Giróscopo

Nieto González, Jaime

25 de octubre de 2022

1. Mecánica del giróscopo

El giróscopo es un objeto físico estudiado en el campo de la mecánica clásica, nos muestra una visión diferente del movimiento de los cuerpos que no solemos observar con nuestra percepción de la realidad, esta inusual mecánica se centra en el **giro**.
A continuación, ejerceremos diferentes fuerzas en diferentes sentidos con una regla, de tal forma que:

- Si presionamos con la regla hacia la pared $\Rightarrow$ el giróscopo baja.
- Si presionamos con la regla hacia nosotros $\Rightarrow$ el giróscopo sube.
- Si presionamos con la regla hacia el suelo $\Rightarrow$ el giróscopo se desplaza en sentido horario (visión desde arriba).
- Si presionamos con la regla hacia el techo $\Rightarrow$ el giróscopo se desplaza en sentido antihorario (visión desde arriba).

Estos resultados se deben a la rotación del disco del giróscopo, teniendo como principales causantes el momento angular $\vec{L}$ y el torque de la fuerza $\vec{\tau}$.
Esta dinámica viene explicada por una de las principales leyes de la mecánica clásica:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{1}$$

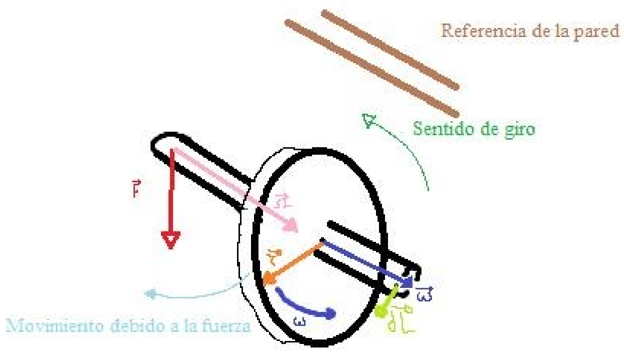

Figura 1: Vectores que actúan en la mecánica del giróscopo

2. Momento de inercia respecto al eje de simetría

Denominaremos eje de simetría del giróscopo x_3 al eje que atraviesa al disco por el centro y de manera perpendicular como también I_3 al momento de inercia del disco respecto a este eje. Hallaremos esta magnitud con diferentes experimentos.

2.1. Aceleración por poleas

Conectamos mediante una polea y una cuerda el disco a una pesa $m_0 = (0{,}100 \pm 0{,}001)kg$. Dejaremos caer esta masa desde una altura h hasta el suelo, cronometrando un tiempo t, hallaremos un punto (t,h) para cada lanzamiento. Ambas magnitudes vienen relacionadas por:

$$h = \frac{m_0 g r^2}{2I_3} t^2 \tag{2}$$

Cabe destacar que tomaremos $s(h) = 0,0050$ m debido al error de la propia la cinta métrica y al movimiento de la pesa en suspensión y $s(t) = 0,25s$ como consecuencia de nuestro propio tiempo de reacción humano. Por último,al disco menor al que se le engancha la cuerda tiene un radio $r = (3,50 \pm 0,1)$cm. Ahora procederemos a ajustar linealmente la ecuación, empleando la Ec. (2), realizaremos una regresión lineal que relaciona la h con t^2. Obtenemos los siguientes datos:

$$b = (0,03464 \pm 0,00050)m/s^2 \qquad r = 9995$$

$$b = \frac{m_0 g r^2}{2I_3} \Rightarrow I_{3exp} = \frac{m_0 g r^2}{2b}$$

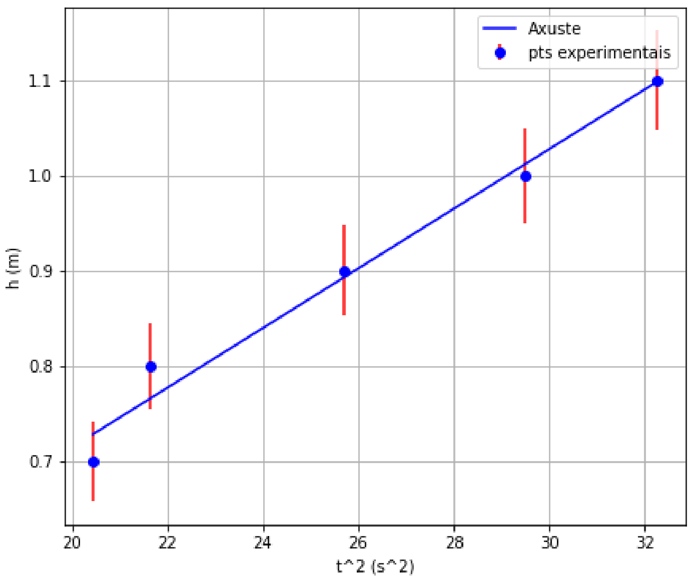

Figura 2: Altura frente al cuadrado del tiempo de caída para m_0

Ordenando la Ec. 2 tal que $I_3 = \frac{m_0 g r^2}{2h} t^2$ podemos hallar I3 de manera directa. Finalmente, obtenemos tanto I_{3exp} y I_{3dir}, tal que:

$$\boxed{I_{3exp} = (0,0173 \pm 0,0010)kg \cdot m^2 \quad I_{3dir} = (0,0172 \pm 0,0017)kg \cdot m^2}$$

2.2. Movimiento de precesión

Colocando una masa m_p = (0,060 ± 0,001)kg con d = 0,180 ± 0,001m entre ella y el punto de apoyo originamos un movimiento de precesión. Con un cronómetro mediremos el periodo de precesión T_p, siendo ω la frecuencia angular del disco durante la vuelta. Debemos tener en cuenta que el tacómetro mide por dos la frecuencia del disco, es decir, estamos midiendo 2f.
Fijamos debido a errores humanos en el tiempo de reacción $s(Tp) = 0,25$ s y en la colocación del tacómetro $s(f) = 0,029Hz$. Mediante propagación hallamos $s(\omega) = 0,18rad/s$ que será constante para cualquier ω en el experimento.
Podemos realizar el siguiente tratamiento algebraico con expresiones ya conocidas, disponemos de tres series de datos:

$$\Omega_p = \frac{m_p g d}{I_3 \omega} = \frac{2\pi}{T_p} \qquad \omega = 2f \cdot \pi \tag{3}$$

SERIE 1 (rad/s)			SERIE 2 (rad/s)			SERIE 3 (rad/s)		
Ω_p	s(Ω_p)	ω	Ω_p	s(Ω_p)	ω	Ω_p	s(Ω_p)	ω
0,14850	0,00088	52,45	0,12987	0,00067	59,46	0,13585	0,00073	56,09
0,1759	0,0012	42,46	0,15549	0,00096	47,95	0,1644	0,0011	46,84
0,2124	0,0018	37,12	0,1741	0,0012	41,29	0,1927	0,0015	40,51
0,2266	0,0020	33,21	0,2135	0,0018	36,08	0,2196	0,0019	36,24
0,2648	0,0028	29,62	0,2475	0,0024	30,52	0,2367	0,0022	32,37

Cuadro 1: Datos movimiento precesión

$$T_p = I_3 \frac{2\pi}{m_p g d} \omega \tag{4}$$

Si llevamos a cabo un ajuste lineal a los puntos (ω,T_p) hallaremos una recta de ajuste y=bx cuya pendiente se relaciona con el momento de inercia. Debido a la forma constante de las incertidumbres de ω y T_p realizaremos una regresión lineal simple que nos dará para cada serie de datos los siguientes valores:

$$b = \frac{I_3 2\pi}{m_p g d} \Rightarrow I_3 = \frac{b m_p g d}{2\pi}$$

SERIE 1: $b = 0,8162$ s$^2/rad$ $s(b) = 0,0089$ s$^2/rad$ $r = 0,9997$

SERIE 2: $b = 0,833$ s$^2/rad$ $s(b) = 0,011$ s$^2/rad$ $r = 0,9996$

SERIE 3: $b = 0,8136$ s$^2/rad$ $s(b) = 0,0060$ s$^2/rad$ $r = 0,9998$

$I_3' = 0,01376 \pm 0,00028$ kgm^2 $I_3'' = 0,01405 \pm 0,00031$ kgm^2 $I_3''' = 0,01372 \pm 0,00026$ kgm^2

$$b = \frac{I_3 2\pi}{m_p g d} \Rightarrow I_3 = \frac{b m_p g d}{2\pi}$$

$$\boxed{\bar{I}_3 = 0,01384 \pm 0,00028 \text{ kgm}^2}$$

Los resultados obtenidos los representamos en la siguiente gráfica:

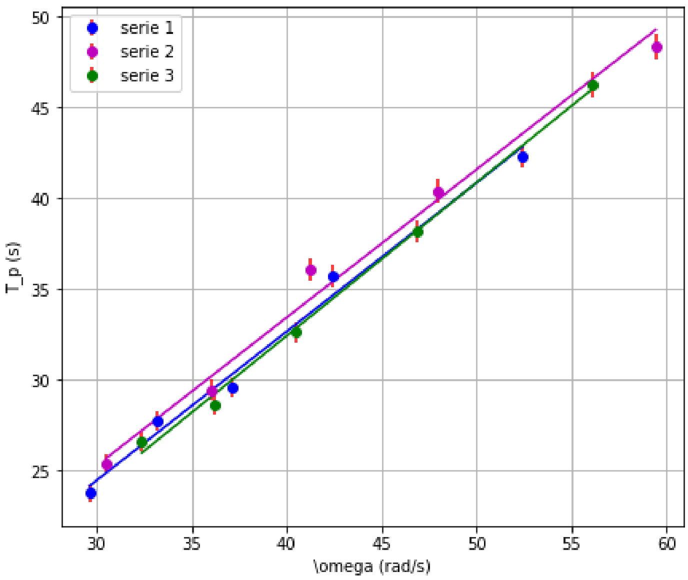

Figura 3: Período de precesión frente a la frecuencia de rotación

Cabe destacar el resultado se aleja considerablemente de los obtenidos en el apartado anterior, pero esto tiene sentido debido a la incerteza de la fuerza ejercida a la cuerda (la cual es casi imposible ejercer la misma), al error humano al medir los tiempos con el cronómetro y la incerteza en la medida de ω con el tacómetro.

3. Mom. de inercia respecto a un eje perpendicular al de simetría

Tomaremos x_1 como un eje perpendicular al eje de simetría, y I_1 como el momento de inercia del giróscopo respecto a este eje. Al igual que con I_3, hallaremos I_1 mediante diferentes experimentos.

3.1. Movimiento oscilatorio mediante muelles

En este experimento utilizaremos dos muelles para imponer al giróscopo un movimiento oscilatorio. Utilizando el método dinámico con una pesa $m = (0,100 \pm 0,001)kg$ hallamos una constante de recuperación de los muelles de $k = (18,5 \pm 2,0)N/m$. Colocaremos la parte trasera del brazo del giróscopo atada a los dos muelles a una altura similar, y mediremos un cierto número de oscilaciones en un tiempo determinado para hallar el periodo de oscilación y a su vez la frecuencia ω. Tomaremos como $s(t) = 0,4$ s la incertidumbre del tiempo medido, ya que hay que tener en cuenta el tiempo de reacción y el fallo humano de determinar cuando ha perdido la suficiente energía el MAS. Finalmente tomaremos como longitud desde el punto de aplicación de los muelles hasta el eje $D = (0,300 \pm 0,001)m$. Con un tratamiento algebráico simple a una ecuación física conocida podemos hallar I_1 en función de los datos recogidos:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{I_1}}D \Rightarrow I_1 = \frac{2kD^2}{\omega^2} \tag{5}$$

De esta manera el I_1 obtenido de forma directa es:

$$\boxed{I_1 = (0,0632 \pm 0,0090) kgm^2}$$

3.2. Movimiento de nutación

Al ejercer un leve golpe en el contrapeso del giróscopo en rotación provocaremos un movimiento oscilatorio de este llamado nutación, tomaremos el número de oscilaciones en un tiempo determinado hallando el periodo de nutación T_n y así obtener la frecuencia de nutación Ω_n. Establecemos una $s(t) = 0{,}4s$ debido al gran error humano que tiene analizar un movimiento de nutación de esta manera. La s(ω) será constante valiendo 0.18 rad/s. Recogemos tres series de datos: Mediante un ajuste lineal a los pares

SERIE 1 (rad/s)			SERIE 2 (rad/s)			SERIE 3 (rad/s)		
Ω_n	s(Ω_n)	ω	Ω_n	s(Ω_n)	ω	Ω_n	s(Ω_n)	ω
9,56	0,58	59,34	11,81	0,89	68,95	10,18	0,66	63,01
9,42	0,56	56,10	10,70	0,73	65,36	10,12	0,65	60,31
8,38	0,45	52,43	10,15	0,66	61,34	9,27	0,55	54,23
8,34	0,44	50,35	9,73	0,60	55,16	8,89	0,50	53,96
7,72	0,38	42,54	9,27	0,55	52,47	8,31	0,44	49,50

Cuadro 2: Datos movimiento nutación

de datos (ω,Ω_n) podremos hallar la pendiente de una recta y=bx que relacione I_1 con I_3. Para cada serie de datos realizamos una regresión lineal simple con la siguiente fórmula recogiendo la siguiente información:

$$\Omega_n = \frac{I_3}{I_1}\omega \Rightarrow b = \frac{I_3}{I_1} \Rightarrow I_3 = \frac{b}{I_1} \tag{6}$$

Ahora, hallaremos diferentes valores de I_1 mediante los diferentes I_3 obtenidos.
Utilizando el I_3 hallado con las poleas de forma directa:

$I_1 = 0,1043 \pm 0,0064$ kg·m^2 $\quad$ $I_1 = 0,1018 \pm 0,0061$ kg·m^2 $\quad$ $I_1 = 0,0968 \pm 0,0059$ kg·m^2

$$\boxed{\bar{I}_1 = 0,1010 \pm 0,0061 \text{ kg·m}^2}$$

Para o I_3 realizado con las poleas de forma directa:

$I_1 = 0,104 \pm 0,010$ kg·m^2 $\quad$ $I_1 = 0,101 \pm 0,010$ kg·m^2 $\quad$ $I_1 = 0,096 \pm 0,010$ kg·m^2

$$\boxed{\bar{I}_1 = 0,100 \pm 0,010 \text{ kg·m}^2}$$

Para el I_3 calculado con el movimiento de precesión:

$I_1 = 0,0834 \pm 0,0024$ kg·m^2 $\quad$ $I_1 = 0,0814 \pm 0,0021$ kg·m^2 $\quad$ $I_1 = 0,0774 \pm 0,0022$ kg·m^2

$$\boxed{\bar{I}_1 = 0,0807 \pm 0,0022 \text{ kg·m}^2}$$

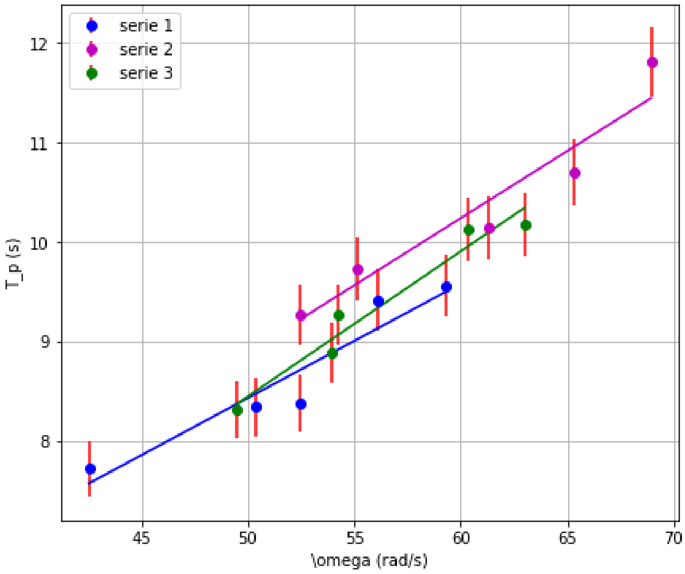

Figura 4: Frecuencia de nutación frente a la frecuencia de rotación

4. Conclusiones

En la primera parte de la práctica estudiamos el movimiento del giroscopio.
Luego hallaremos el momento de inercia respecto al eje de simetría de dos formas diferentes: primero por aceleración de poleas y luego por movimiento de precesión. En el primer caso, obtenemos los valores de inercia de forma experimental y directa, obteniendo los siguientes valores: $I_{3exp} = (0,0173 \pm 0,0010) kg \cdot m^2$ y $I_{3dir} = (0,0172 \pm 0,0017) kg \cdot m^2$. Podemos apreciar que los resultados con casi idénticos y en este caso satisfactorios.
En cuanto el movimiento de precesión, el valor obtenido es $\bar{I_3} = 0,01384 \pm 0,00028\ kgm^2$, el cual difiere de los dos anteriores, pero esto puede deberse a varias razones, por el error humano del cronómetro o errores en la toma de medidas. Pese a esto, no se desvía exageradamente.
Ahora, mediremos el momento de inercia respecto a un eje perpendicular al de simetría de dos formas, mediante movimiento oscilatorio mediante muelles, el cual obtenemos de forma directa tal que $I_1 = (0,0632 \pm 0,0090) kgm^2$ y mediante movimiento de nutación, obteniendo tres valores diferentes:$\bar{I_1} = 0,1010 \pm 0,0061$ kg$\cdot$ m^2,$\bar{I_1} = 0,100 \pm 0,010$ kg$\cdot$ m^2 y $\bar{I_1} = 0,0807 \pm 0,0022$. Podemos observar que los valores difieren entre si, pero esto puede deberse como antes a diversos errores, tanto por errores sitemáticos, error humano en cuanto a la medición del tiempo con el cronómetro. Además, si observamos las rectas de tendencia en las gráficas de la nutación nos damos cuenta de que para cada serie aplicamos una fuerza diferente, lo que puede también constituir una fuente de error.