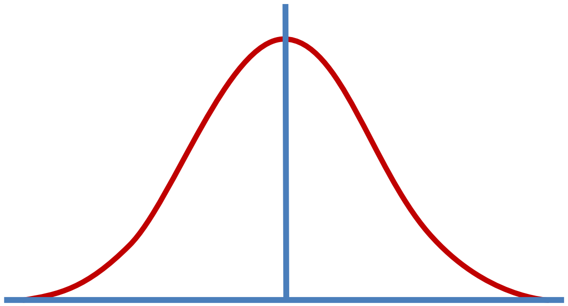
Distribución Normal

- La distribución Normal o Gaussiana es una distribución de probabilidad continua que se aproxima con mucha frecuencia en fenómenos reales, de ahí que sea la más estudiada.
- Su distribución (*fd*) sigue la campana de Gauss:



- Ejemplos: peso de personas adultas; presión arterial en ancianos; colesterol; cociente intelectual; nivel de ruido en telecomunicaciones; expansión de un virus; etc.

Distribución Normal

- Una v.a. X tiene una distribución Normal $X \sim N(\mu,\sigma)$ de parámetros μ (media) y σ (desviación típica) si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

- Parámetros:
  - f.g.m.: $\psi(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
  - Media: $\mathrm{E}(X) = \psi'(0) = \mu$
  - Varianza: $\mathrm{Var}(X) = \psi''(0) - \psi'(0)^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$

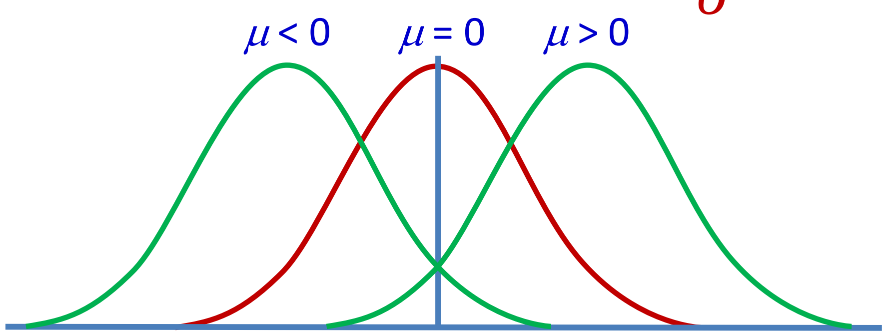
- Ejemplos

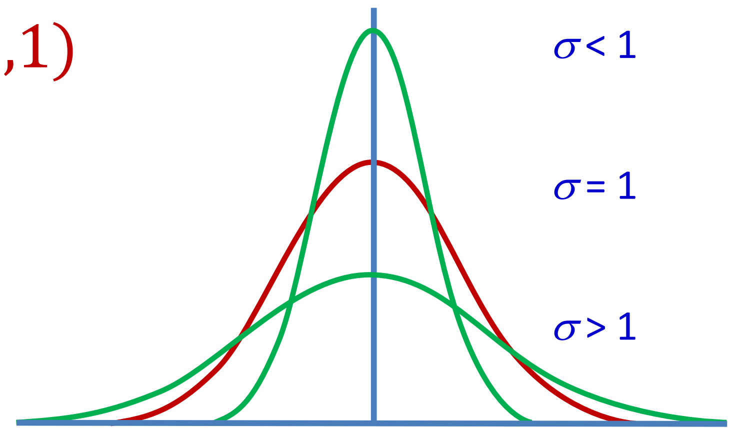
Distribución Normal

- Al ser continua, para cada par de parámetros μ y σ tenemos una curva de Gauss diferente, pero con una sencilla transformación cualquier distribución normal puede convertirse en la curva de Gauss estándar que llamamos tipificada.

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = Z \sim N(0,1)$$





- Esto permite que con una única tabla podamos calcular la probabilidad de cualquier distribución normal.

Tabla Normal

$$\text{Normal } N(0,1): \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.54							53
0.2	.5793	.5832	.58							41
0.3	.6179	.6217	.62							17
0.4	.6554	.6591	.66							79
0.5	.6915	.6950	.69							24
0.6	.7257	.7291	.73							49
0.7	.7580	.7611	.76							52
0.8	.7881	.7910	.79							33
0.9	.8159	.8186	.82							89
1.0	.8413	.8438	.84							21
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
...										
3.9	$.9^452$	$.9^454$	$.9^456$	$.9^458$	$.9^459$	$.9^461$	$.9^463$	$.9^464$	$.9^466$	$.9^467$
4.0	$.9^468$	$.9^470$	$.9^471$	$.9^472$	$.9^473$	$.9^474$	$.9^475$	$.9^476$	$.9^477$	$.9^478$

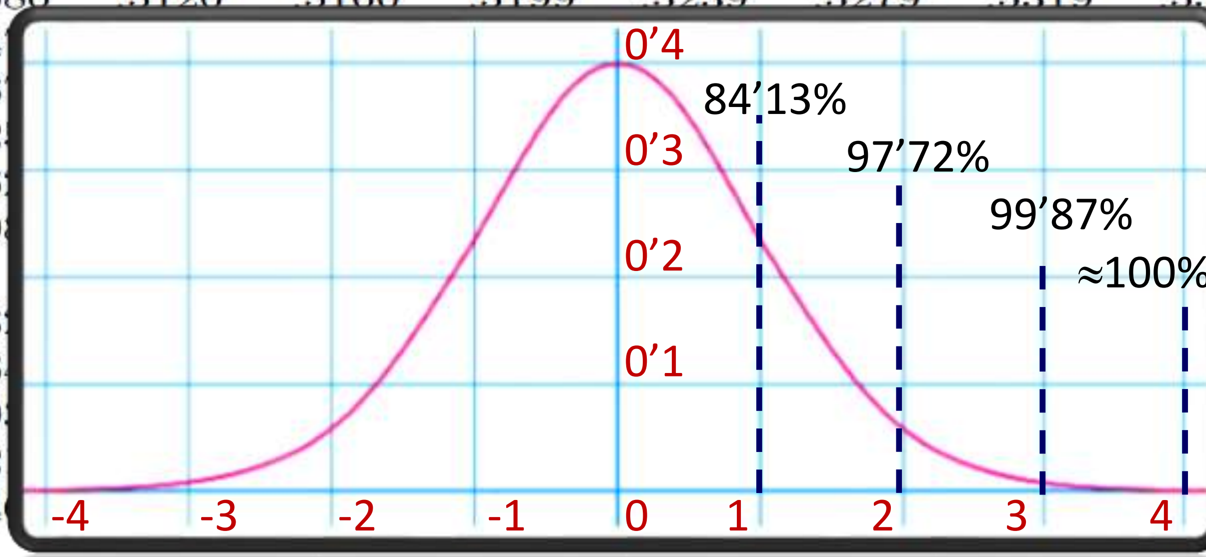


Tabla Normal

- La tabla representa la función de distribución $\Phi(z) = \mathrm{P}(Z \leq z)$ de una v.a. normal tipificada $Z \sim N(0,1)$ (la *fd* se denota por ϕ).
- El valor de z abarca desde 0 hasta 4'09, ya que a partir de 4 tenemos que $\Phi(4) \approx 1$.
- Los valores negativos no son necesarios dada la simetría por la que $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$. Si se realiza una búsqueda inversa, una probabilidad menor que 0'5 indica que z es negativo.
- z se representa con 2 decimales, el primero en la 1ª columna y el segundo en la 1ª fila. Si z tiene mayor precisión, se puede usar interpolación lineal.
- La precisión es de 4 dígitos hasta z = 3'09, y mayor hasta 4'09 indicando con un exponente el nº de nueves.

Problema 5.7

- Sea $X \sim N(15, 2)$.
  - a) Calcular $P(X \leq 16)$.
  - b) Calcular $P(X > 20)$.
  - c) Calcular $P(X \leq 11)$.

Problema 5.8

- El peso de los niños de dos años sigue una distribución normal de media 12 kg y varianza 4. Calcular la probabilidad de que un niño pese entre 13’5 y 14’5 kg.

Media muestral de v.a. normales

- T$^{\text{ma}}$: Sea una muestra $\{X_i\}_1^n$ de v.a. normales e independientes $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, entonces la v.a. media muestral $\bar{X}_n = \frac{\sum_i X_i}{n}$ sigue una distribución normal de media μ y varianza σ^2/n:

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Problema 5.9

- El peso de los niños de dos años sigue una distribución normal de media 12 kg y varianza 4. Se eligen al azar 9 niños. Calcular la probabilidad de que la media muestral esté entre 13’5 y 14’5 kg.

Combinación lineal de v.a. normales

- T^ma^: Sean n v.a. X_i normales, independientes y con diferentes distribuciones $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$, entonces la combinación lineal $X = \sum_i a_i X_i + b$ sigue una distribución normal de media $\sum_i a_i \mu_i + b$ y varianza $\sum_i a_i^2 \sigma_i^2$:

$$X \sim N\left(\sum_i a_i \mu_i + b \,, \sqrt{\sum_i a_i^2 \sigma_i^2}\right)$$

- Deducir mediante las propiedades de la esperanza y la varianza.

Problema 5.10

- El peso de los niños de dos años sigue una distribución normal de media 12 kg y varianza 4. El peso de los adultos también es normal, de media 75 kg y desviación típica 10.

  En un ascensor suben 2 niños de dos años, 3 adultos y una maleta de 20 kg.

  ¿Cuál es la probabilidad de que su peso supere la carga máxima del mismo que es de 300 kg?

Teorema Central del Límite

- T^ma (TCL): Sean n v.a. X_i independientes y con la misma distribución, donde $E(X_i) = \mu$ y $Var(X_i) = \sigma^2$ finita, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq x\right) = \Phi(x)$$

- Básicamente nos dice que si tenemos un cjto. grande de v.a. (indep. y con la misma distribución) de cualquier tipo, discretas o continuas, la suma o la media muestral de las mismas se aproxima a la normal.
- En particular, tenemos (muestras grandes, n > 30):

$$\sum_{1}^{n} X_i \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Aproximaciones por la normal

- Como consecuencia del TCL, las distribuciones Binomial y Poisson se pueden aproximar por la Normal.
- **Binomial**:

$$X \sim B(n, p) \rightarrow X \sim N(np, \sqrt{npq})$$

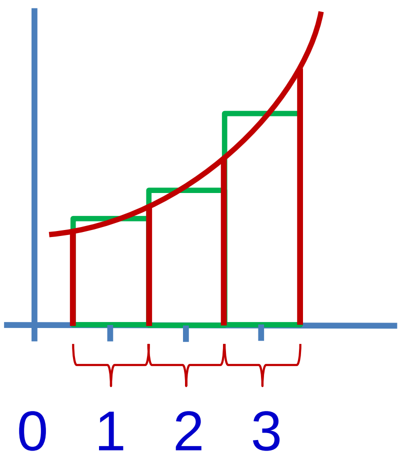
  - Ejemplo: si $X \sim B(400, 0'2)$, entonces $X \sim N(80, 8)$.
- **Poisson**:

$$X \sim P(\lambda) \rightarrow X \sim N\left(\lambda, \sqrt{\lambda}\right)$$

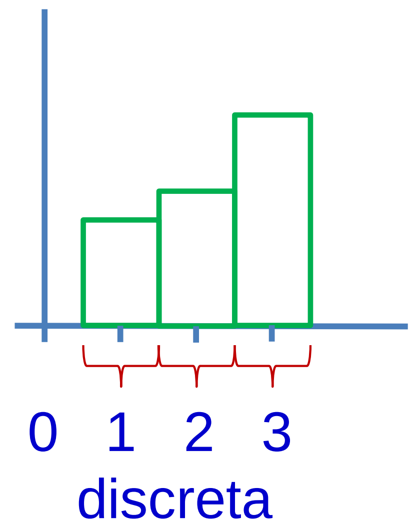
  - Ejemplo: si $X \sim P(80)$, entonces $X \sim N(80, 8'944)$.

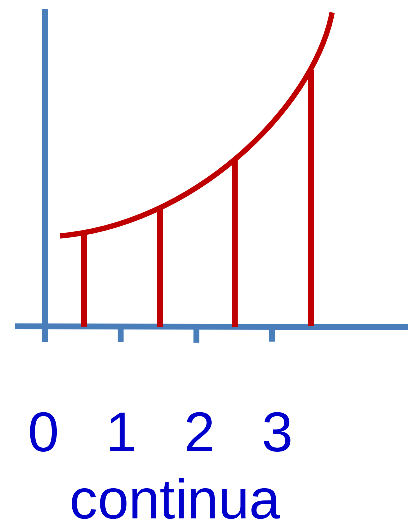
Corrección por continuidad

- Cuando se aproxima una v.a. discreta (B ó P) por una continua (N) se comete un error ya que una probabilidad para un valor discreto pasa a ser una probabilidad para un intervalo.
- En particular tenemos que en continua $P(X < a) = P(X \leq a)$ y $P(X = a) = 0$, cosa que no ocurre con una v.a. discreta.



- Ej: $P(X = 2)$
  - ➢ $P(1'5 \leq X \leq 2'5)$
- Ej: $P(X \leq 2)$
  - ➢ $P(X \leq 2'5)$





- No sólo se utiliza al pasar de discreta a continua, también se usa cuando las medidas de partida están redondeadas.

Problema 5.11

- En un estudio se estima que la probabilidad de que una persona sufra problemas coronarios en una región es de 1/6. Calcular la probabilidad de que en un pueblo de esa región con 3000 habitantes haya más de 550 personas con problemas coronarios.