

# 4. Esperanza y Varianza

1. Esperanza
2. Varianza
3. Momentos
4. Covarianza y correlación
5. Esperanza condicional
6. Desigualdad de *Chebychev*
7. Media muestral

# Esperanza de una v.a.

- Dada una v.a.  $X$  con función de cuantía o densidad  $f$ , se llama esperanza matemática (o media) de  $X$ ,  $E(X)$  al número:

- V.A. discreta:  $E(X) = \sum_i x_i f(x_i)$

$X$	1	2	3	5
$f$	0'4	0'4	0'1	0'1

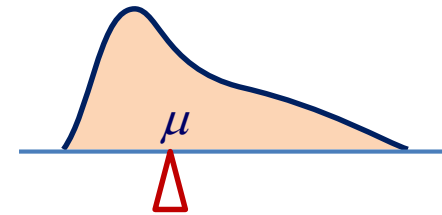
- V.A. continua:  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

- Es un número (puede ser un valor de  $X$ ), no una probabilidad.

- Equivale al centro de masas (equilibrio).

- Puede no existir (aun siendo simétrica).

- Distribución simétrica:  $\exists \mu \forall x : f(\mu - x) = f(\mu + x)$



# Problemas

- **Problema 4.1.** Obtener el valor medio o esperanza de la puntuación en el lanzamiento de un dado.
- **Problema 4.2.** Obtener la esperanza de la v.a.  $X$  con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}x^3, & x \in [1,3] \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

# Esperanza de una función

- Dada una v.a.  $Y$  que sea función de otra  $Y = h(X)$  de la que conocemos su  $f(x)$ , entonces la esperanza de  $Y$  es:
- V.A. discreta:  $E(Y) = \sum_j y_j f_Y(y_j) = E(h(X)) = \sum_i h(x_i) f(x_i)$
- V.A. continua:  $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx$
- No es necesario calcular  $f_Y$  ya que es la misma  $f$ .

$X$	0	1	2
$f$	0'1	0'3	0'6

↓                  ↓                  ↓

$Y = X^2$	0	1	4
$f_Y$	0'1	0'3	0'6

# Problema 4.3

- Dada la función de cuantía:

$X$	-1	0	1	2	4
$f$	0'2	0'1	0'2	0'4	0'1

Hallar la media de  $Y = 2X+3$ .

# Problema 4.4

- Hallar la esperanza de  $Y = X^3$  siendo la *fd* de  $X$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & x \in [0,2] \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

# Esperanza de una función de varias v.a.

- Dada una v.a.  $Z$  que es función de otras dos  $Z = h(X, Y)$  de la que conocemos la función de cuantía/densidad conjunta  $f(x, y)$ , entonces la esperanza de  $Z$  es:

- V.A. discretas:

$$E(Z) = E(h(X, Y)) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) f(x_i, y_j)$$

- V.A. continuas:

$$E(Z) = E(h(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f(x, y) dx dy$$

# Problema 4.5

- Dada la función de cuantía:

$Y$	$f$		
1	0'1	0'5	0
0	0'2	0'1	0'1
	0	1	2 $X$

Hallar la media de  $Z = 2X + Y$ .



# Problema 4.6

- Hallar la esperanza de  $Z = 2X + Y$  siendo la *fd* conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & (x, y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

# Propiedades de la Esperanza

- Propiedades:

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(X_1 + X_2 + \dots) = E(X_1) + E(X_2) + \dots$
- Si las v.a. son independientes:  
 $E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \dots$

- Esperanza de la distribución uniforme:

- V.A. discreta (media aritmética):  $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

- V.A. continua:  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$   
 $E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$

# Problema 4.7

- En un grupo de 30 familias, se considera el nº de hijos, obteniendo que 10 familias tienen un hijo, 7 tienen 2 hijos, 4 tienen 3 y una familia tiene 4. Si se toman tres familias al azar, ¿cuántos niños esperamos tener en total?