

## Relaciones de recurrencia “divide y vencerás”

La relación de recurrencia que queremos resolver es:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ af(\frac{n}{a}) + n^k & n > 1 \end{cases} \quad (1)$$

Evidentemente suponemos que  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a > 1$  (no tiene sentido que el problema no se reduzca o que aumente), y que  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$ .

$$f(n) = af\left(\frac{n}{a}\right) + n^k \quad (2)$$

$$= a \left[ af\left(\frac{n}{a^2}\right) + \left(\frac{n}{a}\right)^k \right] + n^k \quad (3)$$

$$= a^2 f\left(\frac{n}{a^2}\right) + a \left(\frac{n}{a}\right)^k + n^k \quad (4)$$

$$\dots \quad (5)$$

$$= a^j f\left(\frac{n}{a^j}\right) + n^k \sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{1}{a^{k-1}}\right)^i \quad (6)$$

Sumamos ahora la serie geométrica de razón  $r = \frac{1}{a^{k-1}}$  con la fórmula general

$$\sum_{i=0}^{j-1} r^i = \frac{1 - r^j}{1 - r} \quad (7)$$

¡Cuidado! Esta fórmula no sirve si  $r = 1$ , pero en este caso la suma vale trivialmente  $j$ . Sustituyendo en la ecuación (6):

$$f(n) = a^j f\left(\frac{n}{a^j}\right) + n^k \frac{1 - \left(\frac{1}{a^{k-1}}\right)^j}{1 - \frac{1}{a^{k-1}}} \quad (8)$$

$$= n + n^k \frac{1 - \frac{1}{n^{k-1}}}{1 - \frac{1}{a^{k-1}}} \quad \text{Puesto que hay que llegar hasta } a^j = n \quad (9)$$

$$= n + a^k \frac{n^k - n}{a^k - a} \quad (10)$$

$$= \frac{a^k n^k - na}{a^k - a} \quad (\text{Comprobado, wolframalpha.com}) \quad (11)$$

Hay que distinguir tres casos:

- $k > 1$ : el término dominante es  $n^k$
- $k = 1$ : En este caso la razón de la serie geométrica es  $r = \frac{1}{a^{k-1}} = 1$ ; por eso la fórmula utilizada no es válida. En este caso, la suma de la serie es  $j$ ; por eso, si volvemos a la ecuación (6) tendremos:

$$f(n) = a^j f\left(\frac{n}{a^j}\right) + n^k j \quad (12)$$

$$= n + n^k \log_a(n) \quad \text{puesto que } a^j = n \text{ y } j = \log_a(n) \quad (13)$$

Por eso, en este caso el término dominante es:  $n^k \log_a(n)$

- $k < 1$ : el término dominante es  $n$

## Para ampliar...

La relación de recurrencia más general:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ af\left(\frac{n}{b}\right) + g(n) & n > 1 \end{cases} \quad (14)$$

donde se cumple que  $g(n^p) = g(n)^p$  la encontraréis resuelta de manera muy similar en el apéndice D.1 del libro *Introducció a l'anàlisi i disseny d'algorismes* de F.J. Ferri, J.V. Albert y G. Martín (Universitat de València, 1998).