Algorismes voraços. Exercici 1: El fontaner diligent[1]

- Un fontaner ha de fer n reparacions urgents, i sap per endavant el temps que necessitarà per a cadascuna d'elles: en la tasca i-ésima tardarà t_i minuts. Com que en la seua empresa li paguen d'acord amb la satisfacció del client, necessita decidir l'ordre en el qual atendrà els avisos per minimitzar el temps mitjà d'espera dels clients.

- En altres paraules, si anomenem T_i el temps que espera el client i-ésim fins que veu reparada la seua avaria per complet, el fontaner necessita minimitzar l'expressió:

  $$E_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

  Clarament,

  $$T_i = \sum_{j=1}^{i} t_{m_j},$$

  amb $m_i \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, i, per tant

  $$E_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} t_{m_j} = \sum_{i=1}^{n} (n + 1 - i) t_{m_i},$$

  el temps d'espera sumat per als k primers clients conté k vegades el temps que va tardar la reparació del primer client m_1, $k - 1$ vegades el del client m_2, etc.

  La solució òptima, de manera intuïtiva, és deixar els clients amb treballs de major durada per al final, perquè vagen multiplicats per un factor $n + 1 - i$ més menut, és a dir, triar els índexs $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de manera que es complisca una ordenació ascendent de temps

  $$t_{m_j} \leq t_{m_k} \ \forall j, k \in [1, n] : j < k.$$

  Si assumim que aquesta distribució de les visites és l'òptima, qualsevol permutació de dues visites (per exemple, la visita al client $j \in [1, n - 1]$ i la visita a un client més tardà $j + k$ amb $k \in [1, n - j]$) hauria d'augmentar el valor de E_n per a qualssevol valors de j i k. Vegem-ho:

  $$\begin{aligned} E'_n - E_n &= (n + 1 - j)(t_{m_{j+k}} - t_{m_j}) + (n + 1 - (j + k))(t_{m_j} - t_{m_{j+k}}) \\ &= k(t_{m_{j+k}} - t_{m_j}) > 0 \end{aligned}$$

  En efecte, el temps augmenta per a qualsevol permutació de dos clients; per tant, la distribució proposada era l'òptima. El problema permet una solució voraç: el fontaner atén els clients en ordre ascendent del temps que dedicarà a cadascun d'ells per minimitzar el temps d'espera total de la seua clientela.

[1] Aquest problema també s'anomena problema de l'emmagatzemament òptim en cintes ("optimal storage on tapes"), Horowitz i Sahni (1978, p. 153–155).