SISTEMAS DE CONTROL EN ROBÓTICA

por
Mauricio Arias Correa

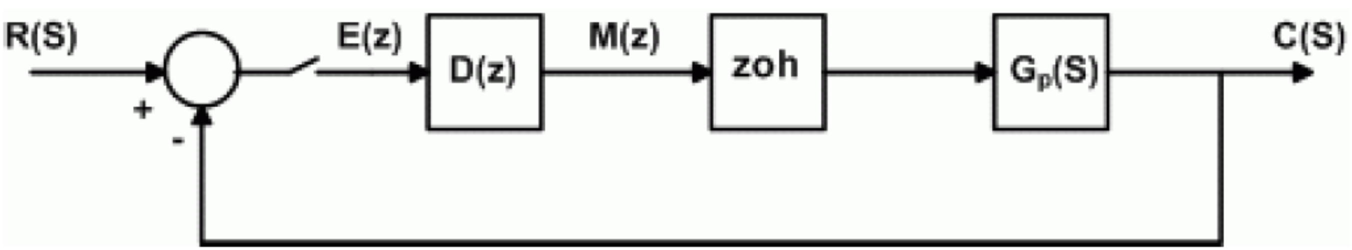
Medellín, Mayo 2018

SISTEMAS DE CONTROL EN ROBÓTICA

SESIÓN 7
CONTROLADOR DEADBEAT

Controlador DeadBeat de Orden Normal

“oscilaciones muertas”, se caracteriza porque con él, ante un cambio en escalón en la variable de referencia, la salida del sistema alcanza un nuevo estado de equilibrio al cabo de un tiempo de establecimiento finito definido, con error de estado estable igual a cero.



Para el sistema de control de la figura 1, la función de transferencia de pulso es:

$$HG(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_m z^{-m}} * z^{-n} \qquad (1)$$

y se asume que el cambio en la entrada es:

$$r(k) = 1 \qquad k = 0, 1, 2 \cdots \tag{2}$$

1. Para sistemas sin tiempo muerto

tiempo de establecimiento mínimo es:

$$c(k) = r(k) \qquad \text{Para} \quad k \geq m$$
$$m(k) = m(m) \qquad \text{Para} \quad k \geq m \tag{3}$$

La transformada z de la señal de referencia $r(k)$, la variable controlada $c(k)$ y la variable manipulada $m(k)$ son respectivamente:

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{4}$$

$$C(z) = c(1)z^{-1} + c(2)z^{-2} + \cdots 1\left[z^{-m} + z^{-(m+1)} + \cdots\right] \tag{5}$$

$$M(z) = m(0) + m(1)z^{-1} + \cdots m(m)\left[z^{-m} + z^{-(m+1)} + \cdots\right] \tag{6}$$

Dividiendo la ecuación (5) entre la ecuación (4) se obtiene:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots p_m z^{-m} = P(z) \qquad (7)$$

En donde:

$$p_1 = c(1) \qquad p_2 = c(2) \qquad \cdots \qquad p_m = 1 - c(m-1) \qquad (8)$$

Dividiendo la ecuación (6) entre la ecuación (4) se obtiene:

$$\frac{M(z)}{R(z)} = q_o + q_1 z^{-1} + \cdots q_m z^{-m} = Q(z) \qquad (9)$$

En donde:

$$q_o = m(0) \qquad q_1 = m(1) - m(0) \qquad \cdots \qquad q_m = m(m) - m(m-1) \qquad (10)$$

Se debe tener en cuenta que:

$$p_1 + p_2 + \cdots p_m = 1 \qquad (11)$$

$$q_0 + q_1 + \cdots q_m = m(m) = \frac{1}{K} = \frac{1}{GH(1)} \qquad (12)$$

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)} \qquad (13)$$

el controlador $D(z)$ es:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1}{HG(z)} * \frac{G_w(z)}{1 - G_w(z)}$$

Comparando (13) y (7)

$$G_w(z) = P(z) \qquad (14)$$

Además, de las ecuaciones (7) y (9) se deduce que:

$$HG(z) = \frac{C(z)}{M(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Por lo tanto, la ecuación del controlador Deadbeat de orden normal es:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} \qquad (15)$$

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \cdots p_m z^{-m}} \qquad (16)$$

En donde:

$$q_0 = \frac{1}{\sum b_i} = \frac{1}{b_1 + b_2 + \cdots b_m}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 q_0 & p_1 &= b_1 q_0 \\ q_2 &= a_2 q_0 & p_2 &= b_2 q_0 \\ &\cdots & &\cdots \\ q_m &= a_m q_0 & p_m &= b_m q_0 \end{aligned} \qquad (17)$$

Deadbeat de orden normal se puede escribir así:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1 - q_0 B(z^{-1})} \qquad (18)$$

Con este tipo de controlador, la función de transferencia de lazo cerrado del sistema bajo control está dada por:

$$G_w(z) = P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots p_m z^{-m}$$

$$G_w(z) = \frac{p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \cdots p_m}{z^m} \qquad (19)$$

La ecuación característica es, por lo tanto:

$$1 + D(z)HG(z) = z^m = 0 \qquad (19)$$

2. Para sistemas con tiempo muerto

se puede escribir en la forma:

$$HG(z) = \frac{b_1 z^{-(1+n)} + b_2 z^{-(2+n)} + \cdots b_m z^{-(m+n)}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \cdots + a_m z^{-m}} \qquad (20)$$

En estas condiciones, el requisito para tiempo de establecimiento mínimo es:

$$\begin{aligned} &c(k) = r(k) = 1 \qquad &\text{Para} \quad k \geq m + n \\ &m(k) = m(m) \qquad &\text{Para} \quad k \geq m \end{aligned} \qquad (21)$$

este requisito se cumple con un controlador tipo Deadbeat de la forma:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots q_m z^{-m}}{1 - p_{1+n} z^{-(1+n)} - \cdots p_{m+n} z^{-(m+n)}} \qquad (22)$$

En donde:

$$q_0 = \frac{1}{\sum b_i} \qquad p_1 = p_2 = \cdots p_n = 0$$

$$q_1 = a_1 q_0 \qquad p_{1+n} = b_1 q_0$$

$$q_2 = a_2 q_0 \qquad p_{2+n} = b_2 q_0 \qquad (23)$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$q_m = a_m q_0 \qquad p_{m+n} = b_m q_0$$

A partir de las ecuaciones (22) y (23) e incluyendo el tiempo muerto en $B(z^{-1})$ se puede reescribir la ecuación del controlador Deadbeat para sistemas con tiempo muerto, en la siguiente forma:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1 - q_0 B(z^{-1})} \qquad (24)$$

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema con el controlador representado por la ecuación (24) es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = q_0 B(z^{-1}) z^{-n} = \frac{q_0 B'(z)}{z^{(m+n)}} \quad (25)$$

La ecuación característica del sistema es: (25)

$$1 + D(z)HG(z) = z^{(m+n)} = 0$$