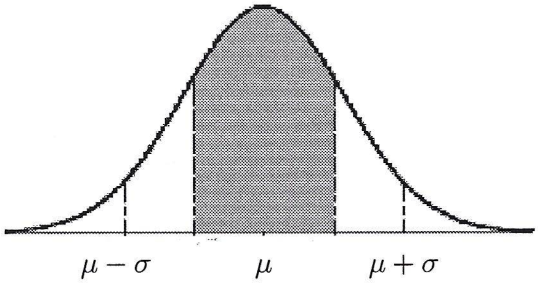

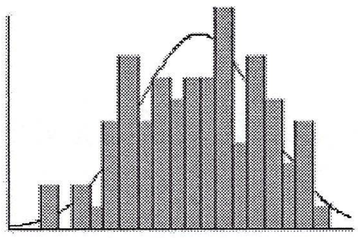

PROBABILIDAD
Y
VARIABLES ALEATORIAS

José Requena Ruiz

Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial.
Universidad de Alicante.

Departamento de Ciencia de la Computación
e Inteligencia Artificial

Universidad de Alicante

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El propósito de este capítulo introductorio, es el de repasar algunas herramientas matemáticas necesarias para el buen desarrollo del curso. Necesario es el análisis combinatorio para el *cálculo de probabilidades* (capítulo 2), así como el cálculo integral (de una y varias variables; el cálculo de integrales dobles se verá en su momento) para el concepto de *función de densidad* (capítulo 3). La suma de algunas series convergentes nos será también de utilidad. Empezamos recordando el factorial de un número

Definición 1.1 (Factorial) *Dado* $n \in \mathbb{N}$ *se define* $0\,! = 1$ *y para* $n > 0$

$$n\,! = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

Los primeros valores de $n\,!$ son:

$$\begin{array}{ll} 1\,! = 1 & 2\,! = 2 \\ 3\,! = 6 & 4\,! = 24 \\ 5\,! = 120 & 6\,! = 720 \\ 7\,! = 5040 & 8\,! = 40320 \\ 9\,! = 362880 & 10\,! = 3628800 \end{array}$$

Como se observa $n\,!$ crece rápidamente; para n grande es útil la aproximación de *Stirling*

$$n\,! \approx \mathrm{e}^{-n}\, n^n \sqrt{2\pi n}.$$

1.1 Análisis combinatorio

1.1.1 Variaciones ordinarias

Dado un conjunto de n elementos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, una variación ordinaria de orden h (siendo $1 \leq h \leq n$), es una $h-$tupla de elementos distintos de A. Por tanto, dos variaciones son distintas si tienen algún elemento distinto, o teniendo todos iguales, están en distinto orden. Por ejemplo si $A = \{a, b, c, d\}$, es evidente que las variaciones de orden 1 son 4, a saber: a, b, c y d. Las de orden 2 se pueden formar a partir de éstas, añadiendo a cada una otra letra distinta

$$a \left\{ \begin{array}{l} ab \\ ac \\ ad \end{array} \right. \quad b \left\{ \begin{array}{l} ba \\ bc \\ bd \end{array} \right. \quad c \left\{ \begin{array}{l} ca \\ cb \\ cd \end{array} \right. \quad d \left\{ \begin{array}{l} da \\ db \\ dc \end{array} \right.$$

Hemos formado $4 \cdot 3 = 12$ variaciones binarias (nótese que los elementos de la $h-$tupla no se pueden repetir); cada una de éstas genera 2 variaciones de orden 3 por lo que hay $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ variaciones ternarias. El número total de ellas, representado por $V_{n,h}$ ó V_n^h, es fácil de calcular; siguiendo el anterior razonamiento se obtiene

$$V_{n,h} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-h+1) \qquad [h \text{ factores}]$$

Usando la notación factorial, se abrevia la anterior fórmula

$$V_{n,h} = \frac{n\,!}{(n-h)\,!}$$

Ejemplo: *En una sociedad con* 10 *miembros, se eligen presidente, secretario y tesorero ¿de cuántas formas se puede hacer la elección? ¿y si un determinado socio debe figurar en la directiva?*

Cada elección es una terna ordenada (por ejemplo el primero presidente, el segundo secretario y el tercero tesorero), por lo que se puede hacer de $V_{10,3}$ formas distintas; esto es $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Si un determinado miembro ocupa uno de los tres cargos, los restantes se pueden elegir de $V_{9,2} = 72$ formas, pero como puede ocupar cualquiera de los tres, se tiene $3 \cdot 72 = 216$ formas.

1.1.2 Variaciones con repetición

Se distinguen éstas de las ordinarias, en que los elementos se pueden repetir, y por tanto h puede ser mayor que n. En el caso $A = \{a, b, c, d\}$, cada variación de orden 1 genera 4 de orden 2

$$a\left\{\begin{array}{l} aa \\ ab \\ ac \\ ad \end{array}\right. \quad b\left\{\begin{array}{l} ba \\ bb \\ bc \\ bd \end{array}\right. \quad c\left\{\begin{array}{l} ca \\ cb \\ cc \\ cd \end{array}\right. \quad d\left\{\begin{array}{l} da \\ db \\ dc \\ dd \end{array}\right.$$

siendo así que hay $4 \cdot 4 = 4^2$ variaciones de orden 2. Es fácil concluir para el caso general que el número total de variaciones con repetición es

$$VR_{n,h} = n^h.$$

Ejemplo: *¿Cuántos números hay de 4 cifras?*

Como hay 10 dígitos disponibles, hay $VR_{10,4} = 10^4 = 10000$ números (desde 0000 hasta 9999); quitando los que empiezan por 0 que son $VR_{10,3} = 1000$ tenemos que hay 9000 números con 4 cifras (desde 1000 hasta 9999).

1.1.3 Permutaciones ordinarias

Son variaciones ordinarias donde el orden coincide con el número de elementos, y por tanto están todos. Dos permutaciones difieren sólo en el orden (puesto que tienen los mismos elementos). Su número es

$$P_n = V_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-n+1) = n\,!$$

Ejemplo: *¿De cuántas formas se pueden colocar* 4 *libros distintos en una estantería?*

La solución es $4\,! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

1.1.4 Permutaciones con repetición

Con las letras de la palabra OSTRA se pueden formar $5\,! = 120$ palabras distintas (con o sin significado), pero con la palabra TORSO sólo se pueden formar la mitad (60) puesto que la letra O se repite dos veces y en las 120 que a priori podríamos formar, hay algunas iguales (cambiando las dos letras O, la palabra no varía). Veamos el caso general

Dados n elementos, donde sólo hay p distintos $a_1, a_2, \ldots, a_p$ de forma que a_1 se repite α_1 veces, a_2 se repite α_2 veces, etc, siendo $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=n$, el número de permutaciones distintas que se pueden formar con los n elementos es

$$PR_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}=\frac{n\,!}{\alpha_1\,!\cdot\alpha_2\,!\cdots\alpha_p\,!}$$

Ejemplo: *¿De cuántas formas se pueden colocar en una estantería, dos libros idénticos de Álgebra, dos de Estadística, uno de Programación, y otro de Física?*

La solución es

$$PR_6^{2,2,1,1}=\frac{6\,!}{2\,!\cdot 2\,!\cdot 1\,!\cdot 1\,!}=180.$$

1.1.5 Combinaciones ordinarias

Dado un conjunto de n elementos distintos, cualquier subconjunto de h elementos $(1\leq h\leq n)$ se llama una combinación de orden h. Dos combinaciones distintas, lo son por algún elemento, pero no por el orden. Si el conjunto es $A=\{a,b,c,d\}$ las combinaciones de orden 1 son a,b,c,d. Para formar las de orden 2 hay que tener en cuenta que la combinación ab es la misma que la ba

$$a\left\{\begin{array}{l}ab\\ac\\ad\end{array}\right.\quad b\left\{\begin{array}{l}bc\\bd\\ \end{array}\right.\quad c\left\{\begin{array}{l}cd\\ \\ \end{array}\right.\quad d\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right.$$

Obtenemos un total de 6 combinaciones. El alumno comprobará que hay 4 de orden tres y sólo una de orden cuatro (obviamente $abcd$).
En el caso general, cada combinación de orden h genera $h!$ variaciones; por ejemplo la combinación abc origina $3!=6$ variaciones, que son

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Por consiguiente $C_{n,h}\cdot h\,!=V_{n,h}$, por lo que el número total de combinaciones es

$$C_{n,h}=\frac{V_{n,h}}{h\,!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-h+1)}{h\,!}=\frac{n\,!}{h\,!(n-h)\,!}$$

Este número, llamado numero combinatorio, tiene una especial notación: se escribe $\binom{n}{h}$, y se lee "n sobre h". Por tanto

$$\binom{n}{h}=\frac{n\,!}{h\,!(n-h)\,!},\quad n=0,1,\ldots,\quad h=0,1,\ldots n.$$

Es conocido desarrollo binomial

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n \tag{1.1}$$

Ejemplo: *Pruébese las siguientes propiedades*

(a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

(b) *Si* $p+q=1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1$

(c) $\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h}$

(d) $\binom{n}{h} + \binom{n}{h+1} = \binom{n+1}{h+1}$.

(a) Aplicando la fórmula (1.1) para $1+x$ se obtiene:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \cdots + \binom{n}{n} x^n$$

y, sustituyendo $x=1$, queda demostrado.

(b) Sustituyendo en la fórmula (1.1) a y b por p y q respectivamente se tiene el resultado.

(c) $\displaystyle \binom{n}{n-h} = \frac{n\,!}{(n-h)\,!(n-(n-h))\,!} = \frac{n\,!}{(n-h)\,!h\,!} = \binom{n}{h}$

(d)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{h} + \binom{n}{h+1} &= \frac{n\,!}{h\,!(n-h)\,!} + \frac{n\,!}{(h+1)\,!(n-h-1)\,!} \\
&= \frac{n\,!(h+1) + n\,!(n-h)}{(h+1)\,!(n-h)\,!} \\
&= \frac{n\,!(n+1)}{(h+1)\,!(n-h)\,!} \\
&= \frac{(n+1)\,!}{(h+1)\,!(n-h)\,!} \\
&= \frac{(n+1)\,!}{(h+1)\,!((n+1)-(h+1))\,!} \\
&= \binom{n+1}{h+1}.
\end{aligned}$$

Esta última propiedad nos permite conseguir números combinatorios usando sumas; dispogamos los números formando un triángulo (llamado de *Pascal* o *Tartaglia*)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Los extremos de cada fila valen 1 y, cada elemento restante se obtiene sumando los dos elementos que tiene encima.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Ejemplo: *¿De cuántas formas se pueden extraer dos cartas de una baraja española?*

Como el orden de las extracciones no importa, se trata de

$$C_{40,2} = \binom{40}{2} = \frac{40 \cdot 39}{2 \cdot 1} = 780.$$

En general, extraer h cartas (sin devolución) de una baraja de n se puede hacer de $\binom{n}{h}$ formas.

1.1.6 Combinaciones con repetición

Ejemplo: *Un restaurante sirve en su menú económico para estudiantes, tres tipos de platos combinados A, B y C. Cuatro amigos van a comer y cada uno pide un plato ¿De cuántas formas pueden hacer el pedido?*

Una forma de hacerlo se puede representar por $\{A, A, B, C\}$ lo que quiere decir que se han pedido dos menúes A, uno B y otro C. El orden no importa, pues al servicio de cocina le da lo mismo, pero los platos pueden repetirse. Son combinaciones con repetición de 3 elementos tomados de 4 en 4. Para calcular el total de combinaciones usaremos otra representación. El pedido $\{A, A, B, C\}$ se puede representar como $11-1-1$, donde los guiones separan los pedidos A, B y C; el número de pedidos de cada tipo se representa por otros tantos unos; el pedido $\{A, B, B, B\}$ quedaría representado por $1-111-$, etc. El problema, como se ve, equivale a permutar cuatro 1 y dos guiones, lo que se puede conseguir de $PR_6^{4,2} = \dfrac{6\,!}{4\,!\cdot 2\,!} = 15$ formas. Es decir $CR_{3,4} = 15$. En general, encontrar las combinaciones con repetición de n elementos de orden h, equivale a encontrar las formas de colocar h signos 1 y $(n-1)$ guiones, esto es:

$$CR_{n,h} = \frac{(n+h-1)\,!}{h\,!\cdot(n-1)\,!} = \binom{n+h-1}{h}.$$

Los modelos ordinarios (sin repetición) se aplican en los llamados *muestreos sin reemplazamiento*, donde de un conjunto de n objetos se van extrayendo h, uno por uno sin devolverlos, y, por tanto, no se pueden repetir (como sacar cartas de una baraja). Si se considera el orden de las extracciones, tenemos un caso de variaciones, mientras que si no se considera el orden debemos recurrir a las combinaciones. Resumimos las fórmulas combinatorias

$V_{n,h} = \frac{n\,!}{(n-h)\,!}$	$VR_{n,h} = n^h$
$P_n = n\,!$	$PR_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} = \frac{n\,!}{\alpha_1\,!\cdot\alpha_2\,!\cdots\alpha_p\,!}$
$C_{n,h} = \binom{n}{h} = \frac{n\,!}{h\,!\cdot(n-h)\,!}$	$CR_{n,h} = \binom{n+h-1}{h}$

1.2 Algunas series e Integrales

(a) **Series numéricas**

Es conocida la serie geométrica

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

convergente para $|r| < 1$, cuya suma es

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \tag{1.2}$$

A partir de ésta se deducen otras; sea la serie:

$$S = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot r^{k-1} \tag{1.3}$$

Multiplicando la igualdad (1.3) por r obtenemos

$$rS = r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \cdots \tag{1.4}$$

Restando de la igualdad (1.3) la (1.4) se obtiene

$$(1-r)S = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

que no es, sino la serie geométrica, esto es

$$(1-r)S = \frac{1}{1-r}$$

deduciéndose que

$$S = \frac{1}{(1-r)^2}$$

También se puede deducir derivando los dos miembros de (1.2) (consultar cualquier libro de Cálculo infinitesimal para ver la legitimidad de tal hecho) y se obtiene:

$$1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Volviendo a derivar

$$2 + 3 \cdot 2r + 4 \cdot 3r^2 + 5 \cdot 4r^3 + \cdots = \frac{2}{(1-r)^3}$$

Las resumimos en la siguiente tabla, teniendo en cuenta que la convergencia es para $|r| < 1$

Serie	$\sum_{k=1}^{\infty} r^k$	$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot r^{k-1}$	$\sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) r^{k-2}$
Suma	$\frac{1}{1-r}$	$\frac{1}{(1-r)^2}$	$\frac{2}{(1-r)^3}$

(b) **Series de potencias**
Convendrá recordar el desarrollo de *Taylor* de una función. En particular el desarrollo muy conocido de e^x, que será útil para el estudio de la distribución de Poisson.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!} = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \cdots + \frac{x^n}{n\,!} + \cdots \tag{1.5}$$

Y sustituyendo x por $-x$ en 1.5

$$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n\,!} = 1 - \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} - \frac{x^3}{3\,!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n\,!} + \cdots$$

(c) **Integrales**
Sólo recordaremos algunas elementales que usaremos posteriormente

$$\begin{aligned} \int x^n \, dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + K, \quad n \neq -1 \\ \int \mathrm{e}^{\lambda x} \, dx &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\lambda} + K, \quad \lambda \neq 0 \\ \int u \, dv &= uv - \int v \, du \quad \text{método por partes} \end{aligned}$$

Para integrar, por ejemplo, $x \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$ hacemos $u = x$ de donde $du = dx$ y $dv = \mathrm{e}^{\lambda x} \, dx$ de donde $v = \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\lambda}$; aplicando el método por partes:

$$\int x \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \, dx = x \cdot \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\lambda} - \int \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\lambda} \, dx = x \cdot \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\lambda} - \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\lambda^2} + K. \tag{1.6}$$

1.3 Problemas

1.1 ¿Cuántos números de dos cifras existen en el sistema decimal?

Solución: La cifra de las decenas se puede elegir de 9 maneras (se excluye el 0) y las unidades de 10; en total $9 \times 10 = 90$.

1.2 ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en una estantería cuatro libros, representados por las letras A, B, C, D? (S: 24)

1.3 ¿De cuántas maneras distintas se pueden escoger 5 cartas de una baraja de 40? (S: 658008)

1.4 ¿Cuántas quinielas es preciso rellenar para estar seguro de obtener 14 aciertos si se sabe que habrá 7 unos, 4 equis y 3 doses?

Solución: Se trata de permutaciones con repetición

$$PR^{14}_{7,4,3} = \frac{14\,!}{7\,!4\,!3\,!} = 120120$$

1.5 ¿Cuántas ordenaciones diferentes se pueden hacer con 4 A, 3 B y 2 C? (S: 1260)

1.6 ¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse en los que la cifra 2 aparezca una sola vez? (S: 2673)

1.7 Se desea formar una junta directiva compuesta por 8 mujeres y 8 hombres. Si hay elegibles 12 mujeres y 18 hombres ¿de cuántas maneras puede formarse la junta? (S: 21.660.210)

1.8 Se lanza al aire una moneda 6 veces. Calcular los resultados posibles ¿En cuántos aparecen 0,1,2,3,4,5,6 caras? (S: 64, 1,6,15,20,15,6,1)

1.9 ¿De cuántas maneras se pueden cubrir las plazas de presidente secretario y tesorero de una sociedad si hay 20 posibles candidatos? (S: 6840)

1.10 ¿De cuántas maneras se pueden sentar 8 personas alrededor de una mesa redonda? (S: 5040)

1.11 En una reunión hay 10 personas ¿cuántos saludos intercambian? (S: 45)

1.12 En una urna hay tres monedas de 1 euro, tres de 50 céntimos, cuatro de 20 céntimos y dos de 2 euros. ¿De cuántas maneras distintas pueden sacarse, moneda a moneda, todos los elementos de la urna? (S: 277.200)

1.13 Se tienen 15 bolas diferentes y dos urnas. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 9 bolas en una de las urnas y 6 en la otra?

Solución: Se trata de elegir 9 para una urna, lo que se puede hacer de $\binom{15}{9} = 5005$. También se puede razonar eligiendo las 6 para la otra urna: $\binom{15}{6} = 5005$.

1.14 Hay 10 aviones diferentes que hacen la ruta de Alicante a Barcelona. ¿De cuantas maneras se puede hacer el viaje tomando al regreso un avión distinto al de ida? (S: 90)

1.15 Con los dígitos 2, 3, 4, 5 y 6 ¿cuántos números de cuatro cifras mayores que 5000 se pueden formar? (S: 250)

1.16 En un laboratorio de hardware hay 6 monitores, 10 teclados, 25 tarjetas de red y 50 discos duros. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un lote formado por 3 monitores, 7 teclados, 15 tarjetas de red y 36 discos duros, para su despiece y estudio?

1.17 ¿Cuántos números de tres cifras sin repetir se pueden formar con los dígitos 0,1,2,3,4? ¿Cuántos son pares?

Solución: En principio se forman $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. De ellos empiezan por 0, $V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$. En total hay $60 - 12 = 48$ números.
Una quinta parte de los 60 iniciales (o sea, 12) acaban en 0, otra quinta parte en 1, etc. Luego hay tres quintas partes (o sea 36) de pares, pero hay que quitar los que empiezan por 0, que son:

$$\begin{array}{cccl} 0 & X & 0 & \rightarrow \text{no hay ninguno} \\ 0 & X & 2 & \rightarrow \text{hay } 3 \\ 0 & X & 4 & \rightarrow \text{hay } 3 \end{array}$$

Luego hay $36 - 6 = 30$ pares entre los 48 números.

1.18 ¿Cuántos números capicúas hay de 5 cifras? Súmense todos ellos. (S: 900, 49.500.000)

1.19 ¿Cuántos números capicúas hay entre 100.000 y 200.000? (S: 100)

1.20 ¿Cuántos números capicúas (de al menos 2 cifras) hay menores que un millón? (S: 1989)

1.21 Hay 6 caminos que van de A a B, y 3 de B a C. ¿De cuántas maneras se puede ir de A a C pasando por B? (S: 18)

1.22 ¿De cuántas formas pueden viajar cinco personas en un coche de cinco plazas, si sólo dos de ellas saben conducir? (S: 48)

1.23 ¿De cuántas formas se pueden colocar 6 personas en una fila, si dos de ellas han de estar juntas? (S: 240)

1.24 Se lanzan 10 monedas.

(a) ¿Cuántos resultados se pueden obtener?

(b) ¿Cuántos resultados hay con 10 caras?

(c) ¿Cuántos resultados hay con 6 caras y 4 cruces?

(d) ¿Cuántos resultados hay con al menos 3 caras?

Solución:

(a) $2^{10} = 1024$.

(b) Sólo un caso.

(c) $\binom{10}{4} = 210$.

(d) Quitamos de los 1024 casos totales los que contengan 2 caras o menos

$$1024 - \binom{10}{2} - \binom{10}{1} - \binom{10}{0} = 1024 - 45 - 10 - 1 = 968.$$

1.25 ¿Cuántos resultados distintos se producen al lanzar un dado 4 veces? ¿en cuántos aparece al menos un 6? (S:1.296 y 671)

1.26 ¿De cuántas formas se pueden obtener exactamente 3 seises al lanzar 7 dados? (S: 21.875)

1.27 ¿De cuántas formas se pueden obtener al menos 3 seises al lanzar 7 dados? (S: 26.811)

1.28 Se extraen sin devolución 4 cartas de una baraja española. ¿De cuántas maneras se puede conseguir que haya al menos 3 espadas? (S: 3.810)

1.29 Pruébese que si $n \geq 3$

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \cdots + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{4}$$

Solución: Teniendo en cuenta que $\binom{n}{h} + \binom{n}{h+1} = \binom{n+1}{h+1}$ y que $\binom{3}{3} = 1 = \binom{4}{4}$ tenemos

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\binom{3}{3} & + & \binom{4}{3} & + & \binom{5}{3} & + & \binom{6}{3} & + & \cdots & + & \binom{n-1}{3} & + & \binom{n}{3} & = \\
\binom{4}{4} & + & \binom{4}{3} & + & \binom{5}{3} & + & \binom{6}{3} & + & \cdots & + & \binom{n-1}{3} & + & \binom{n}{3} & = \\
 & & \binom{5}{4} & + & \binom{5}{3} & + & \binom{6}{3} & + & \cdots & + & \binom{n-1}{3} & + & \binom{n}{3} & = \\
 & & & & \binom{6}{4} & + & \binom{6}{3} & + & \cdots & + & \binom{n-1}{3} & + & \binom{n}{3} & = \\
 & & & & & & & & & & \cdots & & \cdots & \\
 & & & & & & & & & & \binom{n}{4} & + & \binom{n}{3} & = \\
 & & & & & & & & & & & & \binom{n+1}{4}\,. &
\end{array}$$

1.30 ¿De cuántas formas se pueden extraer 3 cartas de una baraja española de forma que

(a) ninguna sea AS? (S: 7.140)

(b) una exactamente sea AS? (S: 2.520)

(c) alguna sea AS? (S: 2.740)

1.31 En una mano de póquer (con baraja española de 40 cartas) ¿de cuántas maneras se puede dar un trío? (S: 23.040)

1.32 ¿Cuántas diagonales tiene un eneágono convexo? (S: 27) ¿Y un polígono convexo de n lados? (S: $\frac{1}{2}n(n-3)$)

1.33 Una urna contiene 4 bolas blancas (idénticas) y 3 negras (idénticas). Sin tener en cuenta el orden, ¿de cuántas formas se pueden extraer tres si

(a) Han de ser 2 blancas y una negra? (S: 18)

(b) Una al menos ha de ser negra? (S: 31)

(c) Han de ser del mismo color? (S: 5)

1.34 ¿Cuántas fichas tendría un dominó cuya numeración llegase hasta 8? (S: 45)

1.35 Hallar el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x + y + z = 6$$

Solución: Puesto que $1+1+1+1+1+1 = 6$, el problema equivale a separar los 6 unos en 3 grupos; por ejemplo $11 - 111 - 1$ equivaldría a la solución $2+3+1$; La solución $3+3+0$ se expresaría $111 - 111-$. Luego el problema es permutar 8 elementos donde se repiten 6 (unos) y 2 (guiones).

$$PR^8_{6,2} = \frac{8\,!}{6\,!2\,!} = 28.$$

1.36 ¿De cuántas formas se pueden introducir 6 bolas idénticas en 3 cajas distintas? ¿Y si todas las cajas deben quedar ocupadas?

Solución: La primera parte es idéntica al problema anterior (separar 6 elementos en tres grupos, donde alguno puede ser vacío) por lo que la solución es 28. Si todas las cajas deber quedar ocupadas, los guiones no pueden quedar en los extremos, ni juntos por lo que equivale a insertar dos guiones en los cinco huecos. Por ejemplo B—B B B—B B quiere decir una bola en la primera caja, tres en la segunda y dos en la tercera; esto es, el problema equivale a elegir dos huecos de entre los cinco, lo que se puede hacer de $\binom{5}{2} = 10$ formas.

1.37 Idéntico problema que el anterior, pero las bolas son distintas.

Solución: Cada bola tiene 3 posiciones posibles; por tanto las 6 tienen $3^6 = 729$ formas de colocarse. Contemos los casos en que alguna caja queda vacía:

(a) Una caja vacía (por ejemplo la primera); las 6 bolas caen en las otras dos de $2^6 = 64$ formas, pero estamos incluyendo el caso de dos vacías (vacía la segunda y, por tanto las 6 bolas en la tercera o al revés); quitando estos 2 casos tenemos 62 con sólo una vacía (la primera); repitiendo el razonamiento para las otras tenemos $62 \cdot 3 = 186$ casos.

(b) Dos vacías; hay, obviamente 3 casos.

Por tanto hay $729 - 186 - 3 = 540$ casos en que las tres cajas quedan ocupadas.

1.38 Hállense la siguientes sumas

(a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$ (S: 2/3)

(b) $\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$ (S: $\mathrm{e} - 2$)

1.39 Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-3x}\, dx$

Solución: Aplicando 1.6

$$\int x \cdot \mathrm{e}^{-3x}\, dx = x \cdot \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3} - \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{9}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-3x}\, dx &= \left[x \cdot \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3} - \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{9} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Se ha aplicado la regla de L´Hôpital para obtener que

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-3x} = 0.$$