

# “un Eterno y Grácil Bucle”

“an ternal and graceful loop”

Jaime Andrés Mejía Osorio

*Ingeniería de sistemas y computación, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia*

*jaime.mejia@utp.edu.co*

**Resumen**— El complicado tema del infinito y de la complejidad del cómo funcionan ciertas cosas abordado en un mínimo resumen en la complejidad de lo que aborda Douglas R. Hofstadter en su obra “GÖDEL, ESCHER, BACH un Eterno y Grácil Bucle”.

**Palabras clave**— infinito, bucle, Hofstadter, funcionan, resumen

**Abstract**— The complicated issue of infinity and the complexity of how certain things work tackled in a minimum summary of the complexity of what Douglas R. Hofstadter addresses in his work “GÖDEL, ESCHER, BACH an Eternal and Graceful Loop”.

**Key Word** --- infinity, loop, Hofstadter, work, summary

## I. INTRODUCCIÓN

Dentro de todas las áreas de la matemática, existe en todos y cada uno de ellos, la duda. Ya sea del porque son, del cómo funcionan y el que son en realidad. Con la ayuda de Hofstadter en su libro nos adentraremos solo un poco acerca de temas que intentamos abarcar con los teoremas de Gödel mientras que nos apoyamos en dos temas que parecen mil veces distantes entre sí, la música de Bach y las obras de Escher.

## II. CONTENIDO

Douglas R. Hofstadter, gran científico que nos abre el camino a admirar los grabadores del artista Escher, la contraria lógica de los antiguos griegos que nos expresa la música de Bach el teorema de la lógica matemática que nos regala Kurt Gödel. Nos expresan todo sistema busca su autorreferencia, donde entran a un bucle de reflejarse a sí mismo indefinidamente.

Bach era la admiración del rey de Pusia, "Federico El Grande". Por su admirable improvisación en el órgano, haciéndolo famoso en diferentes partes por su maestría en la improvisación. El rey anhelaba poder tener al ya viejo Batch en su posada, para que disfrutase de sus supuestos 15 pianos Silberman ya que veía el piano con gran futuro en el campo de la música; la experiencia del rey como flautista se le podía tomar como un buen músico. El día en el que Federico pudo conocer a su admiración, J. S. Batch, estaba casi por comenzar un concierto hasta que vio el listado de extranjeros que venían. En ese momento vio que Batch era uno de ellos, el ya conocido Batch fue inmediatamente llamado ante él rey, el mismo que cancelo el concierto de esa noche para poder disfrutar del grandioso talento de Batch. Al día siguiente Batch fue invitado a tocar cada uno de los órganos Sanssouci donde en base a un tema inventado por el rey escribió piezas de tres y 6 voces, mandada a grabar con el nombre de "Ofrenda musical" en honor al rey. Tal era el talento de Batch que la improvisación a seis voces se compara con jugar 70 partidas de ajedrez a la vez con los ojos vendados y ganarlas; y Batch consiguió con su tema "Tema Real", tener la fuga de seis voces. Bach en el ejemplar enviado al rey Federico, daba a ver que estas cosas eran posibles por la búsqueda e indagación, Regis Iusfu Cantio El Relicua Canonica Artes Refolula. Gracias a un canon en la "Ofrenda Musical", se da entrada a un Bucle Extraño que para Batch era la intención de que el proceso siguiera ad infinitum (hasta el infinito).

Escher y sus obras primeramente admiradas por matemáticos por la simetría o esquema, por ser llamativos e estimulantes; teniendo en base como la paradoja, la ilusión o el doble sentido, dio paso para ver más allá de los principios matemáticos, había una idea por debajo de esta realizada artísticamente. Esta idea daba paso al Bucle Extraño, viendo de este modo que Batch y él mismo tocan el tema en dos partes: La musical y la pictórica.

La identificación de los bucles extraños se puede clasificar según lo apretado del bucle; por ejemplo, la obra de "Subiendo y bajando" lleva así mismo un bucle más suelto por la distancia que se recorre para llegar al punto de partida, y ésta comparada a la obra "Galería de grabados", siendo esta última el bucle más apretado dentro de los bucles extraños, son bucles extraños pero clasificados en un mismo ámbito de distinta forma. El infinito dentro de los dibujos de Escher tiene un papel más que importante, y es que el concepto de bucle extraño es la idea de representar la finiquitad de un proceso interminable; en estos dibujos se puede interpretar uno y otro nivel para contemplarse a sí mismo como un nivel más, dando de esta forma un nivel mayor donde arriba de sí mismo implica mayor realidad y un nivel abajo implica más imaginación; y Escher de esta forma concibe representar en sus obras.

Gödel a diferencia de Batch y Escher, descubrió paradojas en intuiciones simples y antiguas y con paradojas como la "paradoja de Epiménides" o "paradoja del mentiroso" nos hará pensar inmediatamente que es falsa pero posteriormente nos llegará la idea de que es verdadera. Esta primera paradoja mencionada, Gödel, la descubrió utilizando el razonamiento matemático para explorar en el razonamiento matemático. El uso de este descubrimiento también lo ayudó a encontrar el "Teorema de la incompletitud" donde dos cosas distintas y el Teorema puede ser la perla y el método de demostración en la ostra, de manera que conectado la idea de preposiciones autorreferentes con la teoría de los números, de este modo Gödel en su código, hace que los números se vuelvan símbolos y secuencia de símbolos, haciendo que cada proposición de teoría de los números adquieren un "número de Gödel", dándole una identificación única. Dando de este se dice con convencimiento que G de Gödel es indemostrable pero verdadera dando la conclusión que los Principia Mathematica están incompletos por proposiciones verdaderas y su demostración en los Principia Mathematica es demasiado débil. Gödel en su teorema llamo a los interesados del mismo a ver que ningún sistema fijo no podía representar la complejidad de los números enteros.

### Lógica Matemática

Su nacimiento se debe al intento de mecanizar procesos intelectivos de la razón (cosa que al principio se ve extraño ya que consideramos que somos el ser que se distingue por su capacidad de razonar y el mecanizarlo sería extraño); pero, los griegos sabían muy bien que el razonamiento está sujeto a esquemas y leyes formulables; tales como Euclides y Aristóteles codificaron silogismos y la geometría. Todo esto tuvo un paso a la historia de modo que los avances que tenían consistían en ampliar a Euclides. En el siglo XIX se dio un pequeño cambio a estas mecanizaciones del razonamiento, por ser estos sometidos a esquemas deductivos de razonamiento de una codificación que deja atrás a la decodificación aristotélica. Y todos estos esfuerzos tenían como finalidad aclarar lo que se entiende por "demostración". Una de las paradojas a relucir en estos es la de Russell que por regla general los conjuntos no se contienen a sí mismos, sin embargo, hay conjuntos que se contienen a sí mismos.

### Eliminación de Bucles Extraños

Russell y Whitehead en sus Principia Mathematica se esfuerzan por hacer de la lógica, la teoría de conjuntos y la teoría de los números, limpios de bucles extraños de manera que: El conjunto mínimo no puede contener en sí mismo otros conjuntos sino más que objetos; seguido de un conjunto que puede solo abarcar conjuntos que solo pueden abarcar objetos; llegando a la conclusión que los conjuntos no pueden abarcar sino conjuntos de un tipo más bajo que si mismo; ya que si hay un grupo que se pueda contener a si mismo significa que para eso necesita ser de un tipo más alto que su propio tipo. Pero de esta forma el conjunto C (que contiene todos los conjuntos comunes y corrientes) se niega ya que no pertenece a un conjunto finito. De este modo Russell y Whitehead en su libro con la "teoría de la abolición de bucles extraños" logra bien su finalidad, pero solo por su jerarquización y la prohibición de formar ciertas clases de conjuntos. Muchos de estos intentos de evitar los bucles terminaban en la obligación de un terreno específico.

### Coherencia, completitud y programa de Hilbert

A pesar de la admiración hacia la obra de Russell y Whitehead, habían dudas y Hilbert fue uno de los que generó el reto de que, siguiendo los métodos rigurosos de R y W, o ya sea por cualquier otro que el sistema definido como Principia Mathematica es coherente y completo. Gödel publicó un artículo donde destruía el programa de Hilbert porque encontraba agujeros en cuanto a sistema propuesto por Russell y Whitehead, y básicamente demostraba que ningún sistema podía producir todas las verdades de la teoría de los números salvo que este no sea un sistema coherente, también dejando en claro que la demostración usando solo métodos de la Principia Mathematica por si misma hacia que estos no fueran coherentes.

Babbage, computadores, Inteligencia Artificial...

Babbage en su invento inicial, "Maquina de Diferencias", tenían la capacidad de generar tablas de matemáticas de muchos tipos mediante el "método de diferencias". Antes de esto, él, se obsesionó con una idea más revolucionaria a la que de nombre le tenía su "ingenio Analítico"; y tenía una visión de números entrando y saliendo en enjambres a la unidad encargada de calcular y tomar decisiones por un programa que tenía control sobre estas acciones el cual estaba contenido en tarjetas perforadas. En nuestros tiempos tenemos maquinas que sobrepasan los sueños más sin sentido que tuvieron Pascal, Leibniz; Babbage y Lady Lovelace, donde en 1930 se diseñaron los primeros cerebros electrónicos brillantes donde canalizaron la convergencia de zonas inconexas en un pasado: la teoría del razonamiento axiomático, el estudio de la computación mecánica y la psicología de la inteligencia. Pero no hay persona que sepa desde donde se divide la conducta no inteligente y la conducta inteligente y es algo incoherente que haya una raya que divida a estos, pero hay características que determinan la inteligencia.

Acerca de una inteligencia como lo es la IA (Inteligencia Artificial), es una inteligencia donde sus investigadores buscan largos conjuntos de reglas junto a formalismos estrictos para decirle a una maquina propiamente inflexible que sea flexible; dentro de estas reglas encontramos niveles que se diferencian por su clase, donde deben haber muchas reglas "llanas y simples", para después haber "metareglas" que modifiquen estas reglas "llanas y simples", para después un "metametarreglas" que modifiquen la anterior "metarregla" y así sucesivamente hasta nunca acabar. Podemos de este modo entender que dentro de la inteligencia hay Bucles Extraños fundados en reglas que terminaran por alterarse a sí mismas. Babbage describía el Bucle Extraño que se da en una maquina tiene control sobre su propio programa donde se encuentra almacenado.

#### Sistemas formales

Los teoremas hacen parte de lo que conocemos como cierta biblioteca de cadenas que buscan llegar a la solución de un sistema formal, estas se forman por el empleo de reglas y no buscan ser necesariamente demostrados sino solamente producidos.

Podemos ver que máquina y ser humano se distinguen por algo tan básico que es que la maquina no sabrá anteponerse sobre lo que una persona haga por más que sea solo un acto lo que está haciendo, lo que una persona es capaz de deducir fácilmente, actuamos con capacidad de advertir algo lo que una maquina no puede hacer.

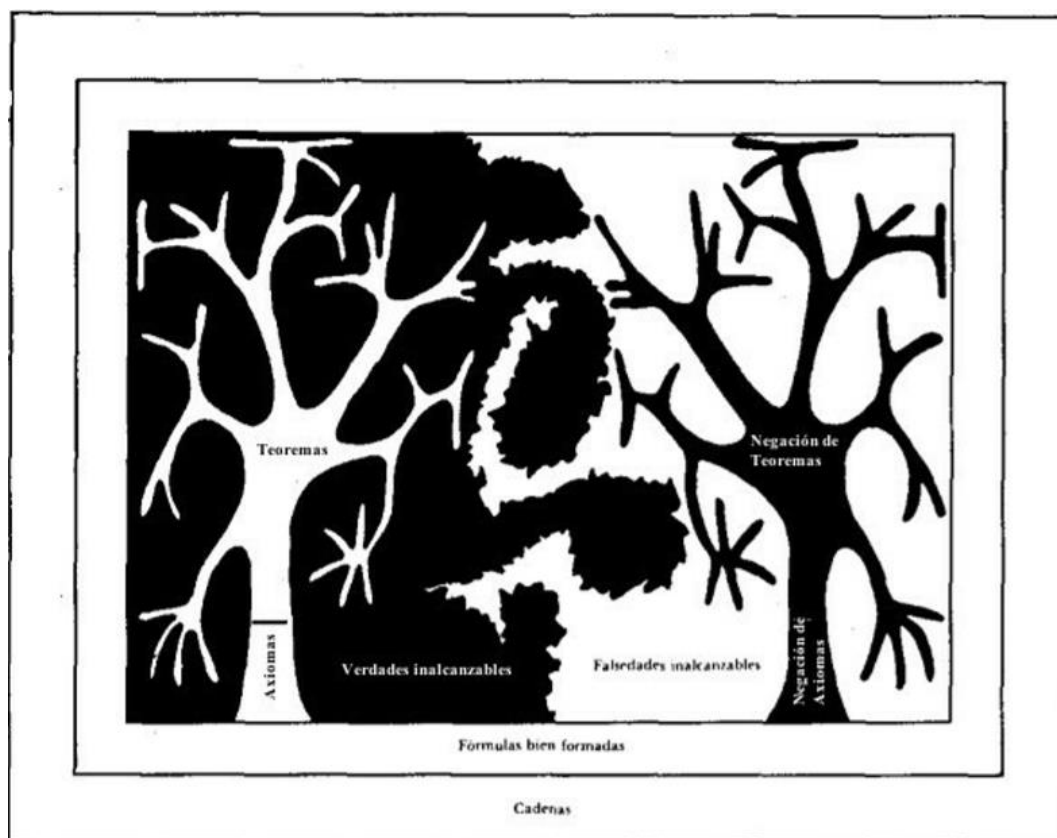
Las maquinas se mantendrán explícitamente en lo que se le ha programado sin la capacidad de irse fuera del sistema, claro está que si esta está programada de tal manera que se vaya en "x" situación, lo hará, a diferencia de los humanos que pueden estar efectuando un sistema donde al principio pueden estar totalmente dentro de él pero con el pasar del tiempo se impacientará y terminará por dejar de lado el sistema, mientras no está en él podrá pensar el eso, esto se llama "pensar en el sistema", aunque no necesariamente debe estar fuera del mismo; y si actúa dentro de él se llama "actuar en el sistema".

El procedimiento de decisión se puede definir con lo que se busca en el sistema, como el conjunto de teoremas para llegar a la solución del sistema, y si llevamos un retorno milimétrico de los axiomas llegaremos a la fuente de todos los teoremas de manera que tendremos el esquema del axioma.

Existe un método que a la simple vista es básico, pero que nos ayuda demasiado para encontrar un teorema o ir del mismo hacia lo mas básico, "abajo arriba" para llegar al teorema y "arriba abajo" para llegar a lo más básico del sistema, si el primero no se llegase a cumplir daremos por entendido que no es un teorema, pero de esta manera podemos ir desde los axiomas hacia los teoremas o de los teoremas hacia los axiomas.

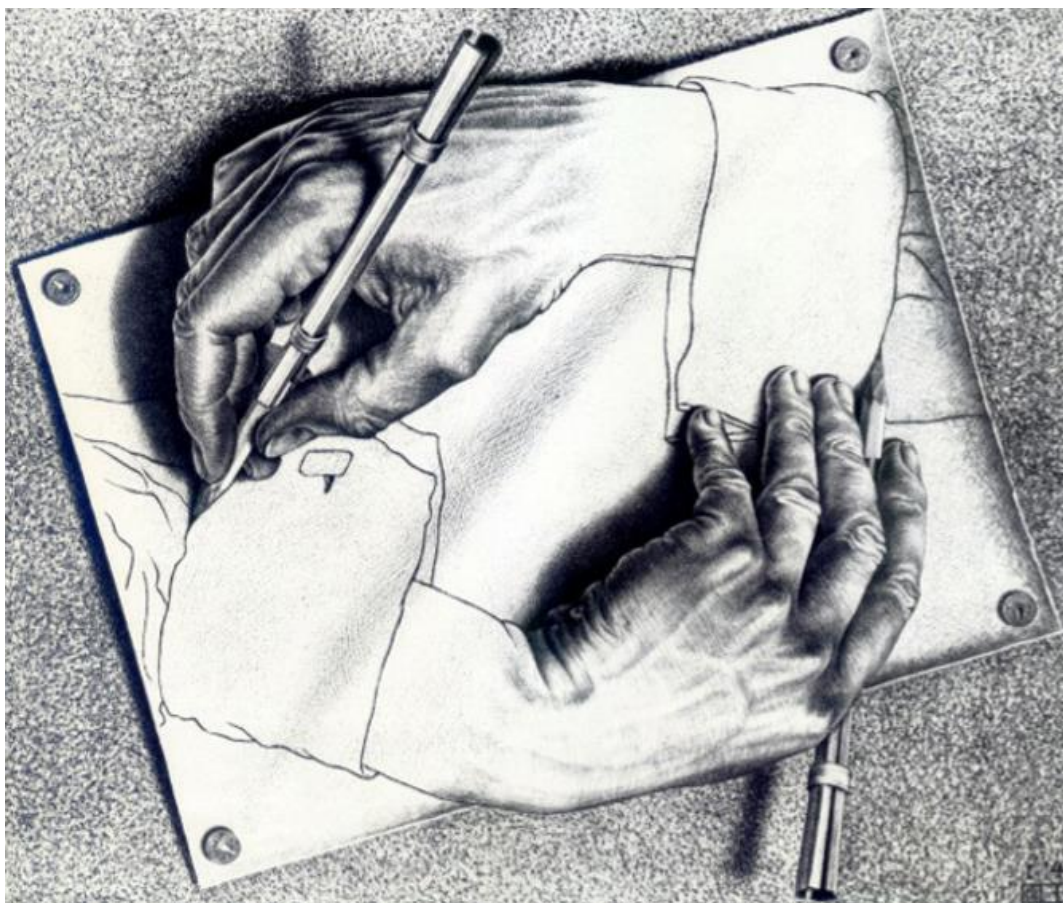
Como isomorfo se entiende la transformación destinada a conservar la información, de esta donde cada estructura se proyecta la una sobre la otra, cada quien puede interpretarlo de manera distinta al otro y es ahí donde se pueden separar de distinta forma tal que haya dos tipos de interpretación, la no significativa donde no se encuentra un isomorfismo; y la significativa donde si hay isomorfismo entre los teoremas y x porción determinada de realidad.

¿Es posible expresar la realidad como un sistema formal? Se supone que si, donde sus símbolos no se plantan sobre un papel sino sobre el espacio, las reglas tipográficas pasan a ser las leyes de la física y sus únicos axiomas son "era, quizá" y es el inicio de los tiempos (configuración original) y no sabemos si el universo actúa de forma determinista.



Pero dentro de estos sistemas formales ya empezamos a encontrar un bucle extraño... Donde vemos un espacio negativo es no es un conjunto de teoremas no entra tampoco al conjunto de teoremas que es el espacio positivo de cualquier sistema formal y si lo queremos ver más técnicamente "hay conjuntos recursivamente enumerables que no son recursivos. Aun así, Gödel, nos dice que ningún sistema por bien construido que esté, puede ser perfecto en el sentido de que toda proposición verdadera puede ser reproducida bajo la forma del teorema.

Recursividad



Algo definido en función de sí mismo, lo que implica una circularidad que conduce a sí mismo infinitamente, pero una bien hecha simplemente lo que hace es definirse a sí mismo, pero no en función de sí mismo sino en función de interpretaciones de la misma. En computación ponemos identificarlo como “meter y sacar las pilas”, donde meter es suspender las operaciones relativas a la tarea que se tiene entre manos sin olvidarse del punto en el que está e irse a emprender otra tarea; mientras que sacar pasa a completar las tareas del primer nivel, asumiéndolas desde donde se suspendieron para ascender a un nuevo nivel.

En computación podemos diferenciar esta recursividad o mejor dicho, tomarla en contexto de manera que si puede tener una secuencia de operaciones similares por efectuar, en lugar de enunciarlas todas, podemos generar un bucle, de manera que se indique a la computadora que realice un conjunto fijo de operaciones, y que luego se mueva en bucle hacia atrás y las realice de nuevo, una y otra vez, hasta que se satisfaga la condición. Lo que nos incita a generar los bucles en su definición nativa frente a esto es que todos sus bucles estén interrelacionados entre sí, hasta que sea interrumpido por generar las condiciones específicas. Un tipo de recursividad que podemos identificar son los niveles de software y hardware que existen en los computadores donde se ven muy diferentes entre sí solo cuando el nivel superior esté bien articulado para ser comprensible.

Dentro de toda nuestras dudas existenciales e intentos por entender lo que vemos en nuestro entorno de la mano con el todo creado por nuestra historia, está el determinar el quien somos a partir de señales exteriores, donde entran el conflicto de niveles, junto a lo interior de sí mismo. Muchas respuestas pueden existir, siendo esta información que fluye como dentro de nosotros mismos lo que forma nuestra personalidad donde ciertos rasgos se dan amplían, disminuyen o finalizadas; pero no todo es entendible ya que nuestra estructura mental contiene incoherencias ya sean irresueltas o irresolubles.

#### Teorema de Gödel

Sabemos por lo abarcado en todo el libro que este teorema, muestra que los sistemas formales coherentes empiezan a padecer de limitaciones fundamentales; pero es donde empezamos a considerarnos si este teorema va más allá de lo propuesto, siendo una

traducción metafórica que no proyecta una equidad literal; así poderlo guiar por dos fluyentes, la que nos orienta a interrogarnos sobre nuestra cordura (llegando así a un bucle extraño); pero terminaríamos por no saber representar esto más que con la ayuda del segundo teorema de Gödel donde la forma formal de los números que afirman su coherencia son incoherentes.

De todos modos en un último término se afirma que no podemos comprender nuestras propias mentes/cerebros, del cómo funcionan, o del porque hacemos las cosas tal y como las hacemos, o ya sean los niveles de nuestro cerebro, o conocer con precisión cada estímulo que llega a él; todo esto se ve limitado con la metamatemática de manera que en determinado punto de la capacidad de representar nuestra estructura llegara el momento en el que se cierra toda posibilidad de representarnos a nosotros mismos integralmente.

Las obras de Escher o la complejidad de la música de Bach, a la vez que la profundidad de Gödel; fueron interpretadas o casi interpretadas de la mejor forma mediante los diálogos entre la tortuga y Aquiles, pero en cuanto a la recursividad se encuentra un texto muy llamativo donde se ven secuestrados por Hexaclorofeno J. Buenafortuna, quien tiene como intención comerse a la tortuga y torturar a Aquiles; pero estos se ven en la espera de este posible inevitable final, encuentran diferentes libros de la colección de Buenafortuna, entre ellos aventuras de sí mismos a los que deciden adentrarse y justo entran a una historia definida como “Ginn y Tónico”, en este empiezan a admirar las obras de Escher y al momento Aquiles nos da a ver que su admiración sobre las demás obras de Escher se centra en Convexo y Cóncavo, donde dos mundos internos consisten entre sí, y al ser puestos entre sí componen un mundo incoexistente.

Por consiguiente, se adentran en esta lectura donde la Tortuga y Aquiles hablan acerca de estos cuadros, y en la incredulidad de poder entrar a un cuadro la Tortuga le expresa que hay un jarabe que los ayudara a entrar y un tónico que los sacara del mismo. Aquiles siente miedo de entrar así que las decisiones del que hacer las toma la Tortuga y por el mismo deciden entrar al cuadro donde resumidamente encuentran unos lagartos que a pesar de que se le hacían a Aquiles adorables, se le termina por explicar que son mortales para cualquiera, estos lagartos protegen una lámpara mágica. Aquiles decide medirse al desafío de ir por la lámpara y de esta forma consigue quedar en serio problemas, así que los nativos de allí (quienes se expresaban mediante una lengua muy extraña), le ayudan para no quedar como un pepinillo en vinagre (referencia que hizo la Tortuga para expresar el feo final que pudiese tener aquel que toque la lengua de algún lagarto). A pesar de haber estado en peligro consigue hacerse con la lámpara mágica que termina, la Tortuga y Aquiles, frotando.

Aquiles tiene la posibilidad de pedir tres deseos en el cual decide pedir cien deseos más, a lo que el genio le dice que no puede conceder metadeseos, a lo que –desea- saber que es un metadeseo por lo que el genio le responde que no puede haberlo ya que es un metametadeseo. Luego la Tortuga le expresa que deseó en vez de preguntar, así que simplemente le pregunta que a que se refiere con un metadeseo, y este brevemente le explica que no puede pedir deseos acerca de deseos porque Dios no se lo permite, dejando a flor de piel otra duda mucho más llamativa y ante la frustración de Aquiles al no poder obtener sus cien deseos el genio accede a intentar ayudarlo, así que saca su meta-lámpara donde después de frotarla sale un meta-genio, a lo que el genio le pide él y a Dios una suspensión temporal de las restricciones a los deseos donde se le dé un deseo atipo a Aquiles. Esto se repite varias veces con diferentes metas genios de mayor nivel, el proceso es casi infinito, hasta que realmente dura solo un momento donde se le expresa a Aquiles que dispone de cualquier deseo sin limitación alguna a lo que Aquiles prefiere definir su gran duda de quién es Dios con el genio. Así que el genio le expresa a este que es un algo que esta interpuesto a darle ordenes al subsiguiente que a su vez le da órdenes al subsiguiente, siendo este un método de hacer un acrónimo recursivo por su mismo. Es por esto que en su petición al metagenio le dijo que le pedía a él y a DIOS de manera que les pide a todos los niveles por encima del metagenio a poder cumplir su petición.

En su admiración, Aquiles queda patidifuso en cuanto a lo que le explica el genio, y la Tortuga le expresa que no podía creer que Aquiles creyera en un DIOS, a lo que Aquiles le termina preguntando que si era ateo o agnóstico y la Tortuga hace que Aquiles entre en duda otra vez al decirle que era meta-agnóstico ya que no está completamente seguro siquiera de que piense lo que lo llevaría a ser meta-meta-agnóstico; y así recurre al Genio para aclarar su duda de si en algún momento en un nivel más alto del



que se es, hay un error; es por esto que el Genio nos expresa que es prácticamente seguro que en algún momento y lugar, habrá una alteración.

Aquiles le da una idea todo este tema, y desea (al parecer, sin querer) que su deseo atipo jamás fuera concedido, el genio accedió a tomarlo sin duda alguna y la tortuga le expresa a Aquiles que para ser concedido debía ser negado de manera que haberlo no concederlo sería concederlo, lo que los llevo a una sala de espera donde el software espera al hardware, ya que el deseo de Aquiles destruyó el sistema.



### III. CONCLUSIONES

Los bucles extraños o en si las cosas que se autorreferencia entre sí, van sin querer entrelazándose por factores en común donde gracias a los teoremas de Gödel conseguimos darles un poco más de orden; y sobretodo con la combinación que le da Hofstadter a estas matemáticas con la filosofía, vamos entendiendo un poco acerca de todos estos sistemas.

### RECOMENDACIONES

El verdadero potencial de estos temas no se encuentra en este artículo, sino en el libro original en sus diferentes traducciones. Realmente no se puede aprovechar el gran potencial de cada uno de los temas que se abarcan en el libro, este artículo va más que todo dirigido a la interpretación (o la casi nula) de los temas que se abarcan en el libro en correlación con la informática, de manera que, aun así, no se llega a apreciar la verdadera capacidad de poder llegar al lector y hacer que se sumerja dentro de estos temas como realmente lo valen.

### REFERENCIAS

- [1]. D. R. Hofstadter, " Gödel, Escher, Bach: Un eterno y grácil bucle" *Basic Books*, 1979.