Sistema completo de sucesos

• Un cjto. de sucesos $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ forma un sistema completo de sucesos (SCS), o una partición del espacio muestral Ω , si cumple:

- $A_i \neq \emptyset$, $\forall i$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$
- $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

• De una baraja de 40 cartas se extrae una al azar. Los sucesos $O = \{\text{obtener oro}\}, C = \{\text{obtener copa}\},$ $E = \{\text{obtener espada}\}\ y\ B = \{\text{obtener basto}\},$

forman un Sistema Completo de Sucesos. ¿Por qué?

En el lanzamiento de dos dados, los sucesos

 $A = \{\text{obtener la misma cara en ambos lanzamientos}\}$

 $B = \{ obtener distinta cara y suma impar \}$

 $C = \{ \text{obtener distinta cara y suma par} \}$

forman un Sistema Completo de Sucesos. ¿Por qué?

Sin tener en cuenta el orden, podemos obtener:

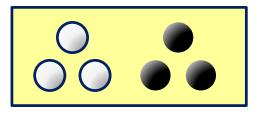
$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

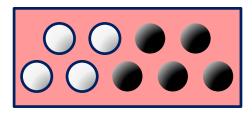
$$B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,3), (2,5), (3,4), (3,6), (4,5), (5,6)\}$$

$$C = \{(1,3), (1,5), (2,4), (2,6), (3,5), (4,6)\}$$

Problema 2.20 (enunciado)

Una urna contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras; otra urna contiene 4 blancas y 5 negras. Se elige una urna al azar y se extrae una bola. Probabilidad de que sea blanca.





- Para resolverlo debemos tener en cuenta la probabilidad de escoger cada uno de los grupos.
- Secuencia de sucesos:
 - 1º. Escoger urna (cjto. de sucesos que forman un SCS)
 - 2º. Elegir bola (otro cjto. de sucesos)

T^{ma} de Probabilidad Total

• Sea $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ un sistema completo de sucesos (SCS), y sea B un suceso cualquiera; entonces

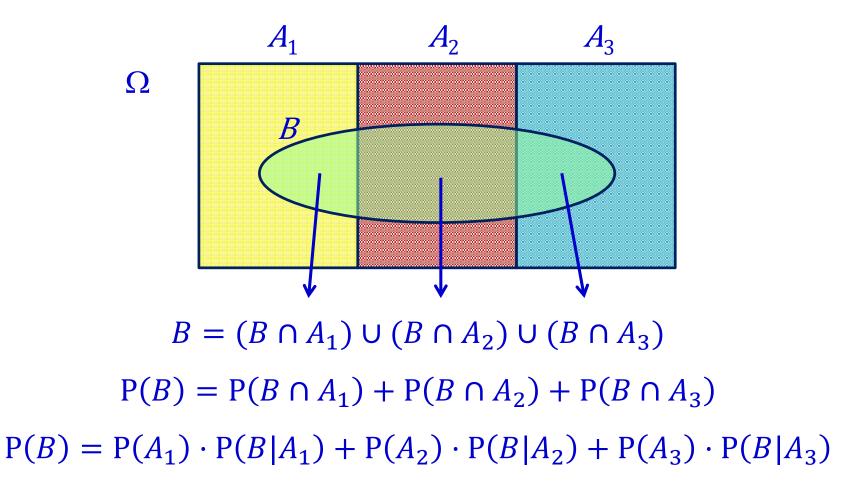
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Demostración:

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)) = P(B) = P(B)$$

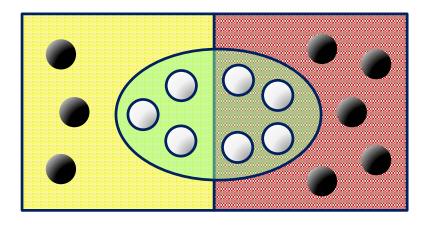
Universidad de Alicante

T^{ma} de Probabilidad Total



Problema 2.20 (solución)

 Una urna contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras; otra urna contiene 4 blancas y 5 negras. Se elige una urna al azar y se extrae una bola. Probabilidad de que sea blanca.

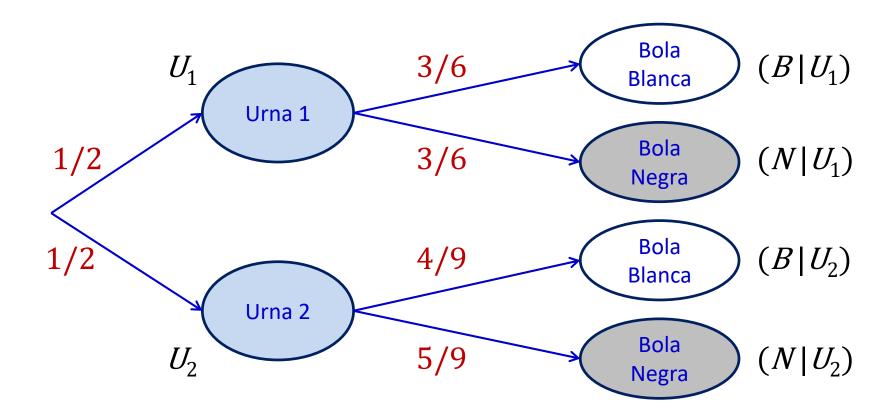


- $U_1 = \{ \text{Urna 1} \}$, $U_2 = \{ \text{Urna 2} \}$, $B = \{ \text{Elegir bola blanca} \}$
 - U_1 y U_2 forman un SCS.

Universidad de Alicante

Problema 2.20 (cont.)

Otra forma de verlo es mediante un árbol:



 Se tienen tres conjuntos de números impares: del 1 al 7, del 9 al 21 y del 23 al 39. Elegimos aleatoriamente un conjunto, y de éste un número. Calcular la probabilidad de que el número escogido sea primo.

```
• C_1 = \{1, 3, 5, 7\}; C_2 = \{9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\};

C_3 = \{23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}; P = \{n^{\circ} \text{ primo}\}
```

T^{ma} de Bayes

• Sea $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ un sistema completo de sucesos (SCS), y sea B un suceso tal que P(B) > 0; entonces

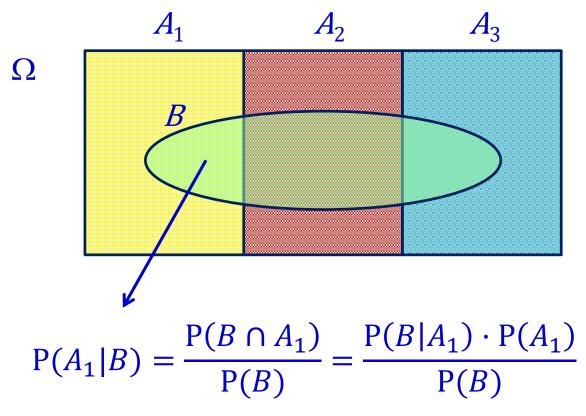
$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

- Demostración:
 - Usando el desarrollo de probabilidad condicional y el T^{ma} de probabilidad total:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

Universidad de Alicante

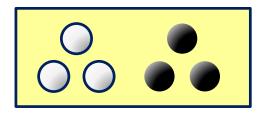
T^{ma} de Bayes

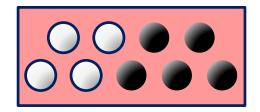


Bayes se aplica normalmente cuando la secuencia habitual de sucesos aparece invertida (se pregunta la prob. de uno de los sucesos del SCS).

Problema 2.22 (del 2.20)

 Una urna contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras; otra urna contiene 4 blancas y 5 negras. Se elige una urna al azar y se extrae una bola. Si la bola <u>ha salido blanca</u>, hallar la probabilidad de que se haya sacado de la <u>segunda urna</u>.





Problema 2.23 (del 2.21)

 Se tienen tres conjuntos de números impares: del 1 al 7, del 9 al 21 y del 23 al 39. Elegimos aleatoriamente un conjunto, y de éste un número. Si el número ha salido primo, calcular la probabilidad de que se haya obtenido del segundo conjunto.

```
• C_1 = \{1, 3, 5, 7\}; C_2 = \{9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\};

C_3 = \{23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}; P = \{n^{\circ} \text{ primo}\}
```

- En una ciudad hay un millón de habitantes y entre ellos 100 terroristas fichados de los que se desconoce su paradero. Una cámara de seguridad en el metro detecta caras con un error del 1%. Si la cámara detecta un terrorista, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo sea?
 - Sesgo cognitivo.