Problemas semana 2

Jaime Darley Angulo Tenorio
Jeisson Duvan Bareño Ruiz

1 Ejemplos de series de Taylor

1.1 1. Serie de Taylor de $\sin(x)$ alrededor de $x = 0$

Derivadas de $\sin(x)$:

$$f(x) = \sin(x), \quad f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x), \quad f'''(x) = -\cos(x), \quad f^{(4)}(x) = \sin(x)$$

Evaluamos en $x = 0$:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

Aplicamos la fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!} + \cdots$$

Sustituyendo:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

1.2 2. Serie de Taylor de $\cos(x)$ alrededor de $x = 0$

Derivadas de $\cos(x)$:

$$f(x) = \cos(x), \quad f'(x) = -\sin(x), \quad f''(x) = -\cos(x), \quad f'''(x) = \sin(x), \quad f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

Evaluamos en $x = 0$:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 1$$

Aplicamos la fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!} + \cdots$$

Sustituyendo:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

1.3 3. Serie de Taylor de e^x alrededor de $x = 0$

Derivadas de e^x:

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad f^{(n)}(x) = e^x \quad \text{para cualquier } n$$

Evaluamos en $x = 0$:

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1, \quad f^{(n)}(0) = 1$$

Aplicamos la fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \cdots$$

Sustituyendo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

1.4 4. Serie de Taylor de $\ln(1 + x)$ alrededor de $x = 0$

Derivadas de $\ln(1 + x)$:

$$f(x) = \ln(1+x), \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \ldots$$

Evaluamos en $x = 0$:

$$f(0) = \ln(1) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = -6$$

Aplicamos la fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \cdots$$

Sustituyendo:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad \text{para } |x| < 1$$

1.5 5. Serie de Taylor de e^{ix} alrededor de $x = 0$

Derivadas de e^{ix}:

$$f(x) = e^{ix}, \quad f'(x) = ie^{ix}, \quad f''(x) = -e^{ix}, \quad f'''(x) = -ie^{ix}, \quad f^{(4)}(x) = e^{ix}, \quad \ldots$$

Evaluamos en $x = 0$:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = i, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = -i, \quad f^{(4)}(0) = 1, \quad \ldots$$

Aplicamos la fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!} + \cdots$$

Sustituyendo los valores:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Relación con funciones trigonométricas:
Agrupamos los términos reales y los imaginarios:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

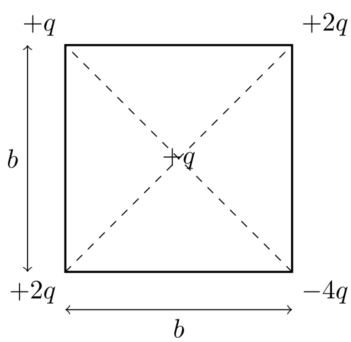
Reconocemos las series de Taylor de $\cos(x)$ y $\sin(x)$:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Problemas semana 2 20 de Noviembre de 2024 Jaime Darley Angulo Tenorio Jeisson Duvan Bareño Ruiz

2 Energía Potencial del Sistema de Cargas

Encuentra la energía potencial del siguiente sistema de cargas:



La energía potencial entre dos cargas q_i y q_j separadas por una distancia r_{ij} está dada por:

$$U = k_e \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

donde k_e es la constante de Coulomb.

Paso 1: Identificar las cargas y las distancias

En el problema, las cargas están dispuestas en los vértices y en el centro de un cuadrado de lado b. Las cargas y sus posiciones son:

- Vértice inferior izquierdo: $q_1 = +2q$,
- Vértice inferior derecho: $q_2 = -4q$,
- Vértice superior derecho: $q_3 = +2q$,
- Vértice superior izquierdo: $q_4 = q$,
- Centro del cuadrado: $q_5 = +q$.

Las distancias relevantes son:

- Entre cargas adyacentes: $r = b$,
- Entre cargas en vértices opuestos: $r = b\sqrt{2}$,
- Entre la carga central y cualquier vértice: $r = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Paso 2: Enumerar todas las interacciones

Para calcular la energía potencial total del sistema, consideramos todas las combinaciones únicas de pares de cargas. Con cinco cargas, hay $\binom{5}{2} = 10$ pares posibles. A continuación, listamos cada par con sus respectivas distancias y calculamos su contribución a la energía potencial.

1. **Interacción U_{12} (q_1 y q_2):**

$$U_{12} = k_e \frac{(+2q)(-4q)}{b} = -\frac{8k_e q^2}{b}$$

2. **Interacción U_{13} (q_1 y q_3):**

$$U_{13} = k_e \frac{(+2q)(+2q)}{b\sqrt{2}} = \frac{4k_e q^2}{b\sqrt{2}}$$

3. **Interacción U_{14} (q_1 y q_4):**

$$U_{14} = k_e \frac{(+q)(+2q)}{b} = \frac{2k_e q^2}{b}$$

4. **Interacción U_{15} (q_1 y q_5):**

$$U_{15} = k_e \frac{(+2q)(+q)}{\frac{b\sqrt{2}}{2}} = \frac{4k_e q^2}{b\sqrt{2}}$$

5. **Interacción U_{23} (q_2 y q_3):**

$$U_{23} = k_e \frac{(-4q)(+2q)}{\frac{b\sqrt{2}}{2}} = -\frac{8k_e q^2}{b\sqrt{2}}$$

6. **Interacción U_{24} (q_2 y q_4):**

$$U_{24} = k_e \frac{(-4q)(+q)}{b\sqrt{2}} = -\frac{4k_e q^2}{b\sqrt{2}}$$

7. **Interacción U_{25} (q_2 y q_5):**

$$U_{25} = k_e \frac{(-4q)(+q)}{\frac{b\sqrt{2}}{2}} = -\frac{8k_e q^2}{b\sqrt{2}}$$

8. **Interacción U_{34} (q_3 y q_4):**

$$U_{34} = k_e \frac{(+2q)(q)}{b} = \frac{2k_e q^2}{b}$$

9. **Interacción U_{35} (q_3 y q_5):**

$$U_{35} = k_e \frac{(+2q)(+q)}{\frac{b\sqrt{2}}{2}} = \frac{4k_e q^2}{b\sqrt{2}}$$

10. **Interacción U_{45} (q_4 y q_5):**

$$U_{45} = k_e \frac{(q)(+q)}{\frac{b\sqrt{2}}{2}} = \frac{2k_e q^2}{b\sqrt{2}}$$

Paso 3: Sumar todas las contribuciones

Sumamos todas las energías potenciales individuales para obtener la energía potencial total del sistema:

$$U_{\text{total}} = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{15} + U_{23} + U_{24} + U_{25} + U_{34} + U_{35} + U_{45}$$

Sustituyendo los valores calculados:

$$U_{\text{total}} = -\frac{8k_e q^2}{b} + \frac{4k_e q^2}{b\sqrt{2}} + \frac{2k_e q^2}{b} + \frac{4k_e q^2}{b\sqrt{2}} - \frac{16k_e q^2}{b\sqrt{2}} - \frac{4k_e q^2}{b\sqrt{2}} - \frac{8k_e q^2}{b\sqrt{2}} + \frac{2k_e q^2}{b} + \frac{4k_e q^2}{b\sqrt{2}} + \frac{2k_e q^2}{b\sqrt{2}}$$

Resultado Final:

$$U_{\text{total}} = -\left(14 + 4\sqrt{2}\right) \frac{k_e q^2}{b}$$

Interpretación del Resultado:

La energía potencial total del sistema es negativa debido a las interacciones atractivas entre las cargas positivas y negativas. el menos indica que las interacciones atractivas tienen una mayor contribución al sistema que las repulsivas.