2022秋季 学院路校区(凸优化与近似)
最优化方法　　第 3 次作业
提交日期：2022 年10 月27日周四课前

2022 年 10 月 9 日

Algorithm 1 Conjugate gradient method for minimizing $f(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}$

Given $\boldsymbol{x}^{(0)}$, and compute $\boldsymbol{r}^{(0)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{b}$;
set $\boldsymbol{p}^{(0)} = -\boldsymbol{r}^{(0)},\ k = 0$;
while $\|\boldsymbol{r}^{(k)}\| > \epsilon$ **do**
    set $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^{(k)}$;
    set $\alpha_k = \frac{\boldsymbol{r}^{(k)T}\boldsymbol{r}^{(k)}}{\boldsymbol{p}^{(k)T}\boldsymbol{d}}$;
    set $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha_k\boldsymbol{p}^{(k)}$;
    set $\boldsymbol{r}^{(k+1)} = \boldsymbol{r}^{(k)} + \alpha_k\boldsymbol{d}$;
    set $\beta_{k+1} = \frac{\boldsymbol{r}^{(k+1)T}\boldsymbol{r}^{(k+1)}}{\boldsymbol{r}^{(k)T}\boldsymbol{r}^{(k)}}$;
    set $\boldsymbol{p}^{(k+1)} = -\boldsymbol{r}^{(k+1)} + \beta_{k+1}\boldsymbol{p}^{(k)}$;
    set $k = k+1$;
end while
return $\boldsymbol{x}^{(k)}$ as $\boldsymbol{x}^*$.

---

1. 利用共轭梯度法极小化二次函数 $f(\boldsymbol{x}) = 10x_1^2 + x_2^2$ ，其中$x^{(0)} = (0.1, 1)^T$. 验证：经过 n 次一维搜索后的二次终止性.

2. (选做题) 利用共轭梯度法的迭代形式直接证明共轭梯度法的以下性质对 $k=1$ 成立. 设 m 是算法1中使 $\boldsymbol{r}^{(m)} \neq \boldsymbol{0}$ 的最大整数, 则 $m \leq n$ ；且对所有 $k = 1, \cdots, m$, 下列事实成立：

$$\boldsymbol{p}^{(k)T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^{(i)} = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, k-1 \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{r}^{(k)T}\boldsymbol{r}^{(i)} = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, k-1 \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{p}^{(k)T}\boldsymbol{r}^{(k)} = -\boldsymbol{r}^{(k)T}\boldsymbol{r}^{(k)} \tag{1c}$$

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{r}^{(0)}, \boldsymbol{r}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{r}^{(k)}\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{r}^{(0)}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{r}^{(0)}, \cdots, \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{r}^{(0)}\} \tag{1d}$$

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{p}^{(0)}, \boldsymbol{p}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{p}^{(k)}\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{r}^{(0)}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{r}^{(0)}, \cdots, \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{r}^{(0)}\}. \tag{1e}$$

上述性质中, (1a)-(1b)分别说明共轭梯度法所产生的搜索方向是共轭的, 梯度是正交的；(1c)说明每一步产生的搜索方向是下降的; (1d)-(1e)说明每个搜索方向和梯度皆包含于 $\boldsymbol{r}^{(0)}$ **的** k **阶Krylov子空间**，即

$$\mathcal{K}_k(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{r}^{(0)}) := \mathrm{span}\{\boldsymbol{r}^{(0)}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{r}^{(0)}, \cdots, \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{r}^{(0)}\}.$$

这个概念在分析共轭梯度法的收敛速度方面有非常重要的应用; 共轭梯度法也是解系数矩阵是对称正定的线性方程组的最基本的Krylov 子空间法.

3. 参考网页`https://ee227c.github.io/code/lecture4.html`，自主学习“梯度法的应用”，针对每个应用问题，整理出：

   - 应用问题的描述，及对应的优化模型，并给出模型中涉及的数据、变量和参数的解释.
   - 目标函数是否是凸函数或者强凸函数？为什么？
   - 求出目标函数的梯度. 是$\beta-$光滑的吗？如果是，给出具体的光滑性参数β.