TEMA 2
La eficiencia de los algoritmos

PROGRAMACIÓN Y ESTRUCTURAS DE DATOS

La eficiencia de los algoritmos

- 1. Noción de complejidad
  - Complejidad temporal, tamaño del problema y paso
- 2. Cotas de complejidad
  - Cota superior, inferior y promedio
- 3. Notación asintótica
  - O, Ω, Θ
- 4. Obtención de cotas de complejidad

1. Noción de complejidad

DEFINICIÓN

- Cálculo de complejidad: determinación de dos parámetros o funciones de coste:
  - Complejidad espacial : Cantidad de recursos espaciales (de almacén) que un algoritmo consume o necesita para su ejecución
  - Complejidad temporal : Cantidad de tiempo que un algoritmo necesita para su ejecución
- Posibilidad de hacer
  - Valoraciones
    - el algoritmo es: "bueno", "el mejor", "prohibitivo"
  - Comparaciones
    - el algoritmo A es mejor que el B

1. Noción de complejidad

COMPLEJIDAD TEMPORAL

- Factores de complejidad temporal:
  - Externos
    - La máquina en la que se va a ejecutar
    - El compilador: variables y modelo de memoria
    - La experiencia del programador
  - Internos
    - El número de instrucciones asociadas al algoritmo
- Complejidad temporal : $Tiempo(A) = C + f(T)$
  - C es la contribución de los factores externos (constante)
  - $f(T)$ es una función que depende de T (talla o tamaño del problema)

1. Noción de complejidad

COMPLEJIDAD TEMPORAL

- Talla o tamaño de un problema:
  - Valor o conjunto de valores asociados a la **entrada** del problema que representa una medida de su tamaño respecto de otras entradas posibles
- Paso de programa:
  - Secuencia de operaciones con contenido semántico cuyo coste es **independiente** de la talla del problema
  - Unidad de medida de la complejidad de un algoritmo
- Expresión de la complejidad temporal:
  - Función que expresa el número de pasos de programa que un algoritmo necesita ejecutar para cualquier entrada posible (para cualquier talla posible)
  - No se tienen en cuenta los factores externos

1. Noción de complejidad

COMPLEJIDAD TEMPORAL. Ejemplos

```
int ejemplo1 (int n)
{
    n+ = n;
    return n;
}
```

f (ejemplo1) = 1 pasos

```
int ejemplo2 (int n)
{
    int i;
    for (i=0; i ≤ 2000; i++)
        n+ = n;
    return n;
}
```

f (ejemplo2) = 1 pasos

$\sum_{i=1}^{n} 1 = n-1+1 = n; \sum_{i=\emptyset}^{n} = n-\cancel{\emptyset}+1 = n+1; \sum_{i=\emptyset}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}; \sum_{i=m}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)m}{2}$

1. Noción de complejidad

COMPLEJIDAD TEMPORAL. Ejemplos

```
int ejemplo3 (int n)
{   int i, j;
    j = 2;
    for (i=0; i ≤ 2000; i++)
        j=j*j;
    for (i=0; i ≤ n; i++)
    {
        j = j + j;
        j = j - 2;
    }
    return j;
}
```

$f\,(ejemplo3) = 1 + 1 \cdot (n + 1)$ *pasos*

1. Noción de complejidad

COMPLEJIDAD TEMPORAL. Ejemplos

```
int ejemplo4 (int n)
{   int i, j,k;
    k = 1;
    for (i=0; i ≤ n; i++)
        for (j=1; j ≤ n; j++)
            k = k + k;
    return k;
}
```

$f\,(ejemplo4) = 1 + 1 \cdot n \cdot (n + 1)$ *pasos*

```
int ejemplo5 (int n)
{   int i, j,k;
    k = 1;
    for (i=0; i ≤ n; i++)
        for (j=i; j ≤ n; j++)
            k = k + k;
    return k;
}
```

$f\,(ejemplo5) = 1 + \Sigma_{i=0..n}(\Sigma_{j=i..n}\ 1)$ *pasos*

$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} 1\right) = \sum_{i=0} (n-1+1) = (n+1)+n+(n-1) = \ldots + 1 = \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

(1) $\sum_{i=0}^{n-1} 1 = (n-1) - 0 + 1 = n$ (2) $\sum_{i=0}^{n-1} \Big(\sum_{j=1}^{i} 1 + \overset{\text{cout}}{1} \Big) = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (3) $\sum_{i=4}^{n-1} \Big(\underbrace{\underbrace{\sum_{j=i-3}^{i} 1}_{i-(i-3)+1}}_{4} + \underset{\text{cout}}{1} \Big) = \sum_{i=4}^{n-1} (4+1) = 5(n-1-4+1)$

1. Noción de complejidad

COMPLEJIDAD TEMPORAL. Ejercicios

(1)
```
for(i = sum = 0; i < n; i++) sum += a[i];
```

(2)
```
for(i = 0; i < n; i++) {
  for(j = 1, sum = a[0]; j <= i; j++) sum += a[j];
  cout << "La suma del subarray " << i << " es " << sum << endl; }
```

(3)
```
for(i = 4; i < n; i++) {
  for(j = i–3, sum = a[i-4]; j <= i; j++) sum += a[j];
  cout << "La suma del subarray " << i-4 << " es " << sum << endl; }
```

(4)
```
for(i = 0, length = 1; i < n-1; i++) {
  for(i1 = i2 = k = i; k < n-1 && a[k] < a[k+1]; k++, i2++);
  if(length < i2 – i1 + 1) length = i2 – i1 + 1; }
```


1. Noción de complejidad

CONCLUSIONES

- Sólo nos ocuparemos de la complejidad temporal
- Normalmente son objetivos contrapuestos
  (complejidad temporal <--> complejidad espacial)
- Cálculo de la complejidad temporal:
  - *a priori*: contando pasos
  - *a posteriori*: generando instancias para distintos valores y cronometrando el tiempo
- Se trata de obtener la función. Las unidades de medida (paso, sg, msg, ...) no son relevantes (todo se traduce a un cambio de escala)
- El nº de pasos que se ejecutan siempre es función del tamaño (o talla) del problema

2. Cotas de complejidad

INTRODUCCIÓN

- Dado un vector X de *n* números naturales y dado un número natural *z*:
  - encontrar el índice $i : X_i = z$
  - Calcular el número de pasos que realiza

```
funcion BUSCAR (var X:vector[N]; z: N): devuelve N
var i:natural  fvar;
comienzo
   i:=1;
   mientras (i ≤|X|) ∧ (Xi≠z) hacer
      i:=i+1;
   fmientras
   si i= |X|+1 entonces devuelve 0   (*No encontrado*)
               si_no devuelve i
fin
```


2. Cotas de complejidad

LA SOLUCIÓN: cotas de complejidad

- Cuando aparecen diferentes casos para una misma talla genérica *n*, se introducen las cotas de complejidad:
  - Caso peor: cota superior del algoritmo $\rightarrow C_s(n)$
  - Caso mejor: cota inferior del algoritmo $\rightarrow C_i(n)$
  - Término medio: cota promedio $\rightarrow C_m(n)$
- Todas son funciones del tamaño del problema (*n*)
- La cota promedio es difícil de evaluar *a priori*
  - Es necesario conocer la distribución de la probabilidad de entrada
  - No es la media de la inferior y de la superior (ni están todas ni tienen la misma proporción)

2. Cotas de complejidad

EJERCICIO: cotas superior e inferior

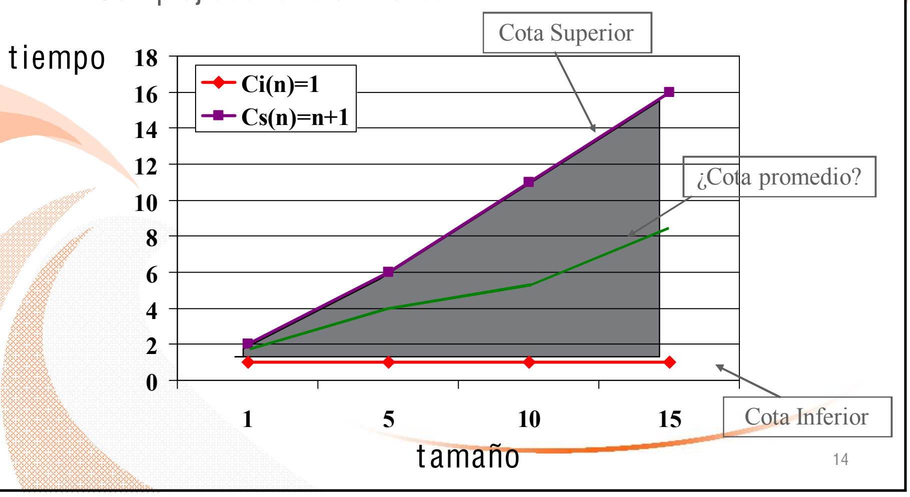
```
funcion BUSCAR (var X:vector[N]; z: N): devuelve N
var i:natural  fvar;
comienzo
   i:=1;
   mientras (i ≤|X|) ∧ (Xi≠z) hacer
      i:=i+1;
   fmientras
   si  i= |X|+1 entonces devuelve 0   (*No encontrado*)
               si_no devuelve i
fin
```

- Talla del problema: nº de elementos de X: *n*
- ¿Existe caso mejor y caso peor?
  - Caso mejor: el elemento está el primero: $X_1 = z \rightarrow c_i(n) = 1$
  - Caso peor: el elemento no está: $\forall i\ 1 \leq i \leq |X|,\ X_i \neq z \rightarrow c_s(n) = n+1$

2. Cotas de complejidad

EJERCICIO: cotas superior e inferior

- Complejidad función Buscar



2. Cotas de complejidad

CONCLUSIONES

- La cota promedio no la calcularemos. Sólo se hablará de complejidad por término medio cuando la cota superior y la inferior coinciden
- El estudio de la complejidad se hace para tamaños grandes del problema por varios motivos:
  - Los resultados para tamaños pequeños o no son fiables o proporcionan poca información sobre el algoritmo
  - Es lógico invertir tiempo en el desarrollo de un buen algoritmo sólo si se prevé que éste realizará un gran volumen de operaciones
- A la complejidad que resulta de tamaños grandes de problema se le denomina complejidad asintótica y la notación utilizada es la notación asintótica

3. Notación asintótica

INTRODUCCIÓN

- Notación matemática utilizada para representar la complejidad espacial y temporal cuando $n \rightarrow \infty$
- Se definen tres tipos de notación:
  - Notación O (big-omicron) $\Rightarrow$ caso peor
  - Notación Ω (omega) $\Rightarrow$ caso mejor
  - Notación Θ (big-theta) $\Rightarrow$ caso promedio

3. Notación asintótica

Teorema de la escala de complejidad

$$O(1) \subset O(\lg \lg n) \subset O(\lg n) \subset O(\lg^{a>1} n) \subset O(\sqrt{n}) \subset O(n) \subset$$
$$\subset O(n \lg n) \subset O(n^2) \subset \cdots \subset O(n^{a>2}) \subset O(2^n) \subset O(n!) \subset O(n^n)$$

- ❑ f(n) + g(n) + t(n) $\in$ O(Max(f(n), g(n), t(n)))
- ❑ Ejemplos:
  - $n + 1$ pertenece a $O(n)$
  - $n^2 + \log n$ pertenece a $O(n^2)$
  - $n^3 + 2^n + n\log n$ pertenece a $O(2^n)$
- ❑ Válido para Notación Ω y Notación Θ

O(1) = CONSTANTE = $\not\exists$ TALLA
O(n) = LINEAL = FOR (i=1 ; i<n ; i++)
O(n^2) = CUADRÁTICA = FOR FOR
O(log[n]) = LOGARÍTMICA = TALLA /2
O(2^n) = EXPONENCIAL = TALLA*2.

3. Notación asintótica

NOTACIÓN O: escala de complejidad

Complejidad	*n = 32*	*n = 64*
n^3	3 seg.	26 seg.
2^n	5 días	$58 \cdot 10^6$ años

- Tiempos de respuesta para dos valores de la talla y complejidades n^3 y 2^n.
  (paso = 0'1 mseg.)

– Queda clara la necesidad del cálculo de complejidad

```
función POT_2 (n: natural): natural
   opción
      n = 1: devuelve 2
      n > 1: devuelve 2 * POT_2(n-1)
   fopción
ffunción
```

Coste lineal

1 seg.

```
función POT_2 (n: natural): natural
   opción
      n = 1: devuelve 2
      n > 1: devuelve POT_2(n-1)+POT_2(n-1)
   fopción
ffunción
```

Coste exponencial

miles de años

4. Obtención de cotas de complejidad

INTRODUCCIÓN

- Etapas para obtener las cotas de complejidad:
  1. Determinación de la talla o tamaño (de la instancia) del problema
  2. Determinación del caso mejor y peor: instancias para las que el algoritmo tarda más o menos
     - No siempre existe mejor y peor caso ya que existen algoritmos que se comportan de igual forma para cualquier instancia del mismo tamaño
  3. Obtención de las cotas para cada caso. Métodos:
     - cuenta de pasos
     - relaciones de recurrencia (funciones recursivas)

4. Obtención de cotas de complejidad

INTRODUCCIÓN

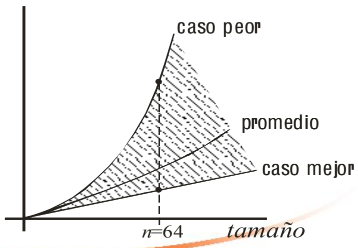
```
función FACTORIAL (n:natural): natural
```

- La talla es *n* y no existe caso mejor ni peor

```
función BUSCA (v: vector[natural]; x:natural)
```

- La talla es $n=|v|$
- caso mejor: instancias donde *x* está en *v*[1]
- caso peor: instancias donde *x* no está en *v*

- Se trata de delimitar con una región el tiempo que tarda un algoritmo en ejecutarse



4. Obtención de cotas de complejidad

Ejemplos

Cálculo del máximo de un vector

```
funcion  MÁXIMO  (var  v : vector[n]; n:entero) : entero
var  i, max : entero fvar
comienzo
    max:=v[1]
    para i:=2 hasta n hacer
        si v[i]>max  entonces  max:=v[i] fsi
    fpara
    devuelve max
fin
```

- determinar la talla del problema: *n=tamaño del vector*
- mejor caso
- peor caso

$$\left.\begin{aligned} c_i &= 1 + \sum_{i=2}^{n} 1 = 1 + (n-2+1) = n \in \Omega(n) \\ c_s &= 1 + \sum_{i=2}^{n} 2 = 1 + (n-2+1)\cdot 2 = 2n-1 \in O(n) \end{aligned}\right\} \in \Theta(n)$$

4. Obtención de cotas de complejidad

Ejemplos

Búsqueda de un elemento en un vector ordenado (Búsqueda binaria)

```
funcion BUSCA (var v:vector[N]; x,pri,ult: natural): natural
var m: natural fvar
comienzo
    repetir
        m:= (pri+ult)/2
        si v[m]>x  entonces ult:= m-1
                   sino pri:= m+1
        fsi
    hasta  (pri>ult) v v[m]=x
    si v[m]=x  entonces devuelve m
               sino devuelve 0
    fsi
fin
```

4. Obtención de cotas de complejidad

Ejemplos

- Determinar la talla del problema: *n=tamaño del vector*
- *Mejor caso: x está en la mitad del vector*
- *Peor caso: x no está en el vector*
- *Complejidades*
  - *mejor caso: 1+1=2* $\in \Omega(1)$
  - *peor caso*
    - $1+k\cdot 1$, *donde k es el nº de veces que se ejecuta el bucle*

      1ª iteración: Talla=n

      2ª iteración: Talla=n/2

      3ª iteración: Talla=n/4

      . . . .

      k-ésima interación: Talla=$n/2^{(k-1)}$

      . . . .

      última iteración: Talla = 1 $(n/2^{(\text{última}-1)} = 1)$
    - *Es decir, en la última iteración sólo nos queda 1 elemento Despejando última:*

      $n=2^{\text{ultima}-1}$; $\log_2 n+1=\text{última}$;

      $1+\text{última}\cdot 1=1+(\log_2 n+1) \in O(\log_2 n)$

4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación

- Directos
  - Inserción directa
  - Inserción binaria
  - Selección directa
  - Intercambio directo (burbuja)

4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación

INSERCIÓN DIRECTA

- Divide lógicamente el vector en dos partes: origen y destino
- Comienzo:
  - *destino* tiene el primer elemento del vector
  - *origen* tiene los *n-1* elementos restantes
- Se va tomando el primer elemento de *origen* y se inserta en *destino* en el lugar adecuado, de forma que *destino* siempre está ordenado
- El algoritmo finaliza cuando no quedan elementos en *origen*
- Características
  - caso mejor: vector ordenado ascendentemente
  - caso peor: vector ordenado inversamente

4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación

INSERCIÓN DIRECTA

```
funcion  INSERCION_DIRECTA  (var a:vector[natural];  n: natural)
var i,j: entero;  x:natural  fvar
comienzo
    para  i:=2  hasta  n  hacer
        x:=a[i];  j:=i-1
        mientras  (j>0) ∧ (a[j]>x)  hacer
            a[j+1]:=a[j]
            j:=j-1
        fmientras
        a[j+1]:=x
    fpara
fin
```

LINEAL

CASO MEJOR: ORDEN DE N : LINEAL
CASO PEOR: CUADRÁTICA

4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación

INSERCIÓN BINARIA

```
funcion  INSERCION_BINARIA  (var a:vector[natural];  n: natural)
var i, j, iz, de, m: entero;  x:natural  fvar
comienzo
    para  i:=2  hasta  n  hacer
        x:=a[i]; iz:=1; de:=i-1
        mientras (iz≤de) hacer
            m:= (iz+de)/2
            si a[m]>x  entonces de:= m-1
                        sino iz:=m+1
            fsi
        fmientras
        para  j:=i-1  hasta iz hacer  (*decreciente*)
            a[j+1]:=a[j]
        fpara
        a[iz]:=x
    fpara
fin
```


4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación

SELECCIÓN DIRECTA

```
funcion  SELECCION_DIRECTA  (var a:vector[natural]; n:natural)
var i, j, posmin: entero;  min:natural  fvar
comienzo
    para  i:=1  hasta  n-1  hacer
        min:=a[i];  posmin:=i
        para  j:=i+1  hasta  n  hacer
            si  a[j]<min  entonces
                min:=a[j]; posmin:=j
            fsi
        fpara
        a[posmin]:=a[i];  a[i]:=min
    fpara
fin
```

4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación

INTERCAMBIO DIRECTO (Burbuja)

```
funcion INTERCAMBIO_DIRECTO  (var a:vector[natural]; n:natural )
var i,j:entero  fvar
comienzo
    para  i:=2  hasta  n  hacer
        para  j:=n  hasta  i  hacer
            si  a[j]<a[j-1]  entonces
                SWAP(a[j],a[j-1])
            fsi
        fpara
    fpara
fin
```