Ejercicios Axiomas de probabilidad.

- ¿es $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad?

— $\mathbb{P}$ Cumple los Axiomas de Kolmogorov ?

Verificación

- No Negatividad: $P(A)>0 \ \forall A\in F$

① dado P_1 y P_2 son medidas de Probabilidad. entonces $P_1(A)\geq 0$ y $P_2(A)\geq 0 \ \forall A\in F$

Como $a_1\geq 0$ y $a_2\geq 0$ y $P=a_1P_1+a_2P_2$.
entonces $P(A)=a_1P_1(A)+a_2P_2(A)\geq 0$

- Norma: $P(\Omega)=1$, donde Ω es el espacio muestral.

② Como $P_1(\Omega)=1$. y $P_2(\Omega)=1$. y $a_1+a_2=1$.
entonces $P=a_1P_1+a_2P_2$

$P=a_1\cancel{P_1(\Omega)}^1+a_2\cancel{P_2(\Omega)}^1$

$P=a_1+a_2=1$.

- Aditividad Contable: si $A_1, A_2, A_3, \dots$ Son eventos disjuntos.

Entonces. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$

③ Si $A_1, A_2, \dots$ Son disjuntos.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=a_1P_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)+a_2P_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=$$

$$\Rightarrow a_1\sum_{i=1}^{\infty}P_1(A_i)+a_2\sum_{i=1}^{\infty}P_2(A_i)$$; si P_1 y P_2 Cumplen Aditividad Contable entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

¿Es P una medida de probabilidad en el Caso especifico?

Verificar Axiomas

Tenemos $\Omega=\{1,2\}$, $F=\sigma(\Omega)$, y P es:

$$P(A)=\begin{cases}0 & \text{si } A=\emptyset\\ 1/3 & \text{si } A=\{1\}\\ 2/3 & \text{si } A=\{2\}\\ 1 & \text{si } A=\{1,2\}\end{cases}$$

① Ningun elemento de Ω es Negativo.
$P(A)\geq 0 \ \forall A\in F$

② $P(\Omega)=P(\{1,2\})=1$.

③ $F\to\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}$
Como 1 y 2 son disjuntos.

$P(\{1\})\cup P(\{2\})=P(\{1,2\})=1$

$P(\{1\})+P(\{2\})=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$.

Propiedades básicas usando los axiomas de Kolmogorov

Axioma 1 todos los Ω son positivos.
$P(A)\geq 0 \ \forall A\in F$

Axioma 2 $P(\Omega)=P(\{1,2\})=1$, por tanto $P(\Omega)=1$

Axioma 3 los eventos F son $\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}$. Como $\{1\},\{2\}$

$P(\{1\}\cup\{2\})=P(\{1,2\})=1$

y

$P(\{1\})+P(\{2\})=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$.

P si es una medida de probabilidad Por los Axiomas de Kolmogorov.

③ Propiedades básicas usando los Axiomas Kolmogorov

1. $P(\Omega)=1$
2. $A\subseteq\Omega$
3. $P(A)\leq P(\Omega)=1$

a) $P(\emptyset)=0$; Aditividad, si $A=\emptyset$, entonces $P(\emptyset)=0$

b) $P(A^c)=1-P(A)$:

$P(A\cup A^c)=P(\Omega)=1; \forall A\in F$

$A\cap A^c=\emptyset$, Por aditividad

$\hookrightarrow P(A)+P(A^c)=1$.

Entonces.

$P(A^c)=1-P(A)$

c) si $A\subset B$, entonces $P(B)=P(A)+P(B-A)$

si $A\subset B$, entonces $B=A\cup(B-A)$, y Como $A\cap(B-A)=\emptyset$, Por aditividad:

$P(B)=P(A)+P(B-A)$

d) $P(A)\leq 1$;

e) $A\subseteq B$, $\to P(A)\leq P(B)$:

tambien $B=A\cup(B-A)$, donde $A\cap(B-A)=\emptyset$ Por Aditividad

$P(B)=P(A)+P(B-A)$.; Como $P(B-A)\geq 0$, $\to P(B)\geq P(A)$

entonces $P(A)\leq P(B)$

f) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Por definición $A\cup B$ son todos los elementos de A y B, el factor $-P(A\cap B)$ es para quitar los repetidos.

elementos de los 3 Conjuntos.

g) Formula para 3 Conjuntos

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-\underbrace{(P(A\cap C)+P(B\cap C)+P(A\cap B))}_{\text{elementos de Conjuntos Compartidos. Posiblemente repetidos.}}+\overbrace{P(A\cap B\cap C)}$$

h) probabilidad de la diferencia.

Por definición $A-B=A\cap B^c$

$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)$

$P(A-B)=P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)$

Con el Axioma 1

Con $(A\cap B)$ y $(A\cap B^c)$ son disjuntos

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)$

$P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)$

$P(A-B)=P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)$

i Probabilidad de la diferencia simétrica.

$P((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c))=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$:

¿Qué es difencia simétrica?

$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B^c)\cup(B\cup A^c)$

Los Conjuntos $A\cap B^c$ y $B-A^c$ son disjuntos.

$P((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c))=P(A\cap B^c)+P(B\cap A^c)$.

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$,

1 $P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)$

2 $P(B\cap A^c)=P(B)-P(A\cap B)$

$P((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c))=(P(A)-P(A\cap B))+(P(B)-P(A\cap B))$

$P((A\cap B^c)\cup(B\cup A^c))=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$

Probabilidad Condicional y total

	Hombres	Mujeres	totales
USA	185	115	300
No USA	415	285	700
totales	600	400	1000

H y M son disyuntos

① $P(H)=\dfrac{\#\text{ hombres}}{\#\text{ total}}=\dfrac{3}{5}\rightarrow 60\%$

100%

② $P(M)=1-P(H)=\dfrac{2}{5}\rightarrow 40\%$

③ $P(G)=\dfrac{\#\text{ Gafas}}{\#\text{ totales}}=\dfrac{3}{10}\rightarrow 30\%$

$$P(G/M)=\frac{\overbrace{P(G\cap M)}^{\text{Probabilidad Mujer con Gafas}}}{P(M)}$$

$P(M)\rightarrow$ Probabilida de ser mujer.

$$P(G/M)=\frac{P(G\cap M)=\frac{115}{1000}}{P(M)=\frac{2}{5}}=\frac{\frac{115}{1000}}{\frac{2}{5}}=\frac{5\cdot 115}{2\cdot 1000}=\frac{115}{400}=\frac{23}{80}$$

② Si sale 1,2 ; Urna 1 $P(1)=\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}_{\text{suma de 1 y 2}}=\frac{1}{3}$

Si sale 3,4,5,6 Urna 2, $P(2)=4\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}$ $\Big\}\ 3/3=1$

Setup

2) Urna 1
- 3 rojas, 1 N, 6 verdes
- 10 bolas

Urna 2
- 6 rojas, 2 Negras, 2 verdes
- 10 bolas.

- $P(R/1)=\frac{3}{10}$; $P(N/1)=\frac{1}{10}$; $P(V/1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$
- $P(R/2)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$; $P(N/2)=\frac{1}{5}$; $P(V/2)=\frac{1}{5}$

A) $P(R)=P(R/1)P(1)+P(R/2)P(2)$

lo mismo

$P(R)=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{10}+\frac{2}{5}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

B) $P(N)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{30}+\frac{2}{15}=\frac{1}{30}+\frac{4}{30}\rightarrow\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$

C) $P(1/N)=\frac{P(N\cap 1)}{P(N)}\rightarrow P(N)P(1/N)=P(N\cap 1)$

$P(N\cap 1)=P(N/1)P(1)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$

Reemplazar

$P(1/N)=\frac{1}{30}\cdot\frac{6}{1}=\frac{1}{5}$

D) $P(2/N)=1-P(1/N)\rightarrow P(2/N)=\frac{4}{5}$

③

total de dulces. 5

→ Calcular $P(F\cap F)$

$P(F\cap F)=\underbrace{P(F_1)}_{\text{primer dulce fresa}}\cdot\underbrace{P(F_2/F_1)}_{\text{segundo dulce fresa}}$

$P(F_1)=\frac{\#\text{ Fresa}}{\#\text{ dulces}}=\frac{3}{5}$

$P(F_2/F_1)=\frac{\#\text{ Fresa restante}}{\#\text{ Dulces Restantes}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$P(F\cap F)=3/5\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$

teorema de bayes

①

a) 40% fuma → 75% hombres $P(H/F)=0{,}75$; $P(M/F)=0{,}25$

60% No Fuma → ~~60% Mujeres~~ $P(M/\neg F)=0{,}6$; $P(H/\neg F)=0{,}4$

$P(F)=\frac{2}{5}$; $P(\neg F)=\frac{3}{5}$; $P(M)=P(M/F)P(F)+P(M/\neg F)P(\neg F)\rightarrow P(M)=(0{,}25\cdot 0{,}4)+(0{,}6)^2=0{,}46$. $\frac{46}{100}=\frac{23}{50}$

b) $P(F\cap H)$

$P(F\cap H)=P(H/F)\,P(F)$

$P(F\cap H)=0{,}75\cdot 0{,}4=0{,}3$

c) $P(F/M)=\frac{P(F\cap M)}{P(M)}\rightarrow P(F\cap M)=P(M/F)P(F)=0{,}25\cdot 0{,}4=0{,}1$

$P(F/M)=\frac{0{,}1}{0{,}46}=\frac{5}{23}$

2 estimación # estudiantes (λ)

a) estimación inicial $\hat{\lambda}$: $\hat{\lambda}=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\cdot\pi(\lambda_i)$

donde $\lambda_i=\{1,2,3,4\}$ y $\pi(\lambda_i)=\{0.4,\ 0.3,\ 0.2,\ 0.1\}$

$\hat{\lambda}=(1\cdot 0{,}4)+(2\cdot 0{,}3)+(3\cdot 0{,}2)+(4\cdot 0{,}1)=0{,}4+0{,}6+0{,}6+0{,}4=2.$

b) $P(x/\lambda_i)$:

$P(x/\lambda_i)=\frac{\lambda_i^{x}e^{-\lambda}}{x!}$

Con $x=4$ y $x!=24$; Verosimilitudes para $\lambda_i=1,2,3,4$ son

$P(4/\lambda_1)=\frac{1e^{-1}}{24}$, $P(4/\lambda_2)=\frac{2^4e^{-2}}{24}$; $P(4/\lambda_3)=\frac{3^4e^{-3}}{24}$; $P(4/\lambda_4)=\frac{4^4e^{-4}}{24}$

c) $P(\lambda_i / x)$:

$$P(\lambda_i / x) = \frac{P(x/\lambda_i) \cdot \pi(\lambda_i)}{\sum_{j=1}^{4} P(x/\lambda_i)\pi(\lambda_j)} \rightarrow$$

```python
# verosimilitud conjunta para cada lambda
likelihood = (lambdas ** x1 * np.exp(-lambdas) / factorial_x1) * \
             (lambdas ** x2 * np.exp(-lambdas) / factorial_x2) * \
             (lambdas ** x3 * np.exp(-lambdas) / factorial_x3) * \
             (lambdas ** x4 * np.exp(-lambdas) / factorial_x4)

posterior_unnormalized = likelihood * prior_probabilities

posterior_normalized = posterior_unnormalized / np.sum(posterior_unnormalized)


print(posterior_normalized)
print(np.sum(posterior_normalized))
```

```
[0.03762023 0.52918156 0.37260451 0.06059371]
0.9999999999999999
```

– el modelo más probable es 0,53% para 2 estudiantes

esta normalizada

f) $\hat{\lambda}$

```python
mejor_modelo = lambdas@posterior_normalized
print(mejor_modelo)
```

```
2.4561717005576615
```

Punto 3.

a $\lambda_i = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\pi(\lambda_i) = \{0.4, 0.3, 0.2, 0.1\}$

$\lambda = 2.$

b) $P(x_1, x_2 / \lambda_i)$

$$P(x_1/\lambda_i) = \frac{\lambda_i^{x_1} e^{-\lambda_i}}{x_1!}; \quad P(x_2/\lambda_i) = \frac{\lambda_i^{x_2} e^{-\lambda_i}}{x_2!}$$

$$P(x_1 x_2 / \lambda_i) = P(x_1/\lambda_i) \cdot P(x_2/\lambda_i)$$

sustituir $x_1 = 24$; $x_2 = 120$

Verosimilitudes.

$P(x_1, x_2 / \lambda_i) =$ c, d, e, F

```python
mejor_modelo_prob = np.max(posterior_normalized)
print(f'El vector de probabilidades es: {posterior_normalized}')
print(f'Está normalizado, la suma es: {np.sum(posterior_normalized)}')
print(f'La probabilidad más alta: {mejor_modelo_prob}')
```

```
El vector de probabilidades es: [6.79401775e-05 6.11631640e-02 4.90547314e-01 4.48221582e-01]
Está normalizado, la suma es: 0.9999999999999999
La probabilidad más alta: 0.49054731368409443
```

```python
mejor_modelo = lambdas@posterior_normalized
print(f'El mejor modelo es: {mejor_modelo}')
```

```
El mejor modelo es: 3.3869225377883514
```

Punto 4

Densidad de probabilidad $\pi(D/p)$

Setup

- eficiencias:
  - e^- : 90%
  - p^+ : 60%
  - αp : 20%

· el Flujo de electrones (F_e) es el doble que el de Protones (F_p) y α-Particulas (F_α)

$F_e = 2F_p$; $F_e = 2F_\alpha$; $F_p = F_\alpha$

A) $\pi(p) = \dfrac{F_p}{F_{tot}}$

$\pi(e) \dfrac{2F_p}{4F_p} = \dfrac{1}{2}$; $\pi(p) = \dfrac{F_p}{4F_p} = \dfrac{1}{4}$; $\pi(\alpha) = \dfrac{F_p}{4F_p} = \dfrac{1}{4}$

Aprion 0,5 0,25 0,25

B) $P(D) = \pi(D/e)P(D/e) + \pi(D/p)P(D/p) + \pi(D/\alpha)P(D/\alpha)$

$\pi(D/e) = 0,5$; $\pi(D/p) = 0,25$; $\pi(D/\alpha) = 0,25$

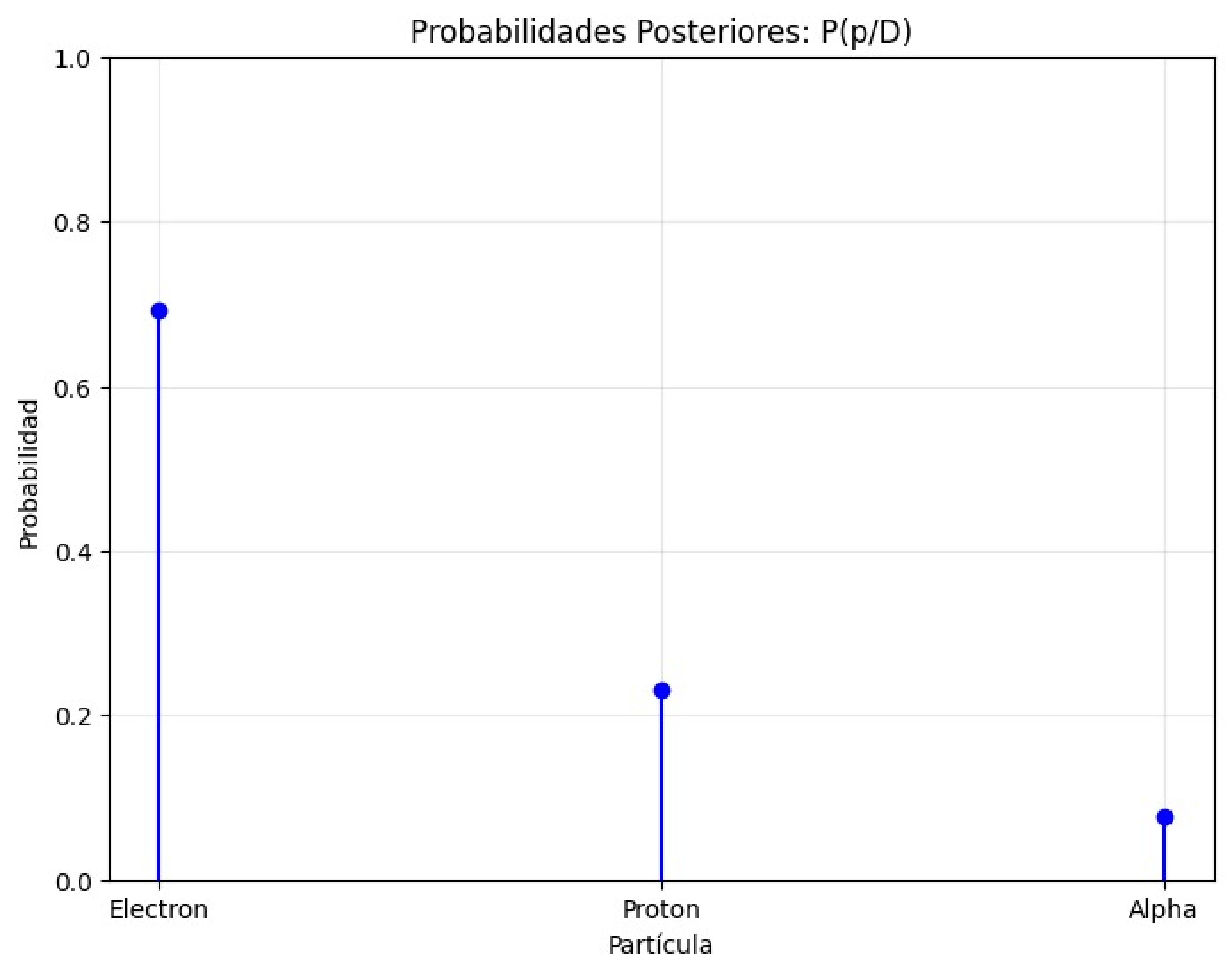
$P(D/e) = 0,9$; $P(D/p) = 0,6$; $P(D/\alpha) = 0,2$

$P(D) = (0,5)(0,9) + (0,25)(0,6) + (0,25)(0,2) = 0,65$

C) y D) $P(p/D) = \dfrac{\pi(D/p)P(D/p)}{P(D)}$

```python
pi = np.array([0.5,0.25,0.25])
p_d = 0.65
p = np.array([0.9,0.6,0.2])
posterior = []
labels = ['Electron', 'Proton', 'Alpha']
for i in range(len(labels)):
  pos = pi[i]*p[i]/(p_d)
  posterior.append(pos)
  print(f'la probabilidad de que sea {labels[i]} si es que hay detección es de {pos}')
```

```
la probabilidad de que sea Electron si es que hay detección es de 0.6923076923076923
la probabilidad de que sea Proton si es que hay detección es de 0.23076923076923075
la probabilidad de que sea Alpha si es que hay detección es de 0.07692307692307693
```



Probabilidades Posteriores: P(p/D)
Probabilidad
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Electron
Proton
Alpha
Partícula

Técnicas de Conteo.

2) Permutaciones $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

n competidores
r puestos del podio

$$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6.$$

2) Combinaciones $C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

n = frutas
r = puestos plato

$$C(3,2) = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3.$$

3) Permutación total $P(n,n) = n! = 5! = 120.$

4) $P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = 336.$

5) $C(10,2) = \frac{10!}{2!(10-8)!} = 45$

combinación

6) $P(7,5) = n! = 2520$

permutación

7) $P(10,2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$

8) $P(8,8) = \frac{8!}{2!\,3!\,2!\,1!} = 1680$

9) $C(11,6) = \frac{11!}{5!(11-5)!} = 462$

10) $\underbrace{C(4,2)}_{} + C(4,3) + C(4,4) = 11$

$6 + 4 + 1 = 11$

11) $V(10,3) = \frac{10!}{7!} = 720$

12) $P(8,2) = \frac{8!}{2} = 56.$

13) $V(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = 210.$

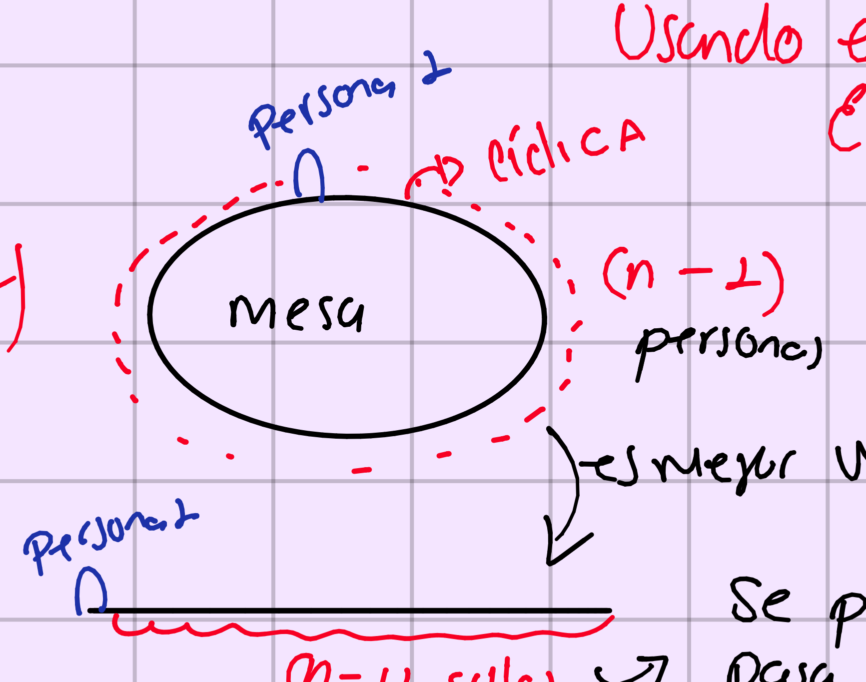
14) $V(7,3) = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3 = 343$

15) $C(10,3) = \frac{10}{3!(10-3)!} = 120$

16) $27^3 \cdot 10^3 = 19683 \cdot 1000 = 19{,}683{,}000$

Usando el Alfabeto Español.

17)



es mejor verlo así

Se pueden acomodar $(n-1)!$
pasa a ser permutación abs

18) $V(7,3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$

19) A) $C(n+r-1, r) = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \frac{8!}{3!(5)!} = 56$

B) $C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{6!}{3!(3)!} = 20$

Los presentes problemas se realizaron con el siguiente código de python

```python
from collections import Counter

def permutacion(n,r):
  return int(np.math.factorial(n) / np.math.factorial(n-r))
def convinaciones(n,r):
  return int(permutacion(n,r) / np.math.factorial(r))


def permutacion_repetida_elementos(n, elementos):
    # Contar la frecuencia de los elementos (puede ser palabra, lista, etc.)
    frecuencias = Counter(elementos)
    denominador = 1
    for frecuencia in frecuencias.values():
        denominador *= np.math.factorial(frecuencia)
    return np.math.factorial(n) / denominador


def combinaciones_con_repeticion(n, r):
    if n < 1 or r < 0:
        raise ValueError("n debe ser mayor o igual a 1 y r debe ser no negativo")

    return math.factorial(n + r - 1) // (math.factorial(r) * math.factorial(n - 1))
```

```python
tipo = int(input("marque 1 si quiere permutación n 2 si quiere convina

if tipo == 1:
  p = int(input("ingrese el valor de n "))
  r = int(input("ingrese el valor de r "))
  print(permutacion(p,r))
elif tipo == 2:
  p = int(input("ingrese el valor de n "))
  r = int(input("ingrese el valor de r "))
  print(convinaciones(p,r))
elif tipo == 3:
  r = int(input("ingrese el valor de r "))
  palabra = input("ingrese la palabra ")
  print(permutacion_repetida_elementos(r, palabra))
elif tipo == 4:
  p = int(input("ingrese el valor de n "))
  r = int(input("ingrese el valor de r "))

  print(combinaciones_con_repeticion(r, p))
elif tipo == 0:
  p = int(input("ingrese el valor de n "))
  print(permutacion(p,p))
```