

Función de distribución conjunta

- Dada una v.a. bidimensional discreta o continua, se llama **función de distribución conjunta** (FD) a la función

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x \cap Y \leq y)$$

- Propiedades:
 - $0 \leq F(x,y) \leq 1, \forall x,y \in \mathbb{R}$
 - $F(-\infty, y) = P(X < -\infty, Y \leq y) = 0. \quad F(x, -\infty) = 0.$
 - $F(+\infty, +\infty) = P(X < +\infty, Y < +\infty) = 1$
 - $P(a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2) =$
 $= F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1)$

Relación fc, fd – FD

- Variable **discreta**

- Función de **cuantía** vs Función de **distribución**

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

- Variable **continua**

- Función de **densidad** vs Función de **distribución**

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds$$

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Problema 3.14 (*FD* conjunta discreta)

- Dada la v.a. bidimensional discreta dada por la función de cuantía conjunta:

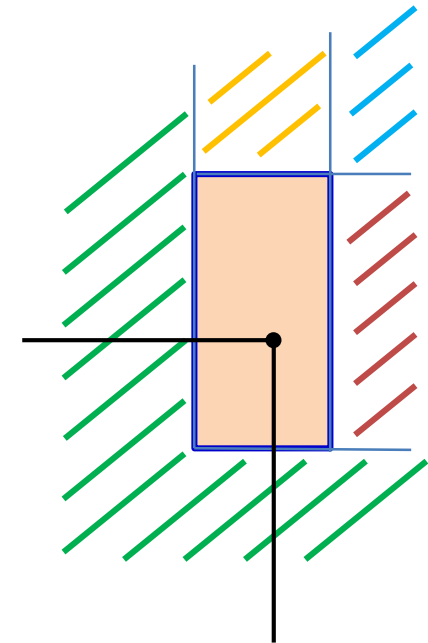
<i>Y</i>					
2	1/17	0	1/17	0	
1	3/17	5/17	0	1/17	
0	0	4/17	1/17	1/17	
	20	30	40	50	<i>X</i>

Obtener $F(30,1)$

Problema 3.15 (*FD* conjunta continua)

- Obtener la *FD* para la *fd*:
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}xy^2, & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2] \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

X, Y	$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
$x \leq 0 \text{ ó } y \leq 0$	0
$0 \leq x \leq 1$ $0 \leq y \leq 2$	$\int_0^x \int_0^y \frac{3}{4}st^2 dt ds = \int_0^x \frac{3}{4}s \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^y ds =$ $= \int_0^x s \frac{y^3}{4} ds = \frac{y^3}{4} \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2 y^3}{8}$
$1 \leq x$ $0 \leq y \leq 2$	$\int_0^1 \int_0^y \frac{3}{4}st^2 dt ds = \dots = \frac{y^3}{8}$
$0 \leq x \leq 1$ $2 \leq y$	$\int_0^x \int_0^2 \frac{3}{4}st^2 dt ds = \dots = x^2$
$1 \leq x$ $2 \leq y$	$\int_0^1 \int_0^2 \frac{3}{4}st^2 dt ds = \dots = 1$



Problema 3.16 (Marginales, discreta)

- A un grupo de 12 personas se les pregunta cuántos hijos tienen (X) y cuántos hermanos (Y), obteniendo la función de cuantía conjunta:

Y	f		
1	1/12	4/12	0
0	2/12	3/12	2/12
	0	1	2
	X		

¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar tenga un hijo?

$$P(X=1) = P(X=1 \cap Y=0) + P(X=1 \cap Y=1) = 3/12 + 4/12 = 7/12.$$

- Función de cuantía **marginal** de X prescindiendo de Y :
- Función de cuantía **marginal** de Y prescindiendo de X :

f_1	3/12	7/12	2/12
X	0	1	2

Y	f_2
1	5/12
0	7/12

Distribución marginal

- Dada una v.a. bidimensional (X, Y) , se denomina **distribución marginal** de X a la distribución unidimensional que tiene X cuando se prescinde de Y .
 - Análogamente para Y .

Funciones marginales	X	Y
f. cuantía v.a. discreta	$f_1(x) = \sum_y f(x, y)$	$f_2(y) = \sum_x f(x, y)$
f. densidad v.a. continua	$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$	$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$
F. Distribución v.a. discreta y cont.	$F_1(x) = P(X \leq x, Y < \infty)$ $= F(x, \infty)$	$F_2(y) = P(X < \infty, Y \leq y)$ $= F(\infty, y)$

Problema 3.17 (Marginales, continua)

- El desarrollo de cierto tumor en un ratón de laboratorio está relacionado con dos características de la sangre determinadas por las variables X e Y según la fd :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}xy^2, & (x, y) \in [0,1] \times [0,2] \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Obtener las funciones de densidad marginales.

Independencia de variables

- Dos v.a. X e Y son independientes si para cualesquiera conjuntos numéricos A y B se cumple:

$$P(X \in A \cap Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

- Por tanto tenemos que:

- f. cuantía: $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad \forall x, \forall y$
- f. densidad: $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad \forall x, \forall y$
- F. Distribución: $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y) \quad \forall x, \forall y$

Problema 3.18 (Independencia, discreta)

- De una baraja española se extrae una carta y se consideran las variables:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si Oro o Copa} \\ 2, & \text{si Espada o Basto} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 10, & \text{si figura} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Averiguar si las variables son independientes.

Problema 3.19 (Independencia, continua)

- Dada la función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & (x, y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Averiguar si las variables son independientes.

Problema 3.20 (Condicionales, discreta)

- Dada la función de cuantía conjunta:

Y	f		
1	1/12	4/12	0
0	2/12	3/12	2/12
	0	1	2 X

- ¿Cuál es la probabilidad de $X=2$, es decir, $f_1(2)$?
- Si sabemos que Y vale 1, ¿cuál es la probabilidad de $X=2$?
- Si sabemos que Y vale 1, ¿cuál es la probabilidad de $X=1$?

$$P(X = 1|Y = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{f(1,1)}{f_2(1)} = \frac{4/12}{5/12} = \frac{4}{5}$$

Distribución condicional

- Dada una v.a. bidimensional (X, Y) , llamamos función (de cuantía o densidad) condicional de X a la función

$$g_1(x|Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}, \quad \text{para } y: f_2(y) > 0$$

- Análogamente $g_2(y|X = x)$.
- Es una función de probabilidad para un valor $Y=y$.
- En el caso continuo sólo tiene sentido como cociente.
- Si son independientes: $g_1(x|Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f_1(x) \cdot f_2(y)}{f_2(y)} = f_1(x)$
- Propiedades:
 - $g_1(x|Y = y) \geq 0$
 - $\sum_x g_1(x|Y = y) = 1. \quad \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x|Y = y) dx = 1.$

Problema 3.21 (Condicionales, discreta)

- Dada la fc conjunta:

Y	f		
1	1/12	4/12	0
0	2/12	3/12	2/12
	0	1	2
	X		

Obtener las fc condicionales $g_1(x | Y=0)$ y $g_2(y | X=1)$.

Problema 3.22 (Condicionales, continua)

- Dada la función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x + y), & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2] \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Obtener la condicional de X y particularizar para $Y=1$.

Problema 3.23 (Condicionales, continua)

- Dada la función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5}{2}x + y, & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Obtener la condicional de Y y particularizar para $X=2/3$.