Polarización de Partículas Masivas y sin Masa (Fotón)

Jaime Díez González-Pardo

Universidad de Cantabria

15 de enero de 2019

Invariancia Gauge

$$\text{Cuadrivector potencial eléctrico} \Rightarrow \boxed{A^\mu = (\phi, \mathbf{A})}$$

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu$$

Invariancia Gauge

$$\text{Cuadrivector potencial eléctrico} \Rightarrow \boxed{A^\mu = (\phi, \mathbf{A})}$$

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu$$

$$\text{Invarianza Gauge} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi} \\ \partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu A_\mu - \Box\chi \\ \Box\chi = \partial^\mu A_\mu \quad | \quad \partial^\mu A'_\mu = 0 \end{cases}$$

$$\text{Operador D'Alembertiano} \quad \Rightarrow \quad \left[\Box \equiv g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu\right]$$

Invariancia Gauge

Cuadrivector potencial eléctrico $\Rightarrow \boxed{A^\mu = (\phi, \mathbf{A})}$

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu$$

Invarianza Gauge $\Rightarrow \begin{cases} \boxed{A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi} \\ \partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu A_\mu - \Box \chi \\ \Box \chi = \partial^\mu A_\mu \quad | \quad \partial^\mu A'_\mu = 0 \end{cases}$

Operador D'Alembertiano $\quad \Rightarrow \quad \left[\Box \equiv g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu\right]$

Lorenz gauge condition	Lorenz gauge
$\boxed{\partial^\mu A_\mu = 0}$	$\boxed{\Box A^\mu \equiv \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = j^\mu}$

Polarización del Fotón

Se estudia el fotón en ausencia de carga $j^\mu = 0$

$$\Box A^\mu = j^\mu = 0$$

Polarización del Fotón

Se estudia el fotón en ausencia de carga $j^\mu = 0$

$$\Box A^\mu = j^\mu = 0$$

Se obtiene una ecuación de ondas con solución: $A^\mu = \epsilon^\mu(q)e^{-iqx}$

$$\Box A^\mu = \Box(\epsilon^\mu e^{-iqx}) = -q^2\epsilon^\mu e^{-iqx} = 0 \quad \Rightarrow \quad q^2 = m^2 = 0$$

Polarización del Fotón

Se estudia el fotón en ausencia de carga $j^\mu = 0$

$$\Box A^\mu = j^\mu = 0$$

Se obtiene una ecuación de ondas con solución: $A^\mu = \epsilon^\mu(q) e^{-iqx}$

$$\Box A^\mu = \Box(\epsilon^\mu e^{-iqx}) = -q^2 \epsilon^\mu e^{-iqx} = 0 \quad \Rightarrow \quad q^2 = m^2 = 0$$

Aplicando la condición gauge de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu(\epsilon^\mu(q) e^{-iqx}) = -i q_\mu \epsilon^\mu e^{-iqx} \qquad \Rightarrow \boxed{q_\mu \epsilon^\mu = 0}$$

$$\downarrow$$

3 grados de libertad

Imponiendo la condición de Lorenz

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x) \quad | \quad \partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu A_\mu - \Box \Lambda(x)$$

Imponiendo la condición de Lorenz

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x) \quad | \quad \partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu A_\mu - \Box \Lambda(x)$$

Se escoge un $\Lambda(x)$ tal que $\Box \Lambda(x) = 0$

$$\Lambda(x) = -iae^{-iqx} \quad \Rightarrow \quad \Box \Lambda = -q^2 \Lambda$$

Polarización del Fotón

Imponiendo la condición de Lorenz

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x) \quad | \quad \partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu A_\mu - \Box\Lambda(x)$$

Se escoge un $\Lambda(x)$ tal que $\Box\Lambda(x) = 0$

$$\Lambda(x) = -iae^{-iqx} \quad \Rightarrow \quad \Box\Lambda = -q^2\Lambda$$

$$\begin{aligned} A_\mu \to A'_\mu = A_\mu = \partial_\mu \Lambda(x) \quad &= \quad \epsilon_\mu e^{-iqx} + ia\partial_\mu e^{-iqx} \\ &= \quad \epsilon_\mu e^{-iqx} + ia(-iq_\mu)e^{-iqx} \\ &= \quad (\epsilon_\mu + aq_\mu)e^{-iqx} \end{aligned}$$

Polarización del Fotón

$$\epsilon_\mu \to \epsilon'_\mu = \epsilon_\mu + a q_\mu$$

Cualquier vector polarización que sea multiplo del cuadrimomento del fotón corresponde al mismo fotón físico. De esta forma se escoge un *a* de tal forma que la componente temporal se anule. De esta forma la expresión de la condición gauge de lorenz queda como:

$$q_\mu \epsilon^\mu = 0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0}$$

Polarización del Fotón

$$\epsilon_\mu \to \epsilon'_\mu = \epsilon_\mu + aq_\mu$$

Cualquier vector polarización que sea multiplo del cuadrimomento del fotón corresponde al mismo fotón físico. De esta forma se escoge un a de tal forma que la componente temporal se anule. De esta forma la expresión de la condición gauge de lorenz queda como:

$$q_\mu \epsilon^\mu = 0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0}$$

$$\boxed{\epsilon_1^\mu = (0,1,0,0) \quad \text{y} \quad \epsilon_2^\mu = (0,0,1,0)}$$

$$\boxed{\epsilon_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-i,0) \quad \text{y} \quad \epsilon_+^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,i,0)}$$

Polarización de Particulas Masivas

$$\text{Lagrangiano} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_m = -\frac{1}{4}F^{\nu\mu}F_{\nu\mu} + \frac{1}{2}m^2 B^\mu B_\mu$$

$$\text{Euler-Lagrange} \quad \Rightarrow \quad (\Box + m^2)B^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu B^\nu) = 0$$

Polarización de Particulas Masivas

$$\text{Lagrangiano} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_m = -\frac{1}{4}F^{\nu\mu}F_{\nu\mu} + \frac{1}{2}m^2 B^\mu B_\mu$$

$$\text{Euler-Lagrange} \quad \Rightarrow \quad (\Box + m^2)B^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu B^\nu) = 0$$

$$\partial_\mu \cdot \left\{(\Box + m^2)B^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu B^\nu)\right\} = 0$$

$$(\Box + m^2)\partial_\mu B^\mu - \partial_\mu\partial^\mu(\partial_\nu B^\nu) = 0$$

$$(\Box + m^2)\partial_\mu B^\mu - \Box(\partial_\nu B^\nu) = 0$$

$$m^2\partial_\mu B^\mu = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{\partial_\mu B^\mu = 0} \quad \boxed{(\Box + m^2)B^\mu = 0}$$

Polarización de Particulas Masivas

Puesto que para partícular masivas se tiene que $q^2 = m^2$ se puede utilizar solución de onda plana.

$$B^\mu = \epsilon^\mu e^{-iqx}$$

$$\Box e^{-iqx} = -q^2 e^{-iqx} = -m^2 e^{-iqx} \quad \Rightarrow \quad (\Box + m^2) B^\mu = 0$$

Polarización de Particulas Masivas

Puesto que para partícular masivas se tiene que $q^2 = m^2$ se puede utilizar solución de onda plana.

$$B^\mu = \epsilon^\mu e^{-iqx}$$

$$\Box e^{-iqx} = -q^2 e^{-iqx} = -m^2 e^{-iqx} \quad \Rightarrow \quad (\Box + m^2) B^\mu = 0$$

Se aplica la condición de lorenz.

$$\partial_\mu B^\mu = \partial_\mu(\epsilon^\mu e^{-iqx}) = -i\epsilon^\mu q_\mu e^{-iqx}$$

Polarización de Particulas Masivas

Puesto que para partículas masivas se tiene que $q^2 = m^2$ se puede utilizar solución de onda plana.

$$B^\mu = \epsilon^\mu e^{-iqx}$$

$$\Box e^{-iqx} = -q^2 e^{-iqx} = -m^2 e^{-iqx} \quad \Rightarrow \quad (\Box + m^2) B^\mu = 0$$

Se aplica la condición de lorenz.

$$\partial_\mu B^\mu = \partial_\mu(\epsilon^\mu e^{-iqx}) = -i\epsilon^\mu q_\mu e^{-iqx}$$

$$\epsilon^\mu q_\mu = 0$$

3 grados de libertad

Polarización de Particulas Masivas

Si intentamos realizar una transformación guage:

$$B_\mu \to B'_\mu = B_\mu - \partial_\mu \chi(x)$$

$$\partial^\mu B'_\mu = \partial^\mu B_\mu - \Box \chi(x)$$

Polarización de Particulas Masivas

Si intentamos realizar una transformación guage:

$$B_\mu \to B'_\mu = B_\mu - \partial_\mu \chi(x)$$

$$\partial^\mu B'_\mu = \partial^\mu B_\mu - \Box\chi(x)$$

Al contrario que en el caso del fotón, $\chi = e^{-iqx}$ no cumple que $\Box\chi = 0$ por lo que se determina que las partículas masivas tiene 3 estados independientes de polarización.

Polarización de Particulas Masivas

Si intentamos realizar una transformación guage:

$$B_\mu \to B'_\mu = B_\mu - \partial_\mu \chi(x)$$

$$\partial^\mu B'_\mu = \partial^\mu B_\mu - \Box \chi(x)$$

Al contrario que en el caso del fotón, $\chi = e^{-iqx}$ no cumple que $\Box \chi = 0$ por lo que se determina que las partículas masivas tiene 3 estados independientes de polarización.

$$\boxed{\epsilon^\mu_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \quad \text{y} \quad \epsilon^\mu_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0)}$$

$$\epsilon^\mu_L \propto (\alpha, 0, 0, \beta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\epsilon^\mu_L = \frac{1}{m}(p_z, 0, 0, E)}$$

Resumen

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F^{\nu\mu}F_{\nu\mu} \qquad \mathcal{L}_m = -\frac{1}{4}F^{\nu\mu}F_{\nu\mu} + \frac{1}{2}m^2 B^{\mu}B_{\mu}$$

Resumen

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F^{\nu\mu}F_{\nu\mu} \qquad \mathcal{L}_m = -\frac{1}{4}F^{\nu\mu}F_{\nu\mu} + \frac{1}{2}m^2 B^\mu B_\mu$$

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0 \qquad (\Box + m^2)B^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu B^\nu) = 0$$

Resumen

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F^{\nu\mu}F_{\nu\mu} \qquad \mathcal{L}_m = -\frac{1}{4}F^{\nu\mu}F_{\nu\mu} + \frac{1}{2}m^2 B^\mu B_\mu$$

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0 \qquad (\Box + m^2)B^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu B^\nu) = 0$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \Box A^\mu = 0 \qquad \partial_\mu B^\mu = 0 \;\;\Rightarrow\;\; (\Box + m^2)B^\mu = 0$$

Resumen

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F^{\nu\mu}F_{\nu\mu} \qquad \mathcal{L}_m = -\frac{1}{4}F^{\nu\mu}F_{\nu\mu} + \frac{1}{2}m^2 B^\mu B_\mu$$

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0 \qquad (\Box + m^2)B^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu B^\nu) = 0$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \Box A^\mu = 0 \qquad \partial_\mu B^\mu = 0 \;\; \Rightarrow \;\; (\Box + m^2)B^\mu = 0$$

$$A^\mu = \epsilon(q)e^{-iqx} \qquad B^\mu = \epsilon(q)e^{-iqx}$$

Resumen

Polarización

JaimeDGP

Inv. Gauge

El Fotón

Part. Masivas

Resumen

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F^{\nu\mu}F_{\nu\mu} \qquad \mathcal{L}_m = -\frac{1}{4}F^{\nu\mu}F_{\nu\mu} + \frac{1}{2}m^2 B^\mu B_\mu$$

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0 \qquad (\Box + m^2)B^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu B^\nu) = 0$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \Box A^\mu = 0 \qquad \partial_\mu B^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Box + m^2)B^\mu = 0$$

$$A^\mu = \epsilon(q)e^{-iqx} \qquad B^\mu = \epsilon(q)e^{-iqx}$$

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu(\epsilon e^{-iqx}) = 0 \qquad \partial_\mu B^\mu = \partial_\mu(\epsilon e^{-iqx}) = 0$$

Resumen

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F^{\nu\mu}F_{\nu\mu} \qquad \mathcal{L}_m = -\frac{1}{4}F^{\nu\mu}F_{\nu\mu} + \frac{1}{2}m^2 B^\mu B_\mu$$

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0 \qquad (\Box + m^2)B^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu B^\nu) = 0$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \Box A^\mu = 0 \qquad \partial_\mu B^\mu = 0 \;\; \Rightarrow \;\; (\Box + m^2)B^\mu = 0$$

$$A^\mu = \epsilon(q)e^{-iqx} \qquad B^\mu = \epsilon(q)e^{-iqx}$$

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu(\epsilon e^{-iqx}) = 0 \qquad \partial_\mu B^\mu = \partial_\mu(\epsilon e^{-iqx}) = 0$$

$$\boxed{\epsilon^\mu q_\mu = 0} \Rightarrow 3 \text{ grados de libertad de } \epsilon$$

Resumen

$$\boxed{\epsilon^{\mu} q_{\mu} = 0} \Rightarrow 3 \text{ grados de libertad de } \epsilon$$

Resumen

$$\boxed{\epsilon^\mu q_\mu = 0} \Rightarrow 3 \text{ grados de libertad de } \epsilon$$

$$\partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu A_\mu - \Box\Lambda(x) \qquad \partial^\mu B'_\mu = \partial^\mu B_\mu - \Box\chi(x)$$

$$\Box\Lambda = -q^2\Lambda = 0 \qquad \Box\chi = -q^2\chi = -m^2\chi \neq 0$$

$$\Lambda(x) = -iae^{-iqx}$$

Resumen

$$\boxed{\epsilon^{\mu} q_{\mu} = 0} \Rightarrow 3 \text{ grados de libertad de } \epsilon$$

$$\partial^{\mu} A'_{\mu} = \partial^{\mu} A_{\mu} - \Box\Lambda(x) \qquad \partial^{\mu} B'_{\mu} = \partial^{\mu} B_{\mu} - \Box\chi(x)$$

$$\Box\Lambda = -q^2\Lambda = 0 \qquad \Box\chi = -q^2\chi = -m^2\chi \neq 0$$

$$\Lambda(x) = -iae^{-iqx}$$

$$A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu} = A_{\mu} - \partial_{\mu}\Lambda(x) = \epsilon_{\mu} e^{-iqx} + ia\partial_{\mu} e^{-iqx}$$

Resumen

$$\boxed{\epsilon^\mu q_\mu = 0} \Rightarrow 3 \text{ grados de libertad de } \epsilon$$

$$\partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu A_\mu - \Box\Lambda(x) \qquad \partial^\mu B'_\mu = \partial^\mu B_\mu - \Box\chi(x)$$

$$\Box\Lambda = -q^2\Lambda = 0 \qquad \Box\chi = -q^2\chi = -m^2\chi \neq 0$$

$$\Lambda(x) = -iae^{-iqx}$$

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\Lambda(x) = \epsilon_\mu e^{-iqx} + ia\partial_\mu e^{-iqx}$$

$$\epsilon_\mu \to \epsilon'_\mu = \epsilon_\mu + aq_\mu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} \boxed{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{q} = 0} \\ \\ 2 \text{ grados de libertad} \end{array}}$$

Mark Thomson.
Modern particle physics.
Cambridge University Press, New York, 2013.