SISTEMAS DE CONTROL EN ROBÓTICA

Notas de Clase

Mauricio Arias Correa

Medellín, 2021

Transformada Z

Cálculos

Retomemos la transformada Z a partir de la aplicación de sus tablas:

Para la función de transferencia: $X(S) = \dfrac{4}{S(S+4)}$

La **transformada Z**, se obtiene expandiendo X(S) en fracciones parciales y aplicando las tablas de transformada Z a esas funciones más simples.

$$X(S) = \frac{4}{S(S+4)} = \frac{1}{S} - \frac{1}{S+4}$$

Por tablas:

$u(t)$	$u(kT)$	$\frac{1}{S}$	$\frac{z}{z-1}$
e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{S+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$

$$\Im\left\{\frac{1}{S}\right\} = \frac{z}{z-1} \quad ; \quad \Im\left\{\frac{1}{S+4}\right\} = \frac{z}{z-e^{-4T}}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-4T}} = \frac{(1-e^{-4T})z}{(z-1)(z-e^{-4T})}$$

Propiedades de la Transformada Z

Multiplicación por una constante. Si ***X(Z)***, es la transformada Z de ***x(t)***, entonces:

$$\Im\{ax(t)\} = a\Im\{x(t)\} = aX(z)$$

Demostración:

$$\Im\{ax(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} ax(kT)z^{-k} = a\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = aX(z)$$

Propiedad de Linealidad. Si ***X(Z)***, es la transformada Z de ***x(t)*** e ***Y(Z)***, es la transformada Z de ***y(t)*** entonces:

$$\Im\{ax(t) + by(t)\} = aX(z) + bY(z)$$

Demostración:

$$\Im\{ax(t) + by(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{ax(kT) + by(kT)\}\, x^{-k} = a\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} + b\sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k}$$

$$\Im\{ax(t) + by(t)\} = aX(z) + bY(z)$$

Propiedades de la Transformada Z

Multiplicación por a^k. Si ***X(Z)***, es la transformada Z de ***x(t)***, entonces:

$$\Im\{a^k x(t)\} = X\left(\frac{Z}{a}\right)$$

Demostración:

$$\Im\{a^k x(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\left(\frac{Z}{a}\right)^{-k} = X\left(\frac{Z}{a}\right)$$

Propiedad de Traslación. Si ***X(Z)***, es la transformada Z de ***x(t)*** y que ***x(t)=0*** para $t < 0$, entonces:

$$\Im\{x(t-nT)\} = z^{-n}X(z)$$

$$\Im\{x(k+n)\} = z^n X(z) - z^n x(0) - z^{n-1}x(T) - \cdots zx\big((n-1)T\big)$$

$$\Im\{x(t+nT)\} = z^n\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right]$$

Siendo n= 1, 2, 3…

Demostración:

Se tiene que

$$\Im\{x(t-nT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT)z^{-k} = z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} x[T(k-n)]\, z^{-(k-n)}$$

Haciendo K-n=m, se tiene:

$$\Im\{x(t-nT\} = z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} x[(mT)]\, z^{-m} = z^{-n}X(z)$$

Ejemplo

Hallar la transformada Z de la función: ***x(t)=4u(t-3T)***

Solución: Se aplica la propiedad de traslación y la propiedad de multiplicación por una constante.

$$X(z) = \Im\{4u(t-3T)\} = 4\Im\{u(t-3T)\} = 4z^{-3}\Im\{1\}$$

$$X(z) = 4z^{-3}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{4}{z^2(z-1)}$$

Nº	$x(t)$ ó $x(kT)$	Transformada z
1	$ax(t)$	$aX(z)$
2	$ax(t)+by(t)$	$aX(z)+bY(z)$
3	$x(t+T)$ ó $x(k+1)$	$zX(z)-zx(0)$
4	$x(t+2T)$	$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(T)$
5	$x(k+2)$	$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)$
6	$x(t+kT)$	$z^kX(z)-z^kx(0)-z^{k-1}x(T)-\cdots zx(kT-T)$
7	$x(t-k)$	$z^{-k}X(z)$
8	$x(n+k)$	$z^kX(z)-z^kx(0)-z^{k-1}x(1)-\cdots zx(k-1)$
9	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$
10	$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{-aT})$
11	$e^{-ak}x(k)$	$X(ze^{a})$
12	$a^kx(k)$	$X(z/a)$
13	$tx(t)$	$-T\frac{d[X(z)]}{dz}$
14	$x(0)$	$\lim_{z\to\infty} X(z)$
15	$x(\infty)$	$\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$

Tabla.
Propiedades de la transformada Z

Transformada Z inversa.

La transformada Z inversa de una función ***X(Z)***, da como resultado, la función muestreada ***x*(t)***, no la función continua ***x(t)***.

Al evaluar la ***transformada Z inversa*** se obtienen los valores de la función ***x(k)***, en los instantes de muestreo para ***k=0, 1, 2, …*** ***En consecuencia, la función muestreada x(k), obtenida a partir de la transformada Z inversa es única***, pero es posible que exista más de una función continua ***x(t)*** a partir de la cual se pueda derivar la misma función ***x(k)***.

La notación para la Transformada Z inversa de una función ***X(Z)***, es:

$$x(k) = \Im^{-1}\{X(z)\}$$

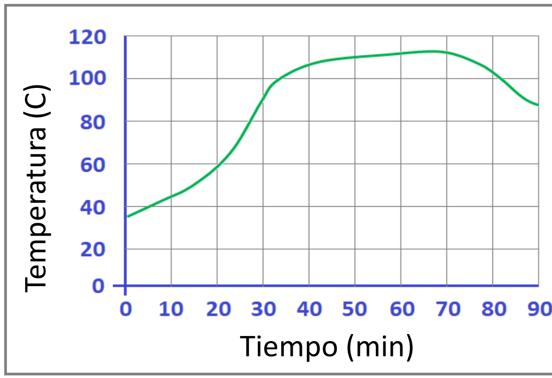
Los métodos que usaremos para evaluar la transformada Z inversa son:

- Método de expansión en fracciones parciales
- Método computacional (MATLAB)

Tiempo Continuo

$$X(S) = \frac{4}{S(S+4)}$$

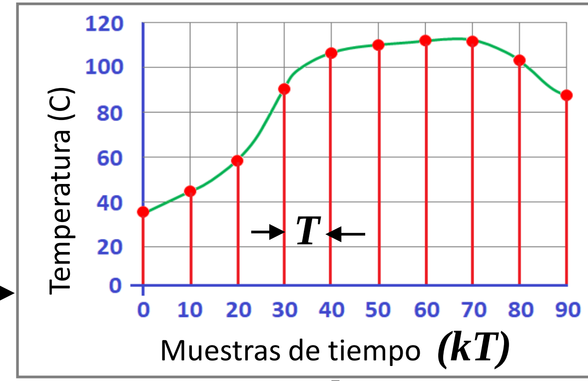
X(t)



ADC

Tiempo Discreto

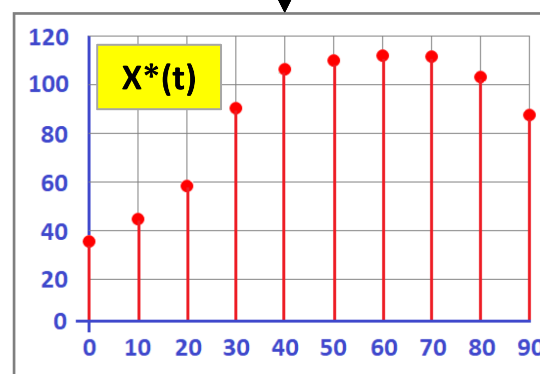
Muestreo



Transformada Z

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-4T}} = \frac{(1 - e^{-4T})z}{(z-1)(z - e^{-4T})}$$

Transformada Z Inversa



Método de expansión en fracciones parciales

Para aplicar este método, todos los términos de la expansión en fracciones parciales, deben poder encontrarse en una tabla de pares de transformada Z.

El método consiste en expandir ***X(Z)*** en fracciones parciales si ***X(Z)*** no tiene ceros en el origen o ***X(Z)/Z*** si ***X(Z)*** tiene ceros en el origen, de modo que a cada una de ellas se le pueda evaluar su transformada Z inversa, a partir de una tabla de transformada Z.

Sea:

$$X(z) = \frac{b_o z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots b_{m-1} z + b_m}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

Si $b_m = 0$, la función se puede expandir en fracciones parciales así:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_1}{z-p_1} + \frac{a_2}{z-p_2} + \cdots \frac{a_n}{z-p_n}$$

Ejemplo
Hallar la transformada Z inversa de: $$X(z) = \frac{(z+2)(z-1)}{(z+1)(z+3)(z-2)}$$

Solución: Como no hay ceros en el origen, se expande X(Z) en fracciones parciales.

$$X(z) = \frac{(z+2)(z-1)}{(z+1)(z+3)(z-2)} = \frac{a_1}{z+1} + \frac{a_2}{z+3} + \frac{a_3}{z-2}$$

$$a_1 = (z+1)X(z)|_{z=-1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = (z+3)X(z)|_{z=-3} = \frac{2}{5}$$

$$a_3 = (z-2)X(z)|_{z=2} = \frac{4}{15}$$

$$X(z) = \frac{1/3}{z+1} + \frac{2/5}{z+3} + \frac{4/15}{z-2}$$

Utilizando las tablas de transformada Z :

20	$a^{k-1} \quad k \geq 1$	$\dfrac{1}{z-a}$

$$X(z) = \frac{1/3}{z+1} + \frac{2/5}{z+3} + \frac{4/15}{z-2}$$

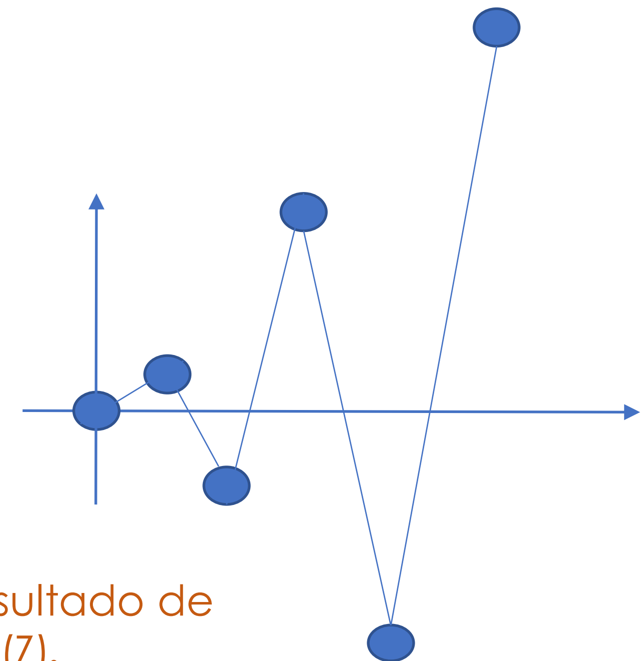
$$x(k) = \frac{1}{3}(-1)^{k-1} + \frac{2}{5}(-3)^{k-1} + \frac{4}{15}(2)^{k-1}$$

Evaluando para diferentes valores de $\boldsymbol{k}$:

$x(0) = 0$ $\qquad x(3) = 5$

$x(1) = 1$ $\qquad x(4) = -9$

$x(2) = -1$ $\qquad x(5) = 37$



ACTIVIDAD: Graficar y analizar el resultado de la tranformada Z inversa de X(Z).

Ejemplo
Hallar la transformada Z inversa de:

$$X(z) = \frac{z(z+0.5)(z+0.8)}{(z-0.2)(z-0.8)(z-1)}$$

Solución: Como hay un cero en el origen, se expande ***X(Z)/Z*** en fracciones parciales.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z(z+0.5)(z+0.8)}{(z-0.2)(z-0.8)(z-1)} = \frac{a_1}{(z-0.2)} + \frac{a_2}{(z-0.8)} + \frac{a_3}{(z-1)}$$

$$a_1 = (z-0.2)\frac{x(z)}{z}\bigg|_{z=0.2} = \frac{35}{24} \qquad a_2 = (z-0.8)\frac{x(z)}{z}\bigg|_{z=0.8} = -\frac{52}{3} \qquad a_3 = (z-1)\frac{x(z)}{z}\bigg|_{z=1} = \frac{135}{8}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{35}{24}\left[\frac{1}{(z-0.2)}\right] - \frac{52}{3}\left[\frac{1}{(z-0.8)}\right] + \frac{135}{8}\left[\frac{1}{(z-1)}\right]$$

$$X(z) = \frac{35}{24}\left[\frac{z}{(z-0.2)}\right] - \frac{52}{3}\left[\frac{z}{(z-0.8)}\right] + \frac{135}{8}\left[\frac{z}{(z-1)}\right]$$

Utilizando la tabla de transformada Z, se obtiene:

$$x(k) = \frac{35}{24}(0.2)^k - \frac{52}{3}(0.8)^k + \frac{135}{8}(1)^k \qquad k \geq 0$$

ACTIVIDAD: Evaluar el resultado para valores desde ***k=0***, hasta ***k=20***.
Graficar y analizar el resultado de la tranformada Z inversa de X(Z).

Método Computacional (MATLAB)

$$G(z) = \frac{2}{z^3 - 1.5z^2 + 0.5z}$$

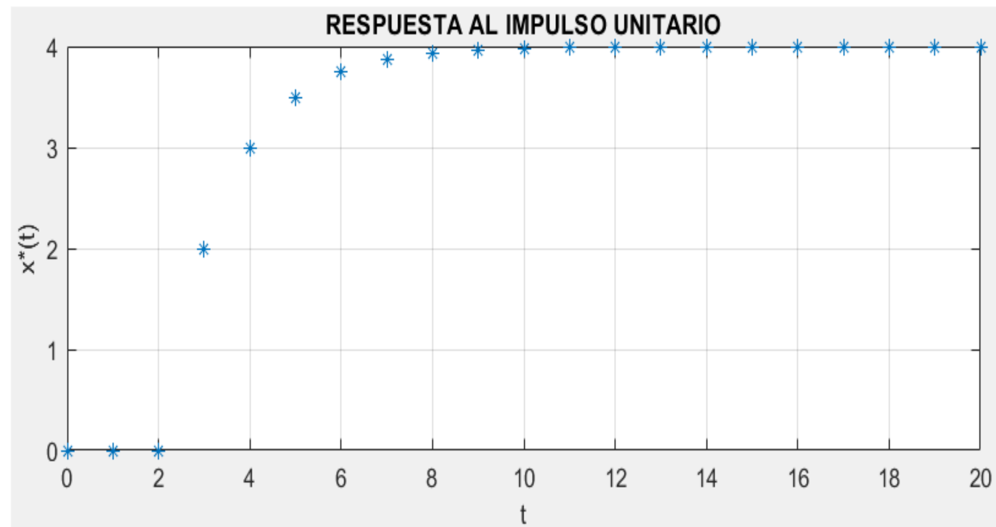
```
% Se ingresa el numerador de la función
n=[0 0 0 2];
% Se ingresa el denominador de la función
d=[1 -1.5 0.5 0];

% Se genera un impulso unitario
u=[1 zeros(1,20)];

% Se crea un filtro digital unidimensional
y=filter(n,d,u)

%Se crea un vector con 21 instantes de tiempo
t=0:20;

%Se grafica la respuesta al impulso unitario
plot(t,y,'*'), grid
title('RESPUESTA AL IMPULSO UNITARIO')
xlabel('t')
ylabel('x*(t)')
```



Ejercicio 1:
A partir de la transformada Z de una función, obtenga las primeras 5 muestras de la transformada Z inversa utilizando MATLAB.

$$Y_d(z) = \frac{2z^2 - z}{z^2 - z + 0.24}; \quad T_s = 0.5$$

```
%Obtención de la
Transformada Z inversa de una
función:
num=[2, -1, 0]
den=[1, -1, 0.24]
yd=dimpulse(num,den,5)
plot(yd,'*')
plot(1:5,yd,'*')
```

```
%Obtención de la transformada Z de una función
s=tf('s')
y = 1/((10*s + 1)*(s + 1))
Ts = 0.5;
t = 0:Ts:60;
y = step(y,t);
plot(t,y,'.’); grid on


yd=dimpulse(num,den,5)
plot(yd,'*')
plot(1:5,yd,'*')
```

Referencias

[1] Landau, I. D., & Zito, G. (2007). *Digital control systems: design, identification and implementation*. Springer Science & Business Media.

[2] García, L., (2006). Sistemas de Control Digital.

[3] Ogata, K. (1995). *Discrete-time control systems* (Vol. 2, pp. 446-480). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.