Problema 3.6 (del 3.3)

- Los meses de vida de determinada especie de peces en una piscifactoría es una v.a. continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x/6, & x \in [2,4] \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Tomando un pez al azar, ¿cuál es la probabilidad de que viva más de dos meses y medio?

Utilizar la Función de Distribución para resolverlo.

Distribución discreta uniforme

- Una v.a. **discreta** X es **uniforme** si todos los valores x_i que puede tomar son equiprobables.
  - Como debe ser finita, si hay n valores x_i la probabilidad de cada uno será $\mathrm{P}(X = x_i) = 1/n$.

- **<u>Problema 3.7</u>**: Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Sea X la v.a. que se corresponde con el número obtenido. Calcular su función de cuantía.

Distribución continua uniforme

- Una v.a. **continua** es **uniforme** sobre un intervalo $[a,b]$ si su función de densidad es constante en el intervalo y nula fuera de él.
  - La prob. de cualquier subintervalo será proporcional a su longitud.
  - La fd tendrá la forma: $f(x) = \begin{cases} k, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$
  - La constante se halla:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 = \int_{a}^{b} k\, dx = k(b-a) \rightarrow k = \frac{1}{b-a}$$

Problema 3.8 (distr. cont. uniforme)

- La longitud de un tipo de bacteria es una v.a. continua distribuida uniformemente entre 3 y 8 μm.

  Hallar la probabilidad de que una de esas bacterias mida menos de 7 μm.

Distribución exponencial

- Una v.a. es exponencial de parámetro $\lambda > 0$ cuando tiene la *fd*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

  - Es una función de probabilidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lambda \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx = \lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_{0}^{\infty} = \lambda \left(0 - \frac{1}{-\lambda}\right) = 1$$

  - Es una función no negativa, para todo *x* se cumple:

$$\lambda \cdot e^{-\lambda x} > 0$$

Variable aleatoria bidimensional

- Se llama variable aleatoria bidimensional (X, Y) a toda aplicación

$$(X, Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

  - Correlación
  - Discretas y continuas
  - Continuas: intervalos → superficies

- <u>Ejemplo</u>: longitud y peso de los peces de una especie.

$$(X, Y) = \{(3'1, 28), (2'5, 19'9), (4'86, 37'222), \ldots\}$$

- <u>Ejemplo</u>: lanzar dos dados, siendo X el nº del primero e Y la suma de ambos resultados.

$$(X, Y) = \{(1, 7), (5, 7), (2, 4), \ldots\}$$

V.A. bidimensional discreta: *fc* conjunta

- Dada una v.a. bidimensional discreta, con todos los posibles valores $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i})$ que puede tomar, se llama **función de cuantía conjunta** a la función real de dos variables

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

- Propiedades:
  - $0 \leq f(x,y) \leq 1,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
  - $\sum_{x_i} \sum_{x_j} f\left(x_i, y_j\right) = 1$, para todos los valores $X = \{x_i\}$, $Y = \{y_j\}$

Problema 3.9 (*fc* conjunta)

- En una biblioteca hay 8 libros de medicina, 6 de física, 5 de química y 1 de biología. Se cogen dos libros al azar, tomando la v.a. $X=$ {nº de libros de medicina} e $Y=$ {nº de libros de biología}. Hallar la función de cuantía conjunta.

V.A. bidimensional continua: *fd* conjunta

- Dos v.a. X e Y tienen una distribución **continua** conjunta si existe una función $f(x,y)$ no negativa en $\mathbb{R}^2$, tal que para cualquier recinto A del plano

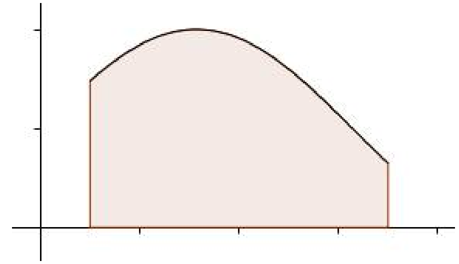
$$P\big((X,Y) \in A\big) = \iint_A f(x,y)\,dxdy$$

  - La probabilidad de tomar un valor discreto es cero, aun cuando una de las dos pertenezca a un intervalo.

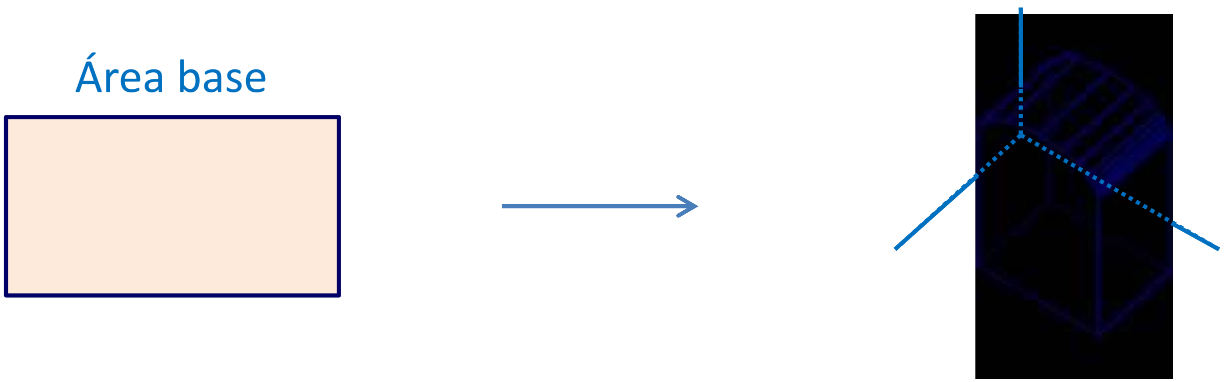
- Se debe verificar:
  - $f(x,y) \geq 0$
  - $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = 1$

Doble integración

- Con una v.a. continua integramos un **intervalo** y obtenemos un área (la probabilidad):



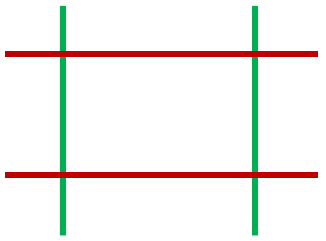
- Con una v.a. bidimensional continua integramos un **área** y obtenemos un volumen (la probabilidad):



Integrales dobles posibles

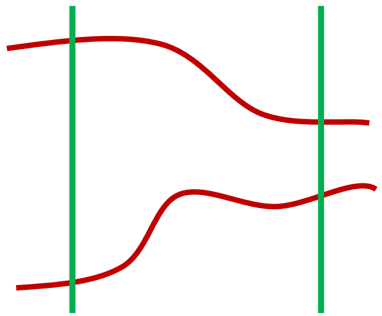
- $A = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy$$



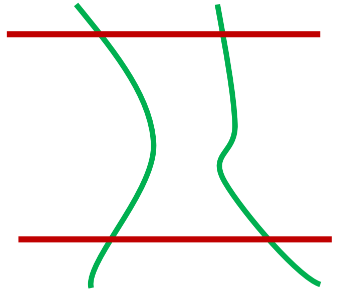
- $A = \{(x, y): a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$

$$\int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy\right] dx$$



- $A = \{(x, y): g_1(y) \leq x \leq g_2(y), c \leq y \leq d\}$

$$\int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)\, dx\right] dy$$



Problema 3.10 x e y entre constantes

- Sea la *fd*:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy, & (x,y) \in [0,2] \times [0,1] \\ 0, & resto \end{cases}$$

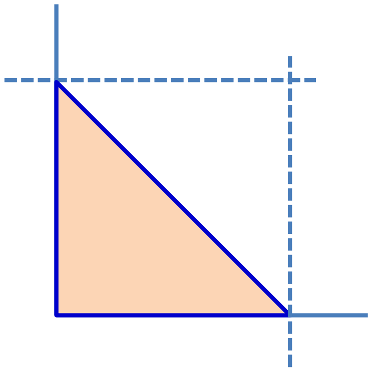
Calcular la probabilidad del área donde está definida.

Problema 3.11 y entre funciones

- Sea la *fd*:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & resto \end{cases}$$

Calcular la probabilidad para $x + y \leq 1$

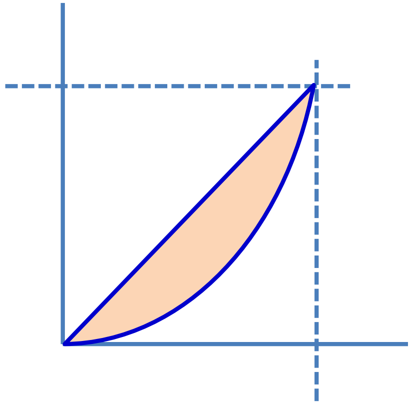


Problema 3.12 x entre funciones

- Sea la *fd*:

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy, & y^2 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & resto \end{cases}$$

Calcular *k*.



Distr. conjunta discreta uniforme

- Una v.a. bidimensional **discreta** (X, Y) es **uniforme** si todos los pares (x_i, y_j) que puede tomar son equiprobables.
  - Si hay n pares (x_i, y_j) la probabilidad de cada uno será:

$$f(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) = \frac{1}{n}$$

Distr. conjunta continua uniforme

- Una v.a. bidimensional **continua** (X,Y) es **uniforme** si la fd conjunta es uniforme en el recinto A del plano donde está definida:

  - La *fd* tendrá la forma: $f(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \notin A \end{cases}$

  - La constante se halla:

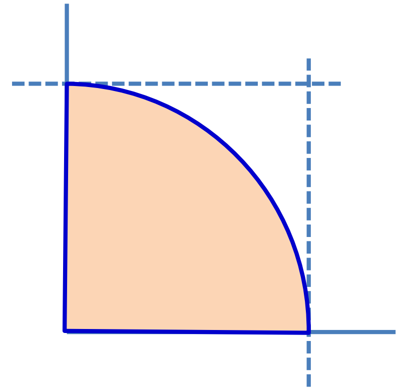
$$\iint_A k\,dxdy = 1 = k \cdot \iint_A dxdy = k \cdot \acute{a}rea(A) \rightarrow k = \frac{1}{\acute{a}rea(A)}$$

  - La prob. de un recinto será proporcional al área que ocupa:

$$\iint_B k\,dxdy = k \cdot \acute{a}rea(B) = \frac{\acute{a}rea(B)}{\acute{a}rea(A)}$$

Problema 3.13 (distr. cjta. continua uniforme)

- Calcular la *fd* de una v.a. dada por las coordenadas de un punto aleatorio del primer cuadrante del círculo unidad.



Función de distribución conjunta

- Dada una v.a. bidimensional discreta o continua, se llama **función de distribución** conjunta (FD) a la función

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathrm{P}(X \leq x \cap Y \leq y)$$

- Propiedades:
  - $0 \leq F(x,y) \leq 1, \ \forall x,y \in \mathbb{R}$
  - $F(-\infty, y) = \mathrm{P}(X < -\infty, Y \leq y) = 0. \quad F(x, -\infty) = 0.$
  - $F(+\infty, +\infty) = \mathrm{P}(X < +\infty, Y < +\infty) = 1$
  - $P(a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2) =$
    $= F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1)$

Relación fc, fd – FD

- Variable **discreta**
  - Función de **cuantía** *vs* Función de **distribución**

$$F(x,y) = \mathrm{P}(X \le x, Y \le y) = \sum_{\substack{x_i \le x \\ y_j \le y}} f(x_i, y_j)$$

- Variable **continua**
  - Función de **densidad** *vs* Función de **distribución**

$$F(x,y) = \mathrm{P}(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\, ds dt$$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$