



BI-PST 2018

Domácí Úkol

Autoři:

Pavel Jahoda a Jan Lidák

Obsah

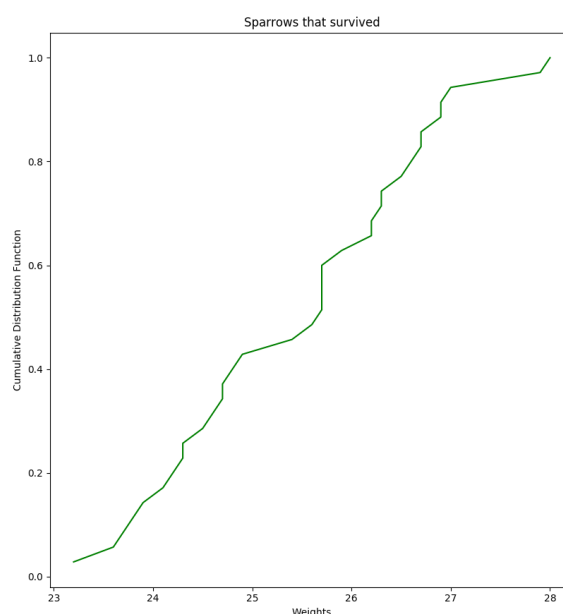
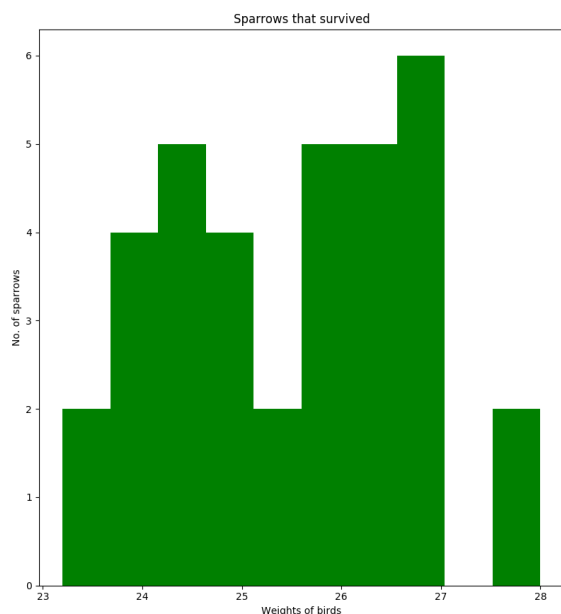
1	Úkol 1 - Načtení a popis datasetu	1
2	Úkol 2 - Hustota a distribuční funkce	1
3	Úkol 3 - Nejbližší rozdělení	3
4	Úkol 4 - Generování náhodného výběru	4
5	Úkol 5 - Konfidenční interval	5
6	Úkol 6 - Testování hypotézy	6
7	Úkol 7 - Testování středních hodnot	6

1 Úkol 1 - Načtení a popis datasetu

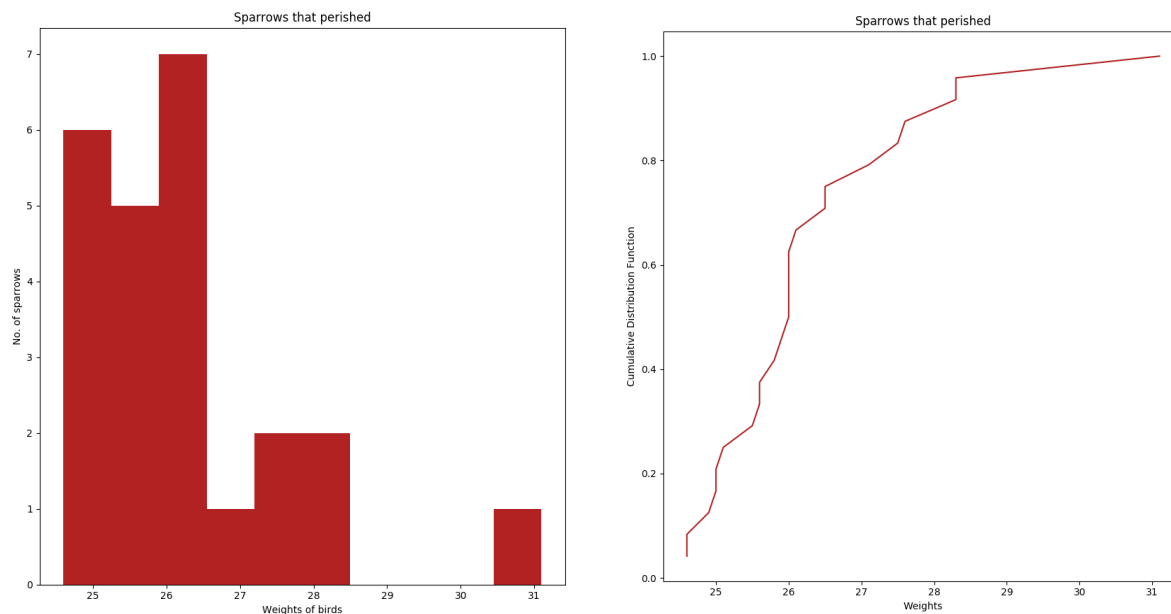
Data jsou z pozorování 59 vrabců během zimy. První veličina \mathbf{X} reprezentuje váhy vrabců v gramech. Druhá veličina \mathbf{Y} nabývá dvou hodnot 'survived', pokud vrabec přežil a 'perished' pokud nepřežil. Sledovanou proměnnou X jsme rozdělili na dvě pozorované skupiny takzvaných *independent and identically distributed random variables*. Tedy v každé skupině jsou náhodné veličiny reprezentující výsledky pokusu prováděného za stejných podmínek. $\mathbf{X1}$ jsou vrabci co přežili a je jich 35. $\mathbf{X2}$ jsou vrabci co nepřežili a je jich 24. $EX1=25.463$, $\text{var}(X1)=1.539$ a medián je 25.7. $EX2=26.275$, $\text{var}(X2)=2.078$ a medián je 26.

2 Úkol 2 - Hustota a distribuční funkce

Nejprve vykreslíme histogram a poté graf distribuční funkce odhadnutý z grafu empirické distribuční funkce pro vrabce kteří přežili.



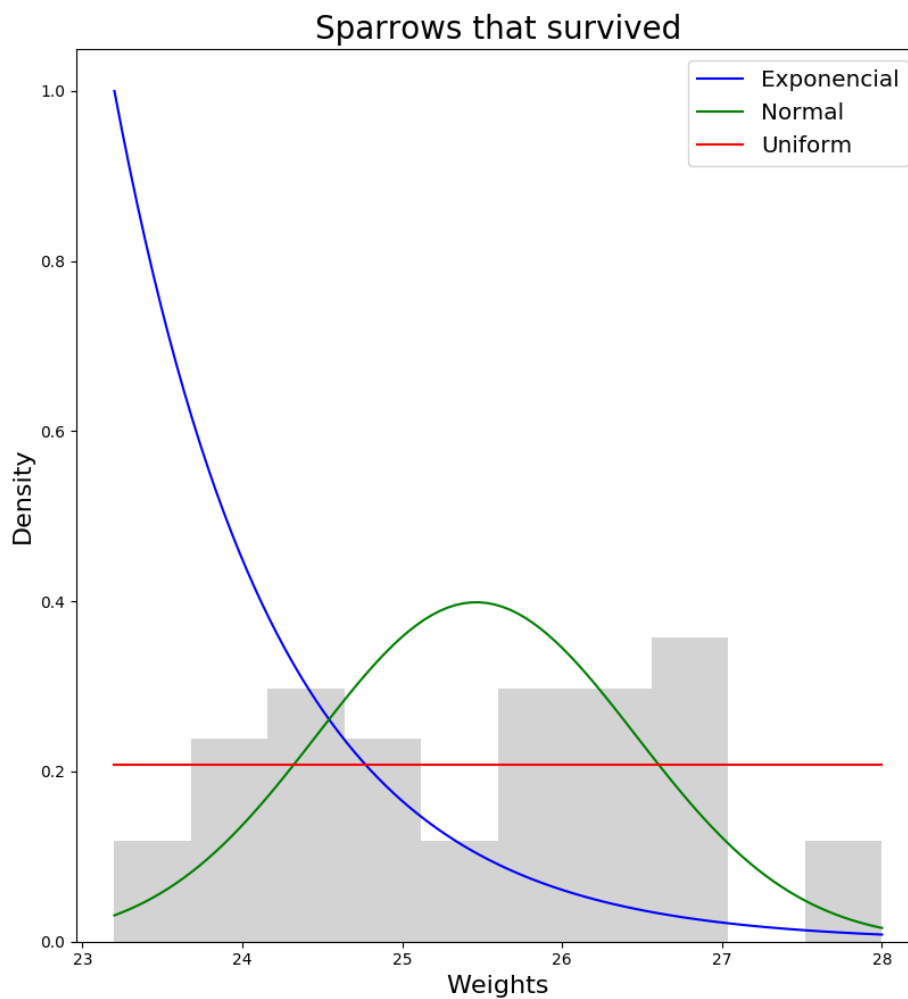
Poté vykreslíme histogram a poté graf distribuční funkce odhadnutý z grafu empirické distribuční funkce pro vrabce kteří nepřežili.



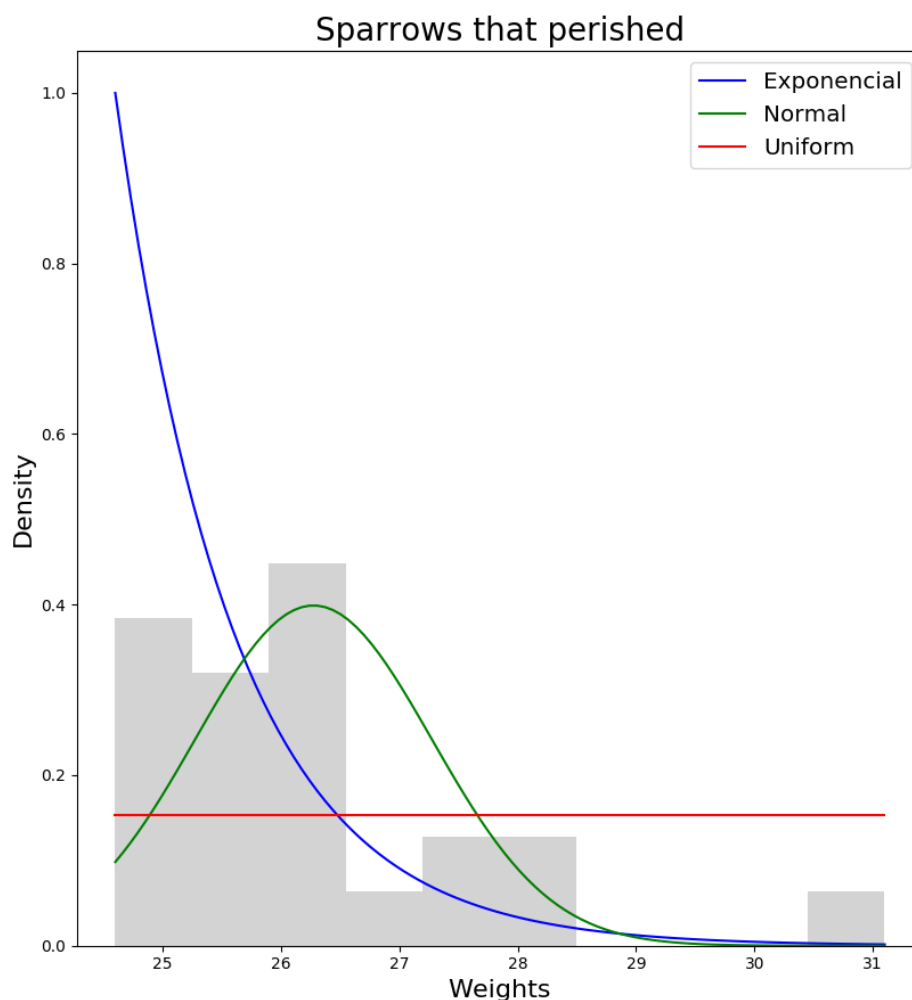
Graf empirické distribuční funkce se podobá grafu exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda = 1$.

3 Úkol 3 - Nejblíží rozdělení

Histogram přeživších vrabců byl nejprve znormován, tak aby obsah histogramu byl roven 1 pro lepší porovnání s grafy rozdělení jejich obsah pod křivkou je také roven 1. Po zanesení normálního, exponenciálního a rovnoměrného rozdělení s odhadnutými parametry do grafů histogramu vidíme, že histogram nejvíce odpovídá normálnímu rozdělení.



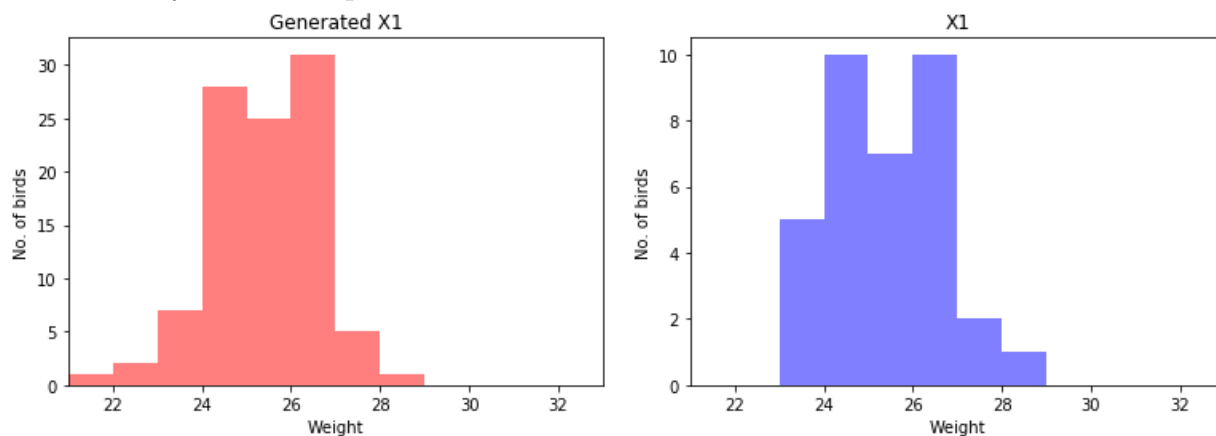
Určení, které rozdělení odpovídá nejlepě grafu vrabců, kteří zimu nepřežili je obtížnější, jelikož to není vizuálně patrné. První způsob, který jsem použil na zjištění nejbližšího rozdělení bylo spočítat součet rozdílů mezi výškami sloupců histogramů a hodnotami funkcí pro x rovno středu daného sloupce. V tomto způsobu vyšlo normální rozdělení jako rozdělení které histogramu více odpovídá (0.73 normalání a 0.94 exponenciální). Dále mi co se zjištění podobnosti přišlo přirozené penalizovat extrémní rozdíly mezi výškami sloupců histogramů a hodnotami funkcí. Umocnění rozdílu zapříčiní požadovanou penalizaci. V tomto případě vyšla výsledná suma normálního rozdělení 0.13 oproti 0.20 u exponenciálního rozdělení, tudíž si myslíme, že normální rozdělení je nejvíce podobné histogramu zemřelých vrabců. Statistická významnost tohoto tvrzení se stejně jako u vrabců kteří přežili odvíjí od počtu náhodných veličin, kterých je 24 (nepřežili) a 35 (přežili).



4 Úkol 4 - Generování náhodného výběru

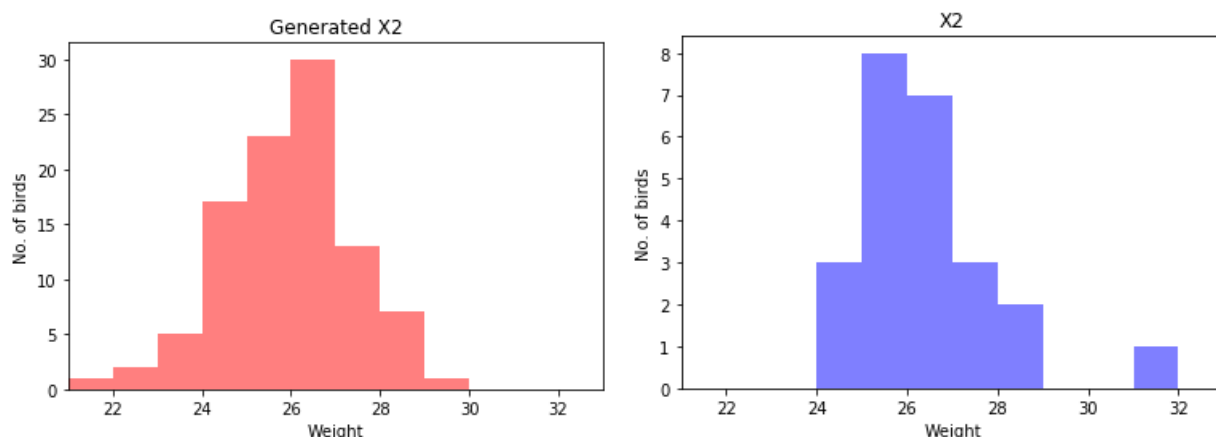
Na následujících grafech je zobrazeno 100 vygenerovaných hodnot spolu s načtenými daty z datasetu. Histogram přeživších vrabců připomíná normálního rozdělení s parametry $\lambda = EX = 25.793$ a $\sigma^2 = \text{var}X = 1.918$, hodnoty byli tedy generovány s těmito parametry.

První graf vygenerovaných dat poměrně silně připomíná získaná data, věříme tedy že toto rozdělení bylo zvoleno správně.



Histogram vrabců jež nepřežili se také podobá normálnímu rozdělení, a to s parametry $\lambda = EX = 26.275$ a $\sigma^2 = \text{var}X = 2.078$. Data byla generována jako normální normální rozdělení s těmito parametry.

Data vygenerovaná pro mrtvé opeřence už na tom jsou hůře. Generovaná data jsou oproti naměřeným datům poněkud rozlezlé, zde by se hodilo mít větší dataset aby se dala lépe odhadnout distribuční funkce, popřípadě parametry rozdělení.



5 Úkol 5 - Konfidenční interval

Jelikož neznáme rozptyl našich rozdělení (pouze je dokážeme odhadnout) použijeme pro výpočet konfidenčních intervalů namísto rozptylu σ výběrový rozptyl s_n . Dále \bar{X}_n je výběrový průměr veličiny, $t_{\alpha/2, n-1}$ je kritická hodnota Studentova t-rozdělení, n je počet prvků v rozdělení. Veličina X_1 jsou vrabci jež přežili, X_2 vrabci co nepřežili. Spolehlivost má být 95%, tedy $\alpha = 0.05$.

Oboustranný 95% konfidenční interval pro X_1 spočteme jako:

$$\begin{aligned}
 (S_{X_1}, U_{X_1}) &= (\bar{X}_{1n_1} - t_{\alpha/2, n_1-1} \cdot \frac{s_{n_1}}{\sqrt{n_1}}, \bar{X}_{1n_1} + t_{\alpha/2, n_1-1} \cdot \frac{s_{n_1}}{\sqrt{n_1}}) \\
 &= (25,46 - 2,03 \cdot \frac{1,59}{5,9}, 25,46 + 2,03 \cdot \frac{1,59}{5,9}) = (25.031, 25.895)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Oboustranný 95% konfidenční interval pro X_2 :

$$\begin{aligned}(S_{X_2}, U_{X_2}) &= (\bar{X}_{2_{n_2}} - t_{\alpha/2, n_2-1} \cdot \frac{s_{n_2}}{\sqrt{n_2}}, \bar{X}_{2_{n_2}} + t_{\alpha/2, n_2-1} \cdot \frac{s_{n_2}}{\sqrt{n_2}}) \\ &= (26,275 - 2,06 \cdot \frac{2,17}{4,9}, 26,275 + 2,06 \cdot \frac{2,17}{4,9}) = (25.656, 26.894)\end{aligned}\quad (2)$$

6 Úkol 6 - Testování hypotézy

Testujeme hypotézu, zda je střední hodnota rovna hodnotě K (parametr úlohy).

$$H_0 : \mu = K$$

$$H_A : \mu \neq K$$

$$K = 8$$

$$\alpha = 0.05$$

Vrabcí co přežili

Jelikož $K \notin (25.031, 25.895)$ přijímáme alternativní hypotézu H_A , která říká, že střední hodnota vah vrabců kteří přežili se nerovná K .

Vrabcí co nepřežili

Jelikož $K \notin (25.656, 26.894)$ přijímáme alternativní hypotézu H_A , která říká, že střední hodnota vah vrabců kteří nepřežili se nerovná K .

7 Úkol 7 - Testování středních hodnot

Testujeme hypotézu, zda se rovnají střední hodnoty vah vrabců jež přežili a zahynuli. Alternativa k této hypotéze bude, že střední hodnota se u přeživších a mrtvých vrabců liší.

$$H_0 : \mu_p = \mu_z$$

$$H_A : \mu_p \neq \mu_z$$

$$\alpha = 0,05$$

Pro srovnání použijeme dvouvýběrový t-test s předpokladem, že rozptyl obou veličin je stejný. p-hodnota nám vyšla $0.027 < 0.05$. Hypotézu H_0 lze tedy zamítnout ve prospěch alternativní hypotézy H_A , že **vrabci mají rozdílnou střední hodnotu vah v závislosti na tom zda přežili či nikoliv**.

Abychom si byli jisti že jsme zvolili správnou variantu t-testu, otestujeme ještě rozptyl veličin pomocí Bartlettova testu. p-hodnota = $0.41 > 0.05$, takže shodu rozptylů výšek na hladině významnosti 5% nezamítáme, a potvrzuje naši volbu.