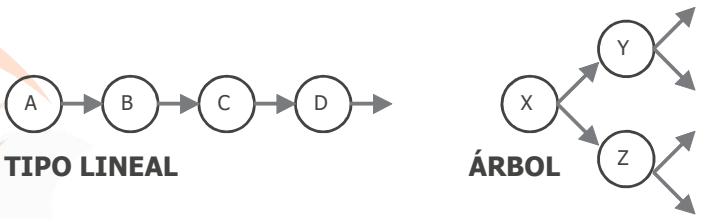
TEMA 3
El tipo árbol

PROGRAMACIÓN Y ESTRUCTURAS DE DATOS

Tipo árbol

1. Definiciones generales (I)

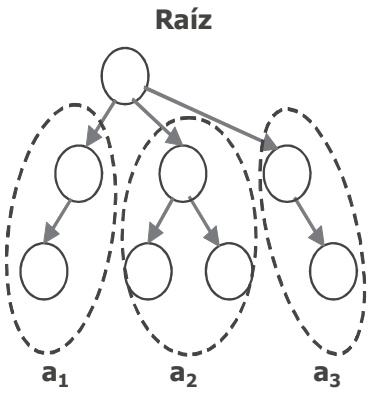
- La estructura de datos árbol aparece porque los elementos que lo constituyen mantienen una estructura jerárquica, obtenida a partir de estructuras lineales, al eliminar el requisito de que cada elemento tiene como máximo un sucesor:



- Los elementos de los árboles se llaman nodos

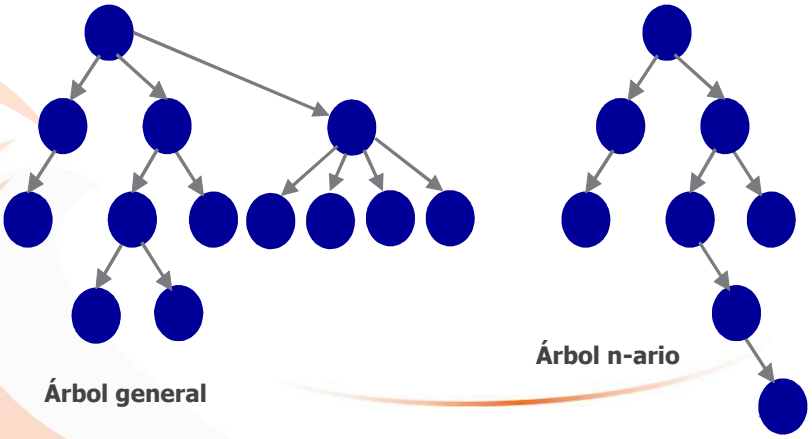
1. Definiciones generales (II)

- Definición inductiva de árbol:
  - un único nodo es un **árbol** (**raíz**)
  - dados *n* árboles a_1, ..., a_n se puede construir uno nuevo como resultado de enraizar un nuevo nodo con los *n* árboles. Los árboles a_i pasan a ser **subárboles** del nuevo árbol y el nuevo nodo se convierte en raíz del nuevo árbol
- Árbol vacío o nulo ⇒ 0 nodos



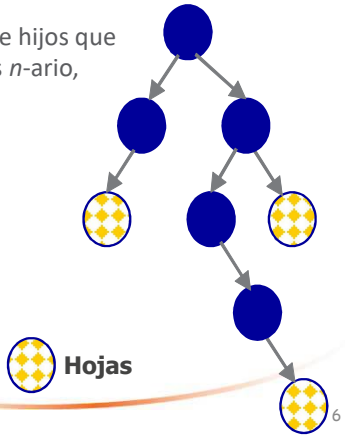
1. Definiciones generales (III)

- El proceso de enraizar puede involucrar:
  - un nº indeterminado de subárboles (**árboles generales**)
  - o bien, un nº máximo *n* de subárboles (**árboles n-arios**)



1. Definiciones generales (IV)

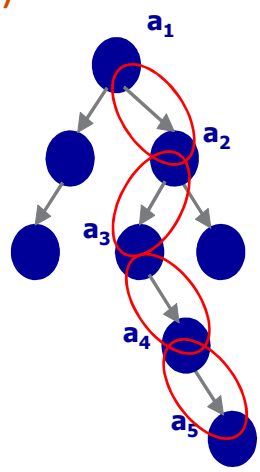
- Un árbol n-ario con *n* = 2 se denomina **árbol binario**
- La información almacenada en los nodos del árbol se denomina **etiqueta**
- Las **hojas** son árboles con un solo nodo (árboles binarios: árbol compuesto por una raíz y 2 subárboles vacíos)
- **Grado** de un árbol es el número máximo de hijos que pueden tener sus subárboles (si el árbol es *n*-ario, el grado es *n*)



1. Definiciones generales (V)

- Camino:
  - es una secuencia $a_1, ..., a_s$ de árboles tal que, $\forall\, i \in \{1... s - 1\}$, a_{i+1} es subárbol de a_i
  - el número de subárboles de la secuencia menos uno, se denomina **longitud del camino**

    (Consideraremos que existe un camino de longitud 0 de todo subárbol a sí mismo)



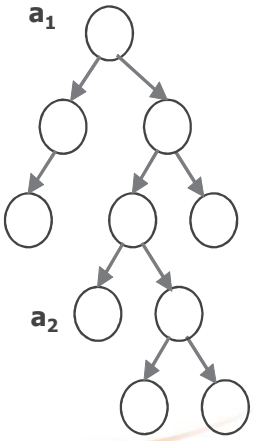
$\forall\, i \in \{1... 4\}$ a_{i+1} es subárbol de a_i
Longitud = 5 - 1 = 4

1. Definiciones generales (VI)

- a_1 es **ascendiente** de a_2 (y a_2 es **descendiente** de a_1) si existe un camino $a_1, ..., a_2$

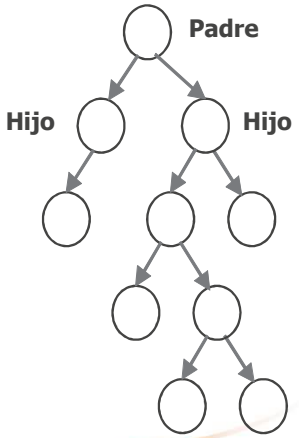
  (Según la definición de camino, todo subárbol es ascendiente/descendiente de sí mismo)

- Los ascendientes (descendientes) de un árbol, excluido el propio árbol, se denominan **ascendientes (descendientes) propios**



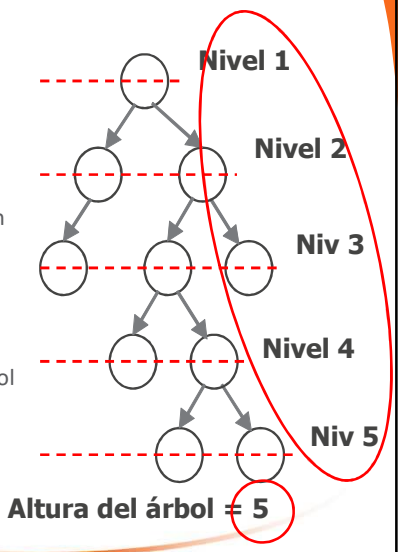
1. Definiciones generales (VII)

- **Padre** es el primer ascendiente propio, si existe, de un árbol
- **Hijos** son los primeros descendientes propios, si existen, de un árbol
- **Hermanos** son subárboles con el mismo padre
- **Profundidad** de un subárbol es la longitud del único camino desde la raíz a dicho subárbol



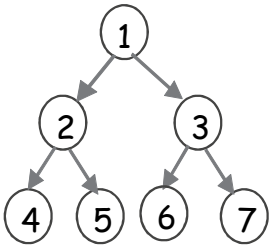
1. Definiciones generales (VIII)

- **Nivel** de un nodo:
  - el nivel de un árbol vacío es 0
  - el nivel de la raíz es 1
  - si un nodo está en el nivel *i*, sus hijos están en el nivel *i + 1*
- **Altura** (**profundidad**) de un árbol:
  - es el máximo nivel de los nodos de un árbol

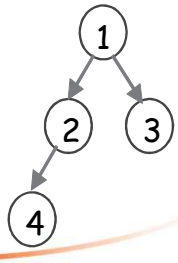


1. Definiciones generales (IX)

- **Árbol lleno** es un árbol en el que todos sus subárboles tienen *n* hijos (siendo *n* el grado del árbol) y todas sus hojas tienen la misma profundidad



- **Árbol completo** es un árbol cuyos nodos corresponden a los nodos numerados (la numeración se realiza desde la raíz hacia las hojas y, en cada nivel, de izquierda a derecha) de 1 a *n* en el árbol lleno del mismo grado. **Todo árbol lleno es completo**



2. Árboles binarios

- Definición de árbol binario y propiedades
- Especificación algebraica
- Recorridos
- Enriquecimiento de la especificación
- Representación secuencial y enlazada
- Otras operaciones interesantes
- Ejercicios

2. Árboles binarios

DEFINICIÓN

- Un árbol binario es un conjunto de elementos del mismo tipo tal que:
  - o bien es el conjunto vacío, en cuyo caso se denomina **árbol vacío** o **nulo**
  - o bien no es vacío, y por tanto existe un elemento distinguido llamado **raíz**, y el resto de los elementos se distribuyen en dos subconjuntos disjuntos, cada uno de los cuales es un árbol binario llamados, respectivamente **subárbol izquierdo** y **subárbol derecho** del árbol original

2. Árboles binarios

PROPIEDADES (I)

- Propiedades:
  - El máximo número de nodos en un **nivel i** de un árbol binario es $N(i) = 2^{i-1}$, $i \geq 1$

    Demostración

    Base inducción

    nivel 1 (raíz): $N(1) = 2^{1-1} = 2^0 = 1$ (se cumple)

    Paso inductivo

    Se desea probar $N(i-1) \Rightarrow N(i)$, es decir, a partir de la suposición "temporal" de que N es cierta para $i-1$ debemos probar que es cierta para i

    nivel $i-1$: $N(i-1) = 2^{(i-1)-1} = 2^{i-2}$ (suponemos cierto)

    nivel i : $N(i) = N(i-1) * 2 = 2^{i-2} * 2 = 2^{i-2+1} = 2^{i-1}$

2. Árboles binarios

PROPIEDADES (II)

– El máximo número de nodos en un **árbol binario de altura k** es

$N(k) = 2^k - 1, k \geq 1$

Demostración

nivel 1: $2^{1-1} = 1$ nodo

nivel 2: $2^{2-1} = 2$ nodos

nivel 3: $2^{3-1} = 4$ nodos

. . .

nivel k: 2^{k-1} nodos

Altura $k = 2^{1-1} + 2^{2-1} + \ldots + 2^{k-1} =$

(S.P.G. (r = 2, $a_1 = 2^0$, n = k))

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} & ; r \neq 1 \\ na_1 & ; r = 1 \end{cases}$$

$= 1 (2^k - 1) / 2 - 1 = 2^k - 1$

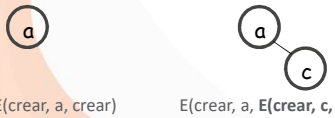
2. Árboles binarios

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (I)

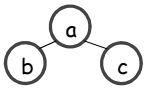
MODULO ARBOLES_BINARIOS
USA BOOL, NATURAL

PARAMETRO TIPO item
OPERACIONES A
error_item( ) → item
FPARAMETRO
TIPO arbin
OPERACIONES
crea_arbin( ) → arbin
enraizar(arbin, item, arbin) → arbin
raiz(arbin) → item
esvacio(arbin) → bool
hijoiz, hijode(arbin) → arbin
altura(arbin) → natural

VAR i, d: arbin; x: item;
ECUACIONES
raiz(crea_arbin( )) = error_item( )
raiz(enraizar(i, x, d)) = x
hijoiz(crea_arbin( )) = crea_arbin( )
hijoiz(enraizar(i, x, d)) = i
hijode(crea_arbin( )) = crea_arbin( )
hijode(enraizar(i, x, d)) = d
esvacio(crea_arbin( )) = CIERTO
esvacio(enraizar(i, x, d)) = FALSO
altura(crea_arbin( )) = 0
altura(enraizar(i, x, d)) =
1 + max (altura(i), altura(d))
FMODULO



E(crear, a, crear) E(crear, a, **E(crear, c, crear)**)

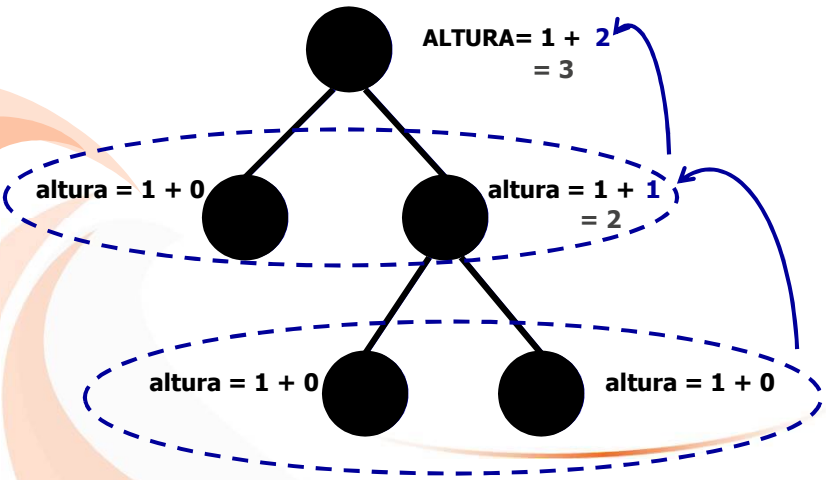


E(**E(crear, b, crear)** a, E(crear, c, crear))

2. Árboles binarios

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (II)

altura(crea_arbin( )) = 0
altura = 1 + max(altura(hijoiz), altura(hijode))



2. Árboles binarios

EJERCICIOS *nodosHoja*

2) Sea un árbol binario. Especificar la sintaxis y semántica de las operaciones:

nodosHoja, que devuelve el número de nodos hoja de un árbol binario

2. Árboles binarios

EJERCICIOS *simetricos* y *todos*

3) Sea un árbol binario cuyas etiquetas son números naturales. Especificar la sintaxis y semántica de las operaciones:

a) **simétricos**, que comprueba que 2 árboles binarios son simétricos

b) **todos**, que calcula la suma de todas las etiquetas de los nodos del árbol

Nota: Especificar la sintaxis de todas las operaciones de árboles binarios usadas

2. Árboles binarios

EJERCICIOS *transforma*

4) Se define la operación transforma que recibe un árbol binario y devuelve un árbol binario. Explicar qué hace esta operación detallando el comportamiento de las dos ecuaciones que aparecen a continuación:

VAR *i, d*: arbin; *x*: item,

transforma(crea_arbin( )) = crea_arbin( )

transforma(enraizar*(i, x, d*)) =

enraizar(transforma(*i*), *x* + todos(*i*) + todos(*d*), transforma(*d*))

Nota: La operación *todos* calcula la suma de todas las etiquetas de los nodos del árbol (números naturales)

2. Árboles binarios

EJERCICIOS *quita_hojas*

5) Utilizando exclusivamente las operaciones *crea_arbin()* y *enraizar(arbin, item, arbin)* definir la sintaxis y la semántica de la operación quita_hojas que actúa sobre un árbol binario y devuelve el árbol binario original sin sus hojas

2. Árboles binarios

EJERCICIOS *dos_hijos*

6) Especificar la sintaxis y la semántica de la operación dos_hijos que actúa sobre un árbol binario y devuelve CIERTO si todos los nodos tienen dos hijos (excepto los nodos hoja)

2. Árboles binarios

RECORRIDOS

- Recorrer un árbol es visitar cada nodo del árbol una sola vez
- Recorrido de un árbol es la lista de etiquetas del árbol ordenadas según se visitan los nodos
- Se distinguen dos categorías básicas de recorrido:
  - **recorridos en profundidad**
  - **recorridos en anchura** o **por niveles**

2. Árboles binarios

RECORRIDOS EN PROFUNDIDAD (I)

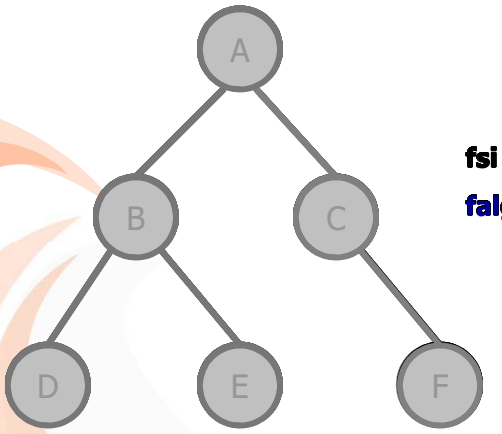
- Si representamos por I: ir hacia la izquierda, R: visitar o escribir el item, D: ir hacia la derecha, existen 6 posibles formas de recorrido en profundidad: RID, IRD, IDR, RDI, DRI y DIR. Si sólo queremos hacer los recorridos de izquierda a derecha quedan 3 formas de recorrido:

  1. **RID** o **preorden** (orden previo)
  2. **IRD** o **inorden** (orden simétrico)
  3. **IDR** o **postorden** (orden posterior)

  (El recorrido en postorden (**DIR**) es el inverso especular del recorrido preorden (**RID**), es decir, se recorre el árbol en preorden, visitando primero el subárbol derecho antes que el izquierdo, y se considera la lista resultante como el inverso de la solución)

2. Árboles binarios

RECORRIDOS EN PROFUNDIDAD (II)




```
algoritmo preorden ( a : arbin )
si ( no esvacio( a ) ) entonces
        escribe ( raiz ( a ) )
        preorden ( hijoiz ( a ) )
        preorden ( hijode ( a ) )
fsi
falgoritmo
```

PREORDEN: A B D E C F **(RID)**

2. Árboles binarios

RECORRIDOS EN PROFUNDIDAD (III)

```
algoritmo inorden ( a : arbin )
si ( no esvacio( a ) ) entonces
        inorden ( hijoiz ( a ) )
        escribe ( raiz ( a ) )
        inorden ( hijode ( a ) )
fsi
falgoritmo
```

```
algoritmo postorden ( a : arbin )
si ( no esvacio( a ) ) entonces
        postorden ( hijoiz ( a ) )
        postorden ( hijode ( a ) )
        escribe ( raiz ( a ) )
fsi
falgoritmo
```

2. Árboles binarios

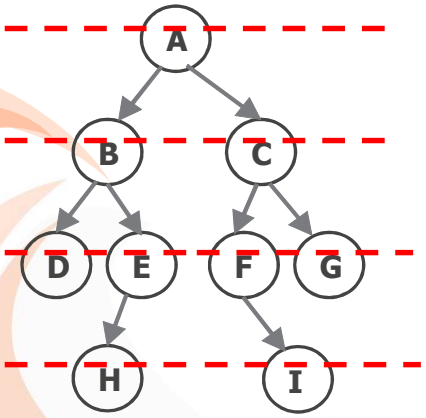
RECORRIDO EN ANCHURA (NIVELES)

- Consiste en visitar los nodos desde la raíz hacia las hojas, y de izquierda a derecha dentro de cada nivel

```
algoritmo niveles ( a : arbin )
var c: cola de arbin; aux: arbin; fvar
encolar(c, a)
mientras no esvacia(c) hacer
    aux := cabeza(c)
    escribe (raiz(aux))
    desencolar(c)
    si no esvacio(hijoiz(aux)) entonces encolar(c, hijoiz(aux))
    si no esvacio(hijode(aux)) entonces encolar(c, hijode(aux))
fmientras
falgoritmo
```


2. Árboles binarios

EJEMPLO DE RECORRIDOS (I)

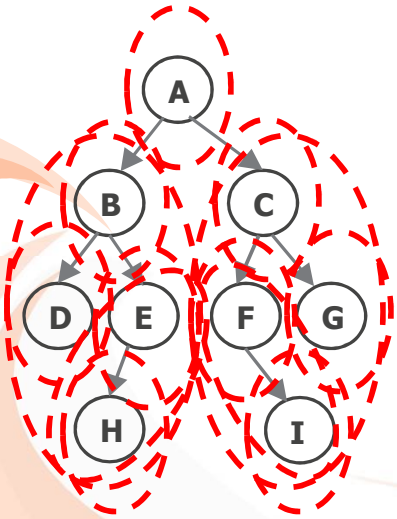


- Niveles:

a b c d e f g h i

2. Árboles binarios

EJEMPLO DE RECORRIDOS (II)

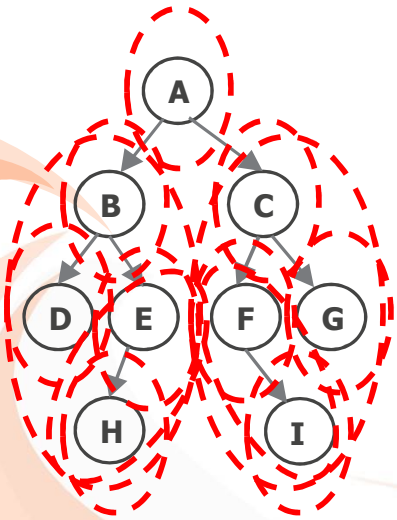


- Inorden: **(IRD)**

d b h e a f i c g

2. Árboles binarios

EJEMPLO DE RECORRIDOS (III)

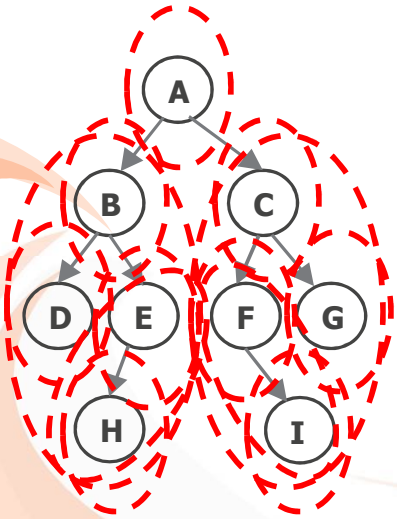


- Postorden: **(IDR)**

d h e b i f g c a

2. Árboles binarios

EJEMPLO DE RECORRIDOS (IV)



- Preorden: **(RID)**

a b d e h c f i g

2. Árboles binarios

ENRIQUECIMIENTO DE LA ESPECIFICACIÓN

OPERACIONES

preorden, inorden, postorden(arbin) → **lista**
nodos (arbin) → natural
eshoja (arbin) → bool

VAR i, d: arbin; x: item;

ECUACIONES

preorden(crea_arbin( )) = **crea_lista( )**
preorden(enraizar(i, x, d)) = **concatenar**(**insiz**(x, **preorden**(i)), **preorden**(d)) **(RID)**
inorden(crea_arbin( )) = **crea_lista( )**
inorden(enraizar(i, x, d)) = concatenar(**insde**(**inorden**(i), x), **inorden**(d)) **(IRD)**
postorden(crea_arbin( )) = **crea_lista( )**
postorden(enraizar(i, x, d)) = **insde**(concatenar(**postorden**(i), **postorden**(d)), x) **(IDR)**
nodos(crea_arbin( )) = 0
nodos(enraizar(i, x, d)) = 1 + **nodos**(i) + **nodos**(d)
eshoja(crea_arbin( )) = FALSO
eshoja(enraizar(i, x, d)) = esvacio(i) Λ esvacio(d)

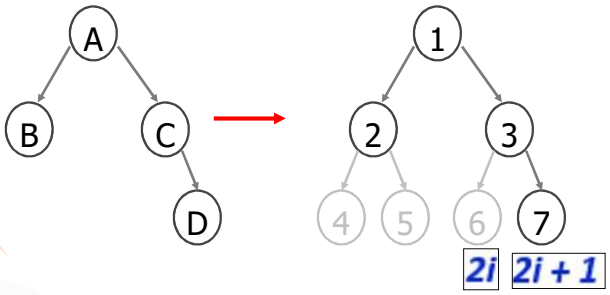
2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (I)

- Representación secuencial
  Se numeran secuencialmente los nodos del árbol hipotéticamente lleno desde la raíz a las hojas por niveles (comenzando por el nivel 1, después el nivel 2, etc.) y de izquierda a derecha en cada nivel. La representación secuencial se puede hacer usando un vector unidimensional:
  - la raíz se guarda en la dirección 1
  - si un nodo *n* está en la dirección *i*, entonces su hijo izquierdo estará en la dirección ***2i*** y su hijo derecho en la dirección ***2i + 1***

2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (II)



A	B	C				D
1	2	3	4	5	6	7

i 2*i* 2*i* + 1

2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (III)

- Representación enlazada

```
typedef int TItem;
class TNodo;

class TArbin{
    public:
      TArbin ( );                                   //CONSTRUCTOR
      TArbin (const TArbin & origen);               //CONSTRUCTOR DE COPIA
      ~TArbin ( );                                  //DESTRUCTOR
      TArbin & operator = (const TArbin & a);       //ASIGNACIÓN
      void Enraizar ( TArbin &iz, const TItem c, TArbin &de);
      TItem & Raiz ( );
      TArbin HijoIz ( ); TArbin HijoDe ( );
      bool EsVacio ( );
      int Altura ( );
    private:
      void Copiar (const TArbin & origen);
      TNodo *farb;
      TItem item_error;
};
```


2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (IV)

```
class TNodo{
    friend class TArbin;
    private:
      TItem fitem;
      TArbin fiz, fde;
};

/* ------------------------------------------------------------------------------------*/
TArbin::TArbin ( ) {farb = NULL; }
/* ------------------------------------------------------------------------------------*/
TArbin::TArbin (const TArbin & origen){
    Copiar (origen);
}
/* ------------------------------------------------------------------------------------*/
void
TArbin::Copiar (const TArbin & origen){
    if (origen.farb != NULL){
      TNodo *aux = new TNodo( );
      aux → fitem = origen.farb → fitem;
      farb = aux;
      (farb → fiz).Copiar (origen.farb → fiz);
      (farb → fde).Copiar (origen.farb → fde);
    }
    else farb = NULL;
}
```

2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (V)

```
TArbin::~TArbin ( ) {
     if (farb != NULL){
        delete farb;
        farb = NULL;}
}
/* ----------------------------------------------------------------------------*/
TArbin &
TArbin::operator = (const TArbin & a){
     this → ~TArbin( );
     Copiar (a);
    return *this;
}
/* ----------------------------------------------------------------------------*/
void
TArbin::Enraizar (TArbin &iz, const TItem c, TArbin &de){
     TNodo *aux = new TNodo( );
     aux → fitem = c;
     (aux → fiz).farb = iz.farb;
     (aux → fde).farb = de.farb;
     iz.farb = de.farb = NULL;
     this → ~TArbin ( );
     farb = aux;
}
//deja vacíos el árbol original (*this), iz y de
```


2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (VI)

```
TItem &
TArbin::Raiz ( ){
     if (farb != NULL) return farb → fitem;
     else return item_error;
}

/* ----------------------------------------------------------------------------*/
TArbin
TArbin::HijoIz ( ){
     if (farb != NULL) return farb → fiz;
     else return TArbin( );
}
/* ----------------------------------------------------------------------------*/
TArbin
TArbin::HijoDe ( ){
     if (farb != NULL) return farb → fde;
     else return TArbin( );
}
```

2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (VII)

```
bool
TArbin::EsVacio ( ){
     return (farb == NULL)
}

/* ------------------------------------------------------------------------------*/

int
TArbin::Altura ( ){
    int a1, a2;

    if (farb != NULL){
       a1 = (farb → fiz).Altura( );
       a2 = (farb → fde).Altura( );
       return (1 + (a1 < a2 ? a2 : a1));
    }
  else return 0;
}
```


2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (VIII)

```
/* Programa de prueba

int
main ( ){

    TArbin a, b, c;

    a.Enraizar (b, 1, c);
    b.Enraizar (a, 2, c);
    cout << "el hijo izquierda del árbol contiene un " << (b.HijoIz( )).Raiz( );
    // ESCRIBE 1
    cout << "la altura del árbol es " << b.Altura() << endl;
    // ESCRIBE 2
}
```

2. Árboles binarios

REPRESENTACIÓN SECUENCIAL Y ENLAZADA (IX)

¿Constructor y destructor de TNodo?

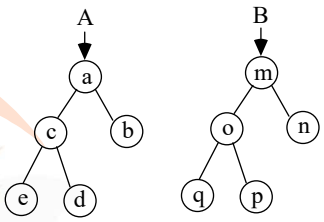
```
TNodo::TNodo( ):fiz(),fde(){
    fitem=0;
}

TNodo::~TNodo( ){
    fitem=0;
}
```


2. Árboles binarios

OTRAS OPERACIONES INTERESANTES (I)

- Además de todas las operaciones vistas anteriormente, utilizaremos las operaciones de asignación y "movimiento" de árboles e iteradores:

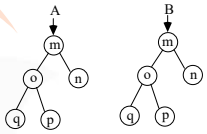


I, J = Iteradores

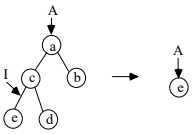
2. Árboles binarios

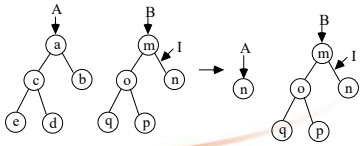
OTRAS OPERACIONES INTERESANTES (II)

- a) *Asignación (copia) entre árboles e iteradores*:
  - a1) **A = B**. Hace una copia de B en A



  - a2) **A = I.** Hace una copia sobre el árbol A, de la rama del árbol a la que apunta el Iterador I

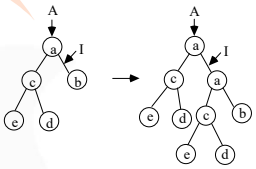




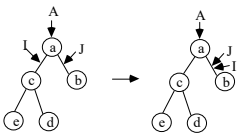
2. Árboles binarios

OTRAS OPERACIONES INTERESANTES (III)

- a) *Asignación (copia) entre árboles e iteradores*:
  - a3) **I = A**. Hace una copia sobre la rama del árbol a la que apunta el Iterador I del árbol A



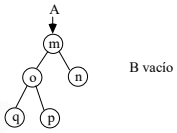
  - a4) **I = J.** Sirve para inicializar el Iterador I de forma que apunte al mismo nodo al que apunta el Iterador J



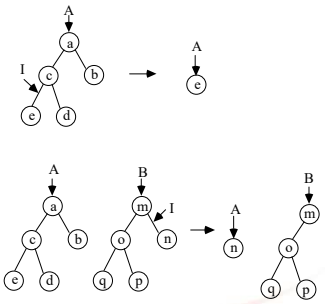
2. Árboles binarios

OTRAS OPERACIONES INTERESANTES (IV)

- b) *Movimiento de ramas entre árboles e iteradores*:
  - b1) **Mover (A, B).** Mueve el árbol B al árbol A. B se queda vacío



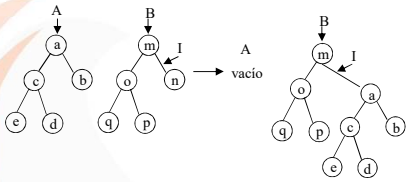
  - b2) **Mover (A, I).** Mueve la rama del árbol a la que apunta el Iterador I al árbol A



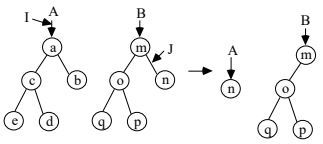
2. Árboles binarios

OTRAS OPERACIONES INTERESANTES (V)

- b) *Movimiento de ramas entre árboles e iteradores*:
  - b3) **Mover (I, A).** Mueve el árbol A a la rama del árbol a la que apunta el Iterador I



  - b4) **Mover (I, J).** Mueve la rama del árbol a la que apunta el Iterador J a la rama del árbol a la que apunta el Iterador I

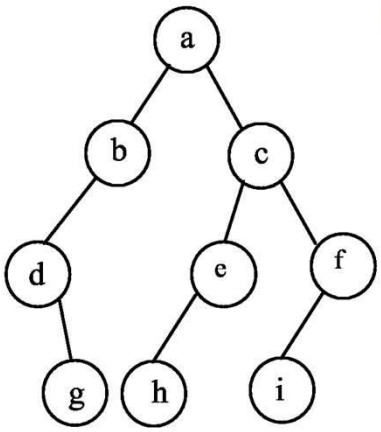


2. Árboles binarios

EJERCICIOS *recorridos*

1a) Dado el siguiente árbol binario, calcular los recorridos preorden, postorden, inorden y niveles

1b) ¿Se puede resconstruir un árbol binario dando solamente su recorrido inorden? ¿Cuántos recorridos como mínimo son necesarios? ¿Cuáles?



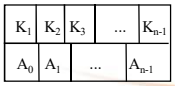
2. Árboles binarios

Preguntas de tipo test: Verdadero vs. Falso

- El nivel de un nodo en un árbol coincide con la longitud del camino desde la raíz a dicho nodo
- Dado un único recorrido de un árbol binario lleno, es posible reconstruir dicho árbol
- Un árbol binario completo con n nodos y altura k es un árbol binario lleno para esa misma altura

3. Árboles de búsqueda (I)

- Árboles de búsqueda = Árboles n-arios de búsqueda = Árboles multicamino de búsqueda
- Son un tipo particular de árboles, que pueden definirse cuando el tipo de los elementos del árbol posee una relación ≤ de orden total
- Un árbol multicamino de búsqueda T es un árbol n-ario vacío o cumple las siguientes propiedades:
  - 1. La raíz de T contiene $A_0, \ldots, A_{n-1}$ subárboles y $K_1, \ldots, K_{n-1}$ etiquetas
  - 2. $K_i < K_{i+1}$, $1 \le i < n-1$
  - 3. Todas las etiquetas del subárbol A_i son:
    menores que K_{i+1} $0 \le i < n-1$
    mayores que K_i $0 < i \le n-1$
  - 4. Los subárboles A_i, $0 \le i \le n-1$ son también árboles multicamino de búsqueda



3. Árboles de búsqueda (II)

- Algoritmo de búsqueda
  - Para buscar un valor x el árbol, primero se mira el nodo raíz y se realiza la siguiente comparación:
  - $x < K_i$ ó $x > K_i$ ó $x = k_i$ ($1 \le i \le n-1$)
  - 1) En el caso que $x = K_i$, la búsqueda ya se ha completado
  - 2) Si $x < K_i$, entonces por la definición de árbol multicamino de búsqueda, x debe estar en el subárbol A_{i-1}, si éste existe en el árbol
  - 3) Si $x > K_i$, x debe estar en A_i
- Los árboles multicamino de búsqueda son útiles cuando la memoria principal es insuficiente para utilizarla como almacenamiento permanente
- En una representación enlazada de estos árboles, los punteros pueden representar direcciones de disco en lugar de direcciones de memoria principal. ¿Cuántas veces se accede a disco cuando se realiza una búsqueda? ¿Cómo se puede reducir el número de accesos a disco?

3.1. Árboles binarios de búsqueda

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (I)

- Propiedades
  - todos los elementos en el subárbol izquierdo son ≤ que la raíz,
  - todos los elementos en el subárbol derecho son ≥ que la raíz,
  - los dos subárboles son binarios de búsqueda
    - en algunas variantes no se permite la repetición de etiquetas

MODULO ARBOL_BIN_BUSQUEDA USA BOOL, ARBOLES_BINARIOS
PARAMETRO TIPO item
OPERACIONES
<, ==, >: item, item → bool
error_item( ) → item
FPARAMETRO

OPERACIONES
insertar(arbin, item) → arbin
buscar(arbin, item) → bool
borrar(arbin, item) → arbin
min(arbin) → item

3.1. Árboles binarios de búsqueda

ESPECIFICACIÓN ALGEBRAICA (II)

VAR i, d: arbin; x, y: item;
ECUACIONES
insertar(crea_arbin( ), x) =
enraizar(crea_arbin( ), x, crea_arbin( ))
si (y < x) **entonces**
insertar(enraizar(i, x, d), y) =
enraizar(insertar(i, y), x, d)
si no si (y > x) insertar(enraizar(i, x, d), y) =
enraizar(i, x, insertar(d, y)) **fsi**

buscar(crea_arbin( ), x) = FALSO
si (y < x) **entonces**
buscar(enraizar(i, x, d), y) = buscar(i, y)
si no si (y > x) **entonces**
buscar(enraizar(i, x, d), y) = buscar(d, y)
si no buscar(enraizar(i, x, d), y) = CIERTO **fsi**

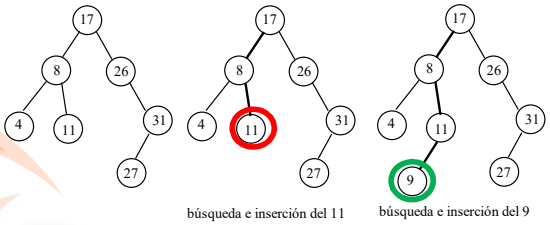
borrar(crea_arbin( ), x) = crea_arbin( )
si (y < x) **entonces**
borrar(enraizar(i, x, d), y) =
enraizar(borrar(i, y), x, d)
si no si (y > x) **entonces**
borrar(enraizar(i, x, d), y) =
enraizar(i, x, borrar(d, y)) **fsi**
si (y==x) **y** esvacio(d) **entonces**
borrar(enraizar(i, x, d), y) = i **fsi**
si (y==x) **y** esvacio(i) **entonces**
borrar(enraizar(i, x, d), y) = d **fsi**
si (y==x) **y** no esvacio(d) **y** no esvacio(i) **entonces**
borrar(enraizar(i, x, d), y) =
enraizar(i, min(d), borrar(d, min(d))) **fsi**
min(crea_arbin( )) = error_item( )
si esvacio(i) **entonces** min(enraizar(i, x, d)) = x
si no min(enraizar(i, x, d)) = min(i) **fsi**

FMODULO

3.1. Árboles binarios de búsqueda

OPERACIONES BÁSICAS (I)

- Búsqueda e inserción de un elemento

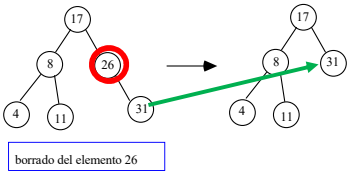


- Recorrido en inorden: todas las etiquetas ordenadas ascendentemente
- ¿Cuál es el coste de las operaciones de búsqueda e inserción en el ABB? ¿Qué pasa si insertamos una serie de elementos ordenados en un ABB inicialmente vacío?

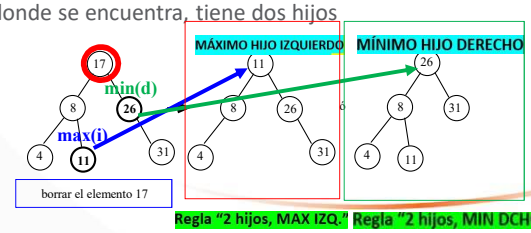
3.1. Árboles binarios de búsqueda

OPERACIONES BÁSICAS (II)

- **Borrado** de un elemento
  - El nodo donde se encuentra es una hoja **Regla "hoja"**
  - El nodo donde se encuentra tiene un único hijo. El nodo a eliminar es sustituido por su hijo **Regla "1 hijo"**



  - El nodo donde se encuentra, tiene dos hijos



3.1. Árboles binarios de búsqueda

EJERCICIOS *inserción* y *borrado*

1) En un árbol binario de búsqueda inicialmente vacío,
   a) Insertar los siguientes elementos: 20, 10, 30, 40, 5, 15, 50, 22, 25, 24, 26, 3, 35, 38, 39, 37

   b) Sobre el árbol resultante, realizar el borrado de: 5, 3, 30, 22, 39
   utilizar el criterio de sustituir por el

menor de la derecha

mayor de la izquierda

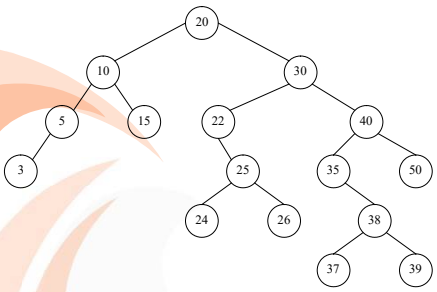
https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BST.html

3.1. Árboles binarios de búsqueda

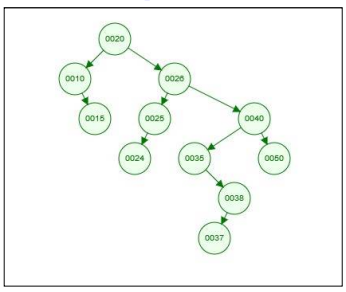
EJERCICIOS *inserción* y *borrado*: SOLUCIÓN

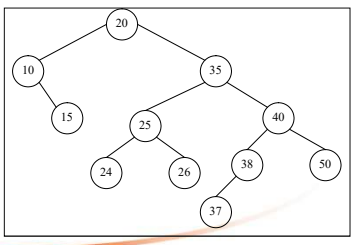
mayor de la izquierda

1) a)



b)





menor de la derecha

3.1. Árboles binarios de búsqueda

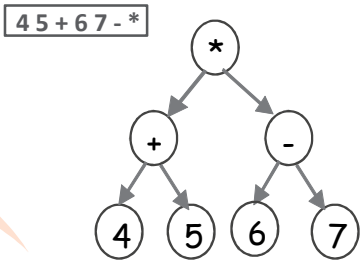
Preguntas de tipo test: Verdadero vs. Falso

- En el borrado de un elemento que se encuentre en un nodo con dos hijos no vacíos en un árbol binario de búsqueda, tenemos que intercambiar el elemento a borrar por el menor del subárbol de la izquierda o por el mayor del subárbol de la derecha
- El menor elemento en un árbol binario de búsqueda siempre se encuentra en un nodo hoja
- El coste temporal (en su peor caso) de insertar una etiqueta en un árbol binario de búsqueda es lineal respecto al número de nodos del árbol

Árboles binarios

Aplicaciones

- Evaluación de expresiones aritméticas (AB).



- Árboles de Huffman (ABB).
  - Emisor: transmisión de mensajes codificados
  - Receptor: árbol decodificador
- Treesort (ABB).
  - Ordenación de elementos utilizando un ABB
  - Si está equilibrado → Θ (n logn)