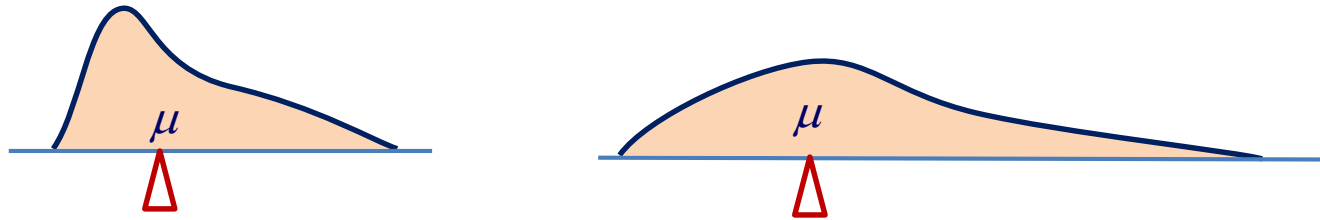


# Varianza

- La varianza es una medida de la dispersión de una v.a. en torno a su media  $\mu = E(X)$ .



- Se define como:  $\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2)$
- Se calcula como:  $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ 
  - Puede no existir (es una esperanza).
  - Siempre es positiva.
  - Desviación típica  $\sigma$** : raíz cuadrada positiva de la varianza.

# Problema 4.8

- Dada la función de cuantía:

$X$	-1	0	1	2	4
$f$	0'2	0'1	0'2	0'4	0'1

Hallar la varianza y la desviación típica.

# Problema 4.9

- Hallar la varianza y la desviación típica de la v.a.  $X$  con  $fd$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & x \in [0,2] \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

# Propiedades de la Varianza

- Propiedades:
  - $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$  → no está afectada por traslaciones.
  - Si las v.a. son independientes:

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots$$

- Varianza de la distribución uniforme:

- V.A. discreta (media aritmética):

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2$$

- V.A. continua:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

# Problema 4.10

- En una fábrica se producen neumáticos cuyo índice de degradación es una v.a.  $X$  con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x/8, & x \in [0,4] \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

El precio base del neumático se calcula como  $Y = 3X + 20$  €.  
Obtener la esperanza y la varianza de  $Y$ .

# Momentos

- Los momentos son parámetros que permiten caracterizar la distribución aportando información sobre la misma.
- Momentos respecto al origen
  - Dada una v.a.  $X$ , momento de orden  $k$  respecto al origen es:  
$$E(X^k)$$
    - Momento de orden 1 es la media:  $\mu = E(X)$ .
- Momentos centrales
  - Dada una v.a.  $X$  con media  $\mu$ , momento central de orden  $k$  es:  
$$E((X - \mu)^k)$$
    - Momento central de orden 2 es la varianza:  $\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2)$

# Función generatriz de momentos

- Dada una v.a.  $X$ , se llama f.g.m. a la función real de variable  $t$ :

$$\psi(t) = E(e^{tX})$$

- Si la f.g.m. existe en un entorno de 0, entonces es derivable en  $t = 0$  un número arbitrario de veces:

$$\psi^{(k)}(0) = E(X^k)$$

- La f.g.m. por tanto permite generar los momentos respecto al origen:
  1. Obtener la f.g.m. calculando la esperanza (debemos conocer la función de cuantía o densidad).
  2. Realizamos derivadas sucesivas hasta el orden del momento buscado.
  3. Sustituimos en las derivadas  $t = 0$  obteniendo los momentos.

# Problema 4.11


- Dada la función de cuantía:

$X$	-1	0	1	2	4
$f$	0'2	0'1	0'2	0'4	0'1


Hallar la esperanza y la varianza usando la f.g.m.

$$\psi(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x) = e^{-t} \cdot 0'2 + e^{0t} \cdot 0'1 + e^t \cdot 0'2 + e^{2t} \cdot 0'4 + e^{4t} \cdot 0'1$$

$$\psi'(t) = -0'2e^{-t} + 0'2e^t + 0'8e^{2t} + 0'4e^{4t}$$


$$E(X) = \psi'(0) = -0'2 + 0'2 + 0'8 + 0'4 = 1'2$$

$$\psi''(t) = 0'2e^{-t} + 0'2e^t + 1'6e^{2t} + 1'6e^{4t}$$


$$E(X^2) = \psi''(0) = 0'2 + 0'2 + 1'6 + 1'6 = 3'6$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3'6 - 1'2^2 = 2'16$$



# Propiedades de la f.g.m.

- Sea una v.a. con f.g.m.  $\psi_X$  y sea  $Y = aX + b$ , entonces

$$\psi_Y(t) = e^{bt} \psi_X(at)$$

- Sean  $n$  v.a. independientes  $X_i$  con f.g.m.  $\psi_i$  y sea  $Y$  la variable suma  $Y = X_1 + \dots + X_n$  con f.g.m.  $\psi_Y$ , entonces

$$\psi_Y(t) = \prod_{i=1}^n \psi_i(t)$$

- Si las f.g.m. de dos v.a.  $X$  e  $Y$  son idénticas en un entorno de 0, entonces las distribuciones de  $X$  e  $Y$  son idénticas.
  - Básicamente, si dos v.a. tienen los mismos momentos, entonces tienen la misma distribución.