Función de distribución conjunta

- Dada una v.a. bidimensional discreta o continua, se llama **función de distribución** conjunta (*FD*) a la función

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathrm{P}(X \leq x \cap Y \leq y)$$

- Propiedades:
  - $0 \leq F(x,y) \leq 1, \ \forall x,y \in \mathbb{R}$
  - $F(-\infty, y) = \mathrm{P}(X < -\infty, Y \leq y) = 0. \quad F(x, -\infty) = 0.$
  - $F(+\infty, +\infty) = \mathrm{P}(X < +\infty, Y < +\infty) = 1$
  - $P(a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2) =$
    $= F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1)$

Relación fc, fd – FD

- Variable **discreta**
  - Función de **cuantía** *vs* Función de **distribución**

$$F(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

- Variable **continua**
  - Función de **densidad** *vs* Función de **distribución**

$$F(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\, dt ds$$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Problema 3.14 (*FD* conjunta discreta)

- Dada la v.a. bidimensional discreta dada por la función de cuantía conjunta:

Y					
2	1/17	0	1/17	0	
1	3/17	5/17	0	1/17	
0	0	4/17	1/17	1/17	
	20	**30**	**40**	**50**	***X***

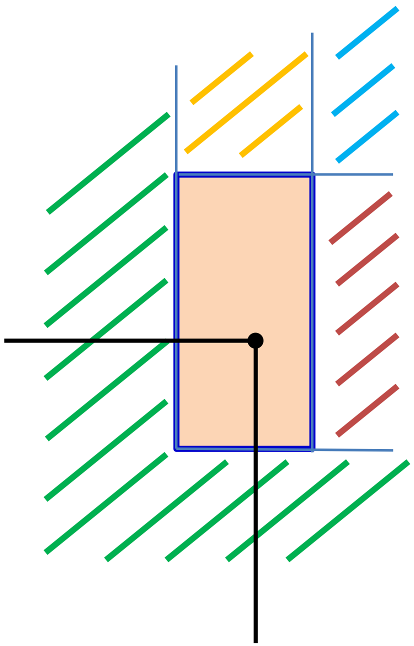
Obtener $F(30,1)$

Problema 3.15 (*FD* conjunta continua)

- Obtener la *FD* para la *fd*:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}xy^2, & (x,y) \in [0,1] \times [0,2] \\ 0, & resto \end{cases}$$

X, Y	**F (x, y) = P(X ≤ x , Y ≤ y)**
$x \leq 0$ ó $y \leq 0$	0
$0 \leq x \leq 1$ $0 \leq y \leq 2$	$\int_0^x \int_0^y \frac{3}{4} st^2\, dtds = \int_0^x \frac{3}{4} s \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^y ds = = \int_0^x s \frac{y^3}{4} ds = \frac{y^3}{4}\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2y^3}{8}$
$1 \leq x$ $0 \leq y \leq 2$	$\int_0^1 \int_0^y \frac{3}{4} st^2\, dtds = \cdots = \frac{y^3}{8}$
$0 \leq x \leq 1$ $2 \leq y$	$\int_0^x \int_0^2 \frac{3}{4} st^2\, dtds = \cdots = x^2$
$1 \leq x$ $2 \leq y$	$\int_0^1 \int_0^2 \frac{3}{4} st^2\, dtds = \cdots = 1$



Problema 3.16 (Marginales, discreta)

- A un grupo de 12 personas se les pregunta cuántos hijos tienen (X) y cuántos hermanos (Y), obteniendo la función de cuantía conjunta:

Y				f
1	1/12	4/12	0	
0	2/12	3/12	2/12	
	0	1	2	X

¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar tenga un hijo?

$P(X=1) = P(X=1 \cap Y=0) + P(X=1 \cap Y=1) = 3/12 + 4/12 = 7/12.$

- Función de cuantía **marginal** de X prescindiendo de Y:

f_1	3/12	7/12	2/12
X	0	1	2

- Función de cuantía **marginal** de Y prescindiendo de X:

Y	f_2
1	5/12
0	7/12

Distribución marginal

- Dada una v.a. bidimensional (X, Y), se denomina **distribución marginal** de X a la distribución unidimensional que tiene X cuando se prescinde de Y.
  - Análogamente para Y.

Funciones marginales	***X***	***Y***
f. cuantía **v.a. discreta**	$f_1(x) = \sum_y f(x,y)$	$f_2(y) = \sum_x f(x,y)$
f. densidad **v.a. continua**	$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$	$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$
F. Distribución v.a. discreta y cont.	$F_1(x) = P(X \leq x, Y < \infty) = F(x,\infty)$	$F_2(y) = P(X < \infty, Y \leq y) = F(\infty, y)$

Problema 3.17 (Marginales, continua)

- El desarrollo de cierto tumor en un ratón de laboratorio está relacionado con dos características de la sangre determinadas por las variables X e Y según la *fd*:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}xy^2, & (x,y) \in [0,1] \times [0,2] \\ 0, & resto \end{cases}$$

Obtener las funciones de densidad marginales.

Independencia de variables

- Dos v.a. X e Y son independientes si para cualesquiera conjuntos numéricos A y B se cumple:

$$\mathrm{P}(X \in A \cap Y \in B) = \mathrm{P}(X \in A) \cdot \mathrm{P}(Y \in B)$$

- Por tanto tenemos que:
  - f. cuantía: $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad \forall x, \forall y$
  - f. densidad: $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad \forall x, \forall y$
  - F. Distribución: $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y) \; \forall x, \forall y$

Problema 3.18 (Independencia, discreta)

- De una baraja española se extrae una carta y se consideran las variables:

$$X = \begin{cases} 1, & si\ Oro\ o\ Copa \\ 2, & si\ Espada\ o\ Basto \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 10, & si\ figura \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Averiguar si las variables son independientes.

Problema 3.19 (Independencia, continua)

- Dada la función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & resto \end{cases}$$

Averiguar si las variables son independientes.

Problema 3.20 (Condicionales, discreta)

- Dada la función de cuantía conjunta:

Y				f
1	$1/12$	$4/12$	0	
0	$2/12$	$3/12$	$2/12$	
	0	**1**	**2**	X

- ¿Cuál es la probabilidad de $X=2$, es decir, $f_1(2)$?
- Si sabemos que Y vale 1, ¿cuál es la probabilidad de $X=2$?
- Si sabemos que Y vale 1, ¿cuál es la probabilidad de $X=1$?

$$P(X=1|Y=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{f(1,1)}{f_2(1)}=\frac{4/12}{5/12}=\frac{4}{5}$$

Distribución condicional

- Dada una v.a. bidimensional (X, Y), llamamos función (de cuantía o densidad) condicional de X a la función

$$g_1(x|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \qquad para\ y: f_2(y) > 0$$

  - Análogamente $g_2(y|X=x)$.
  - Es una función de probabilidad para un valor $Y=y$.
  - En el caso continuo sólo tiene sentido como cociente.
  - Si son independientes: $g_1(x|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f_1(x)\cdot f_2(y)}{f_2(y)} = f_1(x)$

- Propiedades:
  - $g_1(x|Y=y) \geq 0$
  - $\sum_x g_1(x|Y=y) = 1.$ $\qquad \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x|Y=y)\,dx = 1.$

Problema 3.21 (Condicionales, discreta)

- Dada la *fc* conjunta:

Y				f
1	1/12	4/12	0	
0	2/12	3/12	2/12	
	0	**1**	**2**	X

Obtener las *fc* condicionales $g_1(x \mid Y=0)$ y $g_2(y \mid X=1)$.

Problema 3.22 (Condicionales, continua)

- Dada la función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+y), & (x,y) \in [0,1] \times [0,2] \\ 0, & resto \end{cases}$$

Obtener la condicional de X y particularizar para $Y=1$.

Problema 3.23 (Condicionales, continua)

- Dada la función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5}{2}x + y, & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0, & resto \end{cases}$$

Obtener la condicional de Y y particularizar para X=2/3.