## 4. Twierdzenie o zasadniczej indukcji matematycznej

Niech T(n) oznacza funkcję zdaniową zmiennej n określonej w dziedzinie . Jeśli:

1. Istnieje taka liczba jest zdaniem prawdziwym
2. Dla każdej liczby naturalnej prawdziwa jest implikacja

To T(n) jest zdaniem prawdziwym dla każdej liczby naturalnej

## 5. Nierówność Bernoulliego

Niech . Wtedy:

Dowód:

Dla n = 0, rozważana nierówność przyjmuje postać , czyli jest prawdziwa.

Przypuśćmy, że dla jakieś liczby zachodzi . Wtedy mamy:

Z założenia a+1>0

+a

Gdyż

Co pokazuje, że rozważana nierówność zachodzi także dla n+1.

# Ciągi

## 6. Definicja ciągu liczbowego

Def.

Ciągiem liczbowym nazywamy dowolną funkcję rzeczywistą określoną na liczbach naturalnych.

1. Ciąg rosnący:

Ciąg nazywamy rosnącym gdy lub słabo rosnącym gdy

1. Ciąg malejący:

Ciąg nazywamy malejącym gdy lub słabo malejącym gdy

1. Ciąg ograniczony

Ciąg nazywamy ograniczonym jeśli istnieje liczba M taka, że:

- ciąg ograniczony z góry

- ciąg ograniczony z dołu

## 7. Definicja granicy ciągu

Liczba jest granicą ciągu wtedy i tylko wtedy gdy:

Fakt ten zapisujemy: ,gdzie g jest granicą ciągu

## 8. Twierdzenie, że ciąg może mieć tylko jedną granicę

Ciąg może mieć co najwyżej jedną granicę.

Dowód:

Przypuśćmy, że pewien ciąg ma dwie granice oraz , przy czym .

W takim razie:

Weźmy Wówczas mamy:

Sprzeczność, która oznacza, że nasze przypuszczenie jest błędne.

## 9. Twierdzenie o monotoniczności ciągów

Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny. Niemalejący do kresu górnego, nierosnący do kresu dolnego.

## 10.Twierdzenie o 3 ciągach

Jeżeli ,oraz ciągi są zbieżne, przy czym . To ciąg jest również zbieżny i zachodzi .

Co należało udowodnić

## 11. Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym

Jeżeli ciąg jest ograniczony i monotoniczny to jest zbieżny.

Dowód:  
Bez starty ogólności możemy założyć, że ciąg jest słabo rosnący weźmy zbiór Zbiór A jest ograniczony x = supA.

Oznacza to, że:

W takim razie dla dowolnego , biorąc n> mamy: Co należało udowodnić

## 12. Twierdzenie o ciągu średnich geometrycznych i arytmetycznych

Twierdzenie o ciągu średnich arytmetycznych

Jeśli ciąg ma granicę, to granica ciągu średnich arytmetycznych istnieje i jest jej równa

to

Ponadto, jeśli to granica ciągu geometrycznego również istnieje i jest jej równa.

## 13. Definicja granicy niewłaściwe

1) Ciąg jest zbieżny do +nieskończoności, kiedy dla dowolnej liczby A istnieje takie miejsce w ciągu że dla każdego n większego od wszystkie wyrazy ciągu są większe od A

2) Twierdzenie o dwóch ciągach

Jeżeli cią

Niech , jeśli

Jeśli

## 14. Ważne twierdzenie o ciągach

Jeśli ,

Dowód:

Przypuśćmy, że dla pewnych zbieżnych do a i b, spełniających zachodzi jednak b<a

Wówczas dla mamy dla pewnych :

Sprzeczność z założeniem

## 15. Definicja liczby e

Ciąg zadany wzorem jest rosnący i ograniczony.

Dowód:

W takim razie

Analogicznie można pokazać, że ciąg jest malejący!

W takim razie

,

Tzn. jest ograniczony.

## 16. Definicja podciągu

Niech będzie ciągiem liczbowym, zaś będzie funkcją rosnącą. Wówczas ciąg dany wzorem nazywamy podciągiem ciągu

1. Zbieżność podciągu przy założeniu zbieżności ciągu

Jeśli

Dowód:

Niech będzie rosnąca. Niech będzie dowolne. Skoro takie, że

tzn. dla

Co należało udowodnić

## 17. Twierdzenie Bolzano-Weiestarssa

Jeśli ciąg jest ograniczony, to zawiera podciąg zbieżny.

Dowód:

Skoro ciąg jest ograniczony, to istnieją takie, że

1. Dzielimy przedział na poł i przez oznaczamy tę połowę, w której jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu

Za wyraz wybierzmy dowolny wyraz ciągu , który jest w

1. Podzielmy przedział na połowy. Przynajmniej w jednej z otrzymanych połówek jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu . Oznaczmy ją przez . Zachodzi wtedy:

Za wyraz wybierzmy dowolny wyraz ciągu , który jest w i taki, którego indeks jest większy niż

1. Po analogicznych krokach otrzymamy przedział o długości , w którym jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu oraz będziemy mieć zdefiniowane wyrazów tworzonego podciągu:

...,

1. Kontynuując kroki dalej, otrzymujemy ciąg Ponieważ

To ciąg jest ograniczony i rosnący słabo. Zatem jest zbieżny. Oznaczmy jego granicę przez

Co więcej, ciąg jest słabo malejący i ograniczony. Zatem jest zbieżny. Oznaczmy jego granicę przez

Zauważmy, że



Pamiętajmy, że w każdym kroku wyraz był wybierany z odcinka . W takim razie:



Na mocy twierdzenia o 3 ciągach

## *18. Definicja granicy dolnej i górnej ciągu*

1) Granica dolna

Jeżeli ciąg jest ograniczony, to liczbę nazywamy granicą dolną ciągu i oznaczamy

2) Granica Górna

Jeżeli ciąg jest ograniczony, to liczbę nazywamy granicą górną ciągu i oznaczamy

# Szeregi

## 19. Definicja szeregu

Niech dany będzie ciąg liczbowy .

Szeregiem liczbowym (nieskończonym) nazywamy wyrażenie

## 20. Definicja sumy szeregu oraz warunek konieczny zbieżności szeregu

Dla szeregu liczbowego rozważmy ciąg sum częściowych dany wzorem:

…

…

1. Jeśli ciąg posiada granicę skończoną, to granicę tę nazywamy *sumą szeregu* oznaczonego . Mówimy też, że jest zbieżny.

Jeśli

1. Warunek konieczny zbieżności szeregu

Jeśli szereg jest zbieżny, to

Dowód:

Ponieważ

## 21. Definicja oraz własności szeregu geometrycznego

Załóżmy, że

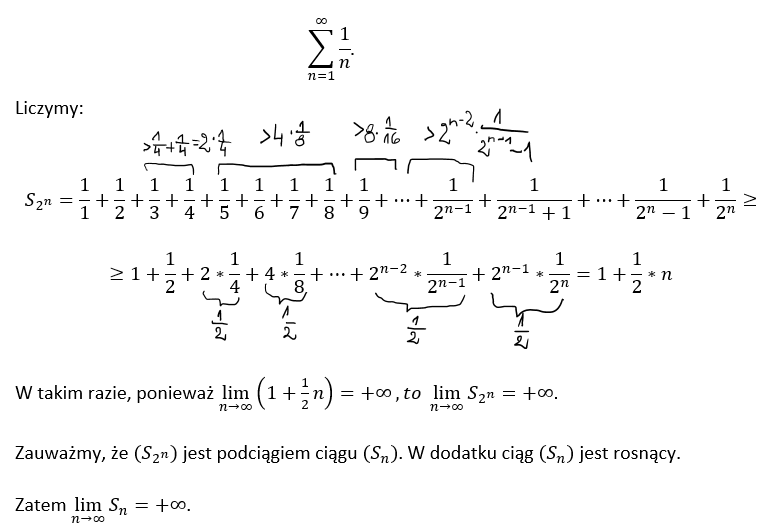
* Jeśli a zatem szereg jest rozbieżny do
* Jeśli a zatem szereg jest zbieżny i jego suma wynosi .
* Jeśli szereg jest rozbieżny do
* Jeśli szereg jest rozbieżny

## 22. Warunek Cauchy’ego o zbieżności szeregów

Na to, aby szereg był zbieżny potrzeba i wystarcza, aby

## 23. Dowód na rozbieżność szeregu harmonicznego

Z faktu, że nie wynika, że szereg jest zbieżny.



## 25. Kryteria o szeregach o wyrazach nieujemnych

1) Kryterium porównawcze

Przypuśćmy, że .

* Jeśli szereg , to
* Jeśli szereg , to

2) Kryterium porównawcze ilorazowe

Przypuśćmy, że . Jeśli istnieje granica i ,

to oba szeregi oraz zachowują się tak samo (w sprawach zbieżności).

3) Kryterium d’Alemberta

Niech szereg będzie szeregiem o wyrazach dodatnich oraz niech istnieje granica. Wtedy:

* Jeśli , to szereg jest zbieżny
* Jeśli , to szereg jest rozbieżny, co więcej szereg nie spełnia

warunku koniecznego zbieżności szeregu

* Jeśli , to kryterium nie rozstrzyga

4) Kryterium Cauchy’ego

Niech będzie szeregiem o wyrazach dodatnich (ew. nieujemnych) oraz niech istnieje granica . Wtedy:

* Jeśli , to szereg jest zbieżny
* Jeśli , to szereg jest rozbieżny, co więcej szereg nie spełnia warunku koniecznego zbieżności szeregu
* Jeśli , to kryterium nie rozstrzyga

Dowód:

Jeżeli to istnieje takie , że dla każdego n > m.

To oznacza, że zachodzi nierówność co dowodzi zbieżności

szeregu .

Jeżeli to istnieje takie m, że dla n > m zachodzi nierówność

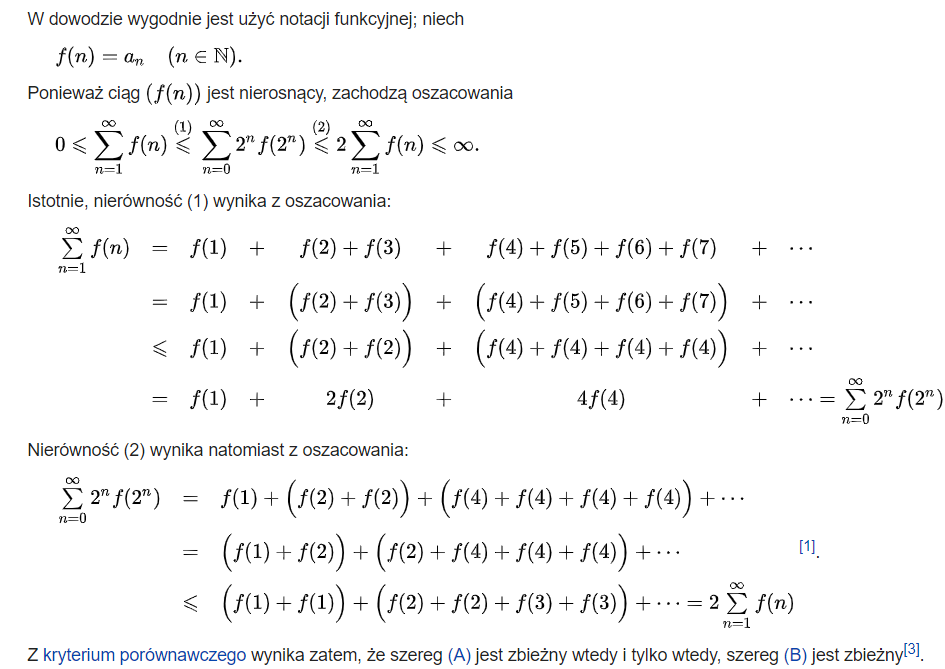
Oznacza ro, że szereg jest rozbieżny bo nie spełnia warunku koniecznego zbieżności.

## 27. Kryterium kondensacyjne

Kryterium Cauchy’ego o zagęszczeniu

Jeżeli szereg o jest szeregiem o wyrazach dodatnich oraz ciąg jest malejący, to:  
 jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg jest zbieżny.

Dowód:



## 28. Zbieżność szeregu harmonicznego rzędu r

Szeregiem harmonicznym rzędu r nazywamy szereg postaci

Zbieżność szeregu w zależności od :

1. .

Wówczas jest rosnący do (dla ) lub stały (dla ). W obu przypadkach nie spełnia warunku koniecznego, więc jest rozbieżny do .

1. . Wówczas jest malejący. Zatem możemy użyć twierdzenia o zagęszczaniu.

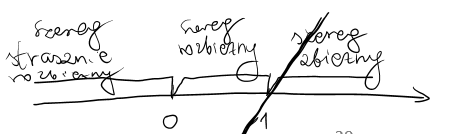
Liczymy

Otrzymaliśmy .

Jest to szereg geometryczny z , zatem jest on jedynie zbieżny, gdy , czyli gdy

czyli . Gdy

oraz



## 30. Kryterium Leibniza zbieżności szeregu

Jeśli ciąg jest nierosnący i zbieżny do 0, to szereg oraz szereg są zbieżne.

## 32. Definicja szeregu bezwzględnie zbieżnego

Szereg jest bezwzględnie zbieżny, gdy zbieżny jest szereg .

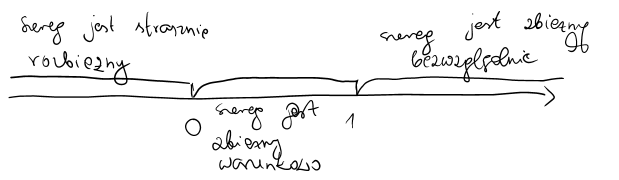
## 33. Definicja szeregu warunkowo zbieżnego

Szereg , który jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny, nazywa się warunkowo zbieżny.

## 34. Zbieżność szeregu anharmonicznego rzędu r

Szeregiem anharmonicznym rzędu () nazywamy szereg .

Zbieżność:



## 35. Twierdzenie Riemanna

Szereg warunkowo zbieżny można przez odpowiednią permutację jego wyrazów uczynić szeregiem zbieżnym do dowolnej liczby ℝ albo do , albo , albo rozbieżny

## 36. Twierdzenie o permutowaniu wyrazów szeregu bezwzględnie zbieżnego

Szereg bezwzględnie zbieżny pozostaje bezwzględnie zbieżny (i do tej samej sumy) przy dowolnej permutacji (przestawieniu) jego wyrazów

## 37. Definicja iloczynu Cauchy’ego szeregów

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Przypuśćmy, że szeregi są zbieżne bezwzględnie i ich sumy wynoszą odpowiednio

W takim razie

Wówczas wszystkie wyrazy zgromadzone w tabelce tworzą szereg, który jest bezwzględnie zbieżny.

Zatem kolejność ich sumowania nie jest istotna. Można np. sumować „po wierszach”, czy „po kolumnach”.

Propozycja Cauchy’ego kolejności sumowania:

## 38. Twierdzenie Cauchy’ego dotyczące iloczynu szeregów

Jeśli szeregi są zbieżne bezwzględnie to szereg

Też jest zbieżny bezwzględnie i zachodzi wzór (iloczyn Cauchy’ego):

## 39. Twierdzenia Mertensa

Niech szeregi i będą zbieżne, przy czym co najmniej jeden z nich bezwzględnie.

Wówczas ich iloczyn Cauchy’ego, tzn. szereg , gdzie

jest zbieżny i zachodzi wzór:

## 40. Twierdzenie Abela

Jeśli szeregi i są zbieżne oraz zbieżny jest szereg , gdzie

To musi zachodzić:

# Funkcje

## 41. Definicja punktu skupienia zbioru

Punkt nazywamy punktem skupienia zabioru , jeśli istnieje ciąg taki, że

## 42. Definicja granicy w punkcie

1) Definicja Heinego

Funkcja f(x) ma granicę w punkcie jeżeli dla każdego ciągu zbieżnego do ciąg jest zbieżny do g.

Jeśli dla dowolnego ciągu  zbieżnego do (zarówno z lewej jak i z prawej strony), wartości zbiegają do liczby g, to g jest granicą funkcji f(x) w punkcie x0.

1. Definicja Causch’ego

Funkcja f(x) ma w punkcie ma granicę g, jeżeli dla każdej liczby istnieje taka liczba , że dla każdego x spełniającego:

## 43. Granica w zerze – wyprowadzenie

Niech będzie dana wzorem .

Wiemy, że .

Dowód:

Niech , wtedy:

(dla kątów ostrych)

A wiemy, że: . W takim razie:

Ponieważ .

Zatem



Jeśli zaś , to:

## 44. Definicja granicy jednostronnej

Niech oraz niech będzie punktem skupienia zbioru . Wtedy:

Niech oraz niech będzie punktem skupienia zbioru Wtedy:



## 45. Twierdzenie o rachunku granic

Jeśli , to:

* Symbole nieoznaczone

## 46. Definicja ciągłości funkcji w punkcie

Funkcję nazywamy ciągłą w gdy

1. , to

## 47. Definicja funkcji ciągłej

Funkcję nazywamy ciągłą, jeśli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

1. Jeśli jest punktem skupienia , to jest ciągła w wtedy i tylko wtedy, gdy
2. Jeśli nie jest punktem skupienia, to znaczy jest punktem izolowanym (), to jest ciągła w .

## 50. Definicja własności Darboux

Mówimy, że funkcja ma własność Darboux tzn.

Jeśli oraz istnieje takie d, które spełnia jedną z nierówności , to istnieje taki punkt , dla którego f(c) = d

## 51 Twierdzenie Darboux o wartości średniej

Jeśli jest ciągła, to posiada własność Darboux.

Innymi słowy: jeśli jest ciągła, to przyjmuje swoje wartości pośrednie

## 52. Twierdzenie Weiestrassa o osiąganiu kresów

Jeżeli jest ciągła, to istnieją takie , że

## 53. Definicja jednostajnej ciągłości

Funkcję nazywamy jednostajnie ciągłą, jeśli:

)

Jeżeli funkcja jest ciągła, to jest też jednostajnie ciągła

## 54. Warunek Lipschitza

Mówimy, że funkcja spełnia warunek Lipschitza, jeśli:

Jeśli spełnia warunek Lipschitza, to jest jednostajnie ciągła.

Dowód:

Skoro spełnia warunek Lipschitza to istnieje takie, że zachodzi:

Niech będzie dowolne. Biorąc mamy dla

## 56. Definicja ilorazu różnicowego, pochodnej, różniczkowalności f-cji w punkcie

Rozważamy funkcję i punkt . Niech będzie takie, że

1. Definicja ilorazu różnicowego

Ilorazem różnicowym nazywamy wyrażenie:

1. Pochodna

Granicę ilorazów różnicowych (właściwą lub nie), o ile istnieje, nazywamy pochodną funkcji w punkcie i oznaczamy

Innymi słowy:

Mówimy, że jest różniczkowalna, jeśli jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny. Wtedy przyporządkowanie nazywamy funkcję pochodną funkcji f (lub krócej pochodną).

1. różniczkowalność funkcji w punkcie

Jeśli funkcja ma w punkcie skończoną pochodną, to nazywamy ją różniczkowalną w punkcie

## 57. Twierdzenie dotyczące rachunku pochodnych

Niech będą różniczkowalne w . Wówczas:

## 58.Twierdzenie o różniczkowaniu funkcji złożonej

Jeżeli jest różniczkowalna w oraz jest różniczkowalna w , to złożenie jest różniczkowalna w oraz zachodzi wzór:

## 59. Twierdzenie o różniczkowaniu funkcji odwrotnej

Jeśli jest funkcją odwracalną i ciągłą oraz różniczkowalną w , przy czym , to funkcja odwrotna jest różniczkowalna w punkcie , co więcej:

## 60. Pochodne funkcji elementarnych

* Niech dana będzie wzorem i jest stałe. Wtedy:
* Niech dana będzie wzorem dla .

Wtedy

Udowodnimy ten wzór indukcyjnie

Niech . Wtedy i liczymy:

Tzn.

Przypuśćmy teraz, że dla pewnego zachodzi:

Wtedy

Co należało wykazać.

* Pochodne funkcji trygonometrycznych
* Pochodne funkcji cyklometrycznych
* Pochodne funkcji logarytmicznych
* Pochodne funkcji wykładniczych
* Pochodne funkcji potęgowych

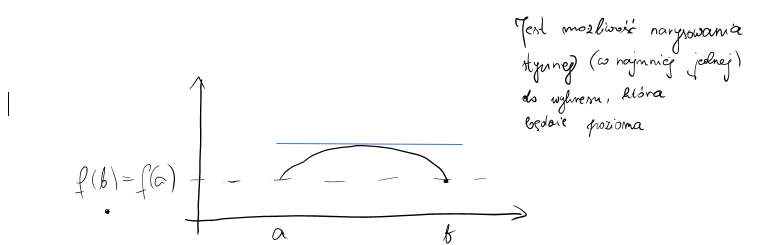
## Twierdzenie Rolle’a

Jeśli jest

-funkcją ciągłą na [a,b]

- różniczkowalną w to istnieje takie, że

-



Dowód:

Ponieważ jest funkcją ciągłą określoną na przedziale, to na mocy twierdzenia Weier-Strassa przyjmuje swoje kresy, tzn.

* Istnieje takie, że
  + Istnieje takie, że

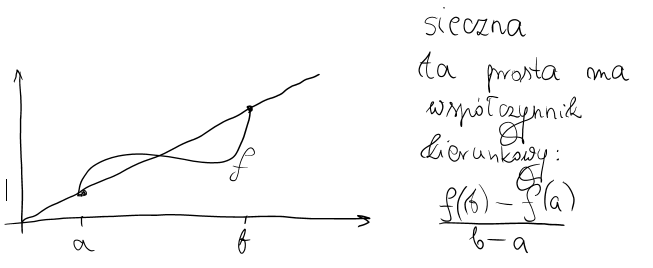
Jeśli przyjmuje wartość największą w punkcie to mamy

0

Aby granica lewostronna równała się praw stronnej f’(c) = 0. Co kończy dowód.

## 62. Twierdzenie Lagrange’a

Jeśli jest ciągła oraz różniczkowalna w , to istnieje takie, że:



Dowód:

Niech funkcja będzie określona następująco:

Zauważmy, że spełnia wszystkie założenia twierdzenia Rolle’a

W takim razie istnieje takie, że

Zatem

1. *Twierdzenie Cauchy’ego.*

* Twierdzenie

Jeśli są ciągłe i różniczkowalne w oraz , to istnieje takie, że:

Dowód:

Niech funkcja będzie określona następująco:

Zauważmy, że oraz , zatem spełnia wszystkie założenia twierdzenia Rolle’a.

W takim razie istnieje takie, że .

Liczymy:

Zatem dla

1. *Definicja pochodnych wyższego rzędu.*

* Definicja

Jeśli jest różniczkowalna, to funkcję daną wzorem

nazywamy pochodną drugiego rzędu funkcji (lub po prostu „drugą pochodną”).

* Jeśli jest pochodną tego rzędu oraz jest różniczkowalna, to pochodną tego rzędu definiujemy .

1. *Twierdzenie Taylora, wzór Taylora, wielomian Taylora.*

* Twierdzenie

Jeśli jest krotnie różniczkowalna, to dla dowolnej pary punktów

istnieje w przedziale otwartym o końcach i taki punkt , że

* Wzór Tylora

* Wielomian Taylora

1. *Twierdzenie dotyczące związku znaku pochodnej z monotonicznością funkcji.*

* Twierdzenie

Jeśli jest ciągła oraz jest różniczkowalna w , przy czym

To jest rosnąca na całym przedziale .

Dowód:

Niech oraz .

Wtedy na mocy Twierdzenia Lagrange’a istnieje takie, że

* Twierdzenie

Jeśli jest ciągła oraz jest różniczkowalna w , przy czym

To jest malejąca na całym przedziale .

Dowód:

Niech oraz .

Wtedy na mocy Twierdzenia Lagrange’a istnieje takie, że

* Uwaga

Twierdzenie o znaku pochodnej i monotoniczności funkcji dotyczy TYLKO przedziałów!

1. *Definicje ekstremów funkcji.*

* Definicja

Niech

* + Mówimy, że ma ***maksimum lokalne właściwe***w punkcie , jeśli istnieje takie, że
  + Mówimy, że ma ***maksimum lokalne niewłaściwe***w punkcie , jeśli istnieje takie, że
  + Największą wartość funkcji, o ile istnieje, nazywamy maksimum globalne.
  + Mówimy, że ma ***minimum lokalne właściwe***w punkcie , jeśli istnieje takie, że
  + Mówimy, że ma ***minimum lokalne niewłaściwe***w punkcie , jeśli istnieje takie, że
  + Najmniejszą wartość funkcji, o ile istnieje, nazywamy minimum globalne.

1. *Warunek konieczny istnienia ekstremum.*

* Twierdzenie

Jeśli funkcja jest różniczkowalna oraz

posiada ekstremum w

Dowód:

Przyjmijmy, że Jeśli ma w maksimum lokalne. Ponieważ jest różniczkowalna, to istnieje

Liczymy:



* Uwaga

Twierdzenie odwrotne (implikacja w drugą stronę) NIE jest prawdziwe!

1. *Warunek dostateczny istnienia ekstremum (różne wersje).*

* Twierdzenie – warunki dostateczne istnienia ekstremum

Niech będzie ciągła.

1. Jeśli istnieje takie, że

To w funkcja ma maksimum lokalne właściwe.

1. Jeśli istnieje takie, że

To w funkcja ma minimum lokalne właściwe.

1. Jeśli istnieje takie, że

To w funkcja NIE posiada ekstremum.

1. Jeśli istnieje takie, że

To w funkcja NIE posiada ekstremum.

Dowód:

Ad1. Niech z twierdzenia Lagrange’a dla przedziału , istnieje takie, że

Ad2. Podobnie, jeśli

Ad3. Ad4 – analogicznie.

1. *Wklęsłość i wypukłość funkcji – związek z drugą pochodną.*

* Twierdzenie

Jeśli funkcja jest dwukrotnie różniczkowalna oraz

Dowód:

Niech będzie ustalone.

Niech Wtedy na mocy Twierdzenia Taylora, istnieje pomiędzy

Takie, że

Zatem

Co kończy dowód.