, drzwi (jedynie między pokojami) oraz grzejniki, będące źródłami ciepła.

Rozwiązanie oparliśmy na jawnym schemacie numerycznym wynikającym z metody różnic skończonych. Algorytm polegał na:

- dyskretyzacji przestrzeni i czasu (czyli "poszatkowaniu ich"),
- przygotowaniu odpowiednich stałych (np. gęstość powietrza itd.),
- zaimplementowaniu warunków początkowych stałych dla całego mieszkania,
- wykonaniu pętli po czasie modelującej rozprzestrzenianie się ciepła.

Każdy krok pętli składał się z:

- podzieleniu macierzy mieszkania na trzy mniejsze reprezentujące pokoje,
- zaaktualizowaniu danych o rozprzestrzenionym cieple (grzejnik i przewodność cieplna powietrza),
- wklejeniu zaaktualizowanych danych do macierzy domu,
- nałożeniu odpowiednich warunków brzegowych - stała temperatura na oknach (Dirichlet) i temperatura z sąsiednich pól dyskretyzacji na ścianach (Neumann),

- uśrednienie temperatury na drzwiach.

Główny wzór, na którym bazowaliśmy to:

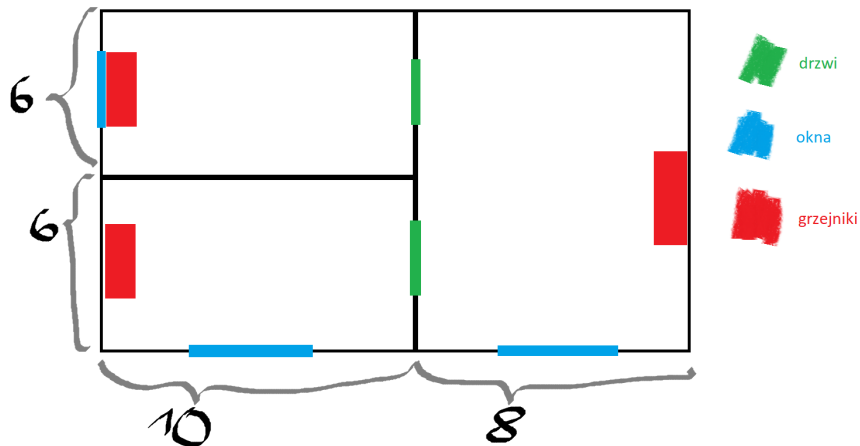
$$u_t \approx \alpha \Delta u + \frac{P}{\rho A c} \Theta(x, u),$$

gdzie:

- $\alpha$  to współczynnik przewodnictwa cieplnego powietrza,
- $\rho$  to gęstość powietrza,
- $c$  to ciepło właściwe powietrza,
- $P$  to moc grzejnika,
- $A$  to pole powierzchni grzejnika,
- $\Theta(x, u)$  to indyktor wskazujący na położenie grzejnika.

## 2.2 Dane

- $\alpha = 0.025$  —> źródło
- $\rho = 1.25 \frac{kg}{m^3}$  —> źródło
- $c = 1005 \frac{J}{kg \cdot K}$  —> źródło
- $P = 2000W$



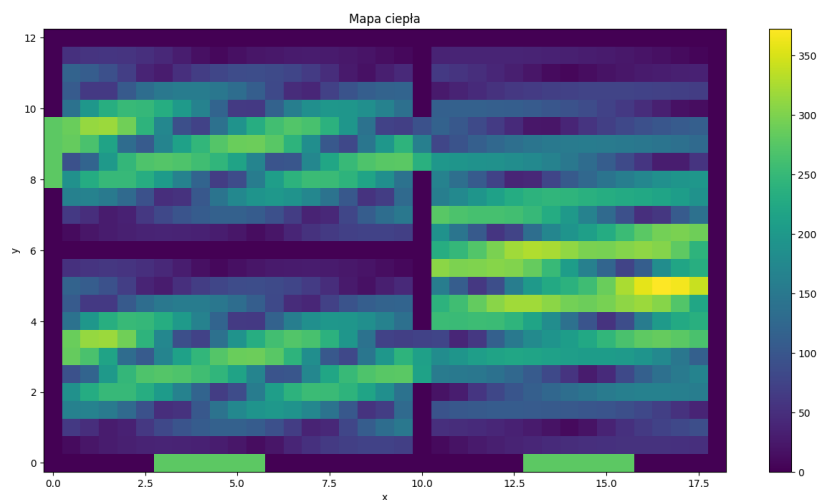
Rysunek 1: Rysunek poglądowy mieszkania

Nasze mieszkanie miało wymiary  $12 \times 18$  metrów, przy czym przyjęliśmy krok dyskretyzacji  $h_x = 0.5$ . Badaliśmy zjawisko dla 12 godzin, przy czym patrzyliśmy na nie w sekundach, a za krok dyskretyzacji wzięliśmy  $h_t = 0.5$ . Taki krok  $h_t$  zapewnia nam stabilność rozwiązania, bo  $0.5 < 5 = \frac{h_x^2}{2\alpha}$ .

Za temperaturę zewnętrzną przyjęliśmy stałe 5 stopni Celsjusza, czyli 278 Kelwinów, a za początkową 15 stopni, czyli 288 Kelwinów.

## 2.3 Wyniki

Poniżej wkleiliśmy mapę ciepła dla całego mieszkania po 12 godzinach. Przypominamy, że skala temperatur po prawej stronie jest w Kelwinach.

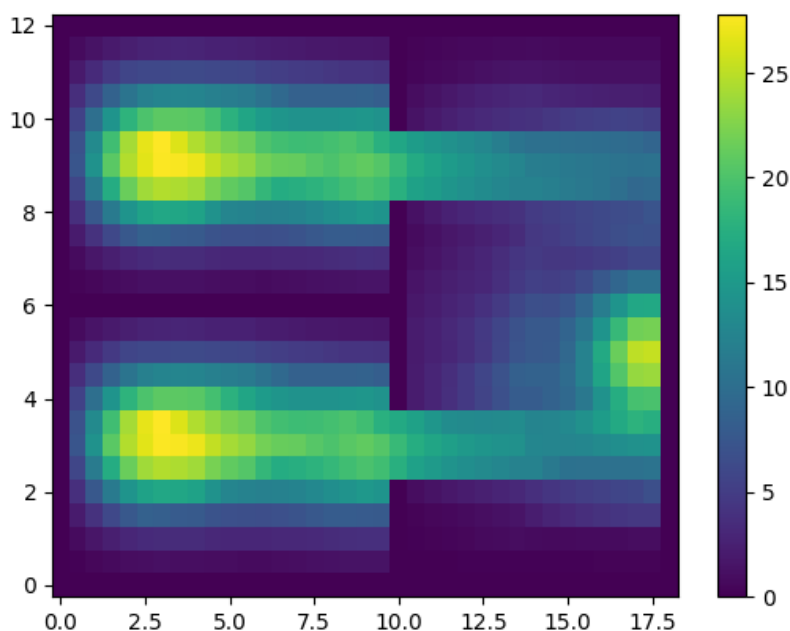


Rysunek 2: Mapa ciepła mieszkania (z oknami)

Niestety, nie wygląda ona tak jak byśmy chcieli i podejrzewamy, że problem leży gdzieś w indeksach, ale widzimy, że grzejniki mają ok. 340 Kelwinów, czyli ok. 70 st. Celsjusza, a temperatury przestrzeni w ich pobliżu (dla rzeczywistego wyniku) to ok. 300 Kelwinów, czyli ok. 23 st. Celsjusza.

Zaobserwowalibyśmy zatem faktyczne ogrzanie się mieszkania.

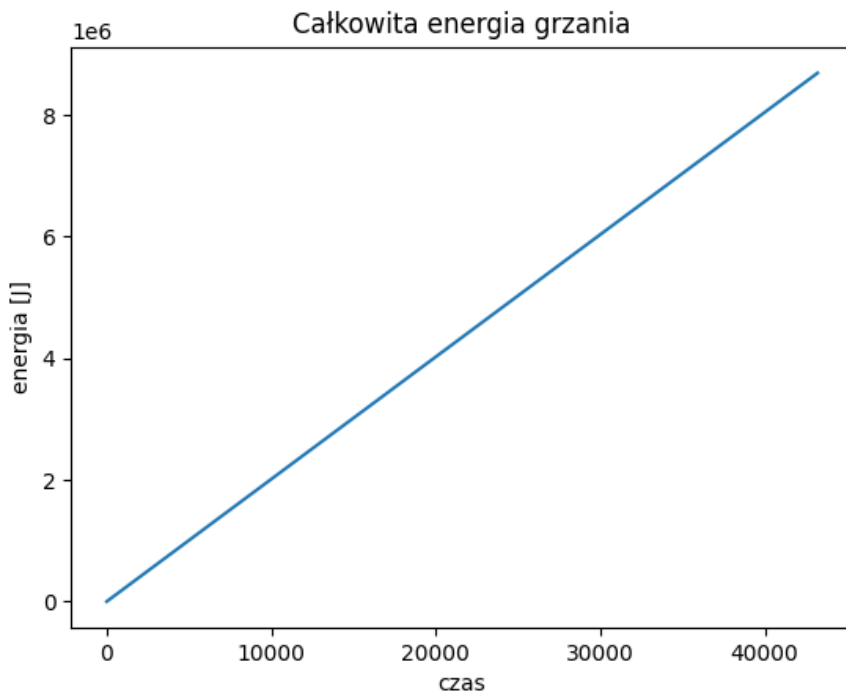
W gąszczu prób otrzymania prawdziwej mapy ciepła udało nam się uzyskać kształt o wiele bliższy rzeczywistości, dzięki małej poprawce indeksowania w pobieraniu danych z macierzy domu do pokoi. Niestety, było to kosztem lekkiego przesuwania się danych (w tym grzejników) w czasie.



Rysunek 3: Mapa ciepła mieszkania (bez okien, z poprawką)

Na powyższej mapie ciepła już wyraźniej widzimy rozchodzenie się ciepła, choć grzejniki są nieco przesunięte i 'rozpłynięte'. Przez zmienione indeksowanie aktualizowana macierz dużego pokoju po prawej nie poradziła sobie z ciepłem pochodzącym ze złączenia na drzwiach. Spodziewamy się jednak, że rozeszłoby się ono również w pionie.

Poniżej wkleiliśmy wykres użycia energii od czasu.



Rysunek 4: Wykres energii całkowitej ogrzewania

Ponieważ z naszego założenia grzejniki działały przez cały badany czas, to wykres ten jest stale rosnący. Odczytaliśmy też, że dla końcowego czasu ( $4.32 \cdot 10^4$ ) całkowita energia przekracza  $8 \cdot 10^6$  i prawdopodobnie sięgnie gdzieś ponad  $8.5 \cdot 10^6$ , przy czym z obliczeń teoretycznych wyszło nam, że ta wartość wyniesie  $8.64 \cdot 10^6$  (iloczyn maksymalnego czasu [s] i mocy grzejnika [ $\frac{J}{s}$ ]). Otrzymaliśmy zatem wynik zgodny z teoretycznymi przewidywaniami.

Mogliśmy odczytać dodatkowo, że na żadnym etapie eksperymentu średnia temperatura w pokojach nie przekroczyła 20 stopni Celsjusza, ponieważ w przeciwnym wypadku moglibyśmy zaobserwować skutki działania termostatu i wykres energii nie byłby tak wprost liniowy.

## 2.4 Wniosek

W badanym czasie przy przyjętych stałych każde pomieszczenie zostało ogrzane, ale nie do tego stopnia, żeby jego średnia temperatura (z całej powierzchni) przekroczyła 20 st. Celsjusza. Ostatecznie i tak mamy w domu przyjemniej niż na początku, a zwłaszcza w porównaniu do temperatury zewnętrznej.