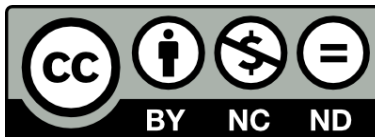


# SISTEMAS DE CONTROL EN ROBÓTICA

Notas de Clase

**Mauricio Arias Correa**  
Medellín, 2021



**Atribución – No comercial – Sin derivar**

Esta obra puede ser descargada y compartida con otras personas, siempre y cuando se den los créditos respectivos al autor. La obra no puede ser intervenida, no pueden generarse obras derivadas ni obtener beneficios comerciales.

# Transformada Z Modificada

## Transformada Z modificada

La transformada Z modificada, se utiliza cuando la función de transferencia de un sistema presenta tiempo muerto o retardo:  $\theta'$

Se parte del hecho de que la función de transferencia del sistema está dada por:

$$G_p(S) = G(S)e^{-\theta' S} \quad (1)$$

En donde  $G(S)$ , no contiene tiempo muerto y –por otro lado-,  $\theta'$  es el tiempo muerto del sistema, entonces el procedimiento para evaluar la *transformada Z* es el siguiente:

Sea: 
$$\theta' = NT + \theta \quad (2)$$

Donde  $T$  es el periodo de muestreo y  $N$  es la parte entera del cociente:

$$N = \theta' / T \quad (3)$$

Sustituyendo (2) en (1): 
$$G_p(S) = G(S)e^{-(NT+\theta)S} \quad (4)$$

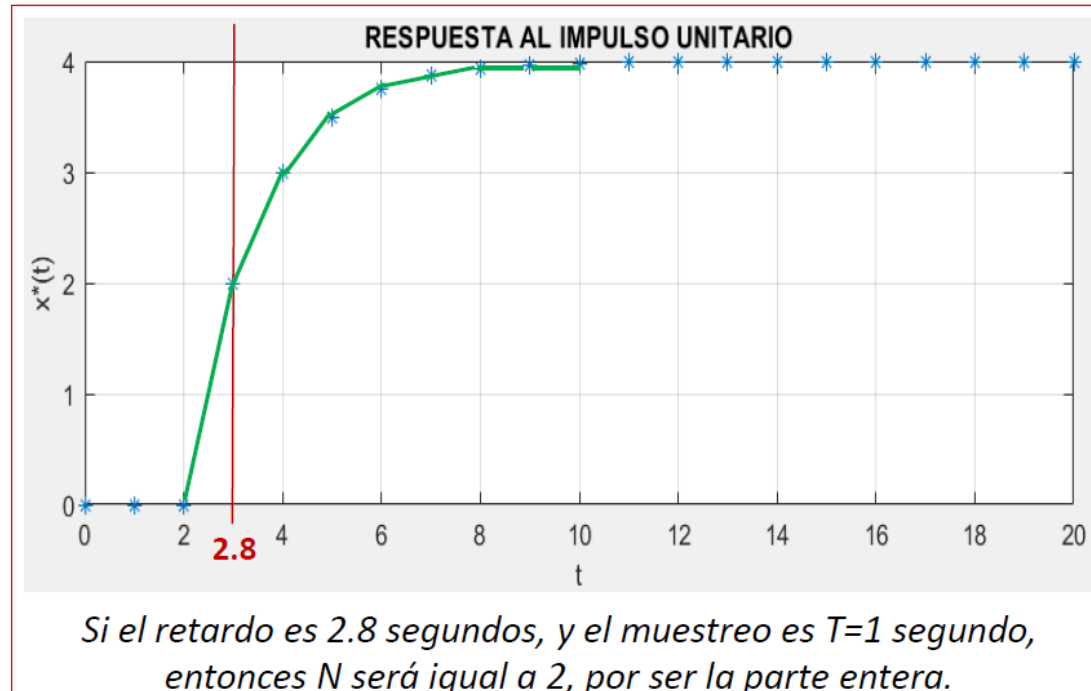
Aplicando la Transformada Z a (4): 
$$G_p(z) = \mathfrak{Z}\{G(S)e^{-(NT+\theta)S}\} \quad (5)$$

Sea:

$$\theta' = NT + \theta$$

Donde  $T$  es el periodo de muestreo y  $N$  es la parte entera del cociente:

$$N = \theta' / T$$



Aplicando propiedades de la Transformada Z:

$$G_p(z) = \mathfrak{Z}\{G(S)e^{-(NT+\theta)S}\}$$



Por tanto:

$$G_p(z) = z^{-N} \mathfrak{Z}\{G(S)e^{-\theta S}\} \quad (6)$$

El término:  $\mathfrak{Z}\{G(S)e^{-\theta S}\}$ , se define como la *Transformada Z modificada de G(S)*

Y se denota por:

$$\mathfrak{Z}_m\{G(S)\} = G(z, m) \quad (7)$$

Entonces:

$$G_p(z) = z^{-N} \mathfrak{Z}_m\{G(S)\} = z^{-N} G(z, m) \quad (8)$$

Donde:

$$m = 1 - \frac{\theta}{T} \quad (9)$$

Tabla de Transformada Z modificada

$N^{\circ}$	$f(t)$	$F(kT)$	$F(S)$	$F(z)$ <b>Modificada</b>
1	$u(t)$	$U(kT)$	$\frac{1}{S}$	$\frac{1}{z-1}$
2	$t$	$kT$	$\frac{1}{S^2}$	$\frac{mT}{z-1} - \frac{T}{(z-1)^2}$
3	$t^2$	$(kT)^2$	$\frac{2}{S^3}$	$T^2 \left[ \frac{m^2}{z-1} + \frac{2m+1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} \right]$
4	$t^{n-1}$	$(kT)^{n-1}$	$\frac{(n-1)!}{S^n}$	$\lim_{a \rightarrow 0} (-1)^{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left[ \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}} \right]$
5	$e^{-at}$	$e^{-akT}$	$\frac{1}{S+a}$	$\frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}$
6	$te^{-at}$	$(kT)e^{-akT}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{T e^{-amT} [e^{-aT} + m(z - e^{-aT})]}{(z - e^{-aT})^2}$
7	$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{a}{S(S+a)}$	$\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}$
8	$at - 1 + e^{-at}$	$akT - 1 + e^{-akT}$	$\frac{a^2}{S^2(S+a)}$	$\frac{aT}{(z-1)^2} + \frac{amT-1}{z-1} + \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}$

Tabla de Transformada Z modificada

9	$1 - (1 + at)e^{-at}$	$1 - (1 + akT)e^{-akT}$	$\frac{a^2}{S(S + a)^2}$	$\frac{1}{z - 1} - \left[ \frac{1 + amT}{z - e^{-aT}} + \frac{aTe^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2} \right]$
10	$e^{-at} - e^{-bt}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{b - a}{(S + a)(S + b)}$	$\frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}} - \frac{e^{-bmT}}{z - e^{-bT}}$
11	$\sin(bt)$	$\sin(bkT)$	$\frac{b}{S^2 + b^2}$	$\frac{z \cdot \sin(bmT) + \sin(1 - m)bT}{z^2 - 2z\cos(bT) + 1}$
12	$\cos(bt)$	$\cos(bkT)$	$\frac{S}{S^2 + b^2}$	$\frac{z \cdot \cos(bmT) - \cos(1 - m)bT}{z^2 - 2z\cos(bT) + 1}$
13	$e^{-at}\sin(bt)$	$e^{-akT}\sin(bkT)$	$\frac{b}{(S + a)^2 + b^2}$	$\frac{[z \cdot \sin(bmT) + e^{-aT}\sin(1 - m)bT]e^{-amT}}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos(bT) + e^{-2aT}}$
14	$e^{-at}\cos(bt)$	$e^{-akT}\cos(bkT)$	$\frac{S + a}{(S + a)^2 + b^2}$	$\frac{[z \cdot \cos(bmT) + e^{-aT}\sin(1 - m)bT]e^{-amT}}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos(bT) + e^{-2aT}}$

**Ejemplo:**

Hallar la transformada Z de:  $G_p(S) = \frac{5e^{-1.3S}}{(S+3)^2}$

Asumiendo un periodo de muestreo:  $T=1 \text{ seg}$

**Solución:**

$$N = \frac{\theta'}{T} = \frac{1.3}{1} = 1$$

$$\theta = \theta' - NT = 1.3 - 1 = 0.3$$

$$m = 1 - \frac{\theta}{T} = 1 - \frac{0.3}{1} = 0.7$$

**Utilizando tablas de transformada Z modificada:**

$$\mathfrak{Z} \left\{ \frac{1}{(S+a)^2} \right\} = \frac{T e^{-amT} [e^{-aT} + m(z - e^{-aT})]}{(z - e^{-aT})^2}$$



Con  **$N=1$**  y con:  $G(S) = 5/(S + 3)^2$

$$G_p(z) = z^{-1} \mathfrak{I}_m \left\{ \frac{5}{(S + 3)^2} \right\} = \frac{5 * 0.12245 [0.04978 + 0.7(z - 0.04978)]}{(z - 0.04978)^2}$$

Simplificando la ecuación:

$$G_p(z) = \frac{0.42857(z + 0.02133)}{(z - 0.04978)^2}$$

Con  $N=1$  y con:  $G(S) = 5/(S + 3)^2$

$$G_p(z) = z^{-1} \mathfrak{I}_m \left\{ \frac{5}{(S + 3)^2} \right\} = \frac{5 * 0.12245 [0.04978 + 0.7(z - 0.04978)]}{(z - 0.04978)^2}$$

Simplificando la ecuación:

$$G_p(z) = \frac{0.42857(z + 0.02133)}{(z - 0.04978)^2}$$

# Referencias

- [1] Landau, I. D., & Zito, G. (2007). *Digital control systems: design, identification and implementation*. Springer Science & Business Media.
- [2] García, L., (2006). *Sistemas de Control Digital*.
- [3] Ogata, K. (1995). *Discrete-time control systems* (Vol. 2, pp. 446-480). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.