1. Introducción al análisis combinatorio

- **Análisis combinatorio**
  - Variaciones / con repetición
  - Permutaciones / con repetición
  - Combinaciones / con repetición
- Cálculo integral
- Series

Variaciones

- Dado un conjunto de n elementos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, una **<u>variación ordinaria</u>** de orden h (siendo $1 \leq h \leq n$) es un <u>subconjunto ordenado</u> de h elementos de A.

$$\boxed{V_{n,h} = \frac{n!}{(n-h)!}}$$

- Ej: $A = \{a, b, c, d\}$

12 variaciones de orden 2:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

$$V_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

Variaciones

- Ej: $A = \{a, b, c, d\}$

24 variaciones de orden 3:

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

$$V_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

Variaciones con repetición

- Dado un conjunto de n elementos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, una <u>variación con repetición</u> de orden h (siendo $h \geq 1$, pero puede ser $h > n$) es un <u>subconjunto ordenado</u> de h elementos de A que se pueden repetir.

$$\boxed{VR_{n,h} = n^h}$$

- Ej: $A = \{a, b, c, d\}$

16 variaciones con repetición de orden 2:

aa	ba	ca	da
ab	bb	cb	db
ac	bc	cc	dc
ad	bd	cd	dd

$$VR_{4,2} = 4^2 = 16$$

Permutaciones

- Son variaciones ordinarias donde se toman <u>todos</u> los elementos del conjunto. Dos permutaciones son distintas solo por el <u>orden</u> de sus elementos.

$$\boxed{P_n = n!} = V_{n,n}$$

- Ej: $A = \{a, b, c\}$

6 permutaciones:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba \end{array}}$$

$$P_3 = 3! = 6$$

Permutaciones con repetición

- Son variaciones con repetición donde se toman todos los elementos del conjunto con una determinada duplicidad que conocemos. En este caso, n es el número de elementos que tomamos incluyendo las repeticiones.

$$\boxed{PR_n^{a,b,\ldots,r} = \frac{n!}{a!\,b!\cdots r!}}$$

- Ej: $A = \{a, b, c\}$, en el que a se repite 2 veces, y b y c 1 vez.

12 permutaciones con repetición:

$aabc$	$abac$	$abca$	$baac$	$baca$	$bcaa$
$aacb$	$acab$	$acba$	$caab$	$caba$	$cbaa$

$$PR_4^{2,1,1} = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12$$

Combinaciones

- Dado un conjunto de n elementos $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, una <u>combinación ordinaria</u> de orden h (siendo $1 \leq h \leq n$) es un <u>subconjunto</u> de h elementos de A <u>sin importar el orden</u>.

$$\boxed{C_{n,h} = \binom{n}{h} = \frac{n!}{h!\,(n-h)!}}$$

- Ej: $A = \{a, b, c, d\}$

6 combinaciones de orden 2:

ab	~~*ba*~~	~~*ca*~~	~~*da*~~
ac	*bc*	~~*cb*~~	~~*db*~~
ad	*bd*	*cd*	~~*dc*~~

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6$$

Combinaciones

- Ej: $A = \{a, b, c, d\}$

4 combinaciones de orden 3:

abc	$\cancel{bac}$	$\cancel{cab}$	$\cancel{dab}$
abd	$\cancel{bad}$	$\cancel{cad}$	$\cancel{dac}$
$\cancel{acb}$	$\cancel{bca}$	$\cancel{cba}$	$\cancel{dba}$
acd	bcd	$\cancel{cbd}$	$\cancel{dbc}$
$\cancel{adb}$	$\cancel{bda}$	$\cancel{cda}$	$\cancel{dca}$
$\cancel{adc}$	$\cancel{bdc}$	$\cancel{cdb}$	$\cancel{dcb}$

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4$$

- Propiedad: $\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h}$

Combinaciones con repetición

- Dado un conjunto de n elementos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, una <u>combinación con repetición</u> de orden h (siendo $1 \leq h$, pero puede ser $h > n$) es un subconjunto de h elementos de A <u>sin importar el orden</u> que <u>se pueden repetir</u>.

$$\boxed{CR_{n,h} = \binom{n+h-1}{h}}$$

- Ej: $A = \{a, b, c, d\}$ 10 combinaciones con repetición de orden 2:

aa	~~ba~~	~~ca~~	~~da~~
ab	bb	~~cb~~	~~db~~
ac	bc	cc	~~dc~~
ad	bd	cd	dd

$$CR_{4,2} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$$

Resumen combinatoria

	Con orden		Sin orden
	Variaciones	**Permutaciones**	**Combinaciones**
Sin repetición (ordinarias)	$V_{n,h} = \dfrac{n!}{(n-h)!}$	$P_n = n!$	$\binom{n}{h} = \dfrac{n!}{h!\,(n-h)!}$
Con repetición	$VR_{n,h} = n^h$	$PR_n^{a,b,\dots,r} = \dfrac{n!}{a!\,b!\cdots r!}$	$CR_{n,h} = \binom{n+h-1}{h}$

Problema 1.1

- ¿Cuántos números de dos cifras existen en el sistema decimal?
  - ¿Importa el orden? Sí
  - ¿Se pueden repetir los elementos? Sí
  - Por tanto $VR_{10,2}$
  - Debemos quitar los que comienzan por 0:

    $VR_{10,1} = 10$
  - Por tanto: $VR_{10,2} - VR_{10,1} = 100 - 10 = 90.$

00
01
02
…
99

Problema 1.2

- ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en una estantería cuatro libros, representados por las letras A, B, C, D?
  - ¿Importa el orden? Sí
  - ¿Se pueden repetir los elementos? No
  - Por tanto V, pero como tomamos todos los elementos, entonces P.

    $P_4 = 4! = 24$

ABCD
ABDC
ACBD
...
DCBA

Problema 1.3

- Un científico dispone de 40 ratones en el animalario ¿De cuántas maneras distintas puede escoger una muestra de 5 ratones para inyectarles una proteína?
  - ¿Importa el orden? No
  - ¿Se pueden repetir los ratones? No
  - Por tanto $C_{40,5}$

$$\binom{40}{5} = \frac{40!}{5!\,(40-5)!} = 658.008$$

Problema 1.4

- Si sólo disponemos de 3 letras diferentes A, B y C, ¿cuántas contraseñas distintas podríamos formar con 4 A, 3 B y 2 C?
  - ¿Importa el orden? Sí
  - ¿Se pueden repetir los elementos? Sí
  - Por tanto *VR*, pero como las repeticiones están determinadas, entonces *PR*.
  - ¿Cuántos elementos hay? Distintos 3, pero en total 9.

AAAABBBCC
AAAABBCBC
AAAABBCCB
...
CCBBBAAAA

$$PR_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1260$$

Problema 1.5

- ¿De cuántas maneras se pueden cubrir las plazas de director general, subdirector y gerente de una empresa si hay 20 posibles candidatos?
  - ¿Importa el orden? Sí
  - ¿Se pueden repetir los elementos? No
  - Por tanto $V_{20,3}$

$$V_{20,3} = \frac{20!}{(20-3)!} = 6840$$

A B C
A B D
A B E
...
D S M

Problema 1.6

- Se desea pintar una habitación para lo que se necesitan dos botes de pintura de determinado tamaño. En una tienda de pinturas se dispone de 5 colores distintos. ¿De cuántos colores diferentes se puede pintar la habitación?

[…]