

Descripciones y Transformaciones Espaciales

Tabla de Contenido

2.	MECÁNICA DE CUERPOS RÍGIDOS	6
1.1.	DESCRIPCIÓN DE UBICACIÓN ESPACIAL: SISTEMAS COORDENADOS, POSICIONES Y ORIENTACIONES	6
1.1.1.	<i>Descripción de una posición</i>	7
1.1.2.	<i>Descripción de una orientación</i>	7
1.1.3.	<i>Descripción de un marco (sistema de coordenadas)</i>	9
1.2.	MATRICES DE ROTACIÓN	10
1.1.1.	<i>Matrices de Rotaciones Básicas</i>	10
1.1.2.	<i>Rotaciones Compuestas</i>	13
1.1.3.	<i>Rotación Sobre un Eje Arbitrario</i>	17
1.1.3.1.	Ángulo y Eje de Rotación Equivalente	19
1.1.4.	<i>Operadores de Rotación con Ángulos de Euler y Cuaternios</i>	23
1.1.5.	<i>Cuaternios</i>	24
1.1.5.1.	Propiedades de los Cuaternios	24
1.1.6.	<i>Interpretación Geométrica de las Matrices de Rotación [Fu]</i>	27
1.3.	MATRICES DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEAS	27
1.3.1.	<i>Transformaciones de Perspectiva</i>	28
1.3.2.	<i>La Transformación de Escalado</i>	30
	REFERENCIAS	31
	GLOSARIO DE TÉRMINOS	32
	INDICE.....	33

Lista de Ejemplos

EJEMPLO 1 ROTACIÓN BÁSICA SOBRE UN EJE PRINCIPAL	13
EJEMPLO 2 ROTACIÓN COMPUESTA.....	14
EJEMPLO 3 ROTACIÓN SOBRE UN EJE ARBITRARIO	18
EJEMPLO 4 DETERMINACIÓN DEL EJE Y ÁNGULO DE ROTACIÓN EQUIVALENTES A PARTIR DE UNA MATRIZ DE ROTACIÓN DADA.	21
EJEMPLO 5 ROTACIONES EMPLEANDO CUATERNIOS	25
EJEMPLO 6 COMPOSICIÓN DE ROTACIONES CON TRASLACIONES	25

Lista de Ejercicios

EJERCICIO 1 DADO UN VECTOR $u = \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^T$ TRANSFORMADO EN TRANSLACIÓN POR UN VECTOR $\begin{bmatrix} a_i & b_j & c_k \end{bmatrix}^T$?	9
EJERCICIO 2 DADO UN PUNTO $u = 3i + 4j + 5k$ CUAL ES EL EFECTO DE ROTARLO 90° ALREDEDOR DEL EJE Z HASTA UN NUEVO PUNTO V ?	13
EJERCICIO 3 ROTE EL PUNTO V ANTERIOR ALREDEDOR DEL EJE Y α HASTA UN NUEVO PUNTO W. DEFINA LA ROTACIÓN COMPUESTA, DE MANERA SIMBÓLICA, EN T.....	13
EJERCICIO 4 APLIQUE UNA TRANSFORMACIÓN DE ROTACIÓN SOBRE EL RESULTADO ANTERIOR, T, DE SOBRE SU PROPIO EJE Z, PARA DEFINIR SIMBÓLICAMENTE TN.....	15
EJERCICIO 5 SUPONGA UN OBJETO SÓLIDO DE FORMA TRIANGULAR CON VÉRTICES INDICADOS EN LA FIGURA 5. DEFINA LA TRANSFORMACIÓN COMPUESTA QUE REPRESENTA UNA ROTACIÓN DE 90° SOBRE EL EJE Z SEGUIDA DE UNA ROTACIÓN DE 90° SOBRE EL EJE Y SEGUIDA DE UNA TRANSLACIÓN DE 3 UNIDADES EN LA DIRECCIÓN X. ENCUENTRE LOS VÉRTICES RESULTANTES DEL OBJETO TRANSFORMADO.	15
EJERCICIO 6 SUPONIENDO QUE EL EFECTOR FINAL DE UN MANIPULADOR DEBE ATORNILLAR UNA TUERCA SOBRE UN EJE DEFINIDO POR EL VECTOR $r = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$. ENCONTRAR LA MATRIZ DE ROTACIÓN, $R_{r,\alpha}$, QUE REPRESENTA LA ROTACIÓN EN θ RESPECTO DEL VECTOR	19
EJERCICIO 7 DETERMINE EL EJE (K) Y ÁNGULO DE ROTACIÓN () EQUIVALENTES PARA LA MATRIZ	22
EJERCICIO 8 DESARROLLE LAS TRADUCCIONES ENTRE TRANSFORMADA HOMOGÉNEA Y ÁNGULOS DE EULER (CONVENCIONES X, Y, Y RPY, TRANSFORMADAS HOMOGÉNEAS Y CUATERNIOS, Y SUS CORRESPONDIENTES TRANSFORMACIONES INVERSAS	27

PENDIENTE POR INTEGRAR EL RESTO DE EJERCICIOS

Lista de Figuras

FIGURA 1 POSICIÓN Y ORIENTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO	7
FIGURA 2 ROTACIONES BÁSICAS RESPECTO DE LOS EJES X, Y, Z	10
FIGURA 3 MATRIZ DE ROTACIÓN BÁSICA, $R_{x,\alpha}$	12
FIGURA 4 SÓLIDO TRIANGULAR REFERIDO EN EJERCICIO 5.....	15
FIGURA 5 ROTACIÓN RESPECTO DE UN EJE ARBITRARIO R	17
FIGURA 6 RANGOS DE LA FUNCIÓN $\text{ATAN2}([-\pi, \pi])$	20
FIGURA 7 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS ÁNGULOS DE EULER (CONVENCIÓN X)	23
FIGURA 8 TRANSFORMACIÓN DE PERSPECTIVA	28

2. Mecánica de Cuerpos Rígidos

Un brazo manipulador puede modelarse como un sistema articulado de cuerpos rígidos¹; la *localización* de cada cuerpo rígido, ligado al manipulador o dentro de su entorno de trabajo, se describe completamente por su posición y orientación en el espacio respecto de un sistema de coordenadas definido. Así mismo, para representar la *relación espacial* entre los cuerpos que componen un manipulador y de éstos con objetos en su ambiente de trabajo, es necesario establecer descriptores espaciales y operadores de transformación sobre los mismos que permitan expresar el estado en tiempo de las correspondientes posiciones y orientaciones. En este capítulo se presentan las herramientas matemáticas más utilizadas en el campo de la robótica de los manipuladores, principalmente derivadas del álgebra lineal y de la teoría de tornillos² [], para expresar la localización de un cuerpo y la relación espacial entre cuerpos en el espacio en función de las variables de articulación de un brazo manipulador.

1.1. Descripción de ubicación espacial: sistemas coordenados, posiciones y orientaciones

El movimiento de un cuerpo rígido en el espacio se describe dando la localización de un punto particular sobre el mismo en cada instante de tiempo, en relación con un *sistema de coordenadas* de referencia. Para la descripción de posición y orientación de las partes de un robot manipulador u otros objetos dentro del espacio de trabajo se utilizan *sistemas de coordenadas*. De manera concreta, se escoge como *sistema de coordenadas* un conjunto de tres ejes *ortogonales*³ y se especifica la localización de cada punto del cuerpo rígido mediante un *vector* de posición utilizando la terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donde cada coordenada expresa la proyección de la ubicación del punto seleccionado sobre cada eje. En algunos casos, es necesario definir más de un sistema de coordenadas por lo cual cada vector asociado a un punto en el espacio es etiquetado con información para identificar el sistema de coordenadas dentro del cual está definido (ver Figura 1). En su forma geométrica, una flecha se utiliza para describir el tamaño y la orientación de un vector.

¹ Se entiende, idealmente, como cuerpo rígido aquel que no se deforma. En términos más formales, es una colección de partículas organizadas de tal manera que la distancia entre éstas permanece fija, independiente de los movimientos o fuerzas ejercidas sobre el conjunto.

² Los elementos de la teoría de tornillo se remontan al trabajo de Chasles y Poincaré a principios del siglo diecinueve (1800s).

³ Vectores cuyo producto punto sea cero, $u \cdot v = 0$, se dicen ser vectores *ortogonales* (vectores perpendiculares entre sí), y si además son unitarios se dicen ser *ortonormales*.

1.1.1. Descripción de una posición

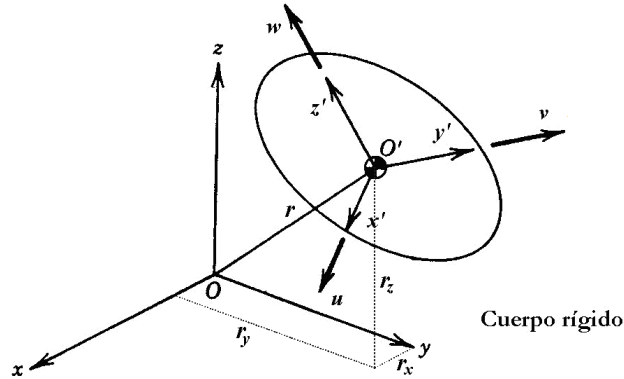


Figura 1 Posición y orientación de un cuerpo rígido

Una vez definido un sistema de coordenadas de referencia se localiza cualquier punto respecto de éste por medio de un vector de posición de dimensión 3×1 . Los componentes numéricos de este vector indican la proyección del mismo sobre los ejes principales del sistema de referencia.

La posición de un objeto en el espacio se representa, de manera usual, por las coordenadas de un punto arbitrario en el espacio. Asumiendo un sistema de coordenadas de referencia O_{xyz} y un punto arbitrario O' fijado a un cuerpo rígido, como se muestra en la Figura 1, la ubicación de dicho punto respecto del sistema de coordenadas de referencia está dada por el vector columna

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}. \quad (0.1)$$

1.1.2. Descripción de una orientación

Para describir la orientación de un cuerpo en el espacio se asigna un sistema de coordenadas ligado al cuerpo (fijo al mismo) y luego se describe la relación espacial entre dicho sistema de coordenadas y el sistema de coordenadas de referencia. Una manera de describir el sistema de coordenadas ligado al cuerpo, es escribir los vectores unitarios de sus ejes principales en términos del sistema de coordenadas de referencia; esto resulta en un vector unitario de dimensión 3×1 para cada eje del sistema de coordenadas ligado al cuerpo. De manera conveniente se pueden expresar los tres vectores unitarios resultantes como las columnas de una matriz de

dimensión 3x3. Esta matriz se denomina *matriz de rotación* porque describe la relación de orientación entre un sistema de coordenadas relativo a otro (en este caso el de referencia). Asumiendo, como se muestra en la Figura 1, un sistema de coordenadas de referencia dado por O_{xyz} , un sistema de coordenadas ligado a un cuerpo en movimiento dado por O'_{uvw} y los vectores unitarios x' , y' y z' apuntando en la dirección de los ejes coordenados u , v , y w respectivamente; la matriz de rotación que expresa la orientación del sistema O_{uvw} respecto del sistema O_{xyz} está dada por,

$${}^{O_{xyz}}R_{O'_{uvw}} = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix}. \quad (0.2)$$

Dado que los componentes de cualquier vector unitario son simplemente sus proyecciones sobre las direcciones unitarias del sistema de referencia empleado, cada uno de estos puede escribirse como el producto punto de un par de vectores unitarios. El producto punto de dos vectores unitarios resulta en el coseno del ángulo entre estos, es por ello que los componentes de una matriz de rotación son referidos frecuentemente como *cosenos de dirección*,

$$v_1 \cdot v_2 = \cos(a) \quad (0.3)$$

donde, v_1 y v_2 son vectores unitarios $\in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ con un mismo origen y a el ángulo entre ellos.

Consecuentemente, los escalares, r_{ij} , en (0.2) pueden expresarse de la siguiente manera,

$${}^{O_{xyz}}R_{O'_{x'y'z'}} = \begin{bmatrix} x' \cdot x & y' \cdot x & z' \cdot x \\ x' \cdot y & y' \cdot y & z' \cdot y \\ x' \cdot z & y' \cdot z & z' \cdot z \end{bmatrix} \quad (0.4)$$

Se identifica cada vector columna de la matriz de rotación en (0.4), como la proyección de los ejes principales del sistema de coordenadas en movimiento $O'_{x'y'z'}$ sobre cada uno de los ejes principales del sistema de referencia O_{xyz} . Por inspección de la ecuación (0.4) se evidencia que los vectores fila de la matriz de rotación equivalen a los vectores unitarios de O_{xyz} expresados en $O'_{x'y'z'}$. Entonces, la descripción del marco O_{xyz} con relación al marco $O'_{x'y'z'}$ está dada por la traspuesta de (0.4). Es decir,

$${}^{O'_{x'y'z'}}R_{O_{xyz}} = {}^{O_{xyz}}R_{O'_{x'y'z'}}^T \quad (0.5)$$

Esto sugiere que la inversa de una matriz de rotación básica es igual a su traspuesta, ${}^{O'_{x'y'z'}}R_{O_{xyz}} = {}^{O_{xyz}}R_{O'_{x'y'z'}}^{-1} = {}^{O_{xyz}}R_{O'_{x'y'z'}}^T$, hecho que puede verificarse teóricamente del álgebra lineal dado que la inversa de una matriz

DESCRIPCIONES Y TRANSFORMACIONES ESPACIALES

con columnas/filas ortonormales es igual a su traspuesta. Esto se verifica fácilmente como,

$${}^{O'x'y'z'}R_{{}^{Oxyz}}{}^{Oxyz}R_{{}^{O'x'y'z'}} = U_{3 \times 3}, \quad (0.6)$$

donde $U_{3 \times 3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ corresponde a la matriz de identidad.

Como se verá posteriormente, existen otro tipo de representaciones para describir la orientación de un cuerpo en el espacio.

1.1.3. Descripción de un marco (sistema de coordenadas)

Debido a que la información requerida para describir completamente la ubicación de la mano (o cualquier otro elemento) de un manipulador debe incluir necesariamente un término de posición y otro de orientación, se define por conveniencia una entidad denominada marco que es simplemente un sistema de coordenadas asociado con cada cuerpo rígido que permite expresar dicha información. El punto dentro del cuerpo que se escogerá en adelante para describir la posición de un cuerpo será, también por conveniencia, el origen del sistema de coordenadas ligado a dicho cuerpo.

Sin embargo, comúnmente se integran ambas operaciones en un solo operador. Para ello se utilizan matrices de transformación homogéneas de 4×4 que incluyen operaciones de rotación y traslación del sistema de coordenadas ligado al cuerpo.

Una matriz de rotación de 3×3 no da la posibilidad simultánea de traslación y escalado, por lo tanto se introduce una cuarta coordenada o componente al vector de posición $p = (p_x, p_y, p_z)^T$ en un espacio tridimensional que lo transforma en $\hat{p} = (wp_x, wp_y, wp_z, w)^T$ donde \hat{p} se expresa en coordenadas homogéneas de la siguiente manera,

$$p_x = \frac{wp_x}{w}, \quad p_y = \frac{wp_y}{w}, \quad p_z = \frac{wp_z}{w}. \quad (0.7)$$

En general la representación de un vector de n componentes con un vector de $n+1$ componentes se denomina representación en coordenadas homogéneas.

Ejercicio 1 Dado un vector $u = \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^T$ cual es el vector k transformado en traslación por un vector $\begin{bmatrix} a_i & b_j & c_k \end{bmatrix}^T$?

1.2. Matrices de Rotación

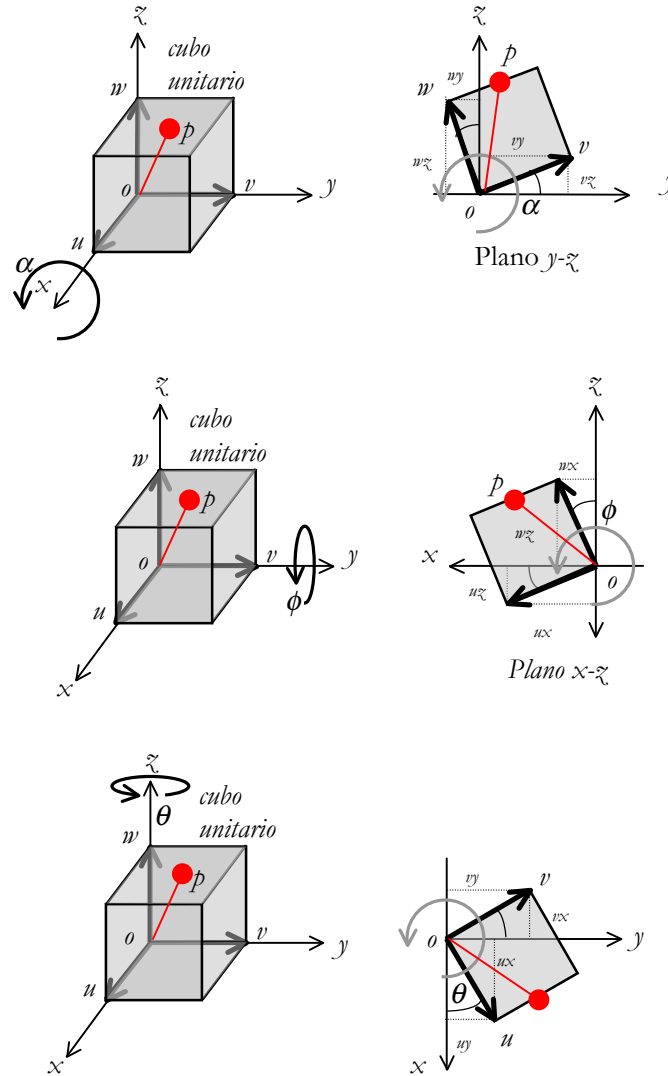


Figura 2 Rotaciones básicas respecto de los ejes x , y , z

1.1.1. Matrices de Rotaciones Básicas

Suponiendo dos sistemas de coordenadas de orígenes coincidentes, OUVW y OXYZ, y asumiendo que el sistema OUVW se mueve rotacionalmente con respecto al sistema de referencia OXYZ. Se define una matriz de rotación como un operador que expresa la diferencia de orientación entre el sistema de coordenadas en movimiento (OUVW) y el sistema de referencia

fijo (OXYZ). Por simplicidad ilustrativa, suponga la presencia de un cuerpo sólido ligado por uno de sus vértices al sistema OUVW en movimiento, es decir, se mueve con él (Figura 2). Representando cualquier punto del cuerpo como un vector p respecto del sistema OUVW, se define entonces la matriz de rotación como aquella que opera sobre p y transforma sus coordenadas expresadas en el sistema de coordenadas rotado OUVW en el sistema de coordenadas de referencia OXYZ.

Es de interés encontrar una matriz que transforme las coordenadas de un punto cualquiera p , ligado a un sistema de coordenadas en movimiento OUVW, a las coordenadas expresadas con respecto al sistema de coordenadas de OXYZ, después de que el sistema de coordenadas OUVW ha sido girado. Es decir, la siguiente transformación ortogonal (ortonormal ya que sus componentes son vectores unitarios):

$$p_{xyz} = R p_{uvw} \quad (0.8)$$

Otra posibilidad es la de expresar un punto ligado al sistema de coordenadas OXYZ en términos del sistema de coordenadas en movimiento OUVW. Esta transformación se expresa de la siguiente manera,

$$p_{uvw} = Q p_{xyz} \quad (0.9)$$

Como los productos escalares son conmutativos, $QR = R^T R = R^{-1} R = U_{3 \times 3}$ (donde U es una matriz de identidad de 3×3), siendo $Q = R^{-1} = R^T$.

Definición de los componentes de un vector :

$$p_{uvw} = p_u i_u + p_v i_v + p_w i_w \quad (0.10)$$

donde p_u , p_v y p_w son las proyecciones de p sobre los ejes principales del sistema de coordenadas OUVW e i_u , i_v , i_w son vectores unitarios sobre los ejes de OUVW.

Utilizando la definición del producto escalar entre dos vectores a y b y el ángulo α que los separa, $a \cdot b = |a||b|\cos\alpha$ (o $a \cdot b = \cos\alpha$ cuando a y b son vectores unitarios) y la ecuación (0.10),

$$p_x = i_x \cdot p = i_x \cdot i_u p_u + i_x \cdot i_v p_v + i_x \cdot i_w p_w$$

$$p_y = j_y \cdot p = j_y \cdot i_u p_u + j_y \cdot i_v p_v + j_y \cdot i_w p_w$$

$$p_z = k_z \cdot p = k_z \cdot i_u p_u + k_z \cdot i_v p_v + k_z \cdot i_w p_w$$

Por propiedad, el producto escalar es conmutativo, es decir $a \cdot b = b \cdot a$, por lo tanto reescribiendo las ecuaciones anteriores de forma matricial

$$\begin{array}{c}
 w \\
 v \\
 \mathcal{Z}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 i_x \cdot k_w \\
 j_y \cdot k_w = - \\
 x=u
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \alpha \quad k_{\mathcal{Z}} \cdot j_v = \text{sen} \alpha \\
 j_y \cdot j_v = \text{cos} \alpha
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 y \\
 R =
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\
 j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\
 k_{\mathcal{Z}} \cdot i_u & k_{\mathcal{Z}} \cdot j_v & k_{\mathcal{Z}} \cdot k_w
 \end{bmatrix}, \quad (0.11)$$

y utilizando las identidades relacionadas con la naturaleza periódica del seno y el coseno para simplificar el valor angular,

$$\begin{aligned}
 \text{sen}(\theta) &= -\text{sen}(-\theta) = -\text{cos}(\theta + 90^\circ) = \text{cos}(\theta - 90^\circ) \\
 \text{cos}(\theta) &= \text{cos}(-\theta) = \text{sen}(\theta + 90^\circ) = -\text{sen}(\theta - 90^\circ)
 \end{aligned} \quad (0.12)$$

se puede entonces derivar las matrices de rotación con respecto a cada eje rotado, de la siguiente manera: $P_{xy\mathcal{Z}} = R_{x,\alpha} P_{uvw}$, donde $R_{x,\alpha}$ corresponde a una rotación respecto del eje x en un ángulo α . En este caso se observa que $i_x \equiv i_u$ ya que no cambian después de la rotación (ver Figura 3).

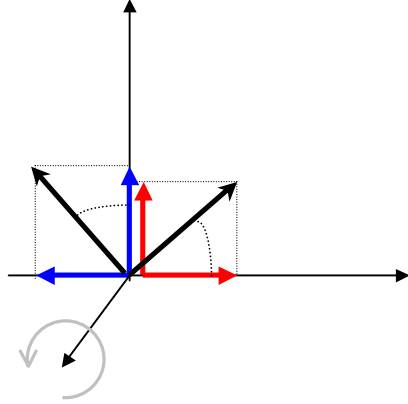


Figura 3 Matriz de rotación básica, $R_{x,\alpha}$

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_{\mathcal{Z}} \cdot i_u & k_{\mathcal{Z}} \cdot j_v & k_{\mathcal{Z}} \cdot k_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{cos}(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & \text{sen}(\alpha) & \text{cos}(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (0.13)$$

Igualmente,

$$R_{y,\phi} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_{\mathcal{Z}} \cdot i_u & k_{\mathcal{Z}} \cdot j_v & k_{\mathcal{Z}} \cdot k_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{cos}(\phi) & 0 & \text{sen}(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\phi) & 0 & \text{cos}(\phi) \end{bmatrix}, \quad (0.14)$$

$$R_{\mathcal{Z},\theta} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_{\mathcal{Z}} \cdot i_u & k_{\mathcal{Z}} \cdot j_v & k_{\mathcal{Z}} \cdot k_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \text{cos}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (0.15)$$

DESCRIPCIONES Y TRANSFORMACIONES ESPACIALES

Estas son las matrices de rotaciones básicas. Pueden ser multiplicadas entre sí para representar una secuencia de rotación finita respecto al sistema de referencia; pero como la multiplicación de matrices no conmuta es importante el orden de realización de las rotaciones.

Las matrices representadas en (0.13), (0.14) y (0.15) pueden deducirse fácilmente a partir de la

Figura 2. El componente proyectado de un vector unitario (de magnitud 1) equivale al coseno o seno del ángulo en cuestión, a partir de la definición de los mismos, *cara opuesta* = $1 \cdot \cos(\phi)$ y *cara adyacente* = $1 \cdot \sin(\phi)$.

Ejemplo 1 Rotación básica sobre un eje principal

Suponiendo un punto $p_{xyz} = [1 \ 2 \ 3]^T$ expresado con respecto del sistema OXYZ y asumiendo que el sistema de coordenadas OUVW ha sido rotado con respecto del eje X un ángulo de 30° , el mismo punto expresado en términos del sistema de coordenadas OUVW estaría dado por:

$$p_{uvw} = R_{x,30^\circ}^T \cdot p_{xyz}$$
$$P_{uvw} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(30 \cdot \text{grd}) & \sin(30 \cdot \text{grd}) \\ 0 & -\sin(30 \cdot \text{grd}) & \cos(30 \cdot \text{grd}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$P_{uvw} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3.232 \\ 1.598 \end{bmatrix}$$

fin Ejemplo 1

Ejercicio 2 Dado un punto $u = 3i + 4j + 5k$ cual es el efecto de rotarlo 90° alrededor del eje z hasta un nuevo punto v ?

Ejercicio 3 Rote el punto v anterior alrededor del eje y α hasta un nuevo punto w . Defina la rotación compuesta, de manera simbólica, en T .

1.1.2. Rotaciones Compuestas

Para representar una secuencia finita de rotaciones se pueden multiplicar las matrices de rotación básica entre sí, observando cuidadosamente el orden o secuencia de realización de las rotaciones. Este orden es importante dado que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Cada matriz de rotación dentro de la secuencia puede expresar una transformación

rotacional respecto del sistema de coordenadas de referencia fijo (en los casos anteriores denominado OXYZ) o respecto de alguno de los ejes del sistema de coordenadas en movimiento (OUVW). Para obtener un orden adecuado en la secuencia de multiplicaciones partiendo de la coincidencia entre ambos sistemas de coordenadas observe las siguientes reglas:

1. Defina una matriz identidad de 3×3 para representar la coincidencia entre los dos sistemas de coordenadas.
2. Si el sistema de coordenadas en movimiento (OUVW) se gira respecto de uno de los ejes principales del sistema de referencia (OXYZ), entonces premultiplicar la matriz de rotación previa resultante por la matriz de rotación básica correspondiente a dicho giro.
3. Si el sistema de coordenadas en movimiento (OUVW) se gira respecto de alguno de sus ejes, entonces postmultiplique la matriz de rotación previa resultante por la matriz de rotación básica correspondiente a dicho giro.

<i>Ejemplo 2 Rotación compuesta</i>

Encontrar la matriz de rotación resultante que representa la siguiente secuencia de giros:

1. Giro de 80° respecto del eje OX
2. Giro de 35° respecto del eje OZ
3. Giro de 15° respecto del eje OU
4. Giro de 30° respecto del eje OY

\hat{z}
 $\{-1,0,2,1\}$
 $1,0,2,1\}$ $\{-1,0,0,1\}$ $\{-1,4,0,1\}$
 $1,0,0,1\}$ $\{1,4,0,1\}$ \mathcal{Y}
 \mathcal{X}

DESCRIPCIONES Y TRANSFORMACIONES ESPACIALES

$$R_{xu}(\alpha) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$R_{yv}(\phi) := \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

$$R_{zw}(\theta) := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{yv}(30 \cdot \text{grd}) \cdot R_{zw}(35 \cdot \text{grd}) \cdot R_{xu}(80 \cdot \text{grd}) \cdot R_{xu}(15 \cdot \text{grd}) = \begin{bmatrix} 0.709 & 0.541 & 0.451 \\ 0.574 & -0.071 & -0.816 \\ -0.41 & 0.838 & -0.361 \end{bmatrix}$$

Para comprobar que la secuencia es importante, se verifica a continuación como cambia el resultado si no se tuviese en cuenta la no-conmutabilidad en la multiplicación de matrices,

$$R_{xu}(80 \cdot \text{grd}) \cdot R_{zw}(35 \cdot \text{grd}) \cdot R_{xu}(15 \cdot \text{grd}) \cdot R_{yv}(30 \cdot \text{grd}) = \begin{bmatrix} 0.635 & -0.554 & 0.538 \\ 0.58 & -0.117 & -0.806 \\ 0.51 & 0.824 & 0.247 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4 Aplique una transformación de rotación sobre el resultado anterior, T, de sobre su propio eje \hat{z} , para definir simbólicamente Tn.

Ejercicio 5 Suponga un objeto sólido de forma triangular con vértices indicados en la Figura 5. Defina la transformación compuesta que represente una rotación de 90° sobre el eje \hat{z} seguida de una rotación de 90° sobre el eje \hat{y} seguida de una translación de 3 unidades en la dirección \hat{x} . Encuentre los vértices resultantes del objeto transformado.

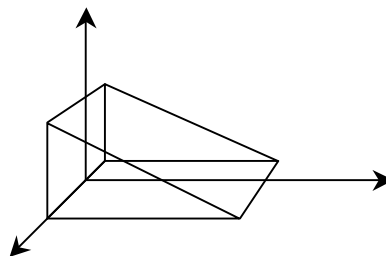


Figura 4 Sólido triangular referido en Ejercicio 5

fin Ejemplo 2

① α ③ θ

1.1. ⑤ Rotación Sobre un Eje Arbitrario

④

En algunos casos se hace necesario representar giros del sistema de coordenadas en movimiento OUVW sobre ejes arbitrarios. Por ejemplo, suponiendo que se quiere mover la mano de un robot manipulador sobre un eje arbitrario dentro de su volumen de trabajo (espacio de trabajo alcanzable por el manipulador) con el propósito de insertar una tuerca en un tornillo. Se define el eje de giro de rosca del tornillo como el eje arbitrario y se representa este por medio de un vector unitario con componentes $r = (r_x, r_y, r_z)$ que pasa por el mismo origen del sistema de coordenadas de la mano del robot.

Para derivar la matriz de rotación compuesta resultante se puede llevar a coincidencia cualquiera de los ejes principales del sistema de coordenadas OUVW con el vector r a través de una secuencia de rotaciones sobre los ejes principales del sistema de coordenadas OXYZ, luego se gira con respecto al mismo eje llevado a coincidencia (o r) en un ángulo correspondiente al giro requerido respecto de r y finalmente se regresa a la posición original el sistema de coordenadas girado. Matemáticamente esto se puede expresar de la siguiente manera a partir de un ejemplo.

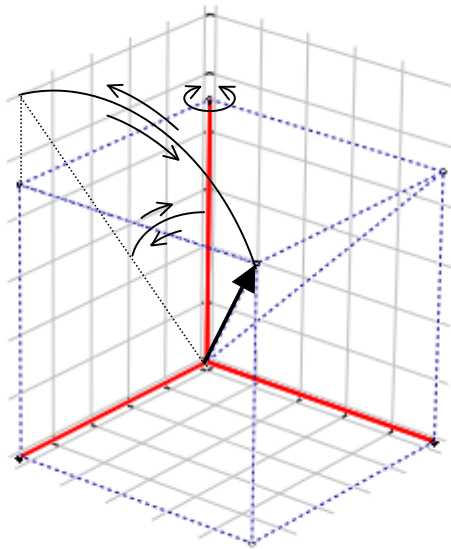


Figura 5 Rotación respecto de un eje arbitrario r

El primer paso es definir el eje que se llevará a coincidencia con r .

Arbitrariamente se escoge el eje z (podría ser cualquiera de los otros). De la Figura 5 se deduce que,

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{r_y}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} \quad \cos(\alpha) = \frac{r_z}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}$$

$$\text{sen}(\beta) = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \quad \cos(\beta) = \frac{\sqrt{r^2 - r_x^2}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} = \frac{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}$$

El siguiente paso es definir la secuencia de giros que llevarán a coincidencia los vectores unitarios r y OZ .

$$R_{r,\phi} = R_{x,-\alpha} \cdot R_{y,\beta} \cdot R_{z,\theta} \cdot R_{y,-\beta} \cdot R_{x,\alpha}$$

La matriz de rotación compuesta resultante puede expresarse en términos del vector r así,

$$R_{r,\phi} = \begin{bmatrix} \frac{c\phi(r_y^2 + r_z^2) + r_x^2}{|r|^2} & \frac{r_x r_y |r| V\phi - s\phi |r|^2 r_z}{|r|^3} & \frac{r_x r_z |r| V\phi + s\phi |r|^2 r_y}{|r|^3} \\ \frac{r_x r_y |r| V\phi + s\phi |r|^2 r_z}{|r|^3} & \frac{c\phi(r_x^2 + r_z^2) + r_y^2}{|r|^2} & \frac{r_y r_z |r| V\phi - s\phi |r|^2 r_x}{|r|^3} \\ \frac{r_x r_z |r| V\phi - s\phi |r|^2 r_y}{|r|^3} & \frac{r_y r_z |r| V\phi + s\phi |r|^2 r_x}{|r|^3} & \frac{c\phi(r_x^2 + r_y^2) + r_z^2}{|r|^2} \end{bmatrix}$$

donde, $c\phi = \cos(\phi)$, $s\phi = \text{sen}(\phi)$, $V\phi = 1 - \cos(\phi)$ y el vector r no requiere ser expresado como vector unitario.

Simplificando los términos diagonales,

$$R_{r,\phi} = \frac{1}{|r|^2} \begin{bmatrix} r_x^2 V\phi + |r|^2 c\phi & r_x r_y V\phi - s\phi |r| r_z & r_x r_z V\phi + s\phi |r| r_y \\ r_x r_y V\phi + s\phi |r| r_z & r_y^2 V\phi + |r|^2 c\phi & r_y r_z V\phi - s\phi |r| r_x \\ r_x r_z V\phi - s\phi |r| r_y & r_y r_z V\phi + s\phi |r| r_x & r_z^2 V\phi + |r|^2 c\phi \end{bmatrix} \quad (0.16)$$

Donde

Ejemplo 3 Rotación sobre un eje arbitrario

Gire un cuerpo ligado al sistema OUVW en un ángulo de 35° respecto de un vector $r_{\omega yz} = (1, 1, 1)$.

Aplicando la ecuación (0.16) para un vector r y un ángulo de rotación de 35 grados,

$$R_x(35 \cdot \text{grd}, r) = \begin{bmatrix} 0.879 & -0.271 & 0.391 \\ 0.391 & 0.879 & -0.271 \\ -0.271 & 0.391 & 0.879 \end{bmatrix}$$

fin Ejemplo 3

La ecuación (0.16) representa una transformación muy útil que será utilizada posteriormente.

Ejercicio 6 Suponiendo que el efector final de un manipulador debe atornillar una tuerca sobre un eje definido por el vector $r = [1 \ 2 \ 3]^T$. Encontrar la matriz de rotación, $R_{r,\alpha}$, que representa la rotación en θ respecto del vector.

1.1.3.1. Ángulo y Eje de Rotación Equivalente

Dada una transformación rotacional arbitraria, se puede utilizar la ecuación (0.16) para obtener el eje sobre el cual una rotación equivalente de ϕ se lleva a cabo. Dada una transformación rotacional R expresada simbólicamente por los ejes ortogonales en movimiento (vectores columna) sobre los ejes principales xyz (vectores fila):

$$R = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

Se iguala R con $R_{r,\phi}$ en la ecuación (0.16) para encontrar relaciones trigonométricas que permitan deducir ϕ a partir de funciones seno y coseno.

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \frac{1}{|r|^2} \begin{bmatrix} r_x^2 V\phi + |r|^2 c\phi & r_x r_y V\phi - s\phi |r| r_z & r_x r_z V\phi + s\phi |r| r_y \\ r_x r_y V\phi + s\phi |r| r_z & r_y^2 V\phi + |r|^2 c\phi & r_y r_z V\phi - s\phi |r| r_x \\ r_x r_z V\phi - s\phi |r| r_y & r_y r_z V\phi + s\phi |r| r_x & r_z^2 V\phi + |r|^2 c\phi \end{bmatrix} \quad (0.17)$$

De este procedimiento, y asumiendo una rotación positiva alrededor del vector r de tal forma que $0 \leq \phi \leq \pi$, se encuentra que el ángulo de rotación está definido de manera única como:

$$\phi = \text{atan2} \left(\left(n_x + o_y + a_z - 1 \right), \sqrt{\left(o_z - a_y \right)^2 + \left(a_x - n_z \right)^2 + \left(n_y - o_x \right)^2} \right). \quad (0.18)$$

Donde la función $atan2$ corresponde a la tangente inversa con rango ampliado entre $[-\pi, \pi)$ (ver Figura 6).

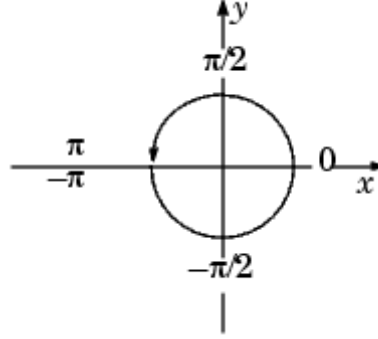


Figura 6 Rangos de la función $atan2$ ($[-\pi, \pi)$)

Este resultado se obtiene a partir de la ecuación (0.17) sumando los elementos diagonales para determinar una expresión $\cos(\phi)$ y de la diferencia entre los términos simétricos respecto a la diagonal elevados al cuadrado para determinar la expresión $\sin(\phi)$. Es decir,

$$\cos \phi = \frac{n_x + o_y + a_z - 1}{2} \quad (0.19)$$

$$\sin \phi = \frac{1}{2} \sqrt{(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2} \quad (0.20)$$

Los componentes de r pueden obtenerse de igual manera como

$$r_x = \frac{o_z - a_y}{2 \sin(\phi)} \quad (0.21)$$

$$r_y = \frac{a_x - n_z}{2 \sin(\phi)} \quad (0.22)$$

$$r_z = \frac{n_y - o_x}{2 \sin(\phi)} \quad (0.23)$$

Cuando el ángulo de rotación es muy pequeño, el eje de rotación no está físicamente bien definido debido a la magnitud de los denominadores y numeradores en las ecuaciones (0.21)-(0.23). Cuando el ángulo de rotación se acerca a 180° el vector r tampoco está bien definido debido a la magnitud del seno.

DESCRIPCIONES Y TRANSFORMACIONES ESPACIALES

Para ángulos mayores de 90° se procede de manera diferente a encontrar el vector r , igualando los elementos diagonales de la ecuación (0.17) para encontrar el elemento más grande de r . Se presume que la matriz de rotación está normalizada y su determinante es +1 para sistemas dextrogiro (regla de la mano derecha - RMD) o -1 para sistemas levogiro.

(Mirar forma de 0.16)

$$r_x = \text{signo}(o_z - a_y) \sqrt{\frac{n_x - \cos(\phi)}{1 - \cos(\phi)}} \quad (0.24)$$

$$r_y = \text{signo}(a_x - n_z) \sqrt{\frac{o_y - \cos(\phi)}{1 - \cos(\phi)}} \quad (0.25)$$

$$r_z = \text{signo}(n_y - o_x) \sqrt{\frac{a_z - \cos(\phi)}{1 - \cos(\phi)}} \quad (0.26)$$

Si r_x es el más grande,

$$r_y = \frac{n_y + o_x}{2r_x \sqrt{\phi}} \quad (0.27)$$

$$r_z = \frac{a_x + n_z}{2r_x \sqrt{\phi}} \quad (0.28)$$

Si r_y es el más grande,

$$r_x = \frac{n_y + o_x}{2r_y \sqrt{\phi}} \quad (0.29)$$

$$r_z = \frac{o_z + a_y}{2r_y \sqrt{\phi}} \quad (0.30)$$

Si r_z es el más grande,

$$r_x = \frac{a_x + n_z}{2r_z \sqrt{\phi}} \quad (0.31)$$

$$r_y = \frac{o_z + a_y}{2r_z \sqrt{\phi}} \quad (0.32)$$

Ejemplo 4 Determinación del eje y ángulo de rotación equivalentes a partir de una matriz de rotación dada.

Determine el eje (k) y ángulo de rotación (θ) equivalentes para la matriz.

$$R_{y,90} R_{z,90} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De la ecuación (0.18) encontramos

$$\theta = \text{atan2} \left(\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} \right) = 120^\circ$$

Siendo $\theta > 90^\circ$ se determina el componente más grande de k correspondiente al elemento más grande de la diagonal.

$$k_x = \sqrt{\frac{1/2}{3/2}} = 1/\sqrt{3}$$

Entonces,

$$k_y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$k_z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Es decir, $R_{y,90} R_{z,90} = R_{k,120}$ donde $k = \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$

fin Ejemplo 4

Ejercicio 7 Determine el eje (k) y ángulo de rotación (θ) equivalentes para la matriz

$$R_{z,90} R_{y,90} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ϕ 1.1.4. Operadores de Rotación con Ángulos de Euler y Cuaternios

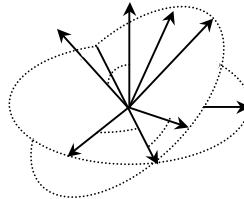
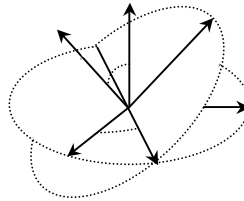
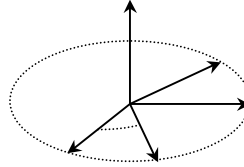


Figura 7 Representación gráfica de los ángulos de Euler (convención \times)

Las matrices de rotación básicas expresadas por los operadores (0.13), (0.14) y (0.15) requieren de nueve elementos para describir parcialmente la orientación de un cuerpo rígido rotante respecto de un sistema de coordenadas de referencia. Además, individualmente no conducen directamente a un conjunto completo de coordenadas generalizadas.

Tal conjunto de coordenadas generalizadas pueden ser proporcionados por los denominados ángulos de Euler ϕ , θ y ψ .

Existen múltiples secuencias de rotación posibles con estos tres ángulos, sin embargo, en la práctica se utilizan con mayor frecuencia las convenciones RPY ("Roll-Pitch-Yaw"), X y Y (para la cuales la rotación intermedia se da sobre el eje respectivo mencionado). A continuación se presentan las matrices correspondientes a dichas convenciones,

$$R_{\hat{x},\phi} R_{\hat{y},\theta} R_{\hat{x},\psi} = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ s\phi c\theta & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix} \quad (0.33)$$

$$R_{\tilde{\alpha},\phi} R_{\tilde{\alpha}',\theta} R_{\tilde{\alpha}'',\psi} = \begin{bmatrix} c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & -s\phi c\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta \\ s\phi c\psi + c\phi c\theta s\psi & c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & c\phi s\theta \\ s\theta s\psi & s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix} \quad (0.34)$$

$$R_{\tilde{\alpha},\phi} R_{\tilde{\alpha}'',\theta} R_{\tilde{\alpha}',\psi} = \begin{bmatrix} s\phi s\psi - c\phi c\theta c\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta \\ c\phi s\psi + s\phi c\theta c\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} \quad (0.35)$$

1.1.5. Cuaternios

Uno de los problemas en el uso de los ángulos de Euler es que conducen a singularidades cuando el movimiento angular se acerca a 0^0 o a 180^0 . Sin embargo, empleando cuaternios y álgebra de cuaternios es factible evitar dichas singularidades. Los cuaternios, definidos por Hamilton [HAM1843], pueden ser empleados para representar transformaciones de giros y orientaciones. Un cuaternio está constituido por cuatro componentes variables (q_0, q_1, q_2, q_3) que representan sus coordenadas en una base $\{b, i, j, k\}$. El cuaternio se constituye de un término escalar, b , y tres que conforman una parte vectorial, $\{i, j, k\}$. De este modo un cuaternio puede representarse como:

$$Q = (q_0, q_1, q_2, q_3) = (s, v) \quad (0.36)$$

donde, s corresponde a un valor escalar y v a un vector.

1.1.5.1. Propiedades de los Cuaternios

El *conjugado* de $Q \rightarrow Q^*$ se define manteniendo el signo de s e invirtiendo el de v .

$$Q^* = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3) = (s, -v) \quad (0.37)$$

El *producto* de dos cuaternios $Q_1 \cdot Q_2$ está dado por,

$$Q_3 = Q_1 \cdot Q_2 = (s_1, v_1) \cdot (s_2, v_2) = (s_1 s_2 - v_1^T v_2, v_1 \times v_2 + s_1 v_2 + s_2 v_1) \quad (0.38)$$

Es de notar que el producto entre cuaternios no es generalmente conmutativo.

La *suma* de dos cuaternios $Q_1 + Q_2$ se define como,

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = (s_1, v_1) + (s_2, v_2) = (s_1 + s_2, v_1 + v_2) \quad (0.39)$$

El *producto por un escalar* $Q_2 = aQ_1$ se define como,

$$Q_2 = aQ_1 = a(s_1, v_1) = (as_1, av_1) \quad (0.40)$$

DESCRIPCIONES Y TRANSFORMACIONES ESPACIALES

La **norma** $\|Q\|$ está dada por,

$$Q \cdot Q^* = \left(\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \right) b \quad (0.41)$$

El **inverso** para un cuaternio Q , no nulo, se define por,

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|} \quad (0.42)$$

La composición de rotaciones utilizando cuaternios resulta de la multiplicación entre cuaternios.

El cuaternio que representa una rotación de valor θ sobre un eje r está dada por,

$$Q = R(r, \theta) = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), r \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad (0.43)$$

Ejemplo 5 Rotaciones empleando cuaternios

El cuaternio que representa una rotación de 90° sobre un eje $(4, 2, -1)$ está dada por,

$$Q = R(r, 90^\circ) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{4\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2} \right)$$

Para aplicar dicha rotación sobre otro vector l se evalúa el producto

$$Q \cdot (0, l) \cdot Q^*.$$

fin Ejemplo 5

Rotaciones compuestas pueden expresarse fácilmente por medio del producto entre cuaternios,

$$Q_3 = Q_2 \cdot Q_1 \quad (0.44)$$

Ejemplo 6 Composición de rotaciones con traslaciones

PONER EJEMPLOS NUMERICOS

El resultado de trasladar por un vector p seguido por rotar Q el sistema OXYZ es un nuevo sistema OUVW, donde las coordenadas del vector r en el sistema OXYZ, definidas en OUVW, son,

$$(0, r_{\text{OXYZ}}) = Q \cdot (0, r_{\text{OUVW}}) \cdot Q^* + (0, p) \quad (0.45)$$

Aplicando primero el giro y después la traslación,

$$(0, r_{\text{xyz}}) = \mathcal{Q} \cdot (0, r_{\text{uvw}} + p) \cdot \mathcal{Q}^* \quad (0.46)$$

Manteniendo el sistema OXYZ fijo y trasladando r un vector p , seguido de una rotación \mathcal{Q} , se obtiene r' de coordenadas,

$$(0, r'_{\text{xyz}}) = \mathcal{Q} \cdot (0, r_{\text{xyz}} + p) \cdot \mathcal{Q}^* \quad (0.47)$$

Mientras la operación de rotación seguida de la traslación resulta en,

$$(0, r_{\text{xyz}}) = \mathcal{Q} \cdot (0, r_{\text{xyz}}) \cdot \mathcal{Q}^* + (0, p) \quad (0.48)$$

fin Ejemplo 6

Estas cuatro variables expresadas en términos de los ángulos de Euler se denominan cuaternios y están dadas por,

$$q_0 = \text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi - \psi}{2} \quad (0.49)$$

$$q_1 = \text{sen} \frac{\theta}{2} \text{sen} \frac{\phi - \psi}{2} \quad (0.50)$$

$$q_2 = \cos \frac{\theta}{2} \text{sen} \frac{\phi + \psi}{2} \quad (0.51)$$

$$q_3 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi + \psi}{2} \quad (0.52)$$

Donde la condición de normalización está dada por,

$$\sum_{n=0}^3 q_n^2 = 1 \quad (0.53)$$

La relación entre los cuaternios y la matriz de orientación R está dada por,

$$R_{ii} = q_3^2 + q_i^2 - \sum_{j \neq i} q_j^2 \quad (0.54)$$

$$R_{ij} = 2q_i q_j + \epsilon_{ijk} q_3 q_k \quad i \neq j \quad (0.55)$$

Donde $i=0,1,2$.

En forma matricial,

$$R = \begin{bmatrix} q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 + q_3^2 & 2q_xq_y + 2q_3q_z & 2q_xq_z - 2q_3q_y \\ 2q_xq_y - 2q_3q_z & -q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 + q_3^2 & 2q_yq_z + 2q_3q_x \\ 2q_xq_z + 2q_3q_y & 2q_yq_z - 2q_3q_x & -q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (0.56)$$

Ejercicio 8 Desarrolle las traducciones entre Transformada Homogénea y Ángulos de Euler (convenciones X, Y, y RPY, Transformadas Homogéneas y Cuaternios, y sus correspondientes transformaciones inversas

FALTA INCLUIR TRANSFORMACIONES EQUIVALENTES!!

1.1.6. Interpretación Geométrica de las Matrices de Rotación [Fu]

Falta Enunciado !

- Cada vector columna es una representación del vector unitario del eje rotado expresado en términos de los vectores unitarios de los ejes del sistema de referencia, y cada vector fila es una representación del vector unitario de los ejes de referencia expresado en función de los vectores unitarios de los ejes rotados del sistema OUVW.
- Como cada fila y columna es una representación de un vector unitario, la magnitud de cada una de ellas debería ser igual a 1 (Sistema de coordenadas ortonormal). El determinante de una matriz de rotación es +1 para un sistema dextrogiro (RMD) y -1 para un levogiro (sentido opuesto a RMD).
- Como cada fila es una representación vectorial de vectores ortonormales, el producto interno (producto escalar) de cada fila por cualquier otra fila es igual a cero. Lo anterior se cumple de manera análoga para el producto interno entre columnas.
- La inversa de una matriz de rotación es la traspuesta de sí misma. Esto se deduce a partir de las primeras dos observaciones anteriores.

1.3. Matrices de Transformación Homogéneas

Las matrices de rotación únicamente permiten representar cambios de orientación entre dos sistemas de coordenadas diferentes. En robótica de manipuladores es evidente la necesidad de representar cambios traslacionales, además de los rotacionales. Para ello se definen las matrices de transformación homogénea.

Una matriz de transformación homogénea es un operador que soporta ambas transformaciones de manera integrada, además de escalado y perspectiva. Son matrices de 4x4 que transforman un vector expresado en

coordenadas homogéneas desde un sistema de coordenadas hasta otro sistema de coordenadas. Consisten de 4 submatrices.

$$T = \begin{bmatrix} Rotacion_{3 \times 3} & Posicion_{3 \times 1} \\ perspectiva_{1 \times 3} & escalado_{1 \times 1} \end{bmatrix} \quad (0.57)$$

La submatriz superior derecha tiene el efecto de trasladar el sistema de coordenadas OUVW que tiene ejes paralelos al sistema de referencia OXYZ, pero cuyo origen está en el punto $Posición_{3 \times 1}$. La submatriz superior izquierda corresponde al operador de rotación que relaciona la orientación entre dos sistemas de coordenadas. La submatriz inferior izquierda se emplea para variaciones en la perspectiva visual de los elementos y la submatriz inferior derecha corresponde a un parámetro de escalado (ambos empleados en aplicaciones de simulación y modelado).

1.3.1. Transformaciones de Perspectiva

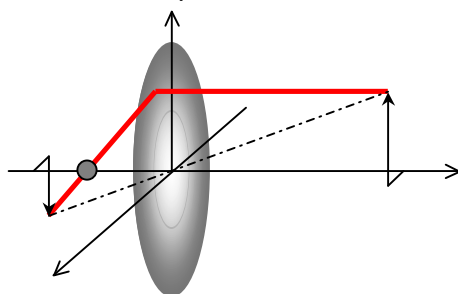


Figura 8 Transformación de Perspectiva

Suponiendo la imagen formada de un objeto visto a través de un lente, un punto del objeto x, y, z se visualiza en las coordenadas x', y', z' si el lente tiene una distancia focal f positiva. y' representa la distancia de imagen y varía de acuerdo con la distancia del objeto y . Si dibujamos puntos en un plano perpendicular al eje y localizado en y' (como el plano de filmación de una cámara), se forma entonces una imagen en perspectiva.

Un rayo que pase por el centro del lente no se desvía, por lo tanto, se puede escribir,

$$\frac{z}{y} = \frac{z'}{y'} \quad (0.58)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} \quad (0.59)$$

Un rayo pasante y paralelo al lente pasa a través del punto focal f , por lo tanto,

$$\frac{z}{f} = \frac{z'}{y' + f} \quad (0.60)$$

DESCRIPCIONES Y TRANSFORMACIONES ESPACIALES

$$\frac{x}{f} = \frac{x'}{y' + f} \quad (0.61)$$

Nótese que x', y' , y z' son negativos y f es positivo. Eliminando y' entre las ecuaciones (0.58) y (0.60) se obtiene,

$$\frac{z}{f} = \frac{z'}{\left(\frac{z'y}{z} + f\right)} \quad (0.62)$$

y resolviendo por z' se obtiene,

$$z' = \frac{z}{1 - y/f} \quad (0.63)$$

A partir de las ecuaciones (0.59) y (0.61) se obtiene,

$$x' = \frac{x}{1 - y/f} \quad (0.64)$$

Para obtener la distancia y' se reescriben las ecuaciones (0.58) y (0.60) de la siguiente manera,

$$\frac{z}{z'} = \frac{y}{y'} \quad (0.65)$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{f}{y' + f} \quad (0.66)$$

Por lo tanto,

$$\frac{y}{y'} = \frac{f}{y' + f} \quad (0.67)$$

y

$$y' = \frac{y}{1 - y/f} \quad (0.68)$$

La transformación homogénea que produce el mismo efecto es,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{f} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (0.69)$$

Dado que cualquier punto $x_i + y_j + z_k$ se transforma de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 - \frac{y}{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{f} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (0.70)$$

el punto de la imagen x', y', z' obtenido dividiendo por el factor de peso $(1 - y/f)$, es

$$\frac{x}{(1 - y/f)}i + \frac{y}{(1 - y/f)}j + \frac{z}{(1 - y/f)}k \quad (0.71)$$

Una transformada similar a P pero con $-1/f$ en la posición 4,1 o 4,3 produce una transformación en perspectiva a lo largo del eje x o a lo largo del eje z respectivamente.

1.3.2. La Transformación de Escalado

Esta transformación es útil, en modelado y simulación, para representar deformaciones. Sin embargo, no son comunes. Para representar escalado heterogéneo a lo largo de cada uno de los ejes principales se emplearía la siguiente transformación,

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (0.72)$$

Donde, a , b , c representan los factores de escalado en x , y , z respectivamente. Para escalado homogéneo de un objeto por un factor s , $s = a = b = c$ en (0.72).

Referencias

1. B. Roth, "Performance Evaluation of Manipulators from a Kinematic Viewpoint", Performance Evaluation of Manipulators, National Bureau of Standards, special publication, 1975.
2. D. Pieper, "The Kinematics of Manipulators Under Computer Control" Unpublished Ph.D. thesis, Stanford University, 1968.
3. H.Y., Lee y C.G., Liang, "Displacement Analysis of the General Spatial 7-Link 7R Mechanism." Mechanism and Machine Theory, 23, 219-226, 1998.
4. R.G., Selfridge, "Analysis of 6-Link Revolute Arms", Mechanism and Machine Theory, 24 (1), 1-8, 1989.
5. C., Mavroidis, y B., Roth, "Structural Parameters Which Reduce the Number of Manipulator Configurations", Journal of Mechanical Design, 116, 3-10, 1994.
6. J., Duffy, "Analysis of Mechanisms and Manipulators", John Wiley & Sons, 1980.
7. M., Raghavan y B., Roth, "Inverse kinematics of Manipulators Under Computer Control", Proceedings 2nd International Congress for the Theory of Machines and Mechanisms, Zakopane, Poland. Vol. 2. 159-168. 1993.
8. R.P., Paul, Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control, MIT Press, 1981.
9. D.E. Whitney, "Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prosthesis", IEEE Transactions on Man-Machine Systems, 10(2), 47-53, 1969.
10. R.M. Murray, Z. Li, y S.S. Sastry, A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, London: CRC Press, 1994.
11. S. Y., Nof, "Handbook of Industrial Robotics", 2nd Ed., John Wiley & Sons, New York, 1999.
12. R.C. Dorf, S. Y., Nof, "International Encyclopedia of Robotics: Applications and Automation", Vol. 1-3, John Wiley & Sons, New York, 1988.
13. K.S. Fu, R.C. González y C.S.G. Lee, "Robótica: Control, Detección, Visión e Inteligencia", McGraw-Hill, España, 1988.
14. Barrientos, L.F. Peñín, C. Balaguer, R. Aracil, "Fundamentos de Robótica", McGraw-Hill, España, 1998.

Glosario de Términos

Indice

A

atan2, 20

C

cosenos de dirección, 8

L

localización, 6

M

matriz de rotación, 8

O

ortogonales, 6, 19

R

relación espacial, 6, 7

Robot Stanford, 31

Rotaciones Compuestas, 13

S

sistema de coordenadas, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 17, 23, 28

T

Transformaciones Espaciales

Ángulos de Euler, 23

Cuaternios, 23, 24, 25, 26

Conjugado de, 24

Inverso de, 25

Norma de, 25

Producto de, 24

Producto por un escalar, 24

Suma de, 24

Escalado, 30

Matrices de rotación básica, 10

matriz de transformación homogénea, 27

Perspectiva, 28

Rotación, 10, 13, 14, 17, 18, 19, 23, 27

V

vector, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 18, 19, 21, 24, 25, 26, 27

vector de posición, 7