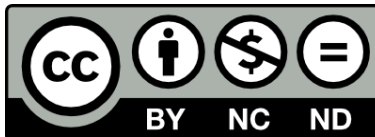


SISTEMAS DE CONTROL EN ROBÓTICA

Notas de Clase

Mauricio Arias Correa

Medellín, 2022



Atribución – No comercial – Sin derivar

Esta obra puede ser descargada y compartida con otras personas, siempre y cuando se den los créditos respectivos al autor. La obra no puede ser intervenida, no pueden generarse obras derivadas ni obtener beneficios comerciales.

Sistemas de Control en Robótica

SESIÓN 2 Introducción al Control Digital

De la sesión anterior, concluimos...

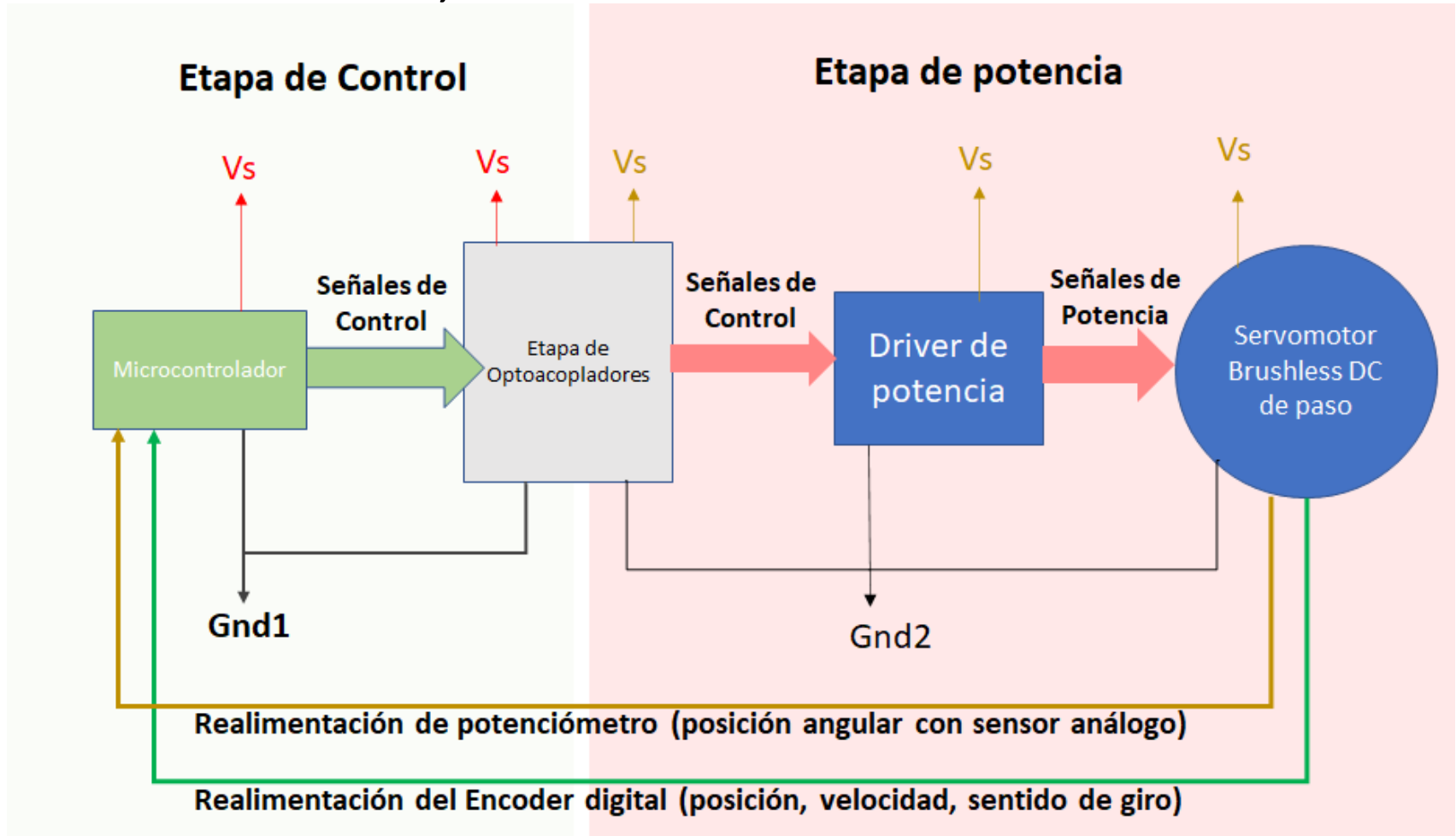


Figura 1. Ejemplo de esquema (gráfico) de control de posición y velocidad, en articulación de robot.

Control Digital

En figura 1 se puede apreciar la introducción de un procesador (microprocesador, computador o microcontrolador), en un lazo de control. El error medido entre la salida y el **Setpoint** (valor de referencia) de la planta, es convertido en valor digital a través de un convertidor análogo/digital (**ADC**), en el instante de muestreo k , definido por el periodo de muestreo T , que a su vez depende de la **frecuencia de procesamiento**: Frecuencia del reloj del sistema, ciclo de instrucción del procesador y ciclo del programa hasta próxima lectura y procesamiento (esto último determina cuál será el mínimo periodo de muestreo al que podría trabajar el sistema).

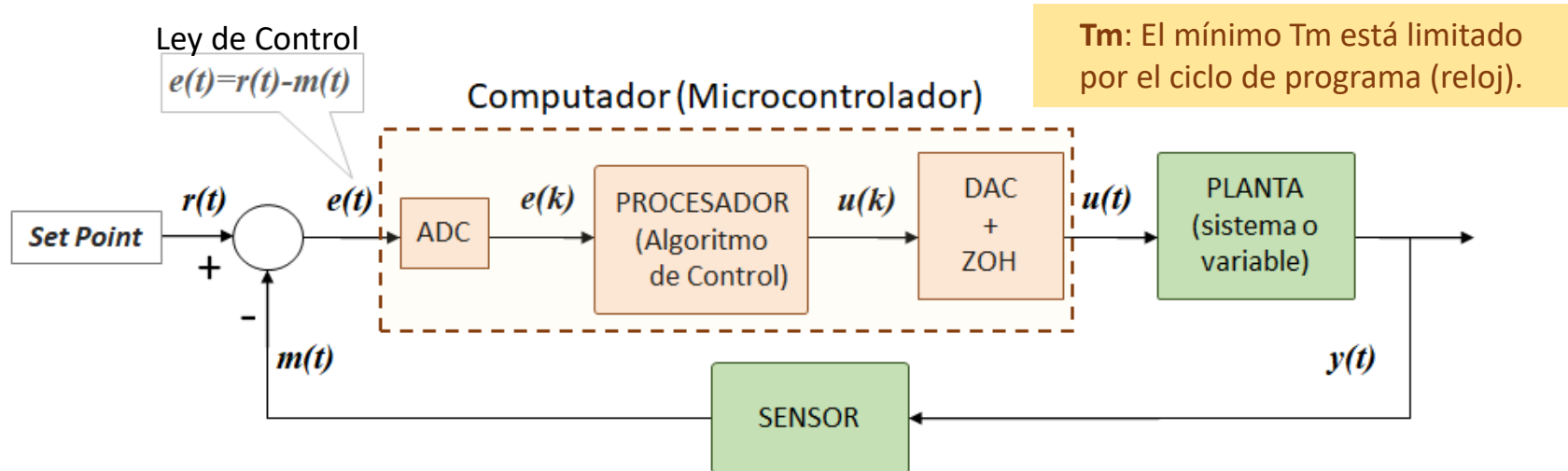


Figura 2. Computador para convertir y procesar señales, en lazo cerrado de control.

Discretización de la variable

El **muestreo** consiste en adquirir los datos procedentes de los sensores (los que leen las variables de interés en la planta), **cada periodo fijo**, denominado **Periodo de Muestreo (T)**.

Convertir los datos análogos adquiridos (cada **T_m**) en sus correspondientes valores binarios (bits, cuya extensión depende del convertidor utilizado), se denomina **digitalización**.

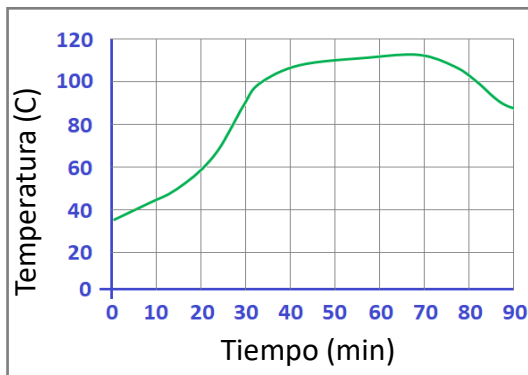
La **cuantización**, por otro lado, consiste en poner esos valores digitales en su correspondientes valores enteros (decimales).

Esos valores digitales, son procesados por un algoritmo de control que se ejecuta dentro del procesador (P, PI, PD, PID u otro), generando un resultado en valor digital, que a la salida es **retenido** y convertido a valor análogo.

El total del proceso anterior, desde la adquisición hasta la generación de un valor digital de salida procedente del algoritmo de control, realizado sobre una **variable análoga (variable en tiempo continuo)**, es denominado: **Discretización (la misma variable, en tiempo discreto)**.

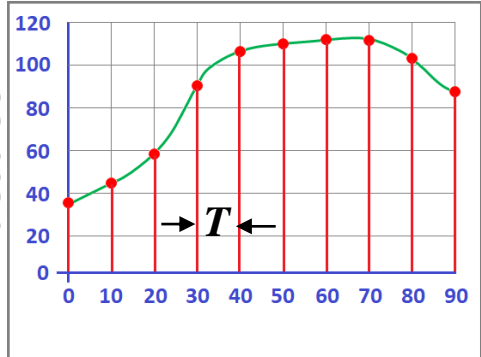
Un ejemplo del proceso de discretización de una variable, se puede apreciar en detalle en la **Figura 3**, para la variable temperatura en tiempo continuo (análoga).

Variable Análoga (Tiempo continuo)

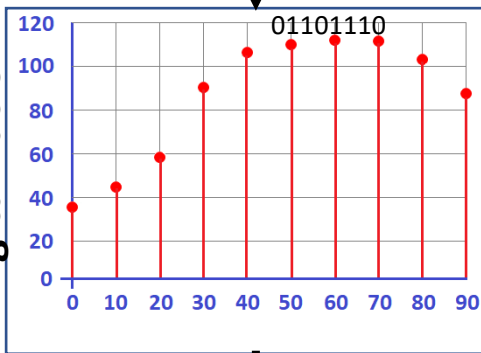


ADC

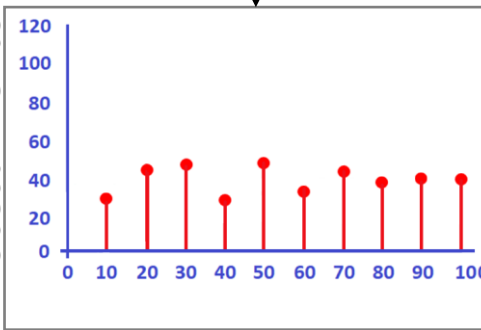
Muestreo



Digitalización



Procesamiento



Setpoint

Discretización de la Variable
(Computador/Microprocesador)

DAC
ZOH

Señal de control (Salida ZOH)

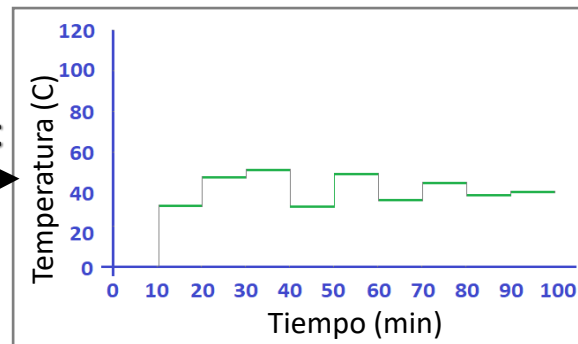


Figura 3. Proceso de discretización de la variable temperatura en proceso de desinfección con autoclave. Fuente [1]. La variable en tiempo continuo (análoga), ingresa al computador (o microcontrolador). Por medio del conversor análogo/digital es **muestreada** (con un periodo T , luego **digitalizada** (valores binarios). El Procesamiento compara el **setpoint** con el valor de la variable y calcula una salida a partir de un **algoritmo de control**. La salida se lleva a un conversor digital/análogo que incluye un retenedor de orden cero (ZOH), para ser finalmente entregada a la planta.

Función de los retenedores en un sistema de control digital

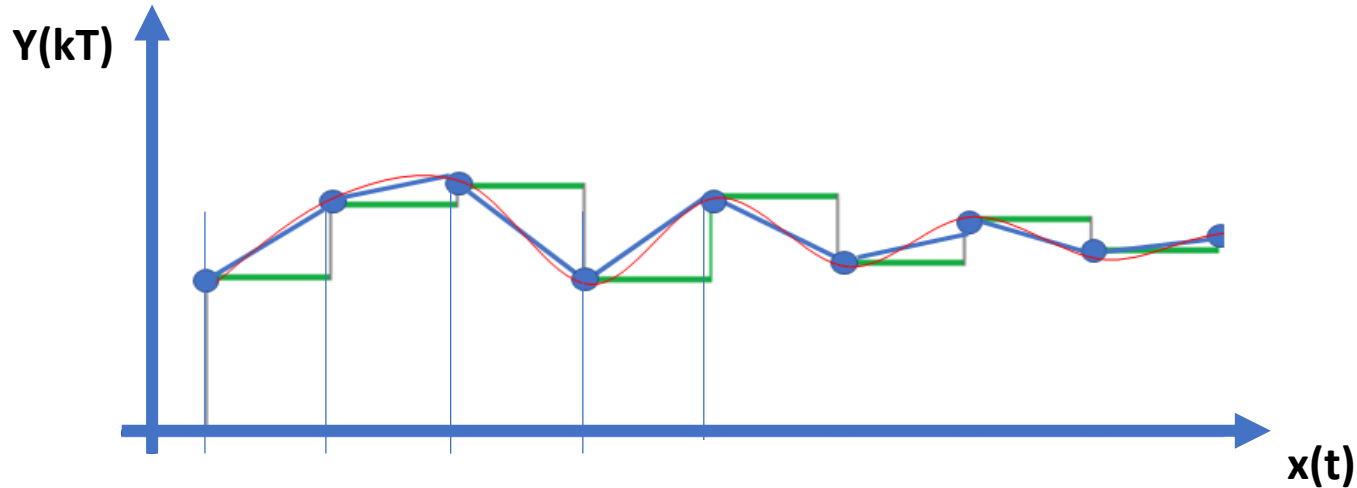


Figura 4. Diferencias entre la aplicación de un retenedor de orden cero (**Zero Order Holder – ZOH**), un retenedor de orden uno (**First Order Holder – FOH**) y de orden superior (**Spline cúbicos**). Estos retenedores se aplican en la salida de la señal digital para entregar el valor a un sistema análogo. Típicamente se realizan cálculos de sistemas de control con retenedores ZOH, debido a la rapidez que su cálculo implica en los controladores digitales, reduciendo a su vez el tiempo en el cual se puede generar acción de control.

Elección del Periodo de Muestreo para señales

En la **figura 5**, se puede apreciar la discretización de una señal senoidal con frecuencia f_0 para diferentes frecuencias de muestreo f_s .

Se puede apreciar que para una frecuencia de muestreo $f_s=8f_0$, la naturaleza continua de la señal análoga no se altera en la señal muestreada.

Para la frecuencia de muestreo $f_s=2f_0$, si el muestreo es llevado a cabo en los instantes $2\pi f_0 t$ o múltiplos de π , una señal muestreada periódica aún se puede obtener.

Sin embargo, si el muestreo se lleva a cabo en los instantes donde $2\pi f_0 t = n\pi$, la secuencia de muestreo correspondiente es idénticamente cero. Si la frecuencia de muestreo se reduce por debajo del límite de $f_s=2f_0$, una señal periódica muestreada aún aparece, pero su frecuencia difiere de la señal continua ($f = f_s - f_0$).

Para reconstruir una señal continua de la secuencia muestreada, la frecuencia de muestreo debe verificar la condición (teorema de Nyquist): $f_s > 2f_{max}$

En la cual f_{max} es la frecuencia máxima a ser transmitida. La frecuencia $f_s=2f_{max}$ es un límite teórico. En la práctica, se debe elegir una frecuencia de muestreo mayor.

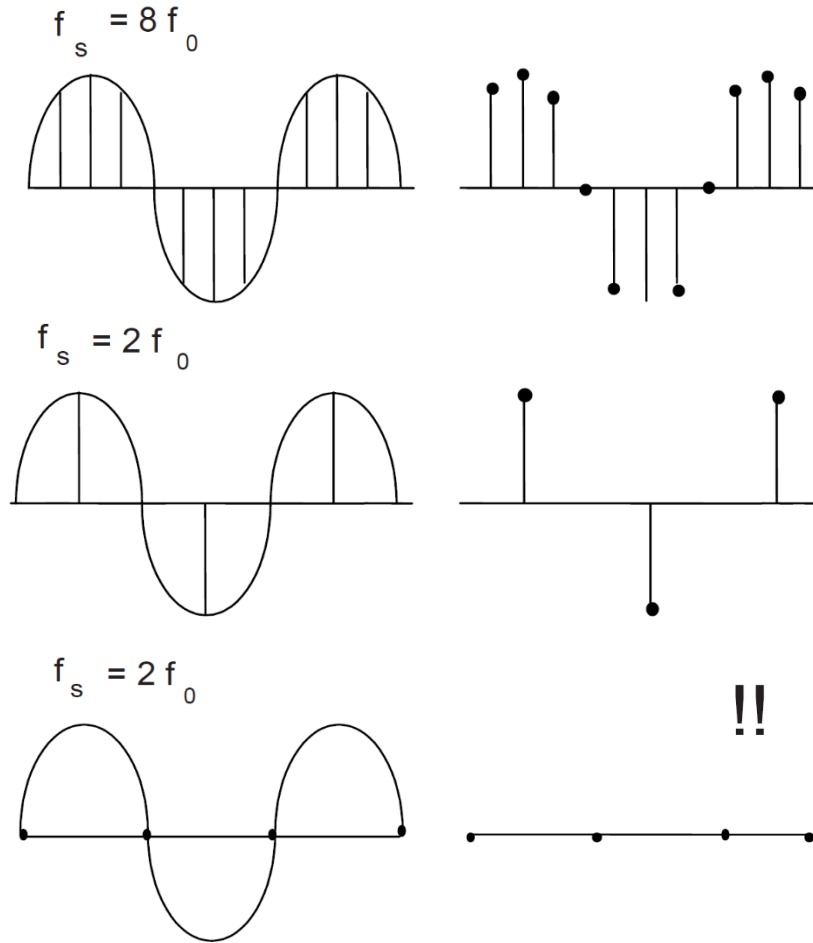


Figura 5. Discretización de señal senoidal. Fuente [2]

Elección del Periodo de Muestreo para señales de Control

El periodo de muestreo para **Sistemas de Control Digital**, es elegido de acuerdo al ancho de banda deseado del Sistema en lazo cerrado. Note que sin importar que tan especificados sean los valores deseados, estos pueden siempre estar relacionados con el ancho de banda del Sistema en lazo cerrado.

Ejemplo:

En la función de transferencia de un Sistema de Segundo orden se tiene:

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2}$$

Donde:

ω_0 : Frecuencia natural en rad/s ($\omega_0 = 2 \pi f_0$)

ζ : Factor de amortiguamiento

Si para un Sistema de Segundo orden en lazo cerrado, se obtiene a $\zeta=0.7$ y $\omega_0=1 \text{ rad/s}$ y a partir del análisis de los diagramas de Bode se obtiene que el ancho de banda del Sistema es aproximadamente igual a: $f_{\text{Bandwidth}}=1/2\pi \text{ Hz}$

Entonces se puede decir que la regla usada para elegir la frecuencia de muestreo en sistemas de control es la siguiente:

$$f_s = (6 \text{ a } 25)f_B$$

Donde: f_s = Frecuencia de muestreo
 f_B = Ancho de banda del Sistema **en Lazo Cerrado**

Para un Sistema de primer orden:

$$H(s) = 1/(\tau s + 1)$$

El ancho de banda del Sistema es: $f_B = f_0 = 1/2\pi * \tau$

Algunos de los periodos de muestreo para el control de variables reales, se pueden apreciar en la tabla 1.

Tabla 1. Elección de periodo de muestreo para sistemas de control digital. Fuente [2]

Type of variable (or plant))	Sampling period (s)
Flow rate	1 – 3
Level	5 – 10
Pressure	1 – 5
Temperature	10 - 180
Distillation	10 - 180
Servo-mechanisms	0.001 - 0.05
Catalytic reactors	10 - 45
Cement plants	20 - 45
Dryers	20 – 45

Por tanto, para **sistemas de primer orden**, se podría decir que el periodo de muestreo se puede calcular según:

$$\tau/4 < T_s < \tau$$

Para **sistemas de segundo orden**, se puede simplificar, asumiendo el análisis para sistemas cuyo factor de amortiguamiento está entre 0,7 y 1:

$$0.7 \leq \zeta \leq 1$$

$$0.25 < \omega_0 T_s < 1.5;$$

OBTENCIÓN DE MODELOS DE SISTEMAS

MODELO TEÓRICO DE UN MOTOR DC

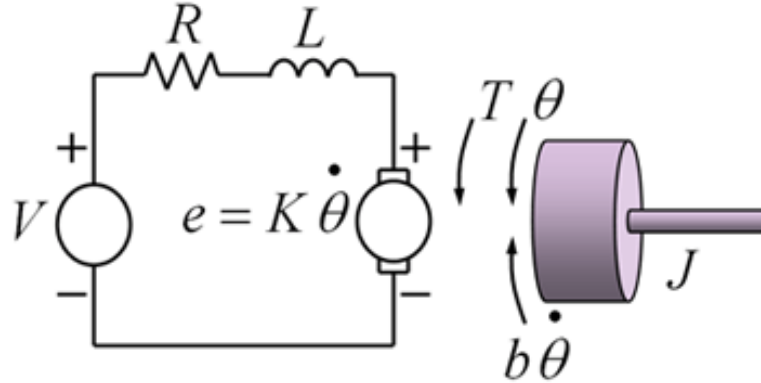


Figura 6. Esquema de motor DC
(imán permanente **PMMC**)

Un actuador común en sistemas de control es el Motor DC. Este tipo de actuador proporciona movimiento rotacional y con el sistema de transmisión adecuado, puede proporcionar movimiento traslacional.

El circuito eléctrico equivalente de la armadura, así como el diagrama de cuerpo libre del rotor, se pueden apreciar en la figura 6.

Para este ejemplo, asumiremos que la entrada del Sistema es el voltaje (V) aplicado a través del conmutador del motor, mientras que la salida es la velocidad rotacional del eje ($\dot{\theta}$). Se asume que tanto el rotor como el eje son rígidos. Además, se asume un modelo con fricción viscosa, es decir, que el torque de fricción es proporcional a la velocidad angular del eje.

Los parámetros físicos para este ejemplo son:

- (J) : Momento de inercia del rotor = $0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- (b) : Constante de fricción viscosa del motor = $0.1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$
- (Ke) : Constante de fuerza electromotriz = 0.01 V/rad/sec
- (Kt) : Constante de torque del motor = 0.01 N.m/Amp
- (R) : Resistencia eléctrica = 1 Ohmio
- (L) : Inductancia eléctrica = 0.5 H

Ecuaciones del Sistema

En general, el torque generado por un Motor DC, es proporcional a la corriente de armadura y la fuerza del campo magnético. En este ejemplo, asumiremos que el campo es constante y por lo tanto, que el torque del motor es solamente proporcional a la corriente de la armadura (i) por medio de una constante K_t , tal como se presenta a continuación.

$$\tau = K_t * I \quad (1)$$

La fuerza contraelectromotriz e , es proporcional a la velocidad angular el eje por medio de una constante K_e :

$$e = K_e * \dot{\theta} \quad (2)$$

En Sistema internacional las unidades del torque y la fuerza contraelectromotriz son iguales, por tanto, se usará **K** para representar ambas constantes:

$$K_t = K_e$$

por tanto:

$$\tau = K i$$

$$e = K \dot{\theta}$$

Aplicando la segunda ley de Newton y la ley de voltajes de Kirchhoff, a las ecuaciones anteriores:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = K i \quad (3)$$

$$L(di/dt) + Ri = V - K\dot{\theta} \quad (4)$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados, tenemos:

$$s(Js + b) \dot{\theta}(S) = K * I \quad (5)$$

$$(LS + R) I(S) = V(S) - KS * I \quad (6)$$

$$s(Js + b)\theta(s) = KI(s) \quad (7)$$

$$(Ls + R)I(S) = V(s) - Ks\theta(s) \quad (8)$$

Operando las dos ecuaciones, eliminamos $I(S)$ y relacionamos la salida del sistema con su entrada (velocidad angular/Voltaje aplicado):

$$P(s) = \frac{\dot{\theta}(S)}{V(s)} = \frac{K}{(Js+b)(Ls+R)+K^2} \quad [(rad/seg)/voltios]$$

Referencias

- [1] Combinación de alta presión con temperatura para la inactivación de microorganismos esporulados a temperaturas intermedias (90-100 °C). Canales sectoriales, Interempresas.
<https://www.interempresas.net/Alimentaria/Articulos/126821-Combinacion-alta-presion-temperatura-inactivacion-microorganismos-esporulados.html>
- [2] Landau, I. D., & Zito, G. (2007). *Digital control systems: design, identification and implementation*. Springer Science & Business Media.
- [3] Ogata, K. (2006). Discrete Control Systems.
- [4] DC Motor Speed: System Modeling.
<https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=MotorSpeed§ion=SystemModeling>