

Sistema completo de sucesos

- Un cjto. de sucesos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ forma un sistema completo de sucesos (SCS), o una partición del espacio muestral Ω , si cumple:
 - $A_i \neq \emptyset, \forall i$
 - $A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j$
 - $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

Problema 2.18

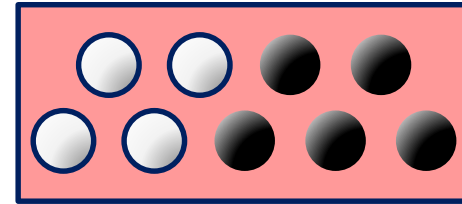
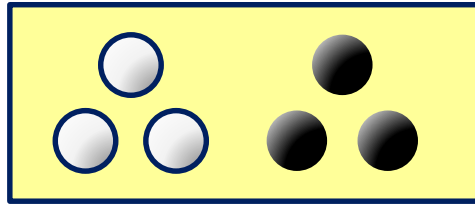
- De una baraja de 40 cartas se extrae una al azar. Los sucesos $O = \{\text{obtener oro}\}$, $C = \{\text{obtener copa}\}$, $E = \{\text{obtener espada}\}$ y $B = \{\text{obtener basto}\}$, forman un Sistema Completo de Sucesos. ¿Por qué?

Problema 2.19

- En el lanzamiento de dos dados, los sucesos
 $A = \{\text{obtener la misma cara en ambos lanzamientos}\}$
 $B = \{\text{obtener distinta cara y suma impar}\}$
 $C = \{\text{obtener distinta cara y suma par}\}$
forman un Sistema Completo de Sucesos. ¿Por qué?
- Sin tener en cuenta el orden, podemos obtener:
 $A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$
 $B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,3), (2,5), (3,4), (3,6), (4,5), (5,6)\}$
 $C = \{(1,3), (1,5), (2,4), (2,6), (3,5), (4,6)\}$

Problema 2.20 (enunciado)

- Una urna contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras; otra urna contiene 4 blancas y 5 negras. Se elige una **urna al azar** y se extrae **una bola**. **Probabilidad** de que sea **blanca**.



- Para resolverlo debemos tener en cuenta la probabilidad de escoger cada uno de los grupos.
- Secuencia de sucesos:
 - 1º. Escoger urna (cjto. de sucesos que forman un SCS)
 - 2º. Elegir bola (otro cjto. de sucesos)

T^{ma} de Probabilidad Total

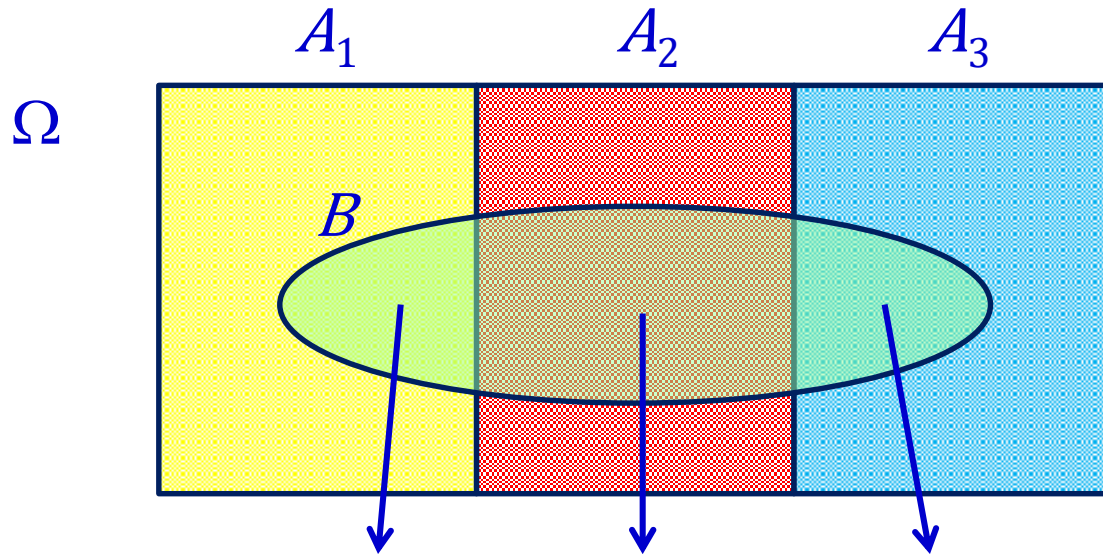
- Sea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos (SCS), y sea B un suceso cualquiera; entonces

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

- Demostración:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) = P\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n \underbrace{(B \cap A_i)}_{\text{incompatibles}}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i) \end{aligned}$$

T^{ma} de Probabilidad Total



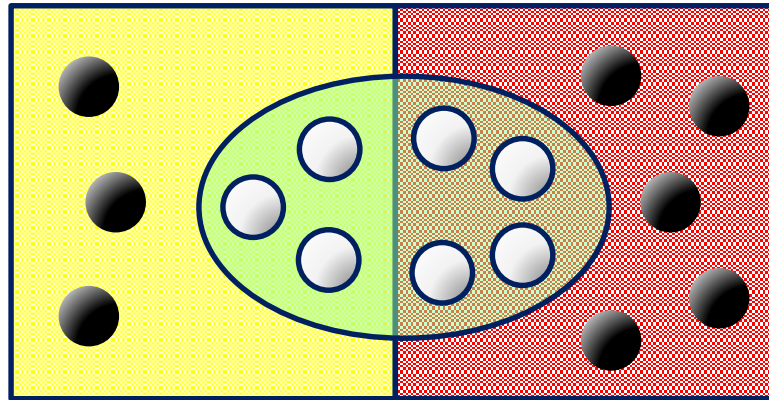
$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)$$

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$$

Problema 2.20 (solución)

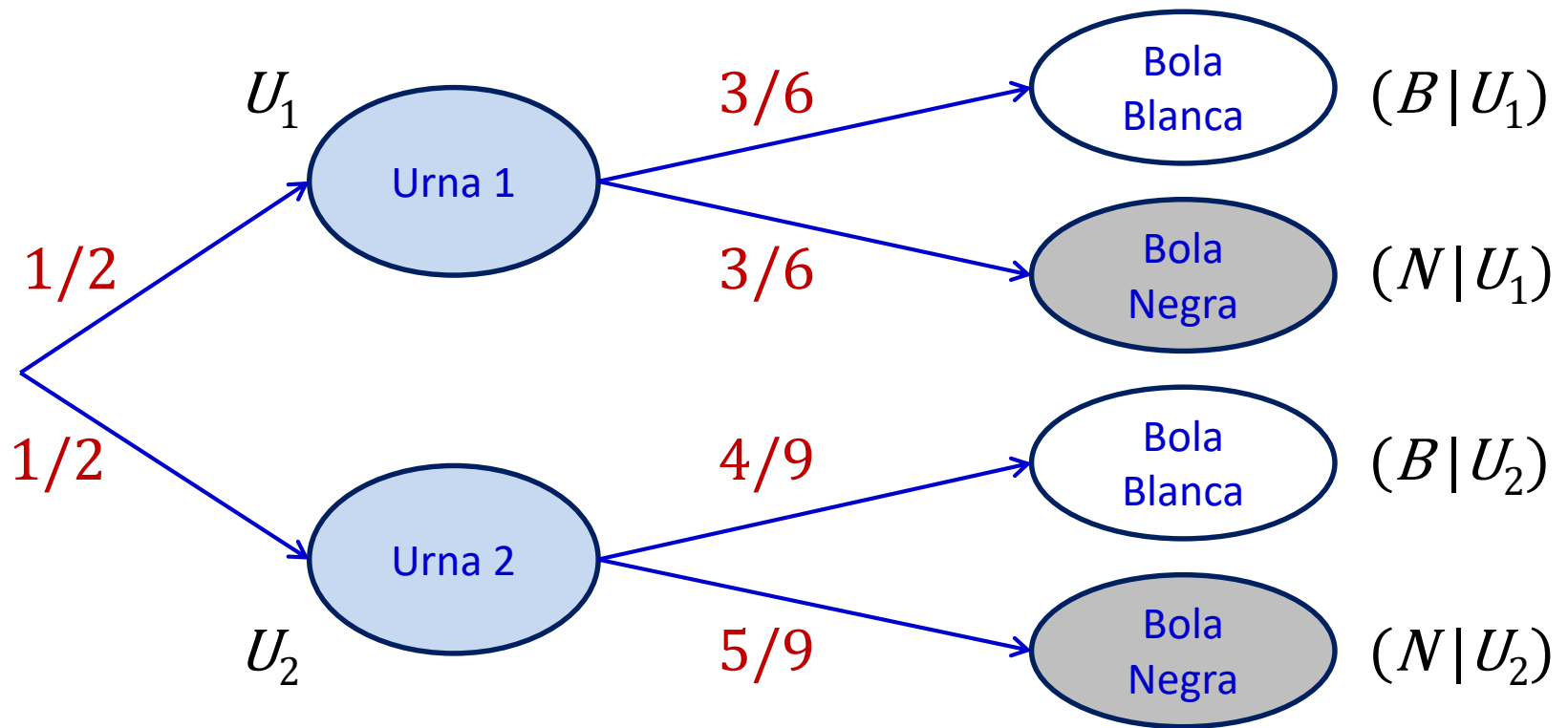
- Una urna contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras; otra urna contiene 4 blancas y 5 negras. Se elige una **urna al azar** y se extrae **una bola**. **Probabilidad** de que sea **blanca**.



- $U_1 = \{\text{Urna 1}\}$, $U_2 = \{\text{Urna 2}\}$, $B = \{\text{Elegir bola blanca}\}$
 - U_1 y U_2 forman un SCS.

Problema 2.20 (cont.)

- Otra forma de verlo es mediante un árbol:



Problema 2.21

- Se tienen tres conjuntos de números impares: del 1 al 7, del 9 al 21 y del 23 al 39. Elegimos aleatoriamente un conjunto, y de éste un número. Calcular la **probabilidad** de que el número escogido sea **primo**.
 - $C_1 = \{1, 3, 5, 7\}$; $C_2 = \{9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$;
 $C_3 = \{23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}$; $P = \{n^\circ \text{ primo}\}$

T^{ma} de Bayes

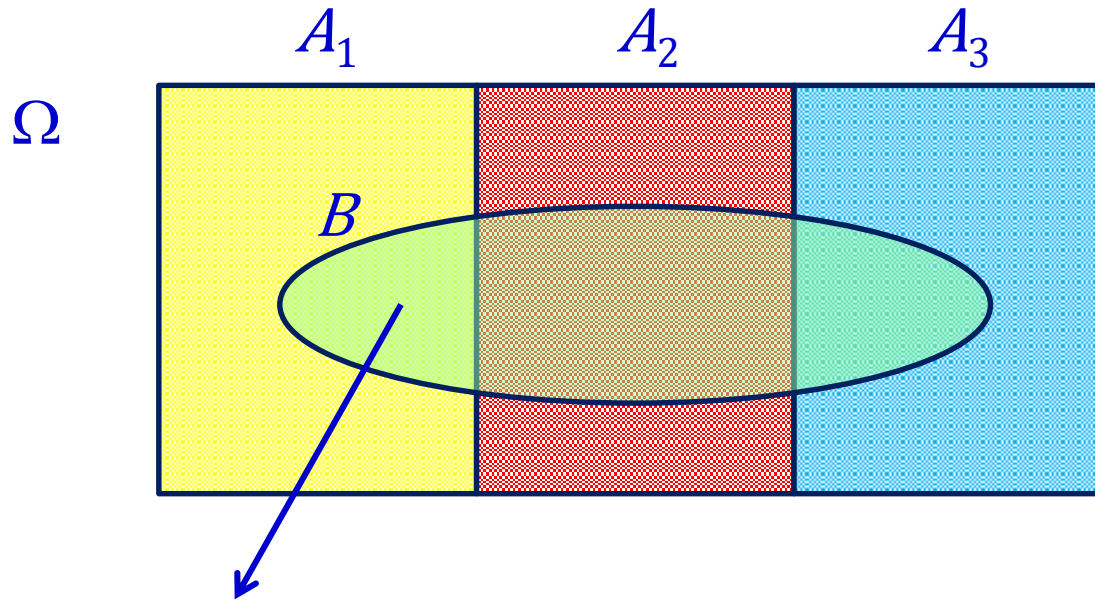
- Sea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos (SCS), y sea B un suceso tal que $P(B) > 0$; entonces

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

- Demostración:
 - Usando el desarrollo de probabilidad condicional y el T^{ma} de probabilidad total:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

T^{ma} de Bayes

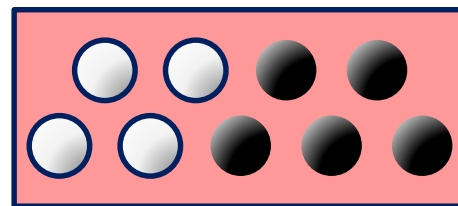
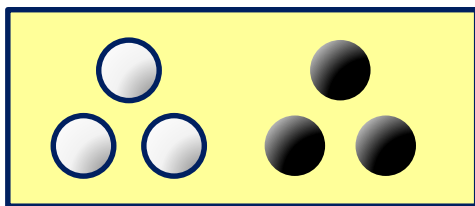


$$P(A_1|B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)}$$

- Bayes se aplica normalmente cuando la secuencia habitual de sucesos aparece invertida (se pregunta la prob. de uno de los sucesos del SCS).

Problema 2.22 (del 2.20)

- Una urna contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras; otra urna contiene 4 blancas y 5 negras. Se elige una **urna al azar** y se extrae **una bola**. Si la bola ha salido blanca, hallar la **probabilidad** de que se haya sacado de la segunda urna.



Problema 2.23 (del 2.21)

- Se tienen tres conjuntos de números impares: del 1 al 7, del 9 al 21 y del 23 al 39. Elegimos aleatoriamente un conjunto, y de éste un número. Si el **número** ha salido **primo**, calcular la **probabilidad** de que se haya obtenido del **segundo conjunto**.
 - $C_1 = \{1, 3, 5, 7\}$; $C_2 = \{9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$;
 $C_3 = \{23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}$; $P = \{n^\circ \text{ primo}\}$

Problema 2.24

- En una ciudad hay un millón de habitantes y entre ellos 100 terroristas fichados de los que se desconoce su paradero. Una cámara de seguridad en el metro detecta caras con un error del 1%. Si la cámara detecta un terrorista, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo sea?
 - Sesgo cognitivo.