

3.2. Árboles AVL

DEFINICIONES (I)

- La eficiencia en la búsqueda de un elemento en un árbol binario de búsqueda se mide en términos de:
 - Número de comparaciones
 - La altura del árbol
- Árbol completamente equilibrado: los elementos del árbol deben estar repartidos en igual número entre el subárbol izquierdo y el derecho, de tal forma que la diferencia en número de nodos entre ambos subárboles sea como mucho 1
- Problema: el mantenimiento del árbol
- Árboles AVL: desarrollado por Adelson-Velskii y Landis (1962). Los AVL son árboles balanceados (equilibrados) con respecto a la altura de los subárboles:

“Un árbol está equilibrado respecto a la altura si y solo si para cada uno de sus nodos ocurre que las alturas de los dos subárboles difieren como mucho en 1”
- Consecuencia 1. Un árbol vacío está equilibrado con respecto a la altura
- Consecuencia 2. El árbol equilibrado óptimo será aquél que cumple:

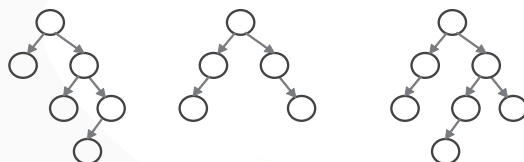
$$n = 2^h - 1,$$
 donde $n = n^o$ nodos y $h =$ altura

1

3.2. Árboles AVL

DEFINICIONES (II)

- Si T es un árbol binario no vacío con TL y TR como subárboles izquierdo y derecho respectivamente, entonces T está balanceado con respecto a la altura si y solo si
 - TL y TR son balanceados respecto a la altura, y
 - $|hl - hr| \leq 1$ donde hl y hr son las alturas respectivas de TL y TR
- El factor de equilibrio $FE(T)$ de un nodo T en un árbol binario se define como $hr - hl$. Para cualquier nodo T en un árbol AVL, se cumple $FE(T) = -1, 0, 1$



2

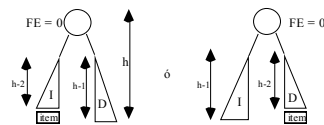
3.2. Árboles AVL

OPERACIONES BÁSICAS. INSERCIÓN (I)

- Representación de árboles AVL
 - Mantener la información sobre el equilibrio de forma implícita en la estructura del árbol
 - Atribuir a, y almacenar con, cada nodo el factor de equilibrio de forma explícita

```
TNodoArb {
    Titem fitem;
    TArbBin fiz, fde;
    int FE; }
```

- Inserción en árboles AVL. Casos:
 - Después de la inserción del ítem, los subárboles I y D igualarán sus alturas

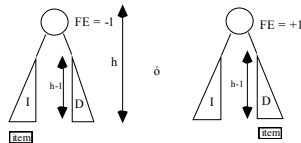


3

3.2. Árboles AVL

OPERACIONES BÁSICAS. INSERCIÓN (II)

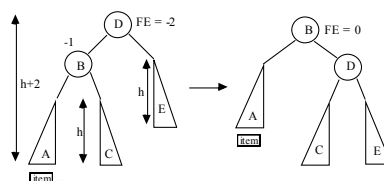
- Después de la inserción, I y D tendrán distinta altura, pero sin vulnerar la condición de equilibrio



- Si $h_I > h_D$ y se realiza inserción en I, ó $h_I < h_D$ y se realiza inserción en D

Formas de rotación: II, ID, DI, DD

- ROTACIÓN II
(-2,-1)

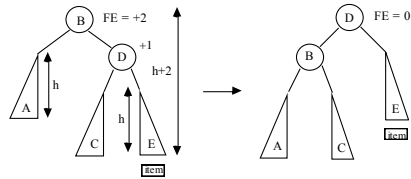


4

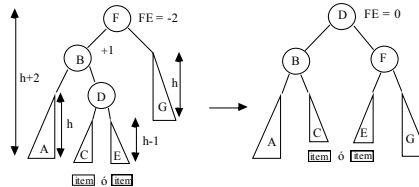
3.2. Árboles AVL

OPERACIONES BÁSICAS. INSERCIÓN (III)

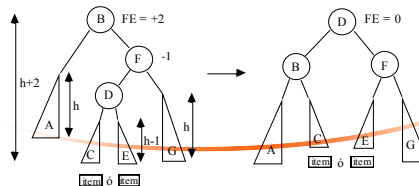
– ROTACIÓN DD
(+2,+1)



– ROTACIÓN ID
(-2,+1)



– ROTACIÓN DI
(+2,-1)

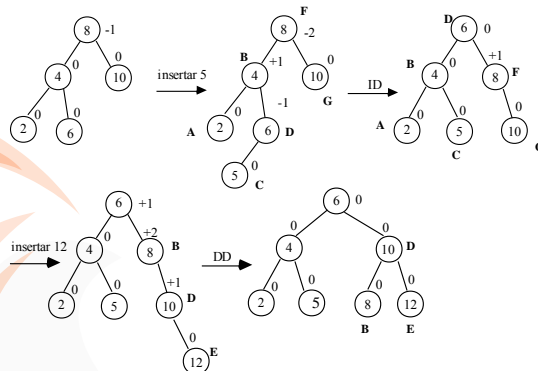


5

3.2. Árboles AVL

OPERACIONES BÁSICAS. INSERCIÓN. EJEMPLO (IV)

- Ejemplo. Insertar en el siguiente árbol los elementos 5 y 12



- Hay que tener en cuenta que la actualización del FE de cada nodo se efectúa desde las hojas hacia la raíz del árbol

6

3.2. Árboles AVL

OPERACIONES BÁSICAS. INSERCIÓN. IMPLEMENTACIÓN (V)

ALGORITMO INSERTAR

ENTRADA/SALIDA

A: AVL; c : Item

VAR I : Iterador; Crece : Integer ;

METODO

I = Primer (A) ;

InsertarAux (I, c, Crece) ;

fMETODO

ALGORITMO INSERTARAUX

ENTRADA/SALIDA I : Iterador; Crece: Integer; c : Item ;

VAR CreceIz, CreceDe : Integer ; B : Arbol ;

METODO

si EsVacioArblt (I) entonces

B = Enraizar (c) ; Mover (I, B) ; Crece = TRUE ;

sino

Crece = CreceIz = CreceDe = FALSE ;

si (c < Obtener (I)) entonces

INSERTARAUX (HijoIzq (I), c, CreceIz) ;

Crece = CreceIz ;

sino

si (c > Obtener (I)) entonces

INSERTARAUX (HijoDer (I), c, CreceDe) ;

Crece = CreceDe ;

fsi

fsi

si Crece entonces

caso de:

1) (CreceIz y FE (I) = 1) ó (CreceDe y FE (I) = -1) :

Crece = FALSE ; FE (I) = 0 ;

2) CreceIz y FE (I) = 0 : FE (I) = -1 ;

3) CreceDe y FE (I) = 0 : FE (I) = 1 ;

4) CreceIz y FE (I) = -1 : EquilibrarIzquierda (I, Crece) ;

5) CreceDe y FE (I) = 1 : EquilibrarDerecha (I, Crece) ;

fcaso

fsi

fMETODO

7

3.2. Árboles AVL

OPERACIONES BÁSICAS. INSERCIÓN. IMPLEMENTACIÓN (VI)

ALGORITMO EQUILIBRARIZQUIERDA

ENTRADA/SALIDA I : Iterador; Crece: Integer;

VAR J, K: Iterador; int E2;

METODO

si (FE (HijoIzq (I)) = -1 entonces //ROTACIÓN II

Mover (J, HijoIzq (I));

Mover (HijoIzq (I), HijoDer (J));

Mover (HijoDer (J), I);

FE (J) = 0; FE (HijoDer (J)) = 0;

Mover (I, J);

sino

//ROTACIÓN ID

Mover (J, HijoIzq (I));

Mover (K, HijoDer (J));

E2 = FE (K);

Mover (HijoIzq (I), HijoDer (K));

Mover (HijoDer (J), HijoIzq (K));

Mover (HijoIzq (K), J);

Mover (HijoDer (K), I);

FE (K) = 0;

caso de E2

-1: FE (HijoIzq (K)) = 0; FE (HijoDer (K)) = 1;

+1: FE (HijoIzq (K)) = -1; FE (HijoDer (K)) = 0;

0: FE (HijoIzq (K)) = 0; FE (HijoDer (K)) = 0;

fcaso

Mover (I, K);

fsi

Crece = FALSE;

fMETODO

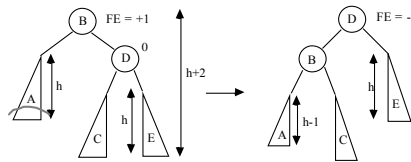
8

3.2. Árboles AVL

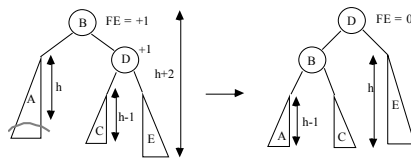
OPERACIONES BÁSICAS. BORRADO (II)

- Rotaciones simples

- ROTACIÓN DD**
(+2,0)



(+2,+1)
La altura del árbol decrece



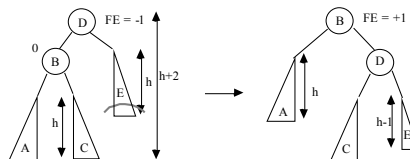
11

3.2. Árboles AVL

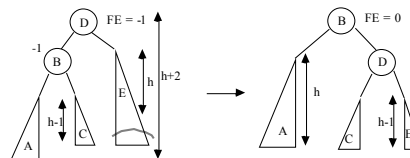
OPERACIONES BÁSICAS. BORRADO (III)

- Rotaciones simples

- ROTACIÓN II**
(-2,0)



(-2,-1)
La altura del árbol decrece



12

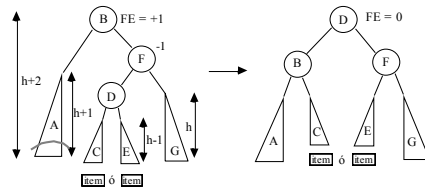
3.2. Árboles AVL

OPERACIONES BÁSICAS. BORRADO (IV)

- Rotaciones dobles

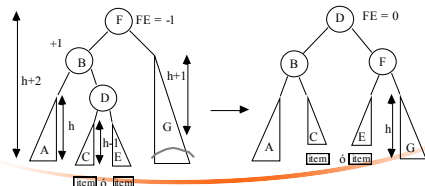
- **ROTACIÓN DI**
(+2,-1)

La altura del árbol decrece



- **ROTACIÓN ID**
(-2,+1)

La altura del árbol decrece



13

3.2. Árboles AVL

OPERACIONES BÁSICAS. INSERCIÓN Y BORRADO

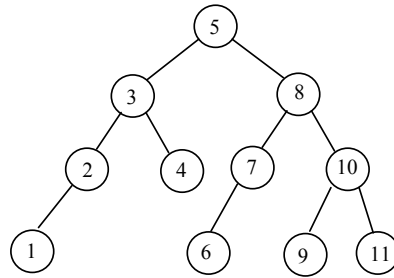
- Estudio de las complejidades de ambos algoritmos
 - El análisis matemático del algoritmo de inserción es un problema todavía no resuelto. Los ensayos empíricos apoyan la conjetura de que la altura esperada para el árbol AVL de n nodos es

$$h = \log_2(n) + c \quad / \quad c \text{ es una constante pequeña}$$
 - Estos árboles deben utilizarse sólo si las recuperaciones de información (búsquedas) son considerablemente más frecuentes que las inserciones → debido a la complejidad de las operac. de equilibrado
 - Se puede borrar un elemento en un árbol equilibrado con $\log(n)$ operaciones (en el caso más desfavorable)
- Diferencias operacionales de borrado e inserción:
 - Al realizar una inserción de una sola clave se puede producir como máximo una rotación (de dos o tres nodos)
 - El borrado puede requerir una rotac. en todos los nodos del camino de búsqueda
 - Los análisis empíricos dan como resultado que, mientras se presenta una rotación por cada dos inserciones,
 - sólo se necesita una por cada cinco borrados. El borrado en árboles equilibrados es, pues, tan sencillo (o tan complicado) como la inserción

3.2. Árboles AVL

EJERCICIOS borrado

- 1) Dado el siguiente árbol AVL de entrada, efectuar los siguientes borrados en el mismo: 4, 8, 6, 5, 2, 1, 7. (Nota: al borrar un nodo con 2 hijos, sustituir por el mayor de la izquierda)

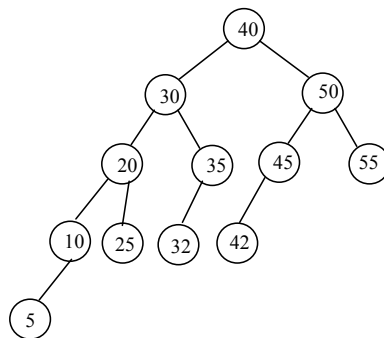


15

3.2. Árboles AVL

EJERCICIOS borrado

- 2) Dado el siguiente árbol AVL de entrada, efectuar los siguientes borrados en el mismo: 55, 32, 40, 30. (Nota: al borrar un nodo con 2 hijos, sustituir por el mayor de la izquierda)



16

3.2. Árboles AVL

Preguntas de tipo test: Verdadero vs. Falso

- Los árboles AVL son aquellos en los que el número de elementos en los subárboles izquierdo y derecho difieren como mucho en 1
- Cuando se realiza un borrado en un árbol AVL, en el camino de vuelta atrás para actualizar los factores de equilibrio, como mucho sólo se va a efectuar una rotación
- El siguiente árbol está balanceado con respecto a la altura

