

3. Variables Aleatorias

1. Variables unidimensionales
 1. Variables discretas. Función de cuantía
 2. Variables continuas. Función de densidad
 3. Función de distribución
2. Variables bidimensionales
 1. Variables bidimensionales discretas
 2. Variables bidimensionales continuas
 3. Función de distribución
 4. Distribuciones marginales
 5. Independencia de variables
 6. Distribuciones condicionales

Variable Aleatoria

- Se llama variable aleatoria (v.a.) X a toda aplicación

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

- A cada elemento o resultado posible del experimento aleatorio, se le asigna un número real.
- Ejemplo: definir una v.a. en el lanzamiento de una moneda:

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{cara} \longrightarrow 1$$

$$\text{cruz} \longrightarrow 0$$

- Abreviadamente: $X = \{0, 1\}$. Si sale cara, $X = 1$, si sale cruz, $X = 0$.
- ¿Para qué?
 - Nos permite pasar del mundo de los sucesos a los números reales, de forma que podamos operar con ellos.

Problema 3.1

- En el lanzamiento de **tres monedas**, definimos X como el nº de caras.
- X puede tomar los valores $\{0, 1, 2, 3\}$.
- Se calculan probabilidades según X .
- Ej: probabilidad de $X = 2$
 - $P(X = 2) = P(\text{ccx}, \text{cxc}, \text{xcc}) = 3 \cdot (1/2)^3 = 3/8$
- Ej: probabilidad de $X < 2$
 - $P(X < 2) = P(\text{cxx}, \text{xcx}, \text{xxc}, \text{xxx}) = 4/8$
- Ej: probabilidad de $X < 1'7$
 - $P(X < 1'7) = P(\text{cxx}, \text{xcx}, \text{xxc}, \text{xxx}) = 4/8$

$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
ccc $\longrightarrow 3$
ccx $\longrightarrow 2$
cxc $\longrightarrow 2$
xcc $\longrightarrow 2$
cxx $\longrightarrow 1$
xcx $\longrightarrow 1$
xxc $\longrightarrow 1$
xxx $\longrightarrow 0$

V.A. discretas y continuas

- V.A. discretas
 - Pueden tomar un conjunto finito de valores, o infinito numerable.
 - Ej: nº de caras al lanzar 3 monedas: $X = \{0, 1, 2, 3\}$
 - Ej: nº de apps instaladas en un móvil: $X = \{0, 1, 2, \dots\}$
 - Ej: nº de coches que entran en un *parking* en una hora: $X = \{0, 1, 2, \dots\}$
- V.A. continuas
 - Pueden tomar cualquier valor en un intervalo real.
 - Ej: altura de las personas adultas: $X = \{1'70, 1'611473, 1'833333, \dots\}$
 - Ej: horas de duración de una batería: $X = \{36'98, 7'22181, 3'99999, \dots\}$

V.A. discreta. Función de cuantía

- Una v.a. sigue una **distribución de probabilidad** que está determinada por su función de cuantía o densidad.
- Dada una v.a. discreta, con todos los posibles valores x_i que puede tomar, se llama **función de cuantía** a la aplicación

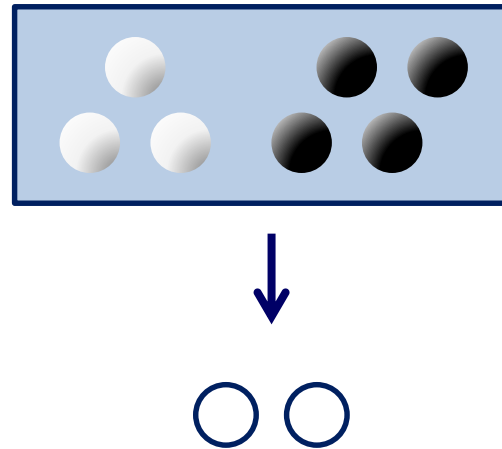
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = P(X = x)$$

- Propiedades:
 - $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
 - $\sum_{x_i} f(x_i) = 1$, para todos los posibles sucesos $X = \{x_i\}$

Problema 3.2

- De una urna con 3 bolas blancas y 4 negras se extraen 2. Se define $X = \{\text{n}^\circ \text{ de bolas blancas extraídas}\}$. Hallar la función de cuantía.



V.A. continua. Función de densidad

- Una v.a. X es continua si existe una función $f(x)$ no negativa, tal que para cualquier intervalo real I

$$P(X \in I) = \int_I f(x) dx$$

[gráfico](#)

- En una v.a. continua, la probabilidad de tomar un valor discreto es cero, $P(X = a) = 0$.
- La forma del intervalo I no importa.
- Se debe verificar:
 - $f(x) \geq 0$
 - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Problema 3.3

- Los meses de vida de determinada especie de peces en una piscifactoría es una v.a. continua con función de densidad:

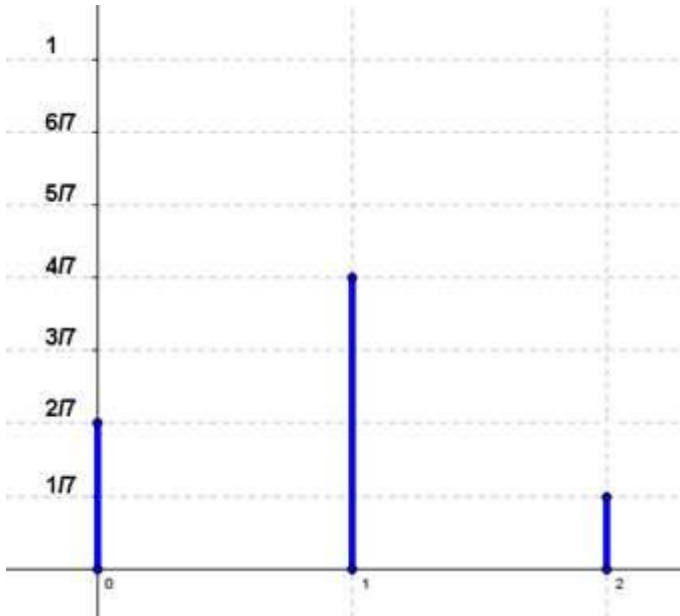
$$f(x) = \begin{cases} x/6, & x \in [2,4] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tomando un pez al azar, ¿cuál es la probabilidad de que viva más de dos meses y medio?

Comparación gráfica prob. 2 y 3

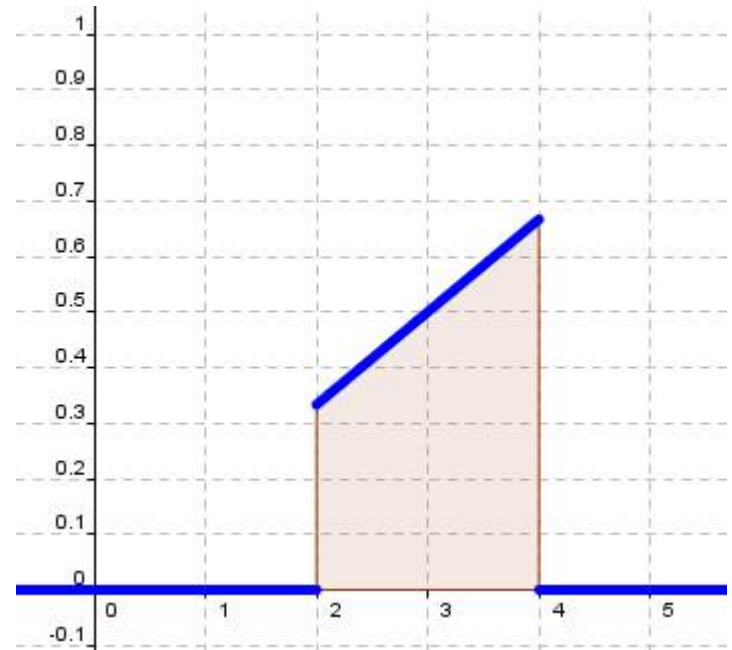
- V.A. discreta

X	0	1	2
f	$2/7$	$4/7$	$1/7$



- V.A. continua

$$f(x) = \begin{cases} x/6, & x \in [2,4] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Función de distribución

- Dada una v.a. discreta o continua, se llama **función de distribución** (FD) a la función

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = P(]-\infty, x])$$

- Si la v.a. es continua, es indiferente si es \leq ó $<$.
- Propiedades:
 - $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
 - $F(+\infty) = P(X < +\infty) = 1. \quad F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0.$
 - Sea $a < b$, entonces $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
 - $P(X > a) = 1 - F(a)$
 - $F(x)$ es no decreciente: $a < b \rightarrow F(a) \leq F(b)$

Relación fc, fd – FD

- Variable **discreta**

- Función de **distribución** *vs* función de **cuantía**

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

- Variable **continua**

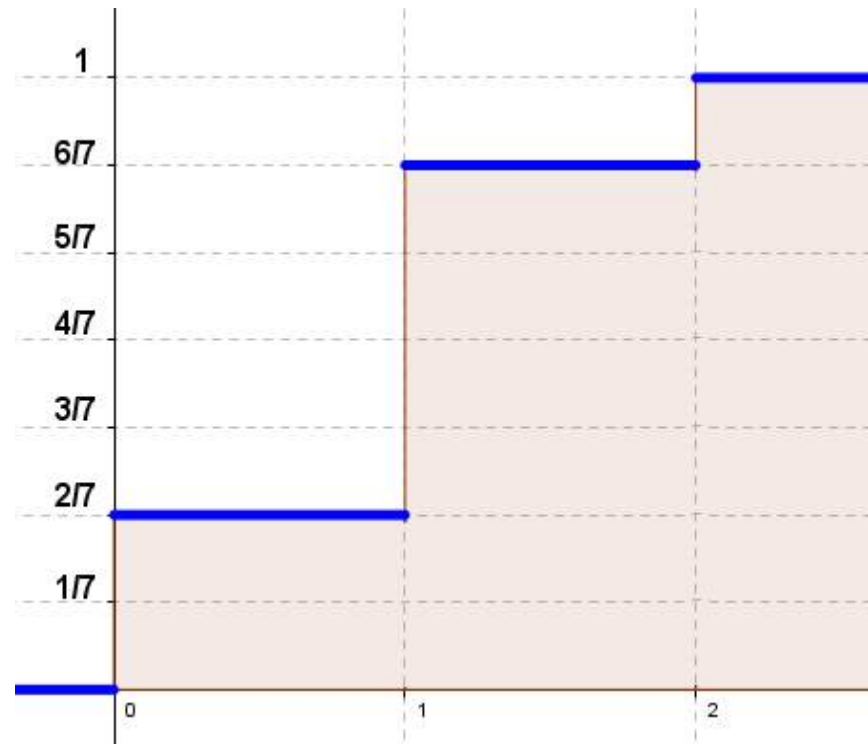
- Función de **distribución** *vs* función de **densidad**

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

Problema 3.4. FD v.a. discreta

- De una urna con 3 bolas blancas y 4 negras se extraen 2. Sea $X = \{\text{n}^\circ \text{ de bolas blancas extraídas}\}$. Hallar la función de distribución.

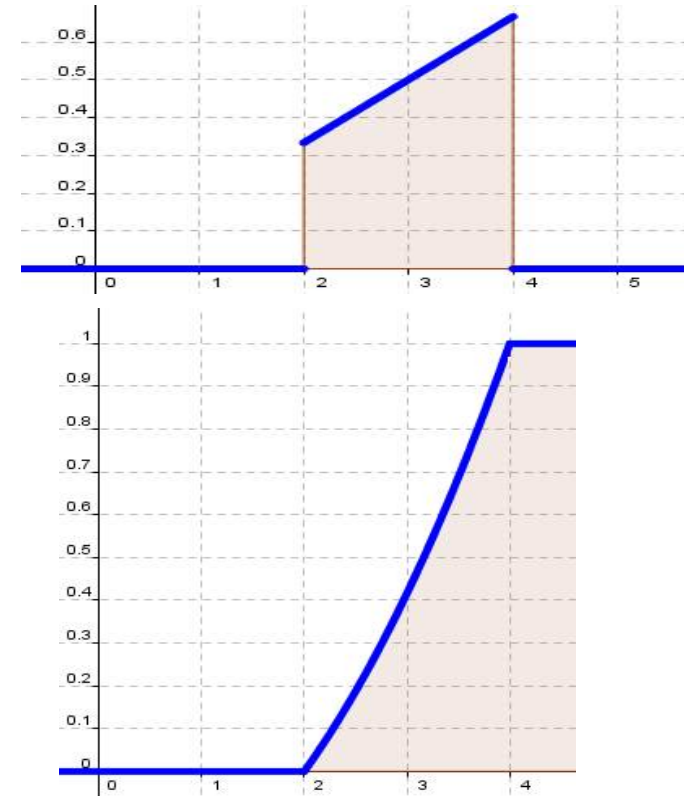


Problema 3.5. FD v.a. continua

- Los meses de vida de determinada especie de peces en una piscifactoría es una v.a. continua con función de densidad:

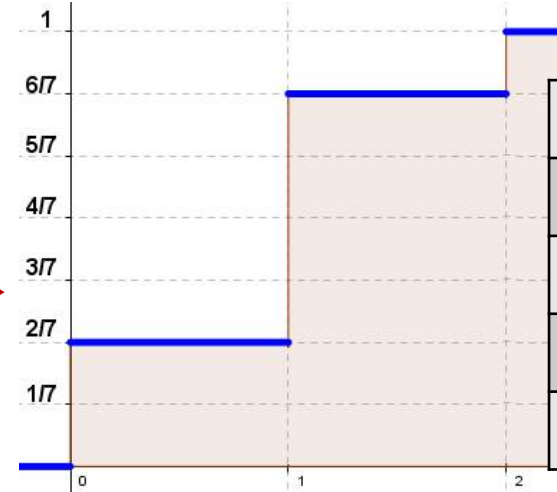
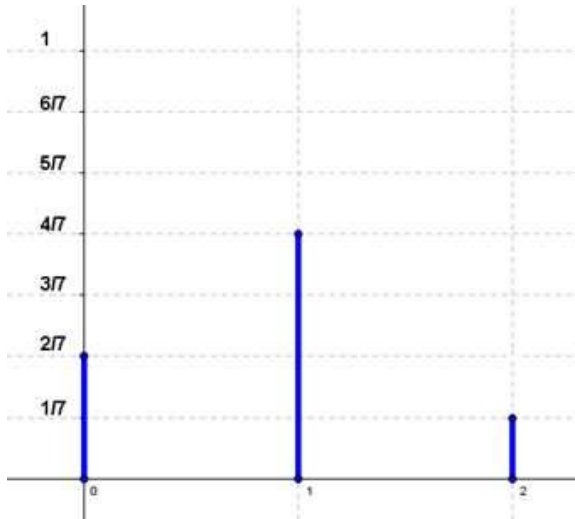
$$f(x) = \begin{cases} x/6, & x \in [2,4] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obtener la función de **distribución**.



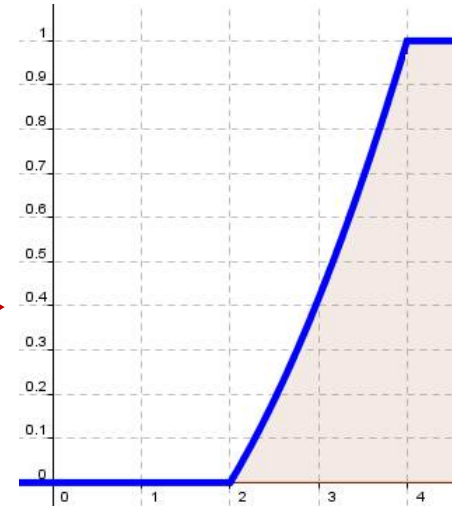
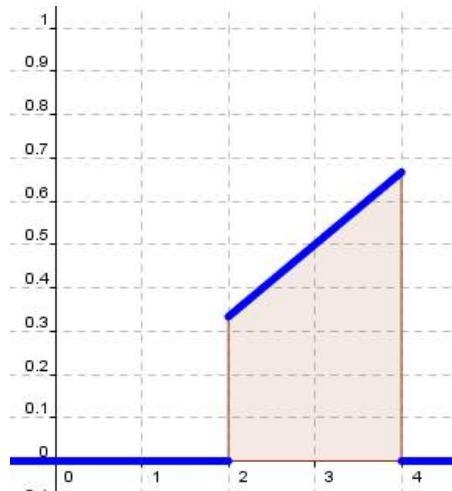
Comparación gráfica fc, fd – FD

X	f
0	$2/7$
1	$4/7$
2	$1/7$



X	F
$x < 0$	0
$0 \leq x < 1$	$2/7$
$1 \leq x < 2$	$6/7$
$2 \leq x$	1

X	f
$x \leq 2$	0
$2 < x \leq 4$	$x/6$
$4 < x$	0



X	F
$x \leq 2$	0
$2 < x \leq 4$	$\frac{x^2 - 4}{12}$
$4 < x$	1

Variable discreta uniforme

- Una v.a. **discreta** X es **uniforme** si todos los valores x_i que puede tomar son equiprobables.
 - Como debe ser finita, si hay n valores x_i la probabilidad de cada uno será $P(X = x_i) = 1/n$.
- **Problema 3.6:** Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Sea X la v.a. que se corresponde con el número obtenido. Calcular su función de cuantía.

Variable continua uniforme

- Una v.a. **continua** es **uniforme** sobre un intervalo $[a,b]$ si su función de densidad es constante en el intervalo y nula fuera de él.
 - La prob. de cualquier subintervalo será proporcional a su longitud.

- La fd tendrá la forma: $f(x) = \begin{cases} k, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$

- La constante se halla:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 = \int_a^b k dx = k(b - a) \rightarrow k = \frac{1}{b - a}$$

Problema 3.7. v.a. cont. uniforme

- La longitud de un tipo de bacteria es una v.a. continua distribuida uniformemente entre 3 y 8 μm .

Hallar la probabilidad de que una de esas bacterias mida menos de 7 μm .

Variable exponencial

- Una v.a. es exponencial de parámetro $\lambda > 0$ cuando tiene la fd

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- Es una función de probabilidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{\infty} = \lambda \left(0 - \frac{1}{-\lambda} \right) = 1$$

- Es una función no negativa, para todo x se cumple:

$$\lambda \cdot e^{-\lambda x} > 0$$