

Oscilador amortiguado y forzado

Nieto González, Jaime

30 de octubre de 2022

1. Oscilador amortiguado y forzado

1.1. Oscilador amortiguado

Conectaremos la fuente de alimentación y el amperímetro al péndulo y lo pondremos en el valor 0 de reposo. El movimiento oscilatorio amortiguado se rige por la ecuación:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t) \quad (1)$$

donde θ es la amplitud, γ es la constante de amortiguamiento y ω_1 la frecuencia de oscilación.

Obtendremos γ y ω_1 para ver la relación existente entre ellas. Fijaremos cinco valores de intensidades diferentes y estudiaremos cómo oscila en cada uno de ellos, cronometrando la sucesión de máximos de amplitud que ocurren en tiempos $t = nT$ ($n = 1, 2, \dots$) desde que ponemos el aparato en el valor de amplitud máxima hasta que llega al cero (reposo).

Lo primero que haremos será calcular este período ($T = \frac{t}{n}$) y con ellos obtener $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ para cada valor de la intensidad.

Las incertidumbres, teniendo en cuenta la precisión de los aparatos y el error humano cometido al medir son: $s(t) = 0,25s$ y $s(I) = 0,02A$, ya que a pesar de ser 0,01 el error instrumental, nuestro amperímetro oscilaba $\pm 0,01A$. Las demás incertidumbres serán obtenidas por propagación:

$I \pm 0,02(A)$	$T(s)$	$s(T)(s)$	$\omega_1(rad/s)$	$s(\omega_1)(rad/s)$
0,00	1,896	0.013	3,315	0,023
0,30	1,885	0,025	3,333	0,025
0,60	1,832	0,050	3,430	0,044
0,90	1,877	0,083	3,35	0,15
1,10	1,84	0,13	3,41	0,24

Cuadro 1: Intensidades, períodos y frecuencias angulares para el oscilador libre y amortiguado

Haremos uso de la ecuación 1 en los valores máximos de amplitud, lo que la convierte en la expresión $\theta = \theta_0 e^{-\gamma t}$.

Obtendremos $\gamma(I)$ a partir de las curvas de amortiguamiento de la amplitud. Estas curvas las obtendremos representando gráficamente la intensidad frente a la amplitud y, además, tomando logaritmos

en la ecuación 1, vemos que existe una relación lineal entre el logaritmo neperiano de la amplitud y el tiempo ($\ln(\theta(t)) = \ln(\theta_0) - \gamma t$).

Esta relación también la representaremos para simplificar los cálculos y obtener conclusiones más claras.

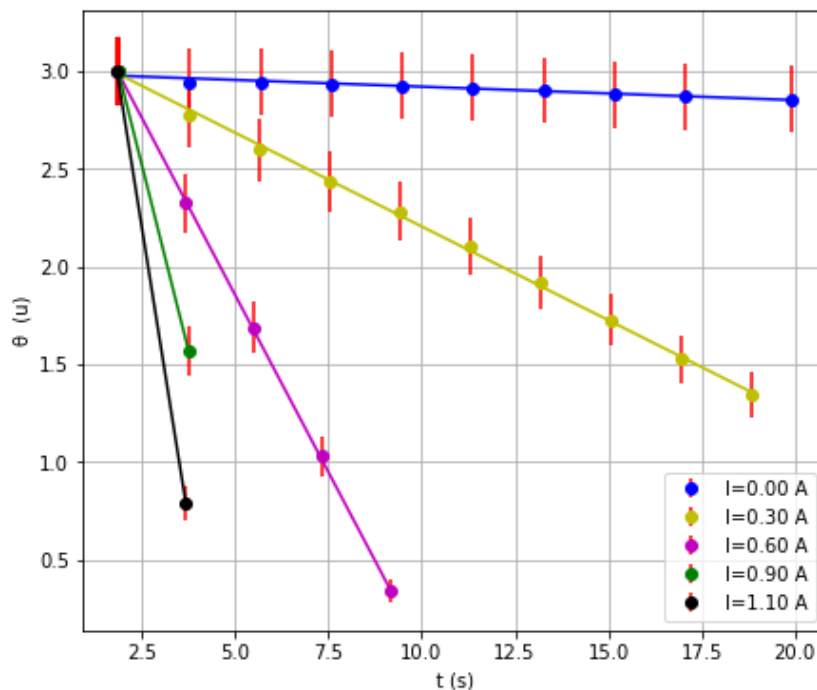


Figura 1: $\ln(\theta)$ frente al tiempo

Debemos apuntar que en el caso de $I = 0.90$ A solo tomamos los valores de las 2 primeras oscilaciones debido a que en esta intensidad el péndulo oscilaba muy pocas veces, además de la dificultad de medición. Observamos que cuanto mayor es la intensidad, mayor es el amortiguamiento y más rápido se detiene. Como valores finales para γ obtenemos:

$I \pm 0,02(A)$	$\gamma(s^{-1})$	$s(\gamma)(s^{-1})$	r
0,00	0,00691	0,00059	0,97
0,30	0,0960	0,0012	0,9993
0,60	0,3628	0,0027	0,99991
0,90	0,760	0,039	0,96
1,10	1,20	0,11	0,91

Cuadro 2: γ para el oscilador libre y amortiguado

Vemos que γ no es constante. Ahora, con las frecuencias ω_1 ya calculadas y partiendo de la expresión ya conocida $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, realizaremos una comparación gráfica entre ω_1^2 y $\omega_0^2 - \gamma^2$ frente a γ . Tomamos como ω_0^2 como la frecuencia obtenida para $I = 0,0A$ presentada en el cuadro 1.

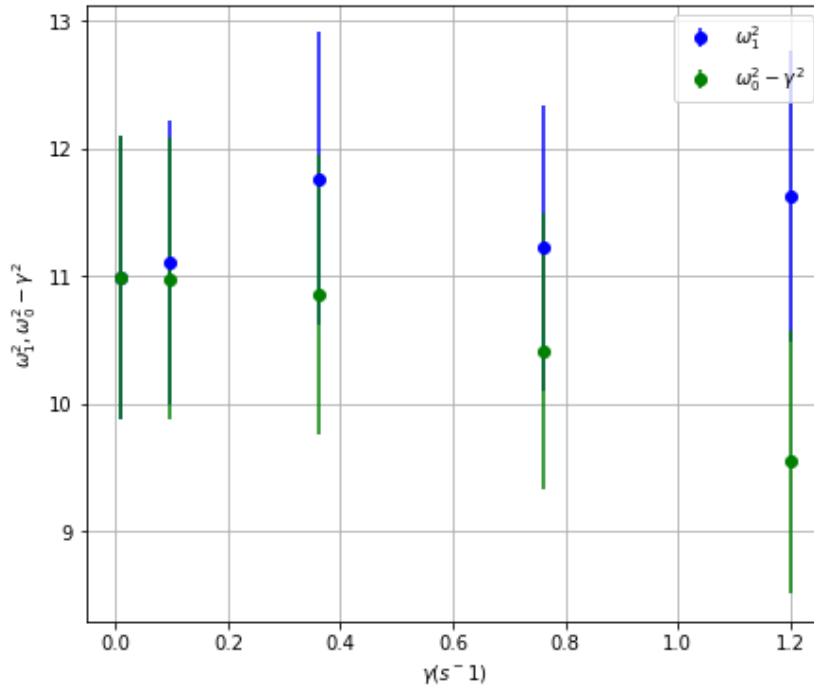


Figura 2: $\omega_1^2(I)$ y $\omega_0^2 - \gamma^2(I)$

Observamos que los valores distan ligeramente, pero en muchos casos entran dentro de sus barras de error los unos de los otros. Ahora veremos si para algún valor $\omega_0 = \gamma_c$, ω_1 se anula. Haremos un ajuste de $\gamma(I)$ y lo extrapolaremos para ver obtener el valor de $\gamma_c = \gamma(I_c)$, siendo I_c la llamada intensidad crítica y definida como la intensidad frontera entre las situaciones de sobreamortiguado (amortiguamiento crítico) y amortiguado (para valores de I suficientemente altos, las oscilaciones en el péndulo desaparecen, lo que hace que este no retroceda y esté sobreamortiguado). En nuestro caso, en el laboratorio medimos una intensidad crítica en $I_c = 1,87 \pm 0,02 A$. Compararemos este con el valor extrapolado de $\gamma_c = \gamma(I_c)$.

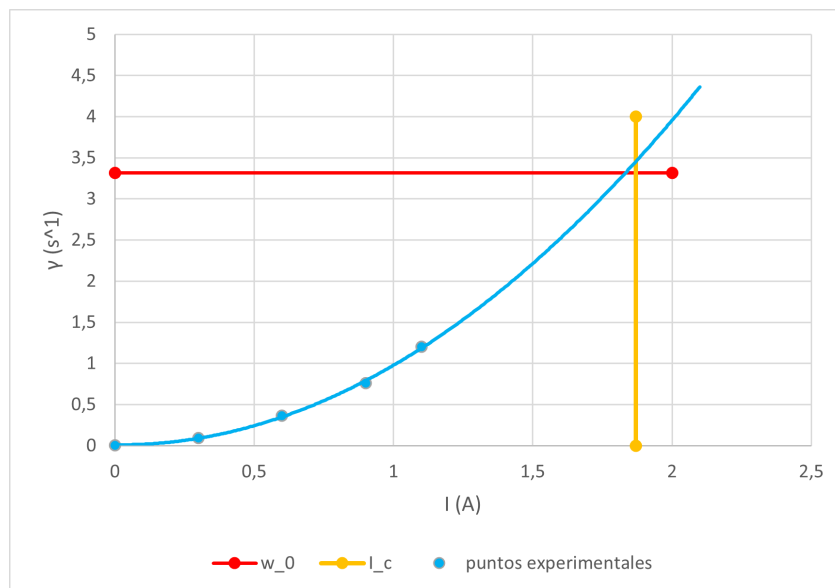


Figura 3: $\omega_1^2(I)$ y ω_0^2 , I_c y $\gamma(I)$ frente a I

En esta gráfica hemos hecho un ajuste a un polinomio de grado 2. Si todo fuese correcto, existiría un punto en el que dicho ajuste corte con los valores de ω_0 y I_c , esto implica que I_c tome un valor de $I_c = 1,83 \pm 0,02A$, muy similar y satisfactorio si lo comparamos con el valor experimental obtenido en el laboratorio ($I_c = 1,87 \pm 0,02A$). Obtenemos así un valor de γ :

$$\gamma = (3,454 \pm 0,074)s^{-1}$$

Con todo esto, teóricamente $\gamma_c = \omega_0$, y sabiendo que el valor obtenido para $\omega_0 = 3,315rad/s$, vemos que la diferencia entre ambos valores es muy pequeña, además de satisfactorio, por lo que consideramos nuestros resultados satisfactorios. Además, aplicando estos resultados a la expresión $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, ω_1 toma un valor de -0.94, un valor cercano a cero.

2. Oscilador forzado

Ahora, suministraremos al oscilador libre una tensión fija de 24V de corriente continua, provocando así lo que llamamos un oscilador "forzado". Aplicando también intensidad de corriente, provocamos un oscilador 'amortiguado y forzado', en nuestro caso aplicaremos unas intensidades de 0.3 A y de 0.6 A.

Representaremos gráficamente la curva de la amplitud $A(\omega)$ para las dos intensidades. Haremos un ajuste a una función lorentziana, a partir del cual hallaremos la frecuencia de resonancia ω_R , la anchura $\Delta\omega$ y el factor de calidad ($Q = \frac{\omega_R}{\Delta\omega}$). Esta función lorentziana tiene la forma:

$$\theta = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2}} \quad (2)$$

A continuación exponemos una gráfica, con el ajuste de las dos intensidades:

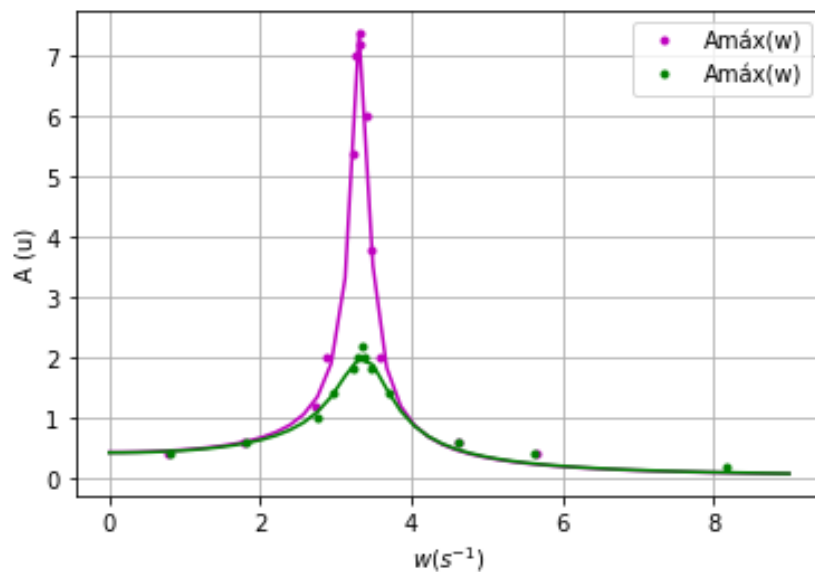


Figura 4: $\omega_1^2(I)$ y $\omega_0^2 - \gamma^2(I)$

$Intensidad \pm 0,02(A)$	$A \pm s(A)(s^{-1})$	$\gamma \pm s(\gamma)(s^{-1})$	$\omega_0 \pm s(\omega_0)(s^{-1})$
0,30	$4,67 \pm 0,22$	$0,0941 \pm 0,0053$	$3,3210 \pm 0,0076$
0,60	$4,81 \pm 0,19$	$0,355 \pm 0,026$	$3,395 \pm 0,034$

Cuadro 3: Resultados del ajuste para $I = 0,30A$ e $I = 0,60A$

Para hallar la frecuencia de resonancia ω_R , veremos en las gráficas el punto de amplitud máximo θ_R y observaremos qué valor toma ω para esa altura. Haciendo esto obtenemos:

$$\omega_{R_{I_0,3A}} = (3,307 \pm 0,087)s^{-1} \quad \omega_{R_{I_0,6A}} = (3,342 \pm 0,089)s^{-1}$$

También obtendremos ω_R de forma teórica a partir de la expresión $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$. Los resultados son:

$$\omega_{Rteo_{I_0,3A}} = (3,3183 \pm 0,0076)s^{-1} \quad \omega_{Rteo_{I_0,6A}} = (3,358 \pm 0,035)s^{-1}$$

Como vemos, los valores experimentales se acercan mucho a los teóricos, siendo satisfactorios, ya que están en los intervalos de sus respectivas incertidumbres. Además, observamos que las frecuencias de resonancia son distintas para cada intensidad.

Por otro lado, para obtener la anchura partiremos de la expresión $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, sabiendo que ω_2 y ω_1 corresponden con los puntos de la función $A(\omega)$ donde la amplitud máxima se reduce en un factor $\sqrt{2}$, tal que $A(\omega_{1,2}) = \frac{A(\omega_R)}{\sqrt{2}}$ (esto significa que la energía se reduce en un factor 2). Analizando entonces la curva vemos que, haciendo uso de la siguiente ecuación;

$$\Delta\omega = \gamma \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega_R^2}} \quad (3)$$

obtendremos los siguientes valores para $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega_{I=0,30} = (0,0941 \pm 0,0091)s^{-1} \quad \Delta\omega_{I=0,60} = (0,357 \pm 0,0047)s^{-1}$$

Por esto vemos que podemos aproximar $\Delta\omega \simeq \gamma$.

A continuación, con la siguiente ecuación, obtendremos el factor de calidad Q ;

$$Q = \frac{\omega_R}{\Delta\omega} \quad (4)$$

tal que obtenemos los siguientes resultados:

$$Q_{I=0,30} = 35,14 \quad Q_{I=0,60} = 9,36$$

Para terminar, en el laboratorio también observamos el comportamiento del sistema en los límites $\omega \rightarrow 0$ y $\omega \rightarrow \infty$. Para el primer límite ($\omega \rightarrow 0$, frecuencias muy bajas) vemos que es distinto de cero (tiende a $\frac{A}{\omega_0^2}$) y observamos que no existía desfase entre el oscilador y el motor. Por otro lado, al tomar el segundo límite ($\omega \rightarrow \infty$) obtenemos que la amplitud tiende a cero, es decir que no hay oscilaciones, además de que existía un desfase de π . Por último, también vimos que en torno a la frecuencia de resonancia el desfase era de $\frac{\pi}{2}$.

A simple vista vemos que la curva de la amplitud $A(\omega)$ guarda un parecido con una curva simétrica pero que no lo es, sino que es más asimétrica cuanto más se aleja del pico de resonancia (tomamos el eje de simetría la frecuencia de resonancia ω_R).

3. Conclusiones

En esta memoria había que estudiar de forma explícita dos casos: qué ocurre cuando una fuerza se opone a este movimiento (oscilador amortiguado) y cuando interviene una fuerza externa, también periódica (amortiguado y forzado).

Para el caso amortiguado, vimos claramente dos fenómenos distintos que actuaban contra la oscilación: la fuerza de rozamiento mecánica (muy débil) y las corrientes de Foucault generadas por un electroimán. Ambas reducían progresivamente la amplitud de la oscilación hasta hacerla llegar a 0, y cuando las corrientes se hacían demasiado grandes (a partir de una intensidad I_c de alrededor de $2A$ en el electroimán) llegaba a desaparecer.

En el caso forzado no hay tal atenuación, porque el motor que lo impulsa no se detiene, pero sí observamos el fenómeno de la resonancia. Cuando la frecuencia del motor era cercana a ω_R , la amplitud del movimiento se disparaba, pero lejos de esta prácticamente desaparecía. Esto tiene que ver principalmente con la frecuencia natural a la que vibran los átomos del sistema: si están en sintonía con la fuerza externa, esta se amplifica mucho; si no, es todo lo contrario.