Relaciones de recurrencia "divide y vencerás"

La relación de recurrencia que queremos resolver es:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ af(\frac{n}{a}) + n^k & n > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Evidentemente suponemos que $a \in \mathbb{N}, a > 1$ (no tiene sentido que el problema no se reduzca o que aumente), y que $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

$$\begin{aligned} f(n) &= af\left(\frac{n}{a}\right) + n^k & (2)\\ &= a\left[af\left(\frac{n}{a^2}\right) + \left(\frac{n}{a}\right)^k\right] + n^k & (3)\\ &= a^2 f\left(\frac{n}{a^2}\right) + a\left(\frac{n}{a}\right)^k + n^k & (4)\\ &\dots & (5)\\ &= a^j f\left(\frac{n}{a^j}\right) + n^k \sum_{i=0}^{j-1}\left(\frac{1}{a^{k-1}}\right)^i & (6) \end{aligned}$$

Sumamos ahora la serie geométrica de razón $r = \frac{1}{a^{k-1}}$ con la fórmula general

$$\sum_{i=0}^{j-1} r^i = \frac{1 - r^j}{1 - r} \tag{7}$$

¡Cuidado! Esta fórmula no sirve si $r = 1$, pero en este caso la suma vale trivialmente j. Sustituyendo en la ecuación (6):

$$\begin{aligned} f(n) &= a^j f\left(\frac{n}{a^j}\right) + n^k \frac{1 - \left(\frac{1}{a^{k-1}}\right)^j}{1 - \frac{1}{a^{k-1}}} & & (8)\\ &= n + n^k \frac{1 - \frac{1}{n^{k-1}}}{1 - \frac{1}{a^{k-1}}} & \text{Puesto que hay que llegar hasta } a^j = n & \quad (9)\\ &= n + a^k \frac{n^k - n}{a^k - a} & & (10)\\ &= \frac{a^k n^k - na}{a^k - a} & \text{(Comprobado, } \texttt{wolframalpha.com}\text{)} & \quad (11) \end{aligned}$$

Hay que distinguir tres casos:

- $k > 1$: el término dominante es n^k
- $k = 1$: En este caso la razón la de la serie geométrica es $r = \frac{1}{a^{k-1}} = 1$; por eso la fórmula utilizada no es válida. En este caso, la suma de la serie es j; por eso, si volvemos a la ecuación (6) tendremos:

$$
\begin{aligned}
f(n) &= a^j f\left(\frac{n}{a^j}\right) + n^k j && (12)\\
&= n + n^k \log_a(n) \qquad \text{puesto que } a^j = n \text{ y } j = \log_a(n) && (13)
\end{aligned}
$$

  Por eso, en este caso el término dominante es: $n^k \log_a(n)$
- $k < 1$: el término dominante es n

Para ampliar...

La relación de recurrencia más general:

$$
f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ af(\frac{n}{b}) + g(n) & n > 1 \end{cases} \tag{14}
$$

donde se cumple que $g(n^p) = g(n)^p$ la encontraréis resuelta de manera muy similar en el apéndice D.1 del libro *Introducció a l'anàlisi i disseny d'algorismes* de F.J. Ferri, J.V. Albert y G. Martín (Universitat de València, 1998).