SISTEMAS DE CONTROL EN ROBÓTICA

por
Mauricio Arias Correa

Medellín, Mayo 2018

SISTEMAS DE CONTROL EN ROBÓTICA

SESIÓN 6
DISEÑO DE CONTROLADORES

DISEÑO DE CONTROLADORES EN TIEMPO DISCRETO

Los procedimientos de sintonía de controladores requieren del conocimiento de la dinámica del proceso la cual se obtiene generalmente por medio de un modelo identificado mediante métodos experimentales.

A partir del modelo estimado para el proceso, se determinan los valores requeridos para los parámetros del controlador.

En adición a lo anterior, es necesario conocer también cual es la ecuación o función de transferencia del controlador que se desea sintonizar y cuáles son los parámetros necesarios para la sintonía del controlador empleado.

MODOS DE CONTROL P, PI, PID, EN TIEMPO DISCRETO

Control Proporcional:

Este tipo de controlador genera una salida que es proporcional al error actuante. En el control proporcional existe una relación lineal entre el valor de la variable controlada y la posición del elemento final de control.

Es decir, la válvula se mueve la misma cantidad por cada unidad de desviación (error), entre el valor deseado o valor de referencia y el valor actual de la variable controlada.

La ecuación de un controlador proporcional continuo está dada por:

$$m(t) = K_c e(t) + M_0 \qquad (1)$$

En donde:

$m(t)$ = Salida del controlador.

$e(t)$ = Señal de error actuante.

K_C = Ganancia del controlador. (Parámetro de ajuste).

M_0 = Salida del controlador para error nulo.

La forma discreta de la ecuación (1) es:

$$m(k) = K_c e(k) + M_0 \qquad (2)$$

La salida del controlador en el instante *(k - 1)* es:

$$m(k-1) = K_c e(k-1) + M_0 \qquad (3)$$

Tomando la diferencia de (2) y (3)

$$\begin{aligned} m(k) - m(k-1) &= K_c[e(k) - e(k-1)] \\ m(k) &= K_c e(k) - K_c e(k-1) + m(k-1) \end{aligned} \qquad (4)$$

Aplicando la transformada Z a (4):

$$(1 - z^{-1})M(z) = K_c(1 - z^{-1})E(z) \qquad (5)$$

Y despejando D(Z), obtendremos:

Función de transferencia de Pulso del Controlador Proporcional

$$\boxed{D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = q_o} \qquad (6)$$

Donde: $\boxed{q_o = K_c}$

Control Proporcional – Integral (PI):

En este tipo de controlador, la señal de salida experimenta un salto inicial proporcional al error actuante y a continuación presenta una variación gradual a una velocidad proporcional al error.

La ecuación de un controlador proporcional más integral continuo está dada por:

$$m(t) = K_c \left[e(t) + \frac{1}{\tau_i} \int e(t)dt \right] + M_o \qquad (7)$$

En donde:

$m(t)$ = Salida del controlador.

$e(t)$ = Señal de error actuante.

K_c = Ganancia del controlador (Parámetro de ajuste).

τ_i = Tiempo Integral en min/repetición o repeticiones/min. (Parámetro de ajuste).

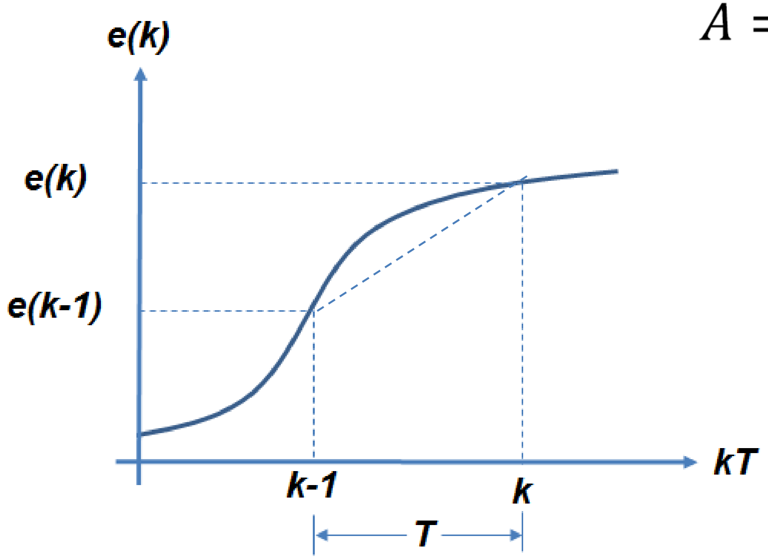
M_o = Salida del controlador para error nulo.

Para tiempos de muestreo pequeños, la ecuación (7) se puede llevar a una ecuación en diferencias por discretización, reemplazando la parte integral por una suma. La integración continua se puede aproximar utilizando integración rectangular o integración trapezoidal. Utilizando el método de integración trapezoidal se obtiene:

$$\int e dt = \sum \left[\frac{e(k) + e(k-1)}{2}\right] T$$

El área del trapecio es:

$$A = \left[\frac{e(k) + e(k-1)}{2}\right] T \qquad (8)$$



El área total bajo la curva del error es igual a la suma de las áreas de todos los trapecios en que se pueda subdividir dicha área.

Figura 1. Método de integración trapezoidal

Reemplazando esta última expresión en la ecuación 7 y tomando los valores de $m(t)$ y $e(t)$ en el instante de muestreo $\boldsymbol{k}$ se obtiene:

$$m(k) = K_c\left[e(k) + \frac{T}{2\tau_i}\sum[e(k) + e(k-1)]\right] \qquad (8)$$

Así mismo, para el instante ***(k-1)*** :

$$m(k-1) = K_c\left[e(k) + \frac{T}{2\tau_i}\sum[e(k-1) + e(k-2)]\right] \qquad (9)$$

Restando (9) de (8):

$$m(k) - m(k-1) = K_c\left[e(k) - e(k-1) + \frac{T}{2\tau_i}\sum[e(k) - e(k-2)]\right] \qquad (10)$$

Como:

$$\sum[e(k) - e(k-2)] = e(k) + e(k-1)$$

Entonces:

$$m(k) - m(k-1) = K_c\left[\left(1 + \frac{T}{2\tau_i}\right)e(k) - \left(1 - \frac{T}{2\tau_i}\right)e(k-1)\right] \qquad (11)$$

$$m(k) - m(k-1) = K_c\left[\left(1 + \frac{T}{2\tau_i}\right)e(k) - \left(1 - \frac{T}{2\tau_i}\right)e(k-1)\right] \quad (11)$$

La ecuación (11), se puede reescribir como:

$$m(k) = q_o e(k) + q_1 e(k-1) + m(k-1) \quad (12)$$

Donde:

$$q_o = K_c\left[1 + \frac{T}{2\tau_i}\right] \qquad q_1 = -K_c\left[1 - \frac{T}{2\tau_i}\right]$$

La ecuación (12) es el ***algoritmo de control digital para el controlador PI***.
Al tomar la transformada a la ecuación (12) se obtiene:

Al tomar la transformada ***Z*** a la ecuación (12) se obtiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_o + q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{q_o z + q_1}{z - 1} \quad (13)$$

La ecuación (13) es la ***Función de Transferencia de Pulso del Controlador PI***.

Control Proporcional – Integral – Derivativo (PID):

La acción derivativa tiene como finalidad “anticipar hacia dónde va el proceso”, mediante la observación de la rapidez en el cambio del error. La ecuación de un controlador PID continuo es:

$$m(t) = K_c \left[e(t) + \frac{1}{\tau_i} \int e(t)dt + \tau_d \frac{de(t)}{dt} \right] + M_o \qquad (14)$$

$m(t)$ = Salida del controlador.

$e(t)$ = Señal de error actuante.

K_c = Ganancia del controlador (Parámetro de ajuste)

τ_i = Tiempo integral en min/repetición o repeticiones/min (Parámetro de ajuste).

τ_d = Tiempo derivativo en min. (Parámetro de ajuste).

M_o = Salida del controlador para error nulo.

Para tiempos de muestreo pequeños, la ecuación (14) se puede llevar a una ecuación en diferencias por discretización, reemplazando la parte derivativa por una diferencia y la parte integral por una suma. Utilizando el método de integración trapezoidal y evaluando la diferencia ***m(k) - m(k-1)*** se obtiene

$$m(k) = K_c\left[e(k) + \frac{T}{2\tau_i}\sum[e(k) + e(k-1)] + \frac{\tau_d}{T}[e(k) - e(k-1)]\right]$$

$$m(k-1) = K_c\left[e(k-1) + \frac{T}{2\tau_i}\sum[e(k-1) + e(k-2)] + \frac{\tau_d}{T}[e(k-1) - e(k-2)]\right]$$

$$m(k) - m(k-1) = K_c\left[e(k) - e(k-1) + \frac{T}{2\tau_i}\sum[e(k) - e(k-2)] + \frac{\tau_d}{T}[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]\right]$$

$$m(k) - m(k-1) = q_o e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \quad (15)$$

$$\boxed{m(k) = q_o e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) + m(k-1)} \quad (16)$$

La ecuación (16) es el ***algoritmo de control discreto para el controlador PID***.

Tomando la transformada ***Z*** de la ecuación (15) se obtiene

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{q_o + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{q_o z^2 + q_1 z + q_2}{z(z-1)} \qquad (17)$$

La ecuación (17) es la función de transferencia de pulso del controlador PID.

En las ecuaciones (16) y (17) los parámetros q_0, q_1 y q_2 se calculan con las siguientes ecuaciones:

$$q_o = K_c\left[1 + \frac{T}{2\tau_i} + \frac{\tau_d}{T}\right] \qquad q_1 = -K_c\left[1 - \frac{T}{2\tau_i} + \frac{2\tau_d}{T}\right] \qquad q_2 = \frac{K_c \tau_d}{T} \qquad (18)$$