SISTEMAS DE CONTROL EN ROBÓTICA

Notas de Clase

Mauricio Arias Correa

Medellín, 2020

Transformada Z

Introducción

Transformada Z

Definición

Existe una relación entre la transformada de Laplace (para sistemas continuos en el tiempo) y la transformada Z, para sistemas discretos.

Partimos de la transformada de Laplace de una función $\boldsymbol{x(t)}$:

$$X(S) = F(S) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-St}\,dt \qquad (1)$$

Cualquier función continua ***x(t),*** puede expresarse matemáticamente para ***t >=0***, mediante:

A partir de cuando se inicia el muestreo.

T representa el periodo de muestreo

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \qquad (2)$$

K representa la cantidad de muestras

Desarrollando la sumatoria:

K=1; T

K=2; T

K=3; T

$$x^*(t) = x(0)\delta(t) + \boxed{x(T)\delta(t - T)} + x(2T)\delta(t - 2T) + \cdots \qquad (3)$$

Aplicamos la transformada de Laplace

K=1

K=2; T

$$X^*(S) = x(0) + \boxed{x(T)e^{-TS}} + \boxed{x(2T)e^{-2TS}} + \cdots \qquad (4)$$

$$X^*(S) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTS} \qquad (5)$$

Introduciendo una nueva variable:

$$\boxed{X^*(S) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTS}} \qquad \boxed{z = e^{TS}} \quad o \quad S = \frac{1}{T}\ln(z)$$

La ecuación (5), se puede re-escribir como:

$$X^*(S)\big|_{S=\frac{1}{T}\ln(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \qquad (6)$$

Ahora hacemos:

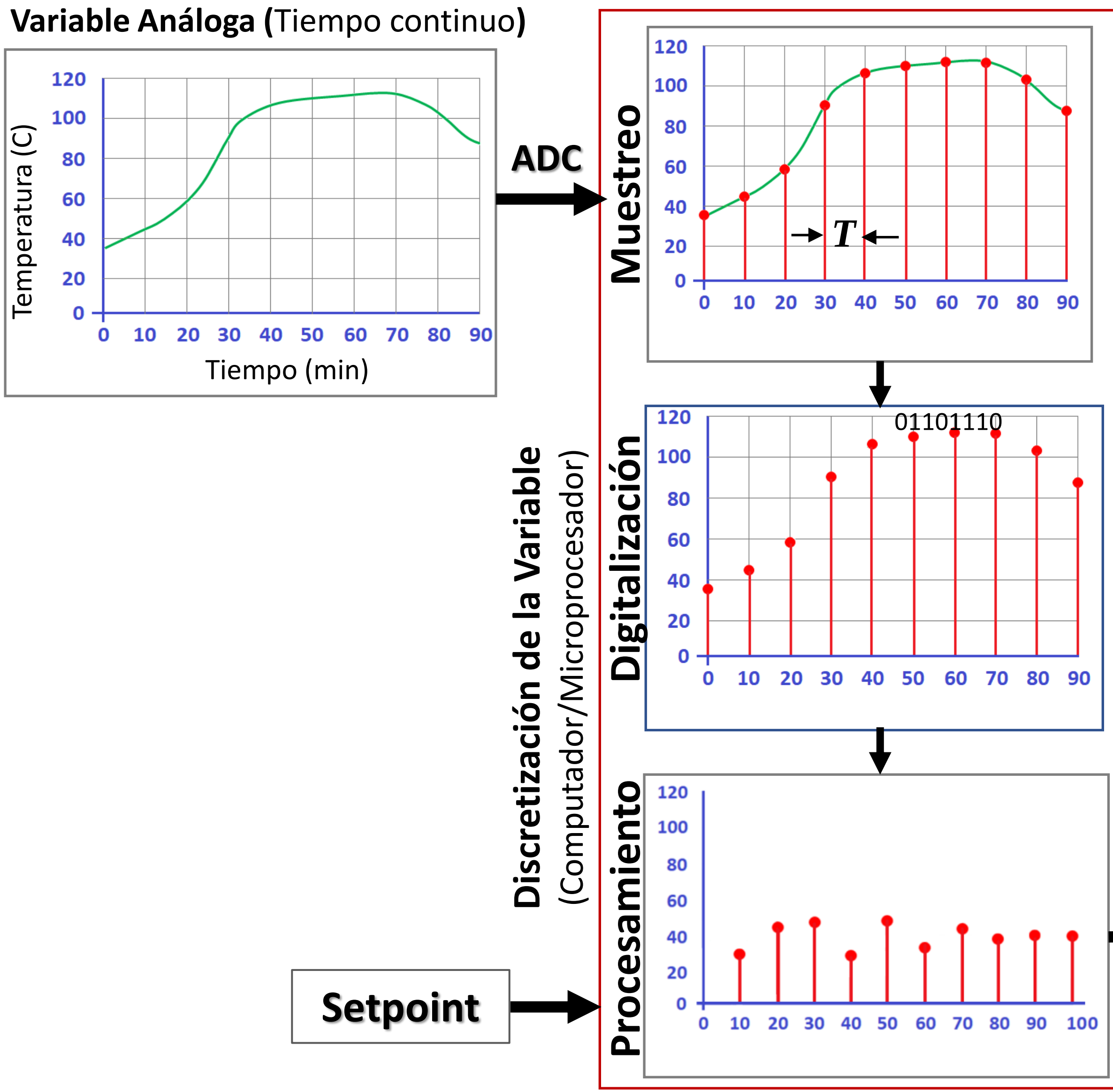
$$X^*(S)\big|_{S=\frac{1}{T}\ln(z)} = X(z) \qquad (7)$$

Con lo cual se obtiene:

$$\boxed{X(z) = \boxed{\Im[x(t)]} = \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{x(kT)}z^{-k}} \qquad (8)$$

La ecuación (8), se define como la ***transformada Z*** de la función continua ***x(t)***.

$$X(z) = \Im[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$



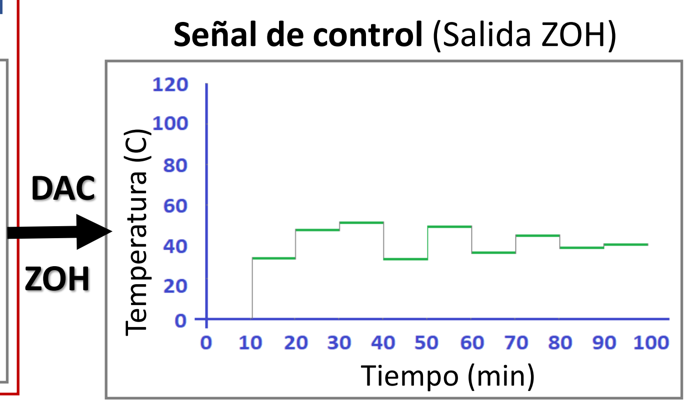


Figura 3. Proceso de discretización de la variable temperatura en proceso de desinfección con autoclave. Fuente [1]. La variable en tiempo continuo (análoga), ingresa al computador (o microcontrolador). Por medio del conversor análogo/digital es ***muestreada*** (con un periodo T, luego ***digitalizada*** (valores binarios). El Procesamiento compara el ***setpoint*** con el valor de la variable y calcula una salida a partir de un ***algoritmo de control***. La salida se lleva a un conversor digital/análogo que incluye un retenedor de orden cero (ZOH), para ser finalmente entregada a la planta.

Transformada Z de la Función Escalón Unitario

La función escalón unitario se define como: $x(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

Por definición:

$$X(z) = \Im[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k};$$ Pero: $$x(kT) = 1$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

-Qué serie es?
-Cómo se expresa?

$$\boxed{X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}}$$

Transformada Z de la Función Rampa

La función rampa se define como: $x(t) = \begin{cases} At & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

En este caso: $x(kT) = AkT$ Para: $k = 0,1,2\ldots,$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} AkTz^{-k} = AT\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k}$$

$$X(z) = AT(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots) = ATz^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \cdots)$$

$$X(z) = \frac{ATz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{ATz}{(z-1)^2}$$

Actividad 1.

Obtenga la Transformada Z para la Función Exponencial.

Tenga en cuenta que la función exponencial, se define como:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Transformada Z de la Función Exponencial

La función exponencial se define como: $x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

En este caso: $$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}\, z^{-k}$$

$$X(z) = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + e^{-3aT}z^{-3} + \cdots$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

Tabla de Transformada Z

(para algunas funciones prácticas)

$\boldsymbol{N^{\underline{o}}}$	$\boldsymbol{f(t)}$ F. Continua	$\boldsymbol{f(kT)}$ F. Discreta	$\boldsymbol{F(S)}$ T. de Laplace	$\boldsymbol{F(z)}$ Transformada z
1	$\delta(t)$	$\delta(kT)$	1	1
2	$u(t)$	$u(kT)$	$\frac{1}{S}$	$\frac{z}{z-1}$
3	t	kT	$\frac{1}{S^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
4	t^2	$(kT)^2$	$\frac{2}{S^3}$	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	t^3	$(kT)^3$	$\frac{6}{S^4}$	$\frac{T^3z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$

6	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{S+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
7	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{1}{(S+a)^2}$	$\frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$
8	t^2e^{-at}	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{2}{(S+a)^3}$	$\frac{T^2e^{-aT}z(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
9	$sin(bt)$	$sin(bkT)$	$\frac{b}{S^2+b^2}$	$\frac{zsin(bT)}{z^2-2zcos(bT)+1}$
10	$cos(bt)$	$cos(bkT)$	$\frac{S}{S^2+b^2}$	$\frac{z^2-zcos(bT)}{z^2-2zcos(bT)+1}$
11	$e^{-at}sin(bt)$	$e^{-akT}sin(bkT)$	$\frac{b}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{ze^{-aT}sinbT}{z^2-2ze^{-aT}cosbT+e^{-2aT}}$
12	$e^{-at}cos(bt)$	$e^{-akT}cos(bkT)$	$\frac{S+a}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT}cosbT}{z^2-2ze^{-aT}cosbT+e^{-2aT}}$
13	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{a}{S(S+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$

14	$1-(1+at)e^{-at}$	$1-(1+akT)e^{-akT}$	$\frac{a^2}{S(S+a)^2}$	$\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{aTe^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$
15	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{b-a}{(S+a)(S+b)}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
16	$be^{-bt}-ae^{-at}$	$be^{-bkT}-ae^{-akT}$	$\frac{(b-a)S}{(S+a)(S+b)}$	$\frac{[(b-a)z-(be^{-aT}-ae^{-bT})]z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
17	$(1-at)e^{-aT}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{S}{(S+a)^2}$	$\frac{[z-(1+aT)e^{-aT}]z}{(z-e^{-aT})^2}$
18	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{a^2}{S^2(S+a)}$	$\frac{[(aT-1+e^{-aT})z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$
19		a^k		$\frac{z}{z-a}$
20		$a^{k-1}\quad k\geq 1$		$\frac{1}{z-a}$
21		ka^{k-1}		$\frac{z}{(z-a)^2}$

22		$k^2 a^{k-1}$		$\dfrac{z(z+a)}{(z-a)^3}$
23		$k^3 a^{k-1}$		$\dfrac{z(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$
24		$(-a)^k$		$\dfrac{z}{z+a}$
25		$a^k cos(k\pi)$		$\dfrac{z}{z+a}$
26		$k(k-1)a^{k-2}$		$\dfrac{2z}{(z-a)^3}$
27		$k(k-1)\cdots(k-m+2)$		$\dfrac{z(m-1)!}{(z-1)^m}$
28	$\dfrac{1}{S(S+a)(S+b)}$ $A=\dfrac{b(1-e^{-aT})-a(1-e^{-bT})}{ab(b-a)}$			$\dfrac{(Az+B)z}{(z-1)(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$ $B=\dfrac{ae^{-aT}(1-e^{-bT})-be^{-bT}(1-e^{-aT})}{ab(b-a)}$
29	$1-e^{-at}(cosbt+\dfrac{a}{b}sinbt)$	$\dfrac{a^2+b^2}{S[(S+a)^2+b^2]}$		$\dfrac{(Az+B)z}{(z-1)(z^2-2ze^{-aT}cosbT+e^{-2aT})}$
	$A=1-e^{-aT}cosbT-\dfrac{a}{b}e^{-aT}sinbT$			$B=e^{-2aT}+\dfrac{a}{b}e^{-aT}sinbT-e^{-aT}cosbT$

Actividad 2.

Obtenga la Transformada Z de la función:

$$X(S) = \frac{4}{S(S+4)}$$

Referencias

[1] Ogata, K. (1995). *Discrete-time control systems* (Vol. 2, pp. 446-480). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

[2] Landau, I. D., & Zito, G. (2007). *Digital control systems: design, identification and implementation*. Springer Science & Business Media.