

# 1. Introducción al análisis combinatorio

- **Análisis combinatorio**
  - Variaciones / con repetición
  - Permutaciones / con repetición
  - Combinaciones / con repetición
- Cálculo integral
- Series

# Variaciones

- Dado un conjunto de  $n$  elementos  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , una **variación ordinaria** de orden  $h$  (siendo  $1 \leq h \leq n$ ) es un **subconjunto ordenado** de  $h$  elementos de  $A$ .

$$V_{n,h} = \frac{n!}{(n-h)!}$$

- Ej:  $A = \{a, b, c, d\}$

12 variaciones de orden 2:

$ab$	$ba$	$ca$	$da$
$ac$	$bc$	$cb$	$db$
$ad$	$bd$	$cd$	$dc$

$$V_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

# Variaciones

- Ej:  $A = \{a, b, c, d\}$

24 variaciones de orden 3:

<i>abc</i>	<i>bac</i>	<i>cab</i>	<i>dab</i>
<i>abd</i>	<i>bad</i>	<i>cad</i>	<i>dac</i>
<i>acb</i>	<i>bca</i>	<i>cba</i>	<i>dba</i>
<i>acd</i>	<i>bcd</i>	<i>cbd</i>	<i>dbc</i>
<i>adb</i>	<i>bda</i>	<i>cda</i>	<i>dca</i>
<i>adc</i>	<i>bdc</i>	<i>cdb</i>	<i>dcb</i>

$$V_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

# Variaciones con repetición

- Dado un conjunto de  $n$  elementos  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , una variación con repetición de orden  $h$  (siendo  $h \geq 1$ , pero puede ser  $h > n$ ) es un subconjunto ordenado de  $h$  elementos de  $A$  que se pueden repetir.

$$VR_{n,h} = n^h$$

- Ej:  $A = \{a, b, c, d\}$

16 variaciones con repetición de orden 2:

<i>aa</i>	<i>ba</i>	<i>ca</i>	<i>da</i>
<i>ab</i>	<i>bb</i>	<i>cb</i>	<i>db</i>
<i>ac</i>	<i>bc</i>	<i>cc</i>	<i>dc</i>
<i>ad</i>	<i>bd</i>	<i>cd</i>	<i>dd</i>

$$VR_{4,2} = 4^2 = 16$$

# Permutaciones

- Son variaciones ordinarias donde se toman todos los elementos del conjunto. Dos permutaciones son distintas solo por el orden de sus elementos.

$$P_n = n! = V_{n,n}$$

- Ej:  $A = \{a, b, c\}$

6 permutaciones:

<i>abc</i>	<i>bac</i>	<i>cab</i>
<i>acb</i>	<i>bca</i>	<i>cba</i>

$$P_3 = 3! = 6$$

# Permutaciones con repetición

- Son variaciones con repetición donde se toman todos los elementos del conjunto con una determinada duplicidad que conocemos. En este caso,  $n$  es el número de elementos que tomamos incluyendo las repeticiones.

$$PR_n^{a,b,\dots,r} = \frac{n!}{a! b! \dots r!}$$

- Ej:  $A = \{a, b, c\}$ , en el que  $a$  se repite 2 veces, y  $b$  y  $c$  1 vez.

12 permutaciones con repetición:

$aabc$	$abac$	$abca$	$baac$	$baca$	$bcaa$
$aacb$	$acab$	$acba$	$caab$	$caba$	$cbaa$

$$PR_4^{2,1,1} = \frac{4!}{2! 1! 1!} = 12$$

# Combinaciones

- Dado un conjunto de  $n$  elementos  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , una combinación ordinaria de orden  $h$  (siendo  $1 \leq h \leq n$ ) es un subconjunto de  $h$  elementos de  $A$  sin importar el orden.

$$C_{n,h} = \binom{n}{h} = \frac{n!}{h! (n-h)!}$$

- Ej:  $A = \{a, b, c, d\}$

6 combinaciones de orden 2:

$ab$	<del><math>ba</math></del>	<del><math>ca</math></del>	<del><math>da</math></del>
$ac$	$bc$	<del><math>cb</math></del>	<del><math>db</math></del>
$ad$	$bd$	$cd$	<del><math>dc</math></del>

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! (4-2)!} = 6$$

# Combinaciones

- Ej:  $A = \{a, b, c, d\}$

4 combinaciones de orden 3:

<i>abc</i>	<del><i>bac</i></del>	<del><i>cab</i></del>	<del><i>dab</i></del>
<i>abd</i>	<del><i>bad</i></del>	<del><i>cad</i></del>	<del><i>dac</i></del>
<del><i>acb</i></del>	<del><i>bca</i></del>	<del><i>cba</i></del>	<del><i>dba</i></del>
<i>acd</i>	<i>bcd</i>	<del><i>cdb</i></del>	<del><i>dbc</i></del>
<del><i>adb</i></del>	<del><i>bda</i></del>	<del><i>cda</i></del>	<del><i>dca</i></del>
<del><i>adc</i></del>	<del><i>bdc</i></del>	<del><i>cdb</i></del>	<del><i>dcb</i></del>

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! (4-3)!} = 4$$

- Propiedad:  $\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h}$



# Combinaciones con repetición

- Dado un conjunto de  $n$  elementos  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , una combinación con repetición de orden  $h$  (siendo  $1 \leq h$ , pero puede ser  $h > n$ ) es un subconjunto de  $h$  elementos de  $A$  sin importar el orden que se pueden repetir.

$$CR_{n,h} = \binom{n + h - 1}{h}$$

- Ej:  $A = \{a, b, c, d\}$     10 combinaciones con repetición de orden 2:

$aa$	<del><math>ba</math></del>	<del><math>ca</math></del>	<del><math>da</math></del>
$ab$	$bb$	<del><math>cb</math></del>	<del><math>db</math></del>
$ac$	$bc$	$cc$	<del><math>dc</math></del>
$ad$	$bd$	$cd$	$dd$

$$CR_{4,2} = \binom{4 + 2 - 1}{2} = \binom{5}{2} = 10$$

# Resumen combinatoria

	Con orden		Sin orden
	Variaciones	Permutaciones	Combinaciones
Sin repetición (ordinarias)	$V_{n,h} = \frac{n!}{(n-h)!}$	$P_n = n!$	$\binom{n}{h} = \frac{n!}{h!(n-h)!}$
Con repetición	$VR_{n,h} = n^h$	$PR_n^{a,b,\dots,r} = \frac{n!}{a! b! \dots r!}$	$CR_{n,h} = \binom{n+h-1}{h}$

# Problema 1.1

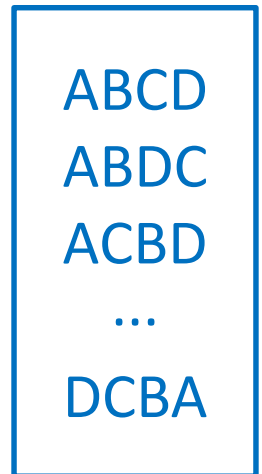
- ¿Cuántos números de dos cifras existen en el sistema decimal?
  - ¿Importa el orden? Sí
  - ¿Se pueden repetir los elementos? Sí
  - Por tanto  $VR_{10,2}$
  - Debemos quitar los que comienzan por 0:  
 $VR_{10,1} = 10$
  - Por tanto:  $VR_{10,2} - VR_{10,1} = 100 - 10 = 90$ .

00  
01  
02  
...  
99

# Problema 1.2

- ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en una estantería cuatro libros, representados por las letras A, B, C, D?
  - ¿Importa el orden? Sí
  - ¿Se pueden repetir los elementos? No
  - Por tanto  $V$ , pero como tomamos todos los elementos, entonces  $P$ .

$$P_4 = 4! = 24$$



ABCD  
ABDC  
ACBD  
...  
DCBA

# Problema 1.3

- Un científico dispone de 40 ratones en el animalario ¿De cuántas maneras distintas puede escoger una muestra de 5 ratones para inyectarles una proteína?
  - ¿Importa el orden? No
  - ¿Se pueden repetir los ratones? No
  - Por tanto  $C_{40,5}$

$$\binom{40}{5} = \frac{40!}{5! (40 - 5)!} = 658.008$$

# Problema 1.4

- Si sólo disponemos de 3 letras diferentes A, B y C, ¿cuántas contraseñas distintas podríamos formar con 4 A, 3 B y 2 C?
  - ¿Importa el orden? Sí
  - ¿Se pueden repetir los elementos? Sí
  - Por tanto  $VR$ , pero como las repeticiones están determinadas, entonces  $PR$ .
  - ¿Cuántos elementos hay?  
Distintos 3, pero en total 9.

AAAABBBCC  
AAAABBCBC  
AAAABBCCB  
...  
CCBBBAAAA

$$PR_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4! 3! 2!} = 1260$$

# Problema 1.5

- ¿De cuántas maneras se pueden cubrir las plazas de director general, subdirector y gerente de una empresa si hay 20 posibles candidatos?
  - ¿Importa el orden? Sí
  - ¿Se pueden repetir los elementos? No
  - Por tanto  $V_{20,3}$

$$V_{20,3} = \frac{20!}{(20-3)!} = 6840$$

A	B	C
A	B	D
A	B	E
...		
D	S	M

# Problema 1.6

- Se desea pintar una habitación para lo que se necesitan dos botes de pintura de determinado tamaño. En una tienda de pinturas se dispone de 5 colores distintos. ¿De cuántos colores diferentes se puede pintar la habitación?

[...]