Relacions de recurrència en "divideix i venceràs"

La relació de recurrència que volem resoldre és:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ af(\frac{n}{a}) + n^k & n > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Evidentment suposem que $a \in \mathbb{N}, a > 1$ (no té sentit que el problema no es reduïsca o que augmente), i que $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

$$\begin{align} f(n) &= af\left(\frac{n}{a}\right) + n^k \tag{2} \\ &= a\left[af\left(\frac{n}{a^2}\right) + \left(\frac{n}{a}\right)^k\right] + n^k \tag{3} \\ &= a^2 f\left(\frac{n}{a^2}\right) + a\left(\frac{n}{a}\right)^k + n^k \tag{4} \\ &\dots \tag{5} \\ &= a^j f\left(\frac{n}{a^j}\right) + n^k \sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{1}{a^{k-1}}\right)^i \tag{6} \end{align}$$

Sumem ara la sèrie geomètrica de raó $r = \frac{1}{a^{k-1}}$ amb la fórmula general

$$\sum_{i=0}^{j-1} r^i = \frac{1 - r^j}{1 - r} \tag{7}$$

Alerta! Aquesta fórmula no serveix si $r = 1$, però en aquest cas la suma val trivialment j. Substituint-hi en l'equació (6):

$$\begin{align} f(n) &= a^j f\left(\frac{n}{a^j}\right) + n^k \frac{1 - \left(\frac{1}{a^{k-1}}\right)^j}{1 - \frac{1}{a^{k-1}}} \tag{8} \\ &= n + n^k \frac{1 - \frac{1}{n^{k-1}}}{1 - \frac{1}{a^{k-1}}} && \text{Ja que cal arribar fins a } a^j = n \tag{9} \\ &= n + a^k \frac{n^k - n}{a^k - a} \tag{10} \\ &= \frac{a^k n^k - na}{a^k - a} && \text{(Comprovat, } \texttt{wolframalpha.com}\text{)} \tag{11} \end{align}$$

Cal distingir-hi tres casos:

- $k > 1$: el terme dominant és n^k
- $k = 1$: En aquest cas la raó la de la sèrie geomètrica és $r = \frac{1}{a^{k-1}} = 1$; per això la fórmula utilitzada no és vàlida. En aquest cas, la suma de la sèrie és j; per això, si tornem a l'equació (6) tindrem:

$$f(n) = a^j f\left(\frac{n}{a^j}\right) + n^k j \tag{12}$$

$$= n + n^k \log_a(n) \qquad \text{ja que } a^j = n \text{ i } j = \log_a(n) \tag{13}$$

  Per açò, en aquest cas el terme dominant és: $n^k \log_a(n)$
- $k < 1$: el terme dominant és n

Per a ampliar...

La relació de recurrència més general:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ af(\frac{n}{b}) + g(n) & n > 1 \end{cases} \tag{14}$$

on es compleix que $g(n^p) = g(n)^p$ la trobareu resolta de manera molt similar en l'apèndix D.1 del llibre *Introducció a l'anàlisi i disseny d'algorismes* de F.J. Ferri, J.V. Albert i G. Martín (Universitat de València, 1998).