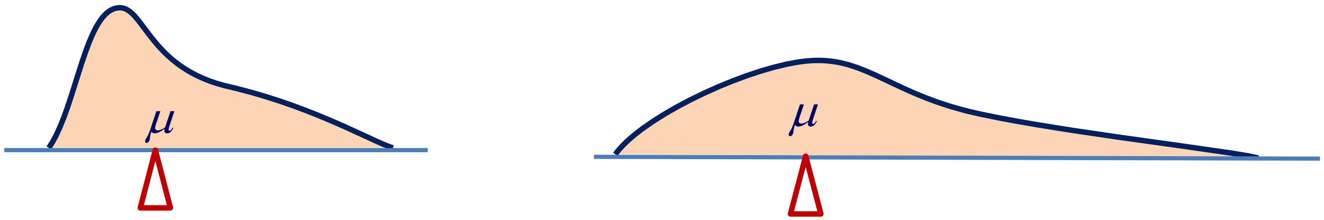
Varianza

- La varianza es una medida de la dispersión de una v.a. en torno a su media $\mu = \mathrm{E}(X)$.



- Se define como: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mu)^2)$
- Se calcula como: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$
  - Puede no existir (es una esperanza).
  - Siempre es positiva.
  - **Desviación típica $\boldsymbol{\sigma}$**: raíz cuadrada positiva de la varianza.

Problema 4.8

- Dada la función de cuantía:

X	-1	0	1	2	4
f	0'2	0'1	0'2	0'4	0'1

Hallar la varianza y la desviación típica.

Problema 4.9

- Hallar la varianza y la desviación típica de la v.a. X con fd:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & x \in [0,2] \\ 0, & resto \end{cases}$$

Propiedades de la Varianza

- Propiedades:
  - $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$ $\rightarrow$ no está afectada por traslaciones.
  - Si las v.a. son independientes:

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots$$

- Varianza de la distribución uniforme:
  - V.A. discreta (media aritmética): $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \mu^2$
  - V.A. continua:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & resto \end{cases}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Problema 4.10

- En una fábrica se producen neumáticos cuyo índice de degradación es una v.a. X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x/8, & x \in [0,4] \\ 0, & resto \end{cases}$$

El precio base del neumático se calcula como $Y = 3X + 20$ €. Obtener la esperanza y la varianza de Y.

Momentos

- Los momentos son parámetros que permiten caracterizar la distribución aportando información sobre la misma.
- Momentos <u>respecto al origen</u>
  - Dada una v.a. X, momento de orden k respecto al origen es:

$$\mathrm{E}(X^k)$$

    - Momento de orden 1 es la media: $\mu = \mathrm{E}(X)$.
- Momentos <u>centrales</u>
  - Dada una v.a. X con media μ, momento central de orden k es:

$$\mathrm{E}((X-\mu)^k)$$

    - Momento central de orden 2 es la varianza: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X-\mu)^2)$

Función generatriz de momentos

- Dada una v.a. X, se llama f.g.m. a la función real de variable t:
$$\psi(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$
- Si la f.g.m. existe en un entorno de 0, entonces es derivable en $t = 0$ un número arbitrario de veces:
$$\psi^{(k)}(0) = \mathrm{E}\left(X^k\right)$$
  - La f.g.m. por tanto permite generar los momentos respecto al origen:
    1. Obtener la f.g.m. calculando la esperanza (debemos conocer la función de cuantía o densidad).
    2. Realizamos derivadas sucesivas hasta el orden del momento buscado.
    3. Sustituimos en las derivadas $t = 0$ obteniendo los momentos.

Problema 4.11

- Dada la función de cuantía:

X	-1	0	1	2	4
f	0'2	0'1	0'2	0'4	0'1

Hallar la esperanza y la varianza usando la f.g.m.

$$\psi(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x) = e^{-t} \cdot 0'2 + e^{0t} \cdot 0'1 + e^{t} \cdot 0'2 + e^{2t} \cdot 0'4 + e^{4t} \cdot 0'1$$

$$\psi'(t) = -0'2e^{-t} + 0'2e^{t} + 0'8e^{2t} + 0'4e^{4t}$$

$$E(X) = \psi'(0) = -0'2 + 0'2 + 0'8 + 0'4 = 1'2$$

$$\psi''(t) = 0'2e^{-t} + 0'2e^{t} + 1'6e^{2t} + 1'6e^{4t}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \psi''(0) = 0'2 + 0'2 + 1'6 + 1'6 = 3'6$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3'6 - 1'2^2 = 2'16$$

Propiedades de la f.g.m.

- Sea una v.a. con f.g.m. ψ_X y sea $Y = aX + b$, entonces
$$\psi_Y(t) = e^{bt}\psi_X(at)$$

- Sean n v.a. independientes X_i con f.g.m. ψ_i y sea Y la variable suma $Y = X_1 + \cdots + X_n$ con f.g.m. ψ_Y, entonces
$$\psi_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \psi_i(t)$$

- Si las f.g.m. de dos v.a. X e Y son idénticas en un entorno de 0, entonces las distribuciones de X e Y son idénticas.
  - Básicamente, si dos v.a. tienen los mismos momentos, entonces tienen la misma distribución.