SISTEMAS DE CONTROL EN ROBÓTICA

Notas de Clase

Mauricio Arias Correa

Medellín, 2020

Función de Transferencia de Pulso

Recordemos cómo se obtiene la TRANSFORMADA Z MODIFICADA:

Sea: $\theta' = NT + \theta$

Donde T es el periodo de muestreo y N es la parte entera del cociente:

$$N = \theta' / T$$

Si el retardo es 2.8 segundos, y el muestreo es T=1 segundo, entonces N será igual a 2, por ser la parte entera.

T=0,005S

En Kantidad de periodos de muestreo, el quinto periodo, será: K=5

Para K=5; T=0,005

Y el tiempo total transcurrido: 25mS

Aplicando propiedades de la Transformada Z:

$$\boxed{G_p(z) = \Im\{G(S)e^{-(NT+\theta)S}\}}$$

Por tanto: $$G_p(z) = z^{-N}\Im\{G(S)e^{-\theta S}\}$$

El término: $\boxed{\Im\{G(S)e^{-\theta S}\}}$, se define como la ***Transformada Z modificada de G(S)***

Y se denota por: $$\Im_m\{G(S)\} = G(z,m)$$

Entonces: $$G_p(z) = z^{-N}\Im_m\{G(S)\} = z^{-N}G(z,m)$$

Donde: $$m = 1 - \frac{\theta}{T}$$

Tabla de Transformada Z modificada

Nº	$f(t)$	$F(kT)$	$F(S)$	$F(z)$ Modificada
1	$u(t)$	$U(kT)$	$\frac{1}{S}$	$\frac{1}{z-1}$
2	t	kT	$\frac{1}{S^2}$	$\frac{mT}{z-1}-\frac{T}{(z-1)^2}$
3	t^2	$(kT)^2$	$\frac{2}{S^3}$	$T^2\left[\frac{m^2}{z-1}+\frac{2m+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}\right]$
4	t^{n-1}	$(kT)^{n-1}$	$\frac{(n-1)!}{S^n}$	$\lim_{a\to 0}(-1)^{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right]$
5	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{S+a}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
6	te^{-at}	$(kT)e^{-akT}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Te^{-amT}[e^{-aT}+m(z-e^{-aT})]}{(z-e^{-aT})^2}$
7	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{a}{S(S+a)}$	$\frac{1}{z-1}-\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
8	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{a^2}{S^2(S+a)}$	$\frac{aT}{(z-1)^2}+\frac{amT-1}{z-1}+\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$

Tabla de Transformada Z modificada

9	$1-(1+at)e^{-at}$	$1-(1+akT)e^{-akT}$	$\frac{a^2}{S(S+a)^2}$	$\frac{1}{z-1}-\left[\frac{1+amT}{z-e^{-aT}}+\frac{aTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}\right]$
10	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{b-a}{(S+a)(S+b)}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}-\frac{e^{-bmT}}{z-e^{-bT}}$
11	$sin(bt)$	$sin(bkT)$	$\frac{b}{S^2+b^2}$	$\frac{z.sin(bmT)+sin(1-m)bT}{z^2-2zcos(bT)+1}$
12	$cos(bt)$	$cos(bkT)$	$\frac{S}{S^2+b^2}$	$\frac{z.cos(bmT)-cos(1-m)bT}{z^2-2zcos(bT)+1}$
13	$e^{-at}sin(bt)$	$e^{-akT}sin(bkT)$	$\frac{b}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{[z.sin(bmT)+e^{-aT}sin(1-m)bT]e^{-amT}}{z^2-2ze^{-aT}cos(bT)+e^{-2aT}}$
14	$e^{-at}cos(bt)$	$e^{-akT}cos(bkT)$	$\frac{S+a}{(S+a)^2+b^2}$	$\frac{[z.cos(bmT)+e^{-aT}sin(1-m)bT]e^{-amT}}{z^2-2ze^{-aT}cos(bT)+e^{-2aT}}$

Ejemplo: Asumiendo un periodo de muestreo: ***T=1 seg***

Hallar la transformada Z de: $$G_p(S) = \frac{5e^{-1.3S}}{(S+3)^2}$$

Solución:

$$N = \frac{\theta'}{T} = \frac{1.3}{1} = \boxed{1}$$

Parte entera del resultado

$$\theta = \theta' - NT = 1.3 - 1 = 0.3$$

$$m = 1 - \frac{\theta}{T} = 1 - \frac{0.3}{1} = \boxed{0.7}$$

Parte que se modifica

Aplicando: $G_p(z) = z^{-N}\Im_m\{G(S)\} = z^{-N}G(z,m)$

Con ***N=1*** y con: $G(S) = 5/(S+3)^2$

Utilizando tablas de transformada Z modificada a G(S):

$$\boxed{\Im\left\{\frac{1}{(S+a)^2}\right\} = \frac{Te^{-amT}[e^{-aT} + m(z - e^{-aT})]}{(z - e^{-aT})^2}}$$

$$G_p(z) = z^{-1}\Im_m\left\{\frac{5}{(S+3)^2}\right\} = \boxed{\frac{5 * 0.12245[0.04978 + 0.7(z - 0.04978)]}{(z - 0.04978)^2}}$$

Simplificando la ecuación: $G_p(z) = \dfrac{0.42857(z + 0.02133)}{(z - 0.04978)^2}$

Este procedimiento, meramente operativo, podrá ser utilizado para obtener una FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO.

Función de Transferencia de Pulso

En un sistema discreto, la **función de transferencia de pulso** relaciona la salida pulsante con la entrada pulsante del sistema (las señales muestreadas, también se conocen como señales pulsantes y por conveniencia se trabajan en términos de Z).

La función de transferencia de pulso para un sistema con entrada X(Z) y salida Y(Z), será:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

En la figura 1, se tiene un sistema continuo con muestreador a la entrada.

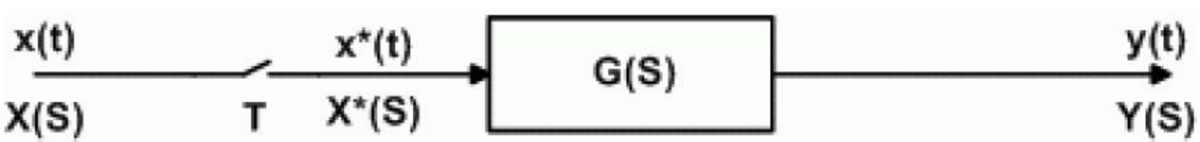


Figura 1. Sistema continuo con muestreador.

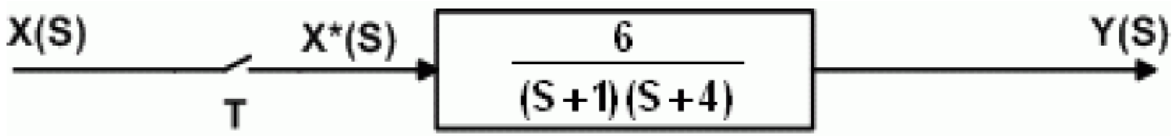
La salida del sistema de la figura 1, está dada por: $Y(S) = G(S)X^*(S)$

En donde: $$X^*(S) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTS}$$

Para hallar la Función de Transferencia de Pulso (FTP), se puede seguir el siguiente procedimiento:

- Se obtiene la función de transferencia ***G(S)*** del sistema.
- Se expande ***G(S)*** en fracciones parciales de modo que en la tabla se pueda encontrar la transformada ***Z*** de cada uno de los términos obtenidos en la expansión de las fracciones parciales.
- La suma algebraica de los términos de la transformada hallados, da como resultado la **función de transferencia de pulso**.

Ejemplo de obtención de la **Función de Transferencia de Pulso**.



La función de transferencia para el sistema continuo es: $G(S) = \dfrac{Y(S)}{X(S)} = \dfrac{6}{(S+1)(S+4)}$

Se expande en fracciones parciales y el resultado es: $G(S) = \dfrac{Y(S)}{X(S)} = \dfrac{2}{S+1} - \dfrac{2}{S+4}$

Luego, por tablas de transformada Z, se obtiene: $\Im\left\{\dfrac{2}{S+1}\right\} = \dfrac{2z}{z-0.60653}$; $\Im\left\{\dfrac{2}{S+4}\right\} = \dfrac{2z}{z-0.13533}$

Por tanto, la **función de transferencia de pulso** para el sistema será:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2z}{z-0.60653} - \frac{2z}{z-0.13533} = \frac{0.94239z}{(z-0.60653)(z-0.13533)}$$

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO DE SISTEMA CON ZOH

Un esquema general para un sistema con muestreador y retenedor de orden cero se presenta en la figura 2:

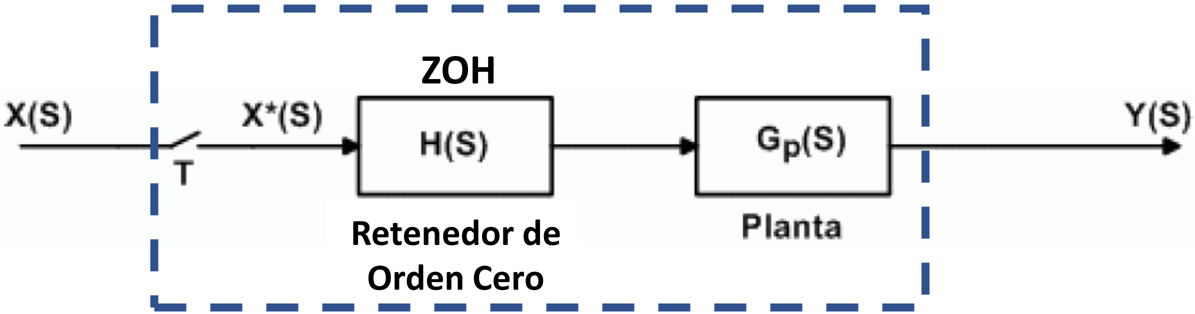


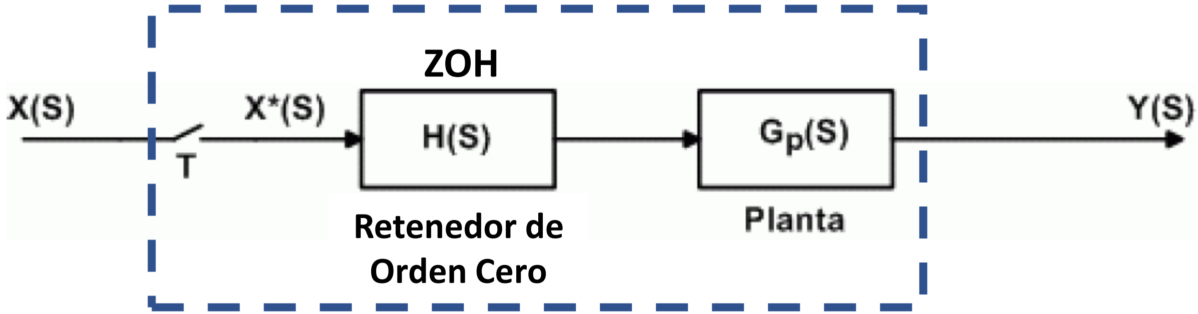
Figura 2. Sistema continuo con retenedor y muestreador.

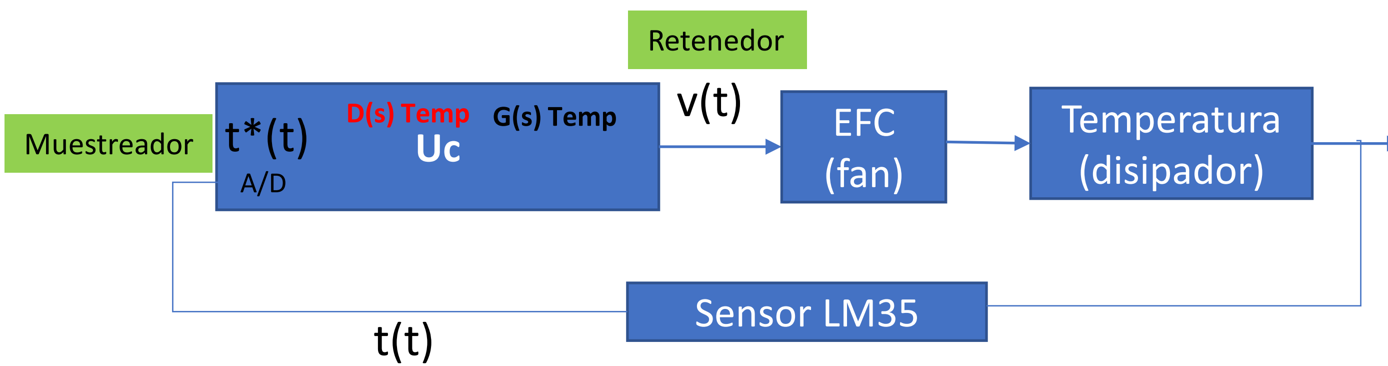
La forma de la función de transferencia de pulso para el sistema de la figura 2, será:

$$HG(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \Im\{H(S)G_p(S)\} \quad (1)$$

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO DE SISTEMA CON ZOH

El esquema de la figura 2, se puede implementar en el "mundo real", utilizando dispositivos de control digital y considerando que el muestreador tiene una función básica: DIGITALIZAR una señal, mientras que el retenedor, mantiene una señal a la salida del dispositivo de control durante un periodo de muestreo.





Muestreamos cada segundo, por tanto T=1s.

La función de transferencia del retenedor de orden cero es:

$$H(S) = \frac{1 - e^{-ST}}{S}$$

Reemplazando en (1):

$$HG(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \Im\left\{\frac{1 - e^{-ST}}{S} G_p(S)\right\} = \Im\left\{(1 - e^{-ST})\frac{G_p(S)}{S}\right\} \qquad (2)$$

$$HG(z) = \Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} - \Im\left\{\frac{G_p(S)}{S} e^{-ST}\right\} = \Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} - z^{-1}\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} \qquad (3)$$

Luego: La FTP para un sistema con retenedor de orden cero, será:

$$HG(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \Im\{H(S)G_p(S)\} \longrightarrow \boxed{HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\}} \quad (4)$$

Ejemplo de cálculo de FTP con ZOH:

A continuación hallaremos la FTP para la planta de la figura 3, tomando como periodo de muestreo a ***T=1s*** y que el retenedor es ***ZOH***.

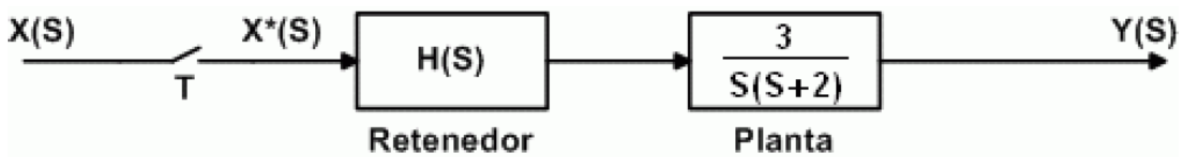


Figura 3. Planta con Retenedor de Orden Cero (ZOH)

La forma de la función de transferencia de pulso para el sistema, está dada por:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G(S)}{S}\right\}$$

Donde:

$$G(S) = \frac{3}{S(S+2)}$$

Por tanto:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{3}{S^2(S+2)}\right\}$$

Deberemos utilizar entonces, tablas de transformada Z, para la forma de la ecuación resultante.

Por tablas de transformada Z, se obtiene:

$$\Im\left\{\frac{a^2}{S^2(S+a)}\right\} = \frac{[(aT-1+e^{-aT})z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]z}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$$

Con ***a=2*** y ***T=1*** segundo, El resultado será:

$$HG(z) = \frac{0.75(1.13533z+0.59401)}{(z-1)(z-0.13533)} = \frac{0.8549(z+0.5232)}{(z-1)(z-0.13533)}$$

Cálculo de FTP con ZOH, usando MATLAB:

Si queremos obtener resultados de la Función de Transferencia de Pulso, utilizando MATLAB para la función anterior, debemos aplicar los siguientes comandos:

```
% Discretización utilizando ZOH y comparación con FOH
clear all; clc

% Para una función con retardo de 1 segundo y con periodo de muestreo T=0.1
G = tf([1 -2],[1 3 20],'inputdelay',1);
Ts = 0.1;   % Intervalo de muestreo

% Discretización con retenedor de orden cero (ZOH) -por defecto-
Gz = c2d(G,Ts)

% Aplicamos el retenedor de orden uno (First Order Hold), a través de las opciones del comando c2d
opt1=c2dOptions('Method','foh');
Gf = c2d(G,Ts, opt1) %retenedor de primer orden

% Graficamos las funciones discretas obtenidas y comparamos:
step(G, 'g', Gz,'b', Gf,'r’); grid;
legend('Continuos', 'Discretized ZOH', 'Discretized FOH')
```

La FTP obtenida, con ZOH, será:

```
Gz =

                0.07462 z - 0.09162
  z^(-10) * ----------------------
              z^2 - 1.571 z + 0.7408

Sample time: 0.1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

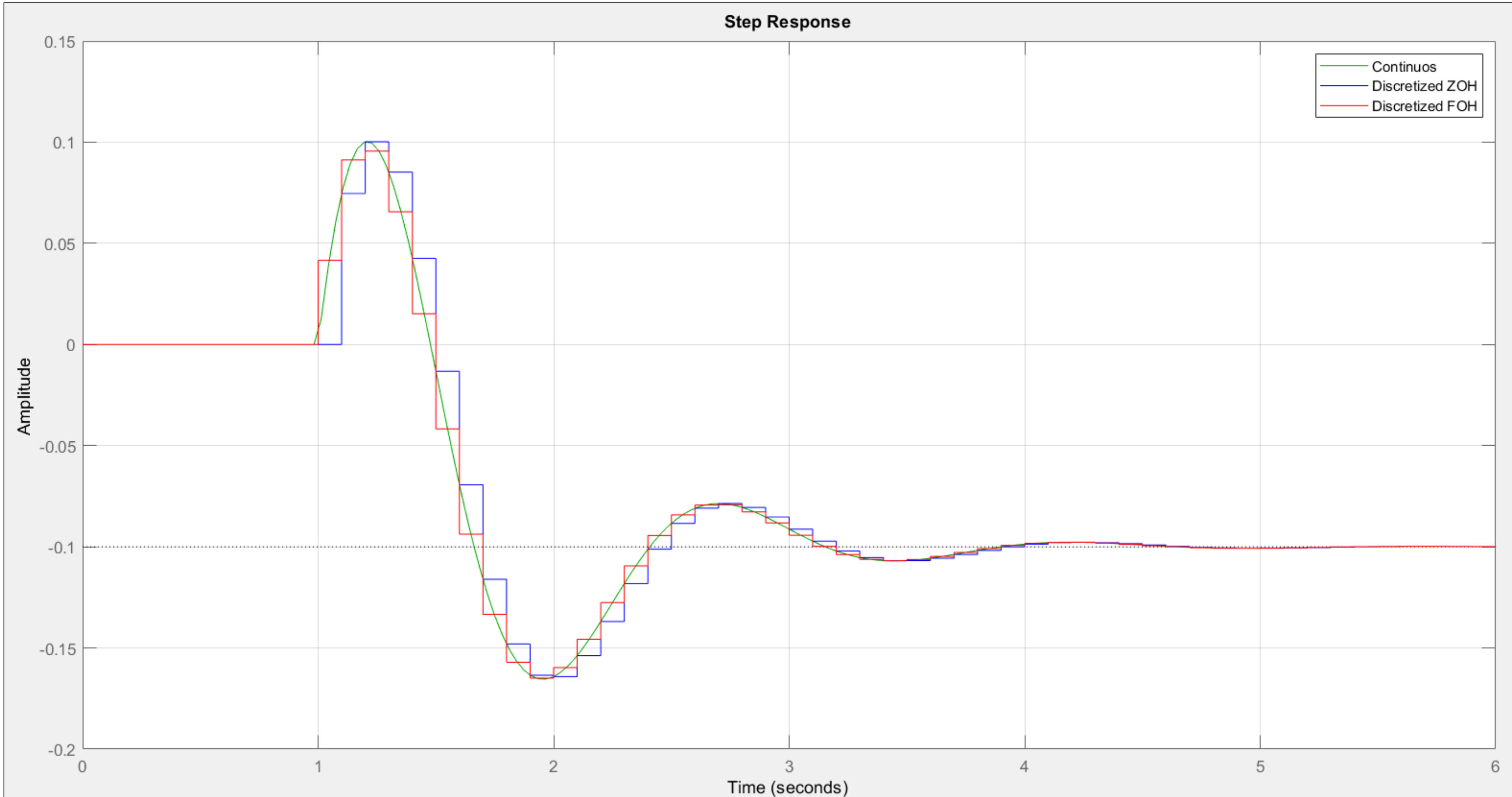
La FTP obtenida, con FOH:

```
Gf =

              0.04155 z^2 - 0.01556 z - 0.04299
  z^(-10) * ---------------------------------
                   z^2 - 1.571 z + 0.7408

Sample time: 0.1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

Observe que al aumentar el orden del retenedor, se aumenta el orden de la FTP obtenida en el numerador.

¿Porqué sucede esto?; ¿cuál es la Función de transferencia de un retenedor de primer orden?

Las comparación de las gráficas nos permiten establecer la similitud de las señales reconstruidas con retenedor ZOH y con retenedor FOH.



¿Qué sucede cuando se hace menor el periodo de muestreo?

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO PARA UN SISTEMA EN LAZO CERRADO.

La figura 3 muestra el diagrama en bloques de un sistema de control digital en lazo cerrado. En este tipo de casos, todas las funciones de transferencia (dinámicas del sistema) son significativas.

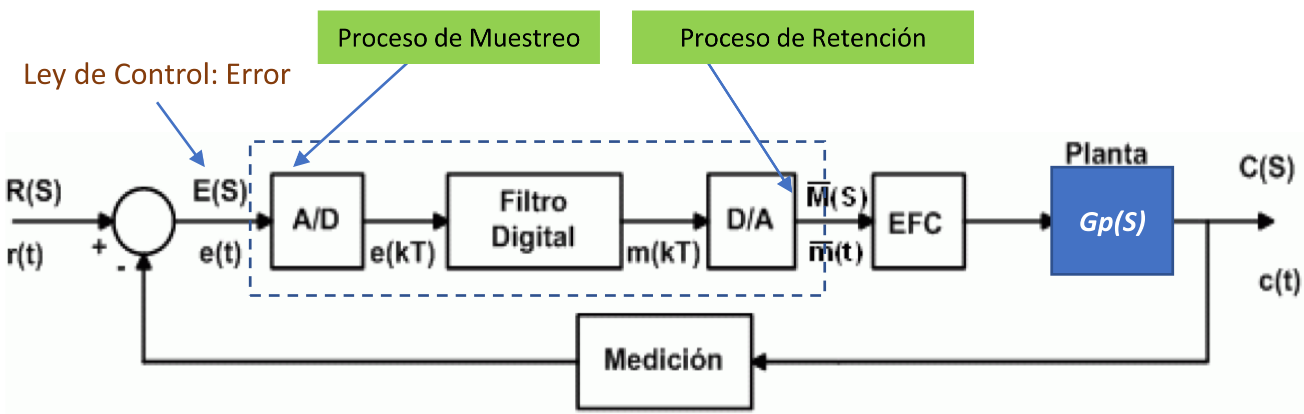


Figura 3. Diagrama de bloques de un sistema de control en lazo cerrado.

Sin embargo, cuando el modelo del sistema ha sido adquirido experimentalmente, la función de transferencia del proceso, incluye la dinámica del ***elemento final de control*** y la del ***sistema de medición***, por tanto el diagrama se simplifica (figura 4).

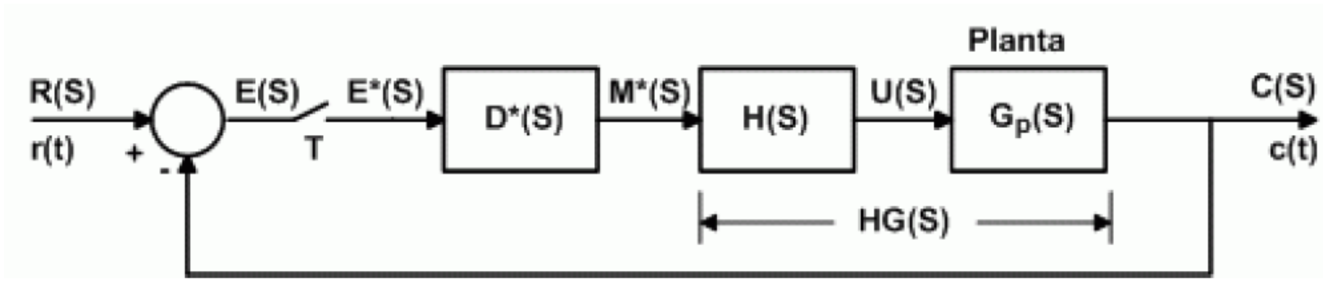


Figura 4. Diagrama de bloques de un sistema de control en lazo cerrado, simplificado (a partir de la obtención experimental del modelo) de la planta.

El diagrama de bloques se expresará como:

$$HG(S) = H(S)G_p(S)$$

$$C(S) = HG(S)D^*(S)E^*(S)$$

$$C^*(S) = HG^*(S)D^*(S)E^*(S)$$

Y en términos de transformada Z:

$$C(z) = HG(z)D(z)E(z)$$

$$E(z) = R(z) - C(z)$$

$$C(z) = HG(z)D(z)[R(z) - C(z)]$$

Por tanto la función de transferencia de pulso del sistema en lazo cerrado será:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)}$$

Donde:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$ Con ZOH

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-N}\Im_m\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$ Si el sistema presenta retardo.

Ejercicio

Para el sistema de control discreto mostrado en la figura 5, hallar la **función de transferencia de pulso** en lazo cerrado.

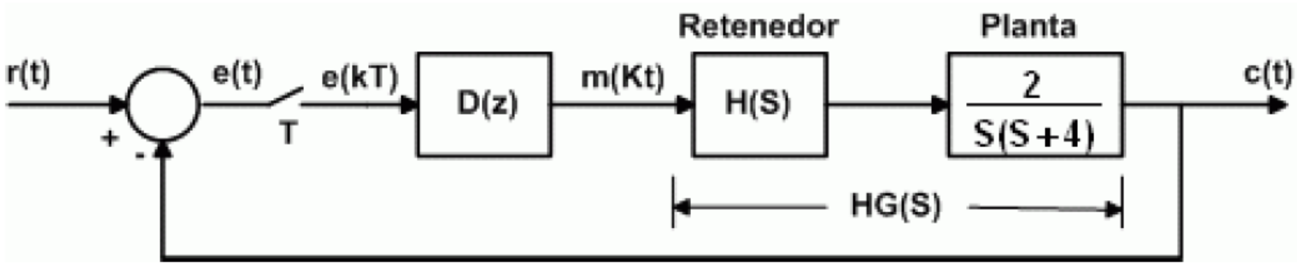


Figura 5. Diagrama de bloques de un sistema de control en lazo cerrado (simplificado).

Asuma que el periodo de muestreo es **T=1s** , que ***H(s)*** es un retenedor de orden cero y que ***D(z)*** es un controlador digital con función de transferencia:

$$D(z) = \frac{1.5z - 1.2}{z - 1}$$

La función de transferencia de pulso para el sistema planta-retenedor está dada por la ecuación:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{2}{S^2(S+4)}\right\}$$

De tablas: $$\Im\left\{\frac{a^2}{S^2(S+a)}\right\} = \frac{[(aT - 1 + e^{-aT})z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})]z}{(z-1)^2(z - e^{-aT})}$$

Con ***T=1s*** y ***a=4***, se obtiene (después de simplificar)

$$HG(z) = \frac{0.37728(z + 0.30096)}{(z-1)(z - 0.01831)}$$

La función de transferencia del sistema en lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)}$$

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\frac{0.37728(z+0.30096)}{(z-1)(z-0.01831)} * \frac{(1.5z-1.2)}{z-1}}{1 + \frac{0.37728(z+0.30096)}{(z-1)(z-0.01831)} * \frac{(1.5z-1.2)}{z-1}}$$

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.37728(z+0.30096)(1.5z-1.2)}{z^3 - 1.45238z^2 + 0.75421z - 0.15457}$$

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.37728(z+0.30096)(1.5z-1.2)}{(z-0.67298)(z^2 - 0.77939z + 0.22969)}$$

Actividad Independiente

Para el sistema de control discreto mostrado en la figura 6, hallar la **función de transferencia de pulso** en lazo cerrado.

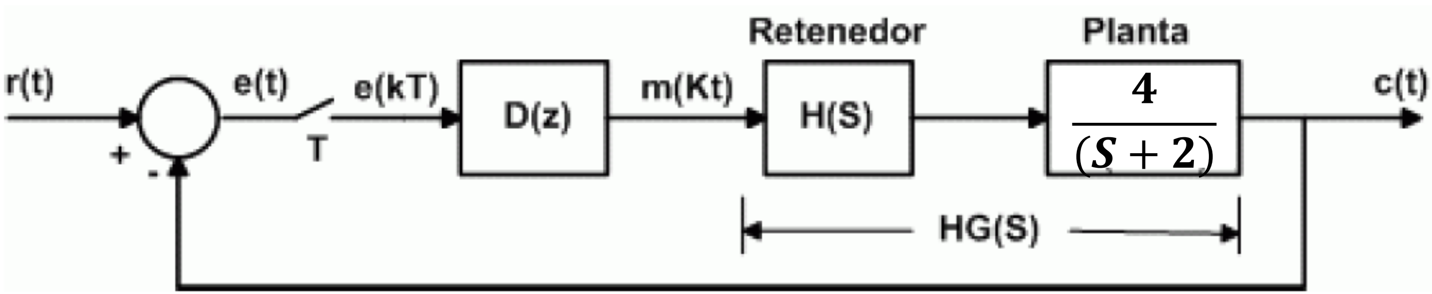


Figura 6. Diagrama de bloques de un sistema de control en lazo cerrado (simplificado).

Asuma que el periodo de muestreo es **T=2s** , el retardo de la planta es de 3,2s; tiene un retenedor de orden cero ***H(s)*** y que ***D(z)*** es un controlador digital con función de transferencia:

$$D(z) = \frac{1.5z - 1.2}{z - 1}$$