Filtro Complementario con DCM

Francisco Domínguez Mateos

May 29, 2014

Contents

1 Introducción

A continuación vamos a mostrar un algoritmo de fusión de sensores inerciales basado en la técnica de filtros complementarios, utilizando como representación de conversión de sistemas de referencias o sistemas de coordenadas las Matrices de Cosenos Directores.

Partimos de la consideración de que tenemos herramientas de medida inercial calibradas y con valores correctos. Las herramientas de medida inercial son normalmente tres:

1. Giróscopo, mide la velocidad ángular del dispositivo.
2. Acelerómetro, mide la aceleración asociada al dispotivo, incluida la gravedad, que es la que nos interesa para determinar la orientación.
3. Brújula o magnetómetro, que mide los campos magnéticos, incluido el de la tierra, que es el que nos interesa para determinar la orientación

Todas estas herramientas nos devuelven tres valores de medida, es decir miden en los tres ejes de coordenadas.

El objetivo es obtener la matriz de cosenos directores que convierte medidas del sistema global al sistema del cuerpo o local. En nuestro caso el sistema global será el sistema de referencias de la tierra donde:

- El norte es el eje X descrito con el vector I.
- El oeste es el eje Y descrito con el vector J
- El cielo es el eje Z descrito con el vector K.

En la figura 1 se ilustra nuestro sistema de referencia global que es el de la tierra:

En cuanto al sistema de referencia del cuerpo o local, vamos a considerar nuestro dispositivo de medida, donde todos los sensores están perfectamente alineados entre si, vease la figura 2.

2 Construción de la DCM con Acelerómetro y Brújula

El caso más sencillo y por el que comenzaremos a fusionar medidas de dispotivos, consiste en unir las medidas del acelerometro y la brújula.

Los acelerómetros miden la gravedad, el vector de gravitación apunta hacia el centro de la tierra y es opuesto al vector que apunta al cielo en nuestro caso $\overrightarrow{K_B}$. Considerando que los valores de nuestro acelerometro los representamos con el

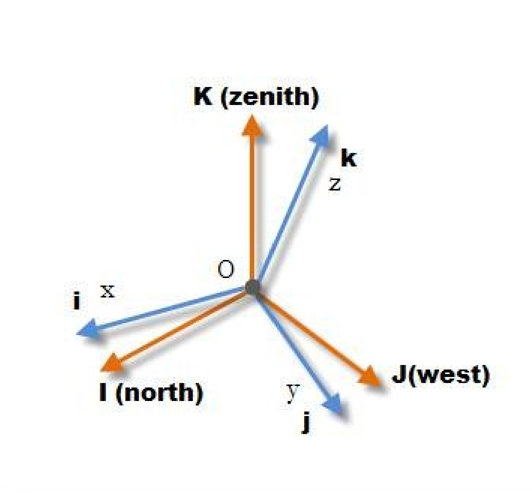

Figure 1: Sistema de referencia global o de la tierra

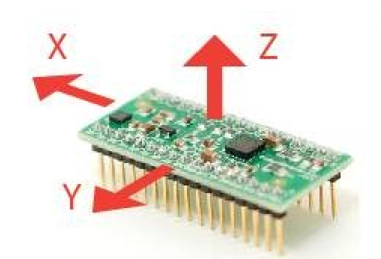

Figure 2: Sistema de referencia local o del cuerpo

vector $\overrightarrow{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$ y considerando que no hay aceleraciones externas debidas a otras fuerzas, podemos asumir que:

$$\overrightarrow{K_B} = -\overrightarrow{A} \tag{1}$$

Es decir que el vector de dirección $\overrightarrow{K}$ que es el del eje de coordenadas Z del sistema de referencia global, tienes unos valores de coordenadas en el sistema de referencias local o del cuerpo $\overrightarrow{K_B}$ dados por $-\overrightarrow{A}$, es decir los valores medidos en el acelerometros cambiados de signo.

Por otro lado, si disponemos de una brujula corregida y calibrada correctamente, esta nos proporciona un vector de medida $\overrightarrow{M} = \{M_x, M_y, M_z\}$ que esta siempre orientado al norte con lo que coincide con el vector director del eje X del sistemas de coordenadas global o de la tierra en este caso, con lo que tenemos:

$$\overrightarrow{I_B} = \overrightarrow{M} \tag{2}$$

Es decir, $\overrightarrow{I_B}$ es el vector director del eje de coordenadas X del sistema de coordenadas de la tierra expresado en coordenadas locales o del cuerpo.

Ya sabemos que conocidos $\overrightarrow{I_B}$ y $\overrightarrow{K_B}$ el eje vector de dirección de coordenadas o versor para el eje Y viene determinado por el producto vectorial de los dos vectores anteriores:

$$\overrightarrow{J_B} = \overrightarrow{K_B} \otimes \overrightarrow{I_B} = \{-A_y M_z + A_z M_y, -A_x M_z + A_z M_x, -A_x M_y + A_y M_x\} \tag{3}$$

De esta forma teniendo los valores del acelerometro y el magnetómetro podemos construir nuestra matríz de cosenos directores. Que vendria expresada como:

$$[\overrightarrow{I_B}, \overrightarrow{J_B}, \overrightarrow{K_B}] = \begin{bmatrix} M_x & -A_y M_z + A_z M_y & -A_x \\ M_y & -A_x M_z + A_z M_x & -A_y \\ M_z & -A_x M_y + A_y M_x & -A_z \end{bmatrix} = DCM^B \tag{4}$$

Esta matriz nos permitiría saber las coordenadas locales o del cuerpo de cualquier vector expresado en coordenadas globales o de la tierra. Es decir dado $\overrightarrow{r_B}$ podemos determinar $\overrightarrow{r_G}$.

Pero lo que estamos buscando es la orientación de nuestro dispositivo, cuerpo, con respecto a las coordenadas globales, de la tierra o a nosotros. Normalmente los vectores que nos van a dar una idea de la orientación de nuestro cuerpo serán los vectores directores de los ejes de coordenadas de nuestro sistema de referencia $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, que vienen dados por los valores:

$$\overrightarrow{i_B} = \{1, 0, 0\}^T \tag{5}$$

$$\overrightarrow{j_B} = \{0, 1, 0\}^T \tag{6}$$

$$\overrightarrow{k_B} = \{0, 0, 1\}^T \tag{7}$$

Es decir queremos saber o calcular los anteriores vectores expresados en coordenadas del sistema de referencia de la tierra. Para estos o cualquier otro vector $\overrightarrow{r_B}$ aplicaremos la expresión:

$$\overrightarrow{r_G} = \begin{bmatrix} r_x^G \\ r_y^G \\ r_z^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{I} \cdot \overrightarrow{i} & \overrightarrow{I} \cdot \overrightarrow{j} & \overrightarrow{I} \cdot \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{i} & \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{j} & \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{K} \cdot \overrightarrow{i} & \overrightarrow{K} \cdot \overrightarrow{j} & \overrightarrow{K} \cdot \overrightarrow{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x^B \\ r_y^B \\ r_z^B \end{bmatrix} = DCM^G \overrightarrow{r_B} \tag{8}$$

Necesitamos calcular DCM^G a partir de la conocida DCM^B, para ello utilizaremos la igualdad:

$$DCM^G = (DCM^B)^T \tag{9}$$

Con lo que nos queda:

$$[\overrightarrow{i_G}, \overrightarrow{j_G}, \overrightarrow{k_G}] = \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_z \\ -A_y M_z + A_z M_y & -A_x M_z + A_z M_x & -A_x M_y + A_y M_x \\ -A_x & -A_y & -A_z \end{bmatrix} = DCM^G \tag{10}$$

recordemos que:

$$[\overrightarrow{i_G}, \overrightarrow{j_G}, \overrightarrow{k_G}] = [\overrightarrow{I_B}, \overrightarrow{J_B}, \overrightarrow{K_B}]^T = DCM^G \tag{11}$$

No hace falta realizar la multiplicación de 8 ya que directamente vemos los valores de los vectores que deseamos calcular:

$$\overrightarrow{i_G} = \{i_x^G, i_y^G, i_z^G\}^T = \{\overrightarrow{I} \cdot \overrightarrow{i}, \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{i}, \overrightarrow{K} \cdot \overrightarrow{i}\}^T = \begin{bmatrix} M_x \\ -A_y M_z + A_z M_y \\ -A_x \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\overrightarrow{j_G} = \{j_x^G, j_y^G, j_z^G\}^T = \{\overrightarrow{I} \cdot \overrightarrow{j}, \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{j}, \overrightarrow{K} \cdot \overrightarrow{j}\}^T = \begin{bmatrix} M_y \\ -A_x M_z + A_z M_x \\ -Ay_x \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\overrightarrow{k_G} = \{k_x^G, k_y^G, k_z^G\}^T = \{\overrightarrow{I} \cdot \overrightarrow{k}, \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{k}, \overrightarrow{K} \cdot \overrightarrow{k}\}^T = \begin{bmatrix} M_z \\ -A_x M_y + A_y M_x \\ -A_z \end{bmatrix} \tag{14}$$

Si estos sensores no estuviesen afectados por los ruidos o por fuerzas externas para el caso del acelerómetro o campos magnéticos externos para el caso de la brujula, con los resultados obtenidos seria suficiente para determinar la orientación del sistema local, cuerpo o dispositivo sensor. Pero esto no ocurre en la realidad, de hecho el dispositivo más preciso y menos ruidoso de los tres de que disponemos es el giróscopo, la causa de esto es principalmente que el giróscopo no se ve afectado por .elementos externos como el caso de fuerzas externas para el acelerómetro o campos magnéticos para la brújula, por lo que su inclusión/fusión en los valores de la DCM resulta muy necesario.

Seguidamente vamos a establecer la relación entre el giroscopo y la matriz de cosenos directores y a continuación vamos a fusionar los datos de la DCM anteriores con el giróscopo, para obtener una estimación de la orientación menos ruidosa y más precisa. Comenzaremos integrando acelerómetro y giróscopo y posteriormente añadiremos la brújula.

3 Relación entre el Giróscopo y la DCM

El giróscopo nos proporciona la velocidad angular del cuerpo al que esta conectado. Los valores de su medida nos vienen proporcionados como un vector$\overrightarrow{w_g} = \{w_x, w_y, w_z\}$ de velocidades angulares para caja eje del sistema local. Estas medidas no nos proporcionan información de la orientación del dispositivo en valores absolutos como lo hacen los dos otros dispositivos, si no que nos determinan cuanto cambia en cada instante de tiempo t.

Vamos a expresar la matriz de cosenos directores en función del tiempo de tal forma que la DCM en el tiempo t la vamos a denotar por $DCM(t)$ y en un instante de tiempo posterios dt, indicaremos $DCM(t + dt)$.

Una importante consideración a tener en cuenta es que las medidas de $\overrightarrow{w_g}$ nos vienen dadas en el sistema de referencia local o del cuerpo,DCM^B , por lo que es en este sistema donde vamos a realizar los calculos, para posteriormente pasar al sistema de referencia global, de tierra o nuestro, DCM^G.

Supongamos que en un tiempo determinado tenemos estos valores locales:

$$DCM^B(t) = [\overrightarrow{I_B}(t), \overrightarrow{J_B}(t), \overrightarrow{K_B}(t)] \tag{15}$$

Transcuridos un tiempo dt tendremos los valores:

$$DCM^B(t + dt) = [\overrightarrow{I_B}(t + dt), \overrightarrow{J_B}(t + dt), \overrightarrow{K_B}(t + dt)] \tag{16}$$

Tenemos que establecer la relación entre $DCM^B(t+dt)$ y $DCM^B(t)$ a partir de los valores de $\overrightarrow{w_g}$. Para ello nos vamos a centrar en uno de los vectores que forman la matriz y aplicaremos las ecuaciones de la velocidad angular de tal forma que para $\overrightarrow{K_B}(t)$ tenemos:

$$\overrightarrow{K_B}(t+dt) = \overrightarrow{K_B}(t)+vdt = \overrightarrow{K_B}(t)+(\overrightarrow{w_g}\otimes\overrightarrow{K_B}(t))dt = \overrightarrow{K_B}(t)+d\theta_g\otimes\overrightarrow{K_B}(t) \tag{17}$$

donde $d\theta_g = \overrightarrow{w_g}dt$ ya que dada la velocidad angular $\overrightarrow{w_g}$ al cabo de un tiempo dt abremos obtenido un cambio en el ángulo $d\theta_g$.

De manera análoga para los otros dos ejes:

$$\overrightarrow{I_B}(t + dt) = \overrightarrow{I_B}(t) + vdt = \overrightarrow{I_B}(t) + (\overrightarrow{w_g} \otimes \overrightarrow{I_B}(t))dt = \overrightarrow{I_B}(t) + d\theta_g \otimes \overrightarrow{I_B}(t) \tag{18}$$

$$\overrightarrow{J_B}(t + dt) = \overrightarrow{J}(t) + vdt = \overrightarrow{J_B}(t) + (\overrightarrow{w_g} \otimes \overrightarrow{J_B}(t))dt = \overrightarrow{J_B}(t) + d\theta_g \otimes \overrightarrow{J_B}(t) \tag{19}$$

Normalmente una de los tres vectores puede calcularse a partir de los otros dos, en nuestro caso el J:

$$\overrightarrow{J_B}(t+dt) = \overrightarrow{K_B}(t+dt) \otimes \overrightarrow{I_B}(t+dt) \tag{20}$$

4 Construcción de la DCM con Acelerómetro y Giróscopo

Lo comentado en el apartado anterior nos permitiría, partiendo de una inicial correcta $DCM(0)$, calcular la evolución duranten el tiempo $DCM(t)$ para cualquier instante t. Pero esto no es viable en la realidad ya que esta formulación de ir sumando valores nos acumula los errores, hasta que transcurrido un tiempo relativamente corto, los valores de la DCM no coinciden con los reales. Por lo que ahora es necesario fusionar estos valores de la DCM tomados a partir del giróscopo con los valores proporcionados por los otros sensores. En esta sección vamos a comenzar con la fusión del giroscopo y el acelerómetro.

Una forma sencilla de realizar la fusión es mediante la tecnica de *Filtro Complementario* o Media Ponderada, para ello necesitamos a calcular tanto $\overrightarrow{w_g}$ como $\overrightarrow{w_a}$, donde este último es la velocidad angular medida. Para esto último utilizaremos los valores del acelerómetro que, como ya sabemos, vienen determinados por:

$$\overrightarrow{K_{BA}}(t) = -\overrightarrow{A}(t) \tag{21}$$

Antes de seguir debemos realizar una diferenciación entre:

- $\overrightarrow{K_{BA}}(t)$ que es el valor del vector estimado a partir de los valores del acelerómetro.
- $\overrightarrow{K_{BG}}(t)$ que es el valor del vector estimado a partir de los valores del giroscomo, tal y como se mostro en la sección anterior.
- $\overrightarrow{K_B}(t)$ que es el valor del vectro total estimado fusionando los dos valores anteriores.

Para estimar la velocidad angular a partir de los valores de la aceleración utilizamos las ecuaciones del cálculo de velocidad angular dada una velocidad lineal:

$$\overrightarrow{w_a} = \frac{\overrightarrow{K_B}(t) \otimes v_a}{|\overrightarrow{K_B}(t)|^2} \tag{22}$$

sabiendo que la velocidad lineal viene dada por:

$$v_a = \frac{\overrightarrow{K_{BA}}(t+dt) - \overrightarrow{K_B}(t)}{dt} \tag{23}$$

y que $|\overrightarrow{K_B}(t)|^2 = 1$ dado que los vectores dirección son unitarios.

Una vez obtenida la velocidad angular a partir de la aceleración resulta sencillo calcular el incremento del ángulo:

$$d\theta_a = \overrightarrow{w_a}dt = (\overrightarrow{K_B}(t) \otimes v_a)dt = (\overrightarrow{K_B}(t) \otimes \frac{\overrightarrow{K_{BA}}(t+dt) - \overrightarrow{K_B}(t)}{dt})dt = \overrightarrow{K_B}(t) \otimes (\overrightarrow{K_{BA}}(t+dt) - \overrightarrow{K_B}(t)) \tag{24}$$

Ahora vamos a calcular la variación o incremento de ángulos estimato total a partir de una media ponderada de los dos valores anteriores.

$$d\theta = \frac{s_a d\theta_a + s_g d\theta_g}{s_a + s_g} \tag{25}$$

donde los valores de s_a y s_g son los pesos asociados a ambas estimaciones y se suelen estimar experimentalmente, aunque los valores de s_a suelen ser inferiores a los de s_g ya que a corto plazo los valores del giroscopo son más precisos, y cuando este no aporta, es decir cuando se para el dispotivo, ya que en ese caso no hay velocidad angular, se tienen más en cuenta los de la aceleración.

Una vez obtenido el incremento del ángulo solo nos queda actualizar el vector:

$$\overrightarrow{K_B}(t+dt) = \overrightarrow{K_B}(t) + d\theta \otimes \overrightarrow{K_B}(t) \tag{26}$$

del mismo modo se atualizaran el recto de vectores:

$$\overrightarrow{I_B}(t+dt) = \overrightarrow{I_B}(t) + d\theta \otimes \overrightarrow{I_B}(t) \tag{27}$$

$$\overrightarrow{J_B}(t+dt) = \overrightarrow{J_B}(t) + d\theta \otimes \overrightarrow{J_B}(t) \tag{28}$$

5 Construcción de la DCM con Acelerómetro, Brújula y Giróscopo

En este caso el proceso es muy parecido al anterior, donde ahora estimaremos $d\theta_m$proporcionada por los datos de la brújula o magnetómetro. Como ya sabemos los datos proporcionados por la brújula vienen dados en el vector $\overrightarrow{M} = \{M_x, M_y, M_z\}$ y proporcionan los datos para el eje global X con el vector de dirección:

$$\overrightarrow{I_B} = \overrightarrow{M} \tag{29}$$

Ahora la estimación del incremento del ángulo viene dada por:

$$d\theta_m = \overrightarrow{w_m}dt = (\overrightarrow{I_B}(t) \otimes v_m)dt = (\overrightarrow{I_B}(t) \otimes \frac{\overrightarrow{I_{BM}}(t+dt) - \overrightarrow{I_B}(t)}{dt})dt \tag{30}$$

donde finalmente tenemos:

$$d\theta_m = \overrightarrow{I_B}(t) \otimes (\overrightarrow{I_{BM}}(t+dt) - \overrightarrow{I_B}(t)) \tag{31}$$

El suguiente paso es el único que es algo más diferente a los anteriores ya que vamos a fusionar tres valores mediante media ponderada:

$$d\theta = \frac{s_a d\theta_a + s_g d\theta_g + s_m d\theta_m}{s_a + s_g + s_m} \tag{32}$$

Al igual que antes $s_m < s_g$para que de nuevo ténga más peso a corto plazo y mientras haya movimiento el giróscopo.

Las expresiones de las actualizaciones de los ejes serían las mismas que en el apartado anterior.

6 Correción de los valores de la DCM

En la practia despues de haber calculado $DCM(t + dt)$ obtenemos un pequeño error debido a que todos los cálculos han sido realizados considerando que dt es muy pequeño, de tal forma que a mayor valor de dt mayor será el error de estimación de los valores de la matriz. Además este error se va acumulando en cada iteracción del algoritmo.

De tal forma que si los vectores que forman$DCM(t)$ son correctos y cumplen la propiedad de una matriz de rotación, que recordamos que es que los vectores son ortogonales y unitarios. Después de realizar los calculos no podemos decir lo mismo de $DCM(t + dt)$, aunque el error es muy pequeño debido a que normalmente dt es pequeño, es conveniento corregir lo máximo posible los valores, después de cada iteración, para que estos errores no se acumulen.

A continuación vamos a ver unos conceptos básicos que nos servirán como base para realizar los calculos de corrección.

6.1 Asegurar que dos vectores son ortogonales

Consideremos que tenemos dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ que son casi ortogonales, es decir el ángulo que forman ambos esta muy próximo a 90º, pero no es exactamente 90º. Queremos calcularun vector $\overrightarrow{b'}$ que es perpendicular a $\overrightarrow{a}$ y esta en el mismo plano que forman $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$. Tal vector como sabemos peude ser calculado de forma sencilla mediante el producto vectorial de tal forma que $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \otimes \overrightarrow{b}$, en la figura 3 se ilustra lo indicado.

Como vemos y dadas las propiedades del producto vectorial $\overrightarrow{c}$ es perpendicular al plano formado por $\overrightarrow{a}$ y a $\overrightarrow{b}$. Tambén vemos que $\overrightarrow{b'}$ seria perpendicular al plano formado por $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{c}$, mientras que por otro lado $\overrightarrow{b'}$ pertenece al plano formado por $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$. Para calcular nuestro vector $\overrightarrow{b'}$ podemos volver a aplicar el producto vectorial de tal forma que se cumple que $\overrightarrow{b'} = \overrightarrow{c} \otimes \overrightarrow{a}$.

6.2 Concepto de vector corrección

En la figura anterior vemos que hay un vector más, $\overrightarrow{d}$, del que aun no hemos hablado, este vector se denomina vector corrección.

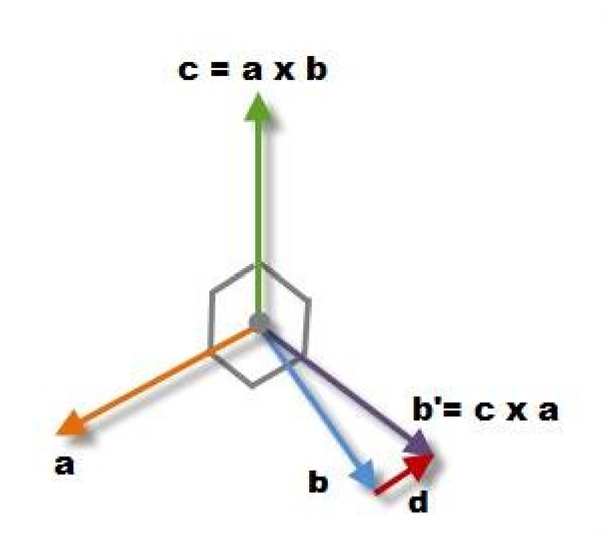

Figure 3: Calculo de $\overrightarrow{b'}$ como una modificación de $\overrightarrow{b}$a partir de $\overrightarrow{a}$

Si recordamos los pasos realizados en la sección anterior tenemos que:

$$\overrightarrow{b'} = \overrightarrow{c} \otimes \overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a} \otimes \overrightarrow{b}) \otimes \overrightarrow{a} \tag{33}$$

Aplicando la regla del triple producto que recordamos a continuación:

$$(\overrightarrow{c} \otimes \overrightarrow{b}) \otimes \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}) - \overrightarrow{a}(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b}) \tag{34}$$

y considerando que $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| = 1$,tenemos que:

$$(\overrightarrow{a} \otimes \overrightarrow{b}) \otimes \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}) = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{d} \tag{35}$$

donde $\overrightarrow{d} = -\overrightarrow{a}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$, precisamente es el vector corrección. Si nos fijamos $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{d}$ son paralelos, en realidad $\overrightarrow{d}$ es $\overrightarrow{a}$ escalado por el producto escalar de $\overrightarrow{a}$ con $\overrightarrow{b}$ que de nuevo vemos que es el coseno del ángulo que forman ambos. ya que ambos son unitarios, que será proximo a cero ya que ambos vectores son casi perpendiculares. Y es justo ese pequeño valor el que hay que corregir por eso $\overrightarrow{d}$ se denomina vector corrector. También podemos observar que $\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \sin(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b'})$.

Volviendo al valor de $\overrightarrow{b'}$ tenemos que:

$$\overrightarrow{b'} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{d} \tag{36}$$

6.3 Uso del vector correción

A continuación vamos a mostrar como utilizar el vector corrección para corregir tres vectores, en realidad corregiremos solamente dos y el tercero lo calculamos

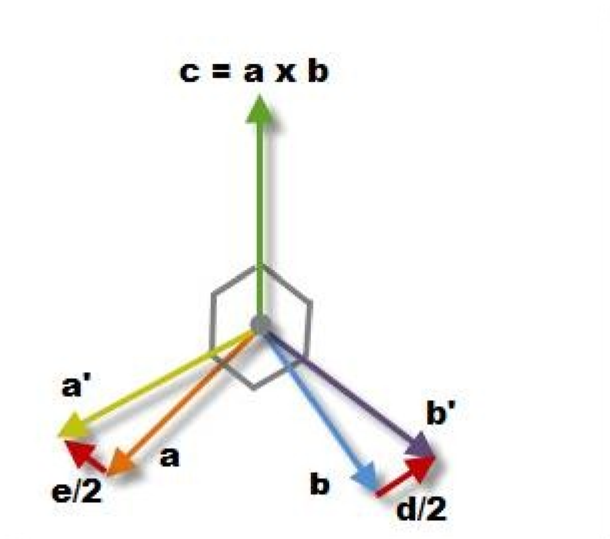

Figure 4: Corección de dos vectores

a partir del producto vecgorial de los otros dos.

De forma análoga a lo expuesto en el apartado anteror podemos corregir $\overrightarrow{a}$ en función de $\overrightarrow{b}$ de tal forma que tendriamos que:

$$\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{e} \tag{37}$$

donde $\overrightarrow{e}$ en este caso es $-\overrightarrow{b}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$.

Si queremos aplicar las dos correciones a la vez, tanto la de $\overrightarrow{a}$ como la de $\overrightarrow{b}$, podemos realizar una suposición de que ambos estan igualmente mal y aplicar la mitad de corrección a cada uno de ellos de tal forma que tenemos:

$$\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{a} - \frac{\overrightarrow{b}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})}{2} \tag{38}$$

$$\overrightarrow{b'} = \overrightarrow{b} - \frac{\overrightarrow{a}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})}{2} \tag{39}$$

Vease la figura 4 donde se puede visualizar geométricamente lo comentado anteriormente.

Si definimos una nueva variable Err de la siguiente forma:

$$Err = \frac{(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})}{2} \tag{40}$$

Tenemos que las dos expresiones anteriores se simplifican quedando:

$$\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{a} - Err * \overrightarrow{b} \tag{41}$$

$$\overrightarrow{b'} = \overrightarrow{b} - Err * \overrightarrow{a} \tag{42}$$

En realidad con el ajuste anterior no se garantiza que $\overrightarrow{a'}$ y $\overrightarrow{b'}$ van a ser ortogonales, pero si van a ser mucho más ortogonales que los originales $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, de tal forma que vamos a obtener una mejora en la acumulación de errores.

6.4 Corrección de DCM

Considerando lo anterior, solo nos queda aplicar lo visto a los vectores $\overrightarrow{I_B}(t+dt)$ y $\overrightarrow{J_B}(t+dt)$. Para ello definimos el error como:

Nota: vamos a eliminar los parametros temporales a los vectores por motivos de claridad y simplicidad.

$$Err = \frac{(\overrightarrow{I_B} \cdot \overrightarrow{J_B})}{2} \tag{43}$$

y ahora aplicamos las expresiones de coreción:

$$\overrightarrow{I'_B} = \overrightarrow{I_B} - Err * \overrightarrow{J_B} \tag{44}$$

$$\overrightarrow{J'_B} = \overrightarrow{J_B} - Err * \overrightarrow{I_B} \tag{45}$$

un paso final es normalizar y calcular el tercer vector:

$$\overrightarrow{I''_B} = \frac{\overrightarrow{I'_B}}{|\overrightarrow{I'_B}|} \tag{46}$$

$$\overrightarrow{J''_B} = \frac{\overrightarrow{J'_B}}{|\overrightarrow{J'_B}|} \tag{47}$$

$$\overrightarrow{K''_B} = \overrightarrow{I''_B} \otimes \overrightarrow{J''_B} \tag{48}$$

Estos vectores finales corresponden con nuestra DCM corregida de tal forma que, una vez añadidos los parametros temporales que eliminamos por motivos de claridad y simplicidad, tenemos:

$$DCM^B(t+dt) = [\overrightarrow{I''_B}(t+dt), \overrightarrow{J''_B}(t+dt), \overrightarrow{K''_B}(t+dt)] \tag{49}$$

El proceso se repite conforme evoluciona el tiempo, iterándo el algoritmo indefinidamente y obteniendo en cada una de ellas una estimación robusta, precisa y estable de la DCM que representa la transformación del sistema de coordenadas local o del cuerpo con respecto al sistema de coorodenadas global, de la tierra o nuestro ya que no sotros solemos observar el cuerpo situados oen la tierra.