

## Tema 5. Introducción a los Sistemas Dinámicos Disipativos

### Mecánica Teórica. Profesor: Angel Valle

Vamos a empezar introduciendo algunos conceptos generales.

Sistema Determinista: sistema en el que el conocimiento preciso de su estado en un tiempo nos permite, al menos en principio, predecir el comportamiento futuro del sistema.

Sistemas Dinámicos: sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias,  $d\vec{x}/dt = \vec{f}(\vec{x})$ , donde  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p)$  (hablamos de Sistemas Dinámicos Continuos) o por mapas discretos,  $\vec{x}_{k+1} = \vec{f}(\vec{x}_k)$  (son los Sistemas Dinámicos Discretos). Son sistemas deterministas.

Espacio de Estados: espacio formado por las variables  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p)$ . Si el sistema es mecánico el espacio de estados es el espacio de fases y su dimensión es par,  $p=2n$ , donde  $n$  es el número de grados de libertad.

Parámetros: son las constantes que aparecen en las ecuaciones.

**Ejemplo**: El modelo de Lorenz:

$$dx_1/dt = f_1(x_1, x_2, x_3) = \sigma(x_2 - x_1)$$

$$dx_2/dt = f_2(x_1, x_2, x_3) = rx_1 - x_2 - x_1x_3$$

$$dx_3/dt = f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - bx_3$$

es un sistema dinámico continuo. La dimensión de su espacio de estados es  $p=3$ . Los parámetros del modelo son  $b$ ,  $r$  y  $\sigma$ .

Si el sistema de ecuaciones es no autónomo ( $\vec{f}$  depende explícitamente de  $t$ ), lo podemos convertir en autónomo definiendo  $t$  como nueva variable.

**Ejemplo**:

$$\dot{u} = f(u, v, t)$$

$$\dot{v} = g(u, v, t)$$

Sea  $\omega=t$ , obtenemos

$$\dot{u} = f(u, v, w)$$

$$\dot{v} = g(u, v, w)$$

$$\dot{w} = 1$$

Sistema No Lineal: Sistema cuyas ecuaciones de evolución son no lineales (p. ej. el modelo de Lorenz).

Sistema Lineal: Sistema cuyas ecuaciones de evolución son lineales (p. ej. el oscilador armónico).

Dinámica No Lineal: Estudio de los sistemas dinámicos no lineales. Los sistemas dinámicos no lineales pueden tener un comportamiento que parece errático y casi aleatorio: **CAOS DETERMINISTA**. Todos los sistemas caóticos son no lineales pero no todos los sistemas no lineales son caóticos.

¿Por qué entender el caos determinista?: El estudio del caos nos da herramientas y conceptos nuevos que nos permiten entender ciertos comportamientos complejos. Antes de la llegada del caos determinista estos comportamientos complejos eran siempre achacados al hecho de que el sistema tuviese ruido o tuviese un gran número de grados de libertad, por ejemplo, por estar compuesto de muchas partículas. Se ha observado que muchos de estos comportamientos se pueden obtener con sistemas dinámicos sencillos (con un número reducido de variables) comportándose de forma caótica. El comportamiento caótico parece *UNIVERSAL* : aparece en osciladores mecánicos, circuitos eléctricos, láseres, reacciones químicas, células nerviosas, células cardíacas, fluidos calentados, sistemas ópticos no lineales ...

Si un parámetro cambia en un sistema no lineal (lineal) la naturaleza cualitativa del comportamiento puede cambiar dramáticamente (no cambia).

Bifurcación: cambio repentino en el comportamiento de un sistema al cambiar el valor de un parámetro. Si el parámetro está por debajo del valor donde ocurre la bifurcación el sistema se comporta de una forma y si está por encima de ese valor se comporta de una forma totalmente distinta.

Los sistemas caóticos se caracterizan no sólo por su comportamiento irregular en el tiempo sino por la *divergencia de trayectorias cercanas* (o gran sensibilidad a las condiciones iniciales): si observamos dos trayectorias diferentes con condiciones iniciales muy parecidas, al principio las trayectorias son muy parecidas, pero al cabo de un cierto tiempo son completamente diferentes (si las condiciones iniciales fuesen idénticas la evolución de las dos trayectorias sería idéntica)

Para los sistemas caóticos el comportamiento del sistema es *IMPREDECIBLE* debido a la divergencia de trayectorias cercanas. El sistema caótico es determinista en el sentido de que si sabemos *exactamente* las condiciones iniciales podemos predecir la evolución futura integrando las ecuaciones del sistema. Pero si hay un pequeño cambio en las condiciones iniciales la trayectoria sigue al cabo de un cierto tiempo un camino completamente diferente. Puesto que siempre existe alguna imprecisión en la especificación de las condiciones iniciales en cualquier experimento real, el comportamiento futuro de un sistema caótico es impredecible. El efecto de divergencia de trayectorias cercanas ha sido expresado frecuentemente con la metáfora del “Efecto Mariposa”: *¿Provoca el aleteo de las alas de una mariposa en Brasil un tornado en Texas?* Este es el título de una conferencia dada en 1972 por E. Lorenz, el meteorólogo que descubrió en 1963 el fenómeno del caos determinista. Lorenz desarrolló un modelo muy simplificado de comportamiento atmosférico: el modelo de Lorenz que vimos en el ejemplo anterior. Lorenz resolvió su modelo con un ordenador y observó como las soluciones que obtenía mostraban una gran sensibilidad a las condiciones iniciales que escogía: si la atmósfera tiene un comportamiento caótico, entonces un pequeño efecto (aleteo de la mariposa) provoca un pequeño cambio de las condiciones iniciales que hacen inútil la predicción del comportamiento atmosférico a tiempos largos. Todo esto está relacionado con el hecho de que, en general, en un sistema no lineal no podemos escribir la solución como  $x(t)=a_1(t)+a_2(t)+\dots$  con  $a_i(t)$  siendo funciones continuas. Si pudiésemos escribir la solución de esta forma no obtendríamos la gran sensibilidad a las condiciones iniciales porque  $a_i(t)$  dependería de forma continua de los parámetros y de las condiciones iniciales.

Diagrama de Bifurcación: Es una forma de resumir la tremenda cantidad de información contenida en el comportamiento de los sistemas no lineales. Dibujamos en el eje de ordenadas algunos de los valores representativos de alguna de las variables (p. ej. los máximos de  $x_2$ , o  $x_3$  muestreado cada cierto tiempo) en función de un parámetro del sistema.

Atractor: Conjunto de puntos a los que las trayectorias se aproximan cuando  $t \rightarrow \infty$ . Un sistema puede tener más de un atractor para un valor dado de los parámetros. La *Base de Atracción* es el conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a una trayectoria que se aproxima al atractor a medida que  $t \rightarrow \infty$ .

## SISTEMAS DISIPATIVOS

Los sistemas dinámicos disipativos son aquellos en los cuales no se conserva el volumen fásico, es decir que el volumen en el espacio fásico ocupado por un conjunto de condiciones iniciales no permanece constante a medida que el sistema evoluciona. Habíamos visto que dado el sistema dinámico  $d\vec{x}/dt = \vec{f}(\vec{x})$ , donde  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p)$ , un volumen  $p$ -dimensional,  $V$ , evoluciona con el tiempo:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \text{div} \vec{f}$$

En el sistema disipativo  $V$  no es constante,  $\text{div} \vec{f} < 0$ . Vamos a estudiar varios ejemplos de sistemas disipativos observando su comportamiento. A lo largo de los ejemplos nos encontraremos los conceptos que han ido apareciendo en la introducción del tema.

## EJEMPLOS

### I. El Péndulo Forzado Periódicamente

Consideremos primero el ejemplo sorprendentemente simple de un péndulo forzado periódicamente. La ecuación del movimiento es  $\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \sin \theta = A \cos(\omega t)$ , donde  $\gamma$  es la constante de amortiguamiento, y el lado derecho de la ecuación es el momento de la fuerza aplicada. Este momento es periódico de frecuencia  $\omega$  y amplitud  $A$ . Podemos transformar la ecuación diferencial anterior en un sistema de ecuaciones de primer orden haciendo  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $x_3 = \omega t$ , obteniendo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - \sin x_1 + A \cos x_3 \\ \dot{x}_3 &= \omega\end{aligned}$$

El sistema es disipativo porque el volumen en el espacio de estados evoluciona así:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \text{div} \vec{f} = -\gamma < 0$$

La solución de esta ecuación se encuentra integrándola numéricamente en el ordenador. Si la amplitud del forzamiento,  $A$ , es pequeña,  $\theta$  es pequeña y por tanto la ecuación del péndulo se puede linealizar e integrar exactamente dando, a tiempos largos, la típica variación regular sinusoidal con una frecuencia igual a la frecuencia del forzamiento. Si  $A$  supera un cierto valor crítico,  $A_c$ ,  $\theta$  ya no es pequeña (sen  $\theta$  no se puede aproximar por  $\theta$ ) y la variación del ángulo  $\theta$  con el tiempo puede ser irregular y aperiódica: aparece comportamiento caótico. Por tanto, la aparición del caos es debida al término no lineal sen  $\theta$ .

Prueba a cambiar la amplitud del forzamiento en el applet siguiente y comprueba cualitativamente la discusión anterior

<http://www.nottingham.ac.uk/~ppzpjm/computingII/chaos2.html>

## II. El Mapa Logístico

Este modelo fue propuesto por R. May en 1976 para simular el crecimiento de la población de una especie con un suministro de alimentos limitado y cuyas generaciones se renuevan cada año. Consideremos una especie (p. ej libélulas) cuyos individuos nacen y mueren en el mismo año. Queremos saber el número de libélulas que hay en el año  $i+1$ ,  $N_{i+1}$ , en términos de las que hay en el año anterior,  $N_i$ .

Podemos suponer que  $N_1 = 4AN_0$ , donde  $A$  es un número que depende de las condiciones ambientales (cantidad de comida, agua...). Si  $4A > 1$  ( $4A < 1$ ) el número de libélulas aumenta (disminuye). Pero si la población crece mucho no habrá suficiente comida o a los depredadores les será más fácil coger libélulas, luego el crecimiento de la población está limitado: añado un término pequeño (grande) si la población es pequeña (grande): p. ej.  $N_1 = 4AN_0 - 4BN_0^2$ . Usamos la relación anterior repetidamente para conocer como cambia la población con los años:  $N_2 = 4AN_1 - 4BN_1^2 \dots N_{i+1} = 4AN_i - 4BN_i^2$ .

Como  $N_{i+1} > 0$  entonces  $A > BN_i$  y hay una población máxima,  $N_{max}$ , porque  $N_i < N_{max} = A/B$ . Si llamo  $x_i = N_i/N_{max}$  obtengo que

$$x_{i+1} = 4A(x_i - x_i^2), \quad 0 \leq x_i \leq 1, \text{ es el Mapa Logístico,}$$

donde  $x_i$  es la población en el año  $i$  (expresada como fracción de la población máxima).

El mapa Logístico es entonces un ejemplo de sistema dinámico discreto. Es no lineal debido al término cuadrático y  $A$  es el parámetro. Los puntos fijos del mapa han de verificar  $x^* = f(x^*)$ , luego  $x^* = 4A(x^* - x^{*2}) \Rightarrow x_1^* = 0, x_2^* = 1 - 1/(4A)$ . La evolución se puede representar dibujando  $x_{i+1}$  en función de  $x_i$  o  $x_i$  en función de  $i$ .

Vamos a analizar la evolución según los valores del parámetro  $A$ .

$$A < 1/4$$

$x_2^* < 0 \Rightarrow$  el único punto fijo en  $[0,1]$  es  $x_1^* = 0$

Sea cual sea la condición inicial, la trayectoria tiende al punto fijo al crecer  $i$ :  $x_i \rightarrow 0 \Rightarrow$  el atractor es el punto fijo,  $x_1^* = 0$  (la población se extingue) como se ve en la Fig. 1. La base de atracción de  $x_1^* = 0$  es  $[0,1]$ .  $x_1^* = 0$  es un punto fijo estable porque las trayectorias cercanas se acercan a él a medida que  $i$  crece.

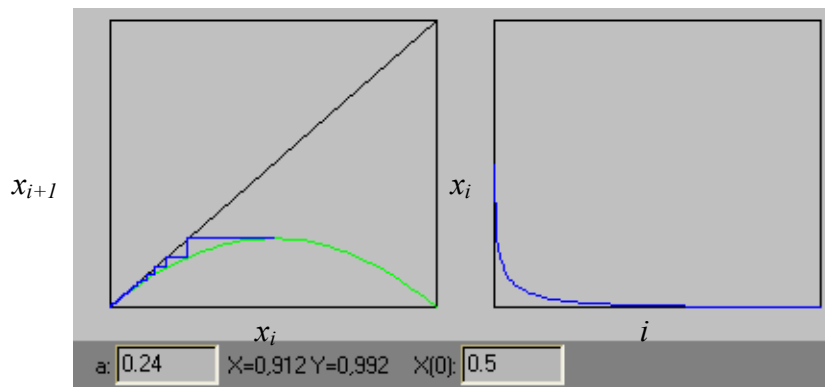


Fig. 1.  $x_{i+1}$  en función de  $x_i$  (izquierda) y  $x_i(i)$  (derecha) para  $A=0.24$ ,  $x_0=0.5$ .

(compruébalo cambiando  $A$  y  $x_0$  en <http://www.ifca.unican.es/~fises/caos/logistico.html> )

$$1/4 < A < 3/4$$

Hay dos puntos fijos en  $[0,1]$ . Condiciones iniciales cercanas a 0 llevan a trayectorias que se alejan de  $x_1^*=0$  (punto fijo inestable) y se acercan a  $x_2^*$ . Este es punto fijo estable pues todas las trayectorias con condiciones iniciales en  $(0,1]$  llevan a  $x_2^*$  a medida que  $i$  crece. Luego  $x_2^* = 1-1/(4A)$  es el atractor con base de atracción  $(0,1]$  y por tanto la población se mantiene constante a tiempos largos, como puedes ver en la Fig. 2.

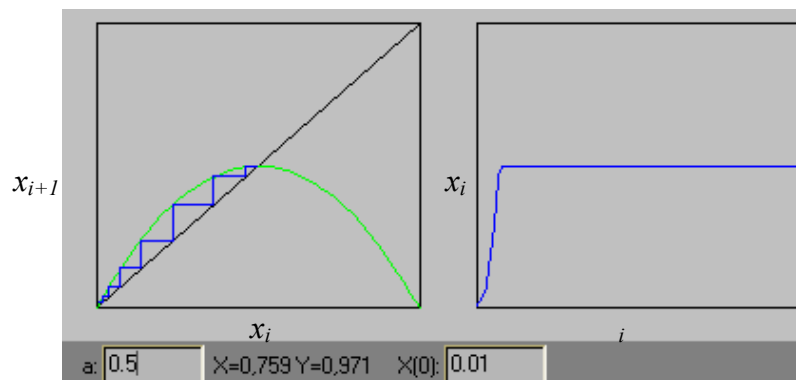


Fig. 2.  $x_{i+1}$  en función de  $x_i$  (izquierda) y  $x_i(i)$  (derecha) para  $A=0.5$ ,  $x_0=0.01$ .

$$3/4 < A < 0.892...$$

El comportamiento del sistema es periódico. Veamos que significa esto p. ej. para  $A=0.8$ . La órbita no se estabiliza en un punto fijo ( $x_1^*$  y  $x_2^*$  siguen siendo puntos fijos, pero no son estables). La población oscila entre dos valores si  $i$  es grande. Se dice que el comportamiento es periódico de periodo 2 o que está en un ciclo límite de periodo 2, como puedes ver en la Fig.3. El atractor esta formado por dos puntos y es estable pues todas las condiciones iniciales cercanas a él llevan al atractor a medida que  $i$  crece. Observamos que el comportamiento del sistema cuando  $A < 3/4$  es totalmente distinto a cuando  $A > 3/4$ , luego en  $A=3/4$  hay una bifurcación. Si se sigue aumentando  $A$  el ciclo de periodo 2 se convierte en ciclo de periodo 4, después de periodo 8 y así sucesivamente, hasta que para  $A > 0.892...$  el periodo del ciclo se hace infinito.

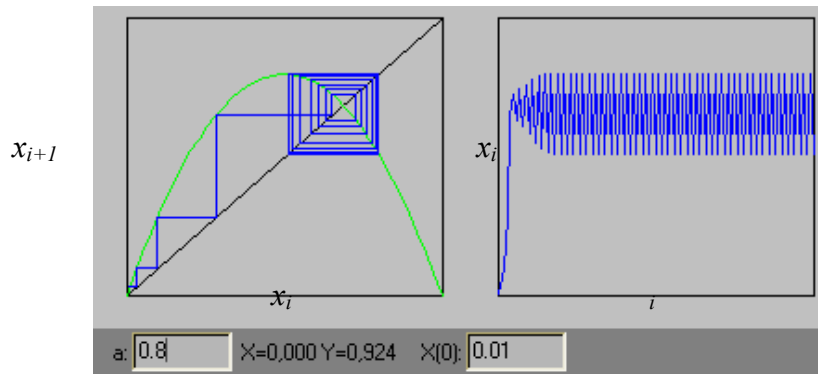


Fig. 3.  $x_{i+1}$  en función de  $x_i$  (izquierda) y  $x_i(i)$  (derecha) para  $A=0.8$ ,  $x_0=0.01$ .

### A>0.892...

El periodo del ciclo se hace infinito porque el sistema varía sin repetirse: aparece un comportamiento irregular y aperiódico: comportamiento caótico determinista.

En  $A=0.892$  hay otra bifurcación pues el sistema ha pasado de tener comportamiento periódico a tenerlo caótico. Veamos en la Fig. 4 una trayectoria caótica cuando  $A=1$ :

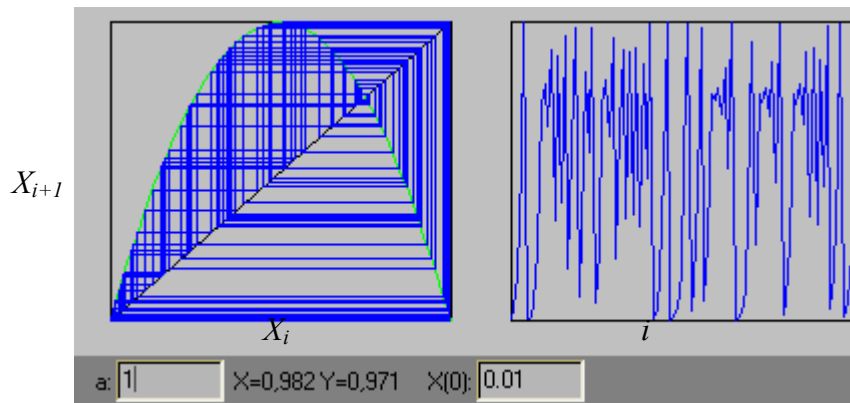


Fig.4.  $x_{i+1}$  en función de  $x_i$  (izquierda) y de  $i$  (derecha) para  $A=1$ ,  $x_0=0.01$ .

En los sistemas caóticos ha de haber divergencia de trayectorias cercanas. Veámoslo en la Fig. 5. En esta figura hay dibujadas dos trayectorias, una en rojo y otra en azul, cuyas condiciones iniciales difieren en la quinta cifra decimal. Se observa que la evolución inicial es muy parecida pero, como el sistema es caótico ( $A=1$ ), la evolución empieza a ser completamente distinta a tiempos largos.

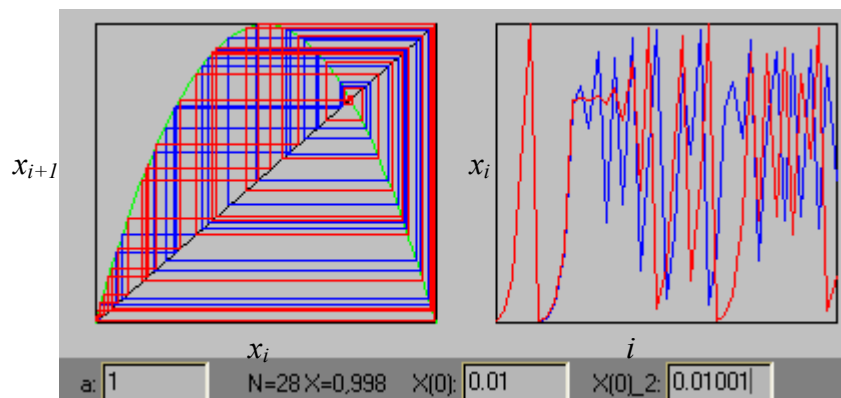


Fig.5.  $x_{i+1}$  en función de  $x_i$  (izquierda) y  $x_i$  en función de  $i$  (derecha) para  $A=1$  y dos condiciones iniciales:  $x_0=0.01$  y  $x_0=0.01001$ .

Se puede resumir el comportamiento dinámico dibujando el diagrama de bifurcación. Escogemos  $A$ , calculamos  $x_i$  y dibujamos los puntos del atractor (es decir dibujamos los  $x_i$  para tiempos largos, p. ej. para  $i > 100$ ) (ver Fig. 6). Nota que el diagrama de bifurcación que obtenemos no depende de la condición inicial que escojamos porque los atractores que van apareciendo tienen una base de atracción que es prácticamente  $[0,1]$ . En la zona caótica aparecen zonas para ciertos valores de  $A$  en que  $x$  tiene comportamiento periódico: son las llamadas ventanas periódicas.

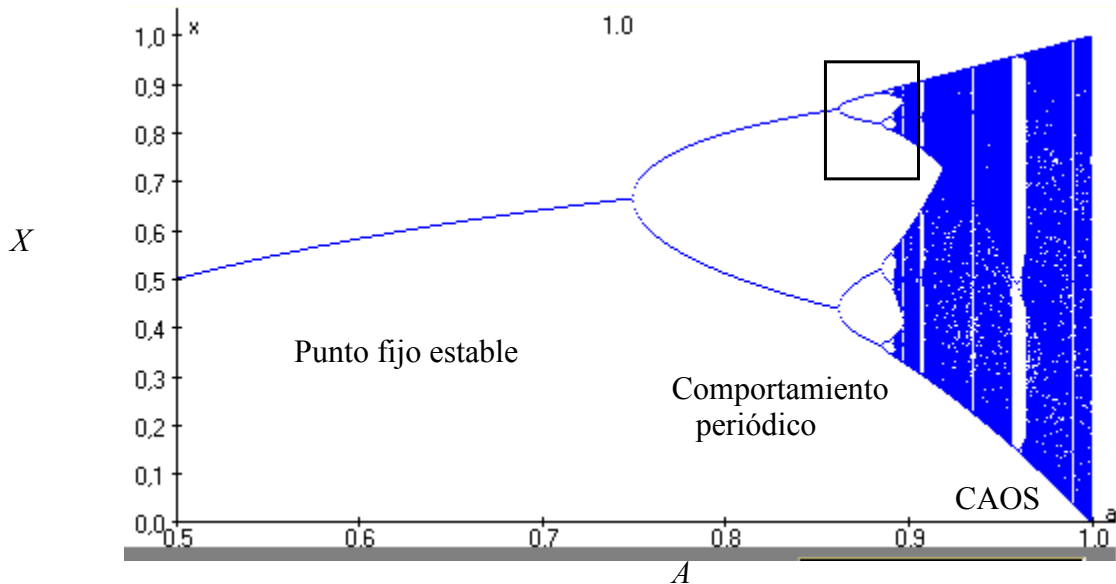


Fig.6. Diagrama de bifurcación del Mapa Logístico

La geometría del atractor caótico es extraña. Sucesivas ampliaciones del diagrama de bifurcación tienen la misma estructura que el diagrama original. Prueba a ampliar en el applet del diagrama de bifurcación de <http://www.ifca.unican.es/~fises/caos/logistico.html> la zona recuadrada en negro de la Fig. 6 (eligiendo la zona con el botón izquierdo del ratón). Verás que obtienes un diagrama parecido pero a una escala más pequeña. El proceso lo puedes repetir varias veces. A esta estructura autosimilar se la denomina *fractal*.

(Puedes comprobar los resultados de las Figuras 1 a 6 en la página web <http://www.ifca.unican.es/~fises/caos/logistico.html> . Prueba con distintos valores cambiando  $A$  y  $x_0$  en los applets de esa página )

Aunque este modelo sencillo de dinámica de poblaciones no es una buena descripción de lo que ocurre en poblaciones biológicas reales, lo que es por supuesto mucho más complejo, sí que aporta un punto crucial: un modelo sencillo puede dar comportamiento muy complejo a medida que  $A$  cambia. Incluso para  $A$  fijo la población puede cambiar mucho de año en año, luego las variaciones en la población no son necesariamente causadas por cambios en el ambiente (cambios de  $A$ ). Este es el punto de vista adoptado por los biólogos de poblaciones a partir del trabajo de R. May.

### III. El Modelo de Lorenz

El modelo de Lorenz es un modelo muy simplificado de un sistema fluido (por ejemplo, la atmósfera) que es calentado por debajo (debido al calentamiento de la superficie de la tierra por los rayos de sol) y enfriado por arriba. La temperatura del fondo y de la parte superior se mantienen constantes, siendo  $\Delta T$  la diferencia de temperaturas. El fluido caliente del fondo “quiere” subir y el fluido frío de arriba “quiere” bajar, pero a estos movimientos se oponen las fuerzas viscosas. Si  $\Delta T$  es pequeño gana la viscosidad: el fluido está quieto y el calor es transportado por conducción térmica uniforme y la temperatura decrece de abajo hacia arriba de forma lineal. Si  $\Delta T$  aumenta aparecen corrientes de convección y el calor se transfiere de abajo hacia arriba debido al movimiento de la masa del fluido. La simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes que describen el sistema nos lleva al modelo de Lorenz, cuyas ecuaciones son:

$$dx/dt = \sigma(y - x)$$

$$dy/dt = rx - y - xz$$

$$dz/dt = xy - bz$$

donde  $x$  es proporcional a la velocidad de flujo del fluido,  $y$  caracteriza la diferencia de temperatura entre elementos de fluido ascendentes y descendentes y  $z$  es proporcional a las desviaciones respecto del equilibrio del perfil vertical de temperatura.  $\sigma$ ,  $b$  y  $r$  son parámetros positivos, siendo este último,  $r$ , proporcional a  $\Delta T$ . El sistema es por tanto disipativo porque el volumen en el espacio de estados,  $V$ , decrece con el tiempo:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \text{div} \vec{f} = -\sigma - 1 - b < 0$$

Aunque las ecuaciones del modelo de Lorenz son muy simples sus soluciones pueden ser extremadamente complejas. Se piensa que es imposible dar las soluciones en una forma analítica, es decir, escribir una fórmula que daría  $x$ ,  $y$ ,  $z$  para cualquier tiempo,  $t$ . Por tanto, debemos resolver las ecuaciones de forma numérica, lo cual en la práctica significa que un ordenador nos tiene que hacer la integración numérica.

Veamos ahora cual es el comportamiento de las soluciones del modelo de Lorenz dependiendo del valor del parámetro  $r$ .

Si  $r < 1$  ( $\Delta T$  pequeño) sean cuales sean las condiciones iniciales el sistema evoluciona hacia  $x=y=z=0$  (fluido quieto). Es decir, el punto  $x=y=z=0$  es el atractor y su base de atracción es todo el espacio de estados. (Cambia  $r$  en el applet siguiente en que se representa la proyección de la trayectoria en el espacio de estados sobre el plano  $xz$  con  $\sigma = 10$ ,  $b = 2.666$ , <http://cardener.upc.es/nllab/lorenzstable-es.html>). El punto  $(0,0,0)$  es un punto especial, pues en él todas las derivadas ( $dx/dt, dy/dt, dz/dt$ ) se anulan. Se le llama por ello punto fijo y como atrae a todas las trayectorias cercanas se dice que es estable.

Si  $r$  crece por encima de 1 ( $\Delta T$  crece) la situación cambia:  $(0,0,0)$  ya no atrae a ninguna trayectoria (se dice que es un punto fijo inestable). Además hay otros dos puntos fijos,  $(b^{1/2}(r-1)^{1/2}, b^{1/2}(r-1)^{1/2}, 0)$  y  $(-b^{1/2}(r-1)^{1/2}, -b^{1/2}(r-1)^{1/2}, 0)$  (puedes comprobar que las derivadas temporales se anulan en esos puntos. Esos dos puntos pasan a ser los atractores porque sea cual sea la condición inicial la trayectoria irá a uno de esos dos puntos fijos. Por tanto al cruzar  $r$  el valor 1 el comportamiento del sistema cambia y entonces hay una bifurcación en  $r=1$  (que corresponde al establecimiento de un régimen



convectivo en el fluido). (Cambia  $r$  en el applet siguiente en que se representa la proyección de la trayectoria en el espacio de estados sobre el plano  $xz$  con  $\sigma=10$ ,  $b=2.666$ , <http://cardener.upc.es/nllab/lorenzstable-es.html> )

Para  $r > 24.74$  ninguno de los tres puntos fijos anteriores es atractor. Veamos como cambia  $y$  con  $t$  y la trayectoria en el espacio de estados cuando  $r=28$ .

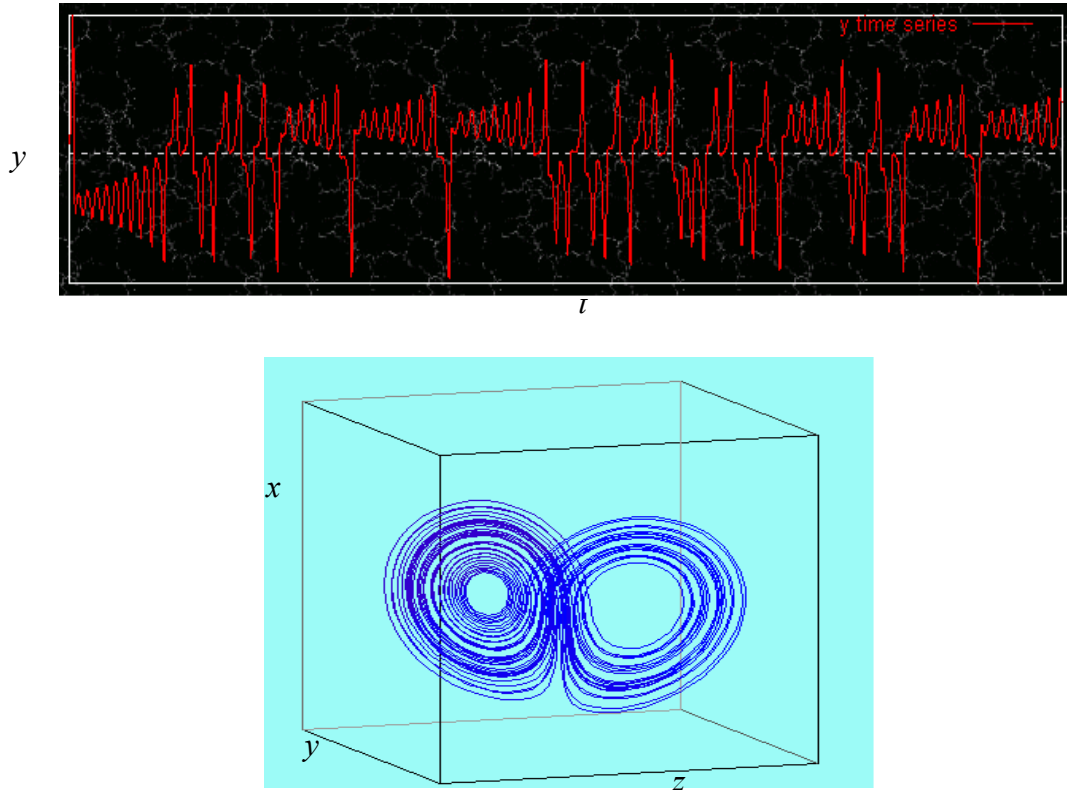


Fig. 7.  $y(t)$  (arriba) y atractor en el espacio de estados (abajo) del modelo de Lorenz. Los parámetros son  $r=28$ ,  $\sigma=10$ ,  $b=2.666$ .

Se ve en la figura que  $y(t)$  es irregular y aperiódica.  $x(t)$  y  $z(t)$  también lo son. Ese es un primer signo de que el sistema llega a ser caótico. (Observa también la proyección sobre el plano  $xz$  del espacio de estados de la trayectoria cuando  $r=28$ ,  $\sigma=10$ ,  $b=2.666$ , <http://cardener.upc.es/nllab/lorenzchaos-es.html> ) . Podemos confirmar que el sistema es caótico para algún rango de valores de  $r$  si las trayectorias cercanas divergen. Mostramos en la Fig. 8 dos trayectorias con condiciones iniciales ligeramente diferentes. Vemos que después de unas oscilaciones las trayectorias pasan a ser completamente diferentes.

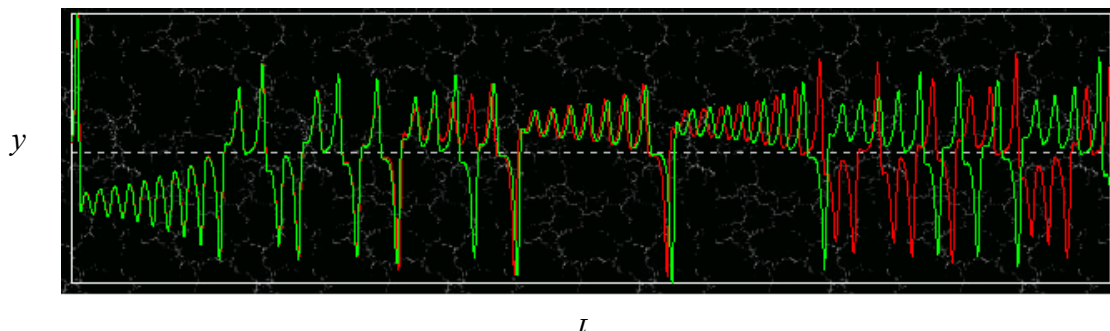


Fig. 8.  $y(t)$  para dos trayectorias del modelo de Lorenz (una en rojo y otra en verde) con condiciones iniciales ligeramente diferentes.

## PUNTOS FIJOS Y CICLOS LIMITE

Los puntos fijos y los ciclos límite en el espacio de estados juegan un papel crucial para entender la dinámica de los sistemas no lineales. La noción de estabilidad es esencial para entender como se comportan las trayectorias en la cercanía de un punto fijo o de un ciclo límite. Enfocamos nuestra atención en sistemas disipativos. Estos sistemas tienen la propiedad de que su comportamiento a tiempos largos es más independiente de las condiciones iniciales que en los sistemas conservativos. Esto es debido a la contracción del volumen fásico que ocurre en los sistemas disipativos a medida que el tiempo crece. A medida que el tiempo pasa la trayectoria de un sistema disipativo en el espacio de estados tenderá a algún punto, curva u objeto geométrico. Este objeto geométrico es el *atractor* pues un cierto número de trayectorias es atraído hacia él a medida que el tiempo crece. Hay diversos tipos de atractores: puntos fijos, ciclos límite, superficies cerradas y atractores extraños. Al conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a trayectorias que se aproximan a un atractor dado del sistema se le llama *base de atracción* de ese atractor. Las propiedades geométricas de ambos, el atractor y la base de atracción, pueden ser muy complicadas (objetos fractales). Si hay más de un atractor para un conjunto dado de parámetros se llama *separatriz* a las condiciones iniciales que están en la frontera entre dos (o más) bases de atracción.

En este apartado vamos a ir estudiando los puntos fijos y ciclos límite, empezando por dimensiones bajas del espacio de estados y aumentando esa dimensionalidad a medida que avancemos. En paralelo estudiaremos la estabilidad de los puntos fijos.

### Espacio de estados 1-dimensional

Sea el sistema dinámico continuo 1-dim.  $\dot{X} = f(X)$ . (Espacio de estados = eje  $X$ ).

$X_0$  es un punto fijo si  $\dot{X} \big|_{X=X_0} = f(X_0) = 0$  (1)

(se le llama así porque si una trayectoria llega al punto fijo se queda allí)

Punto fijo estable: aquél en que una trayectoria que empieza cerca de él se mantiene siempre próxima al punto fijo.

Punto fijo inestable: aquél que no es estable.

El tipo de punto fijo depende de  $\lambda = \frac{df}{dX} \big|_{X_0}$ .  $\lambda$  es el *autovalor del punto fijo*  $X_0$ .

Veámoslo: desarrollo  $f(X)$  alrededor de  $X_0$ :  $f(X) = f(X_0) + (X - X_0) \frac{df}{dX} \big|_{X_0} + \dots$

Sea  $x$  la distancia de una trayectoria al punto fijo:  $x = X - X_0$ . Como  $\dot{X} = f(X)$  entonces

$$\dot{x} = f(X_0) + x\lambda = \lambda x \Rightarrow x(t) = x(0)e^{\lambda t}$$

Si  $\lambda < 0$ ,  $x(t)$  decrece  $\rightarrow$  la trayectoria se aproxima al punto fijo:  $X_0$  es un *nodo estable*

Si  $\lambda > 0$ ,  $x(t)$  crece  $\rightarrow$  “ “ “ aleja del “ “ :  $X_0$  es un *nodo inestable*

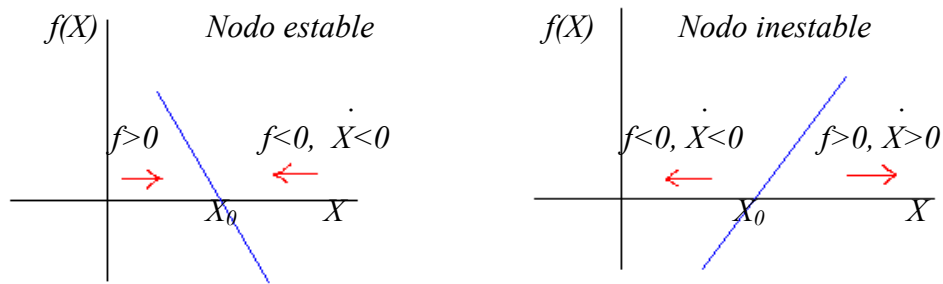


Fig. 9. Puntos fijos en 1 dimensión. Nodo estable (izquierda,  $\lambda < 0$ ) e inestable (derecha,  $\lambda > 0$ ).

Si  $\lambda=0$  hay que hacer el análisis usando las derivadas segundas de  $f$ : hay 4 posibilidades: nodo estable, nodo inestable, punto silla en que  $f$  es cóncava y punto silla en que  $f$  es convexa.

Las posibles trayectorias son: puntos fijos, trayectorias que se alejan a  $\pm\infty$  o trayectorias que se acercan asintóticamente a un punto fijo.

Dada una secuencia de puntos fijos para un cierto sistema podemos tener una visión global de cómo van las trayectorias en el espacio de estados.

### Espacio de estados 2-dimensional

Hay mas variedad de comportamiento que en 1 dimensión. Estudiamos con detalle este caso porque corresponde a los sistemas mecánicos con un grado de libertad. Aparece un nuevo tipo de atractor: el ciclo límite. Consideramos el sistema dinámico continuo:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= f_1(X_1, X_2) \\ \dot{X}_2 &= f_2(X_1, X_2)\end{aligned}\quad (2)$$

$(X_{10}, X_{20})$  es un punto fijo si

$$\begin{aligned}f_1(X_{10}, X_{20}) &= 0 \\ f_2(X_{10}, X_{20}) &= 0\end{aligned}\quad (3)$$

Como en el caso 1-dim, el tipo de punto fijo dependerá de  $\left. \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right|_{X_{10}, X_{20}} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right|_0$ .

Veámoslo: desarrollemos  $f$  alrededor del punto fijo:

$$\dot{X}_1 = f_1(X_1, X_2) = f_1(X_{10}, X_{20}) + (X_1 - X_{10}) \left. \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \right|_0 + (X_2 - X_{20}) \left. \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \right|_0 + \dots$$

$$\dot{X}_2 = f_2(X_1, X_2) = f_2(X_{10}, X_{20}) + (X_1 - X_{10}) \left. \frac{\partial f_2}{\partial X_1} \right|_0 + (X_2 - X_{20}) \left. \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \right|_0 + \dots$$

Introducimos las desviaciones respecto del punto fijo:  $x_1 = X_1 - X_{10}$ ,  $x_2 = X_2 - X_{20}$  y aplicamos

Ec. (3) para obtener:  $\dot{x}_1 = f_{11}x_1 + f_{12}x_2$       donde  $f_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_0$

$$\dot{x}_2 = f_{21}x_1 + f_{22}x_2$$

Derivamos la primera ec. del sistema anterior, y sustituimos la segunda y la primera ec:

$$\ddot{x}_1 = f_{11}\dot{x}_1 + f_{12}\dot{x}_2 = f_{11}\dot{x}_1 + f_{12}(f_{21}x_1 + f_{22}x_2) = (f_{11} + f_{22})\dot{x}_1 + (f_{12}f_{21} - f_{11}f_{22})x_1 \quad (4)$$

Obtenemos una ec. diferencial para  $x_1$  cuya solución es  $x_1(t) = Ce^{\lambda t}$  donde  $C$  y  $\lambda$  son constantes.  $\lambda$  se determina de la siguiente forma. Sustituyo  $x_1(t) = Ce^{\lambda t}$  en la ec. (4) y obtengo la ecuación característica para  $\lambda$ :

$$\lambda^2 - (f_{11} + f_{22})\lambda + (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) = 0 \quad (5)$$

cuyas soluciones son

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(f_{11} + f_{22} \pm \sqrt{(f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})}) \quad (6)$$

La solución general de (4) es

$$\begin{aligned} x_1(t) &= Ce^{\lambda_+ t} + De^{\lambda_- t} \\ x_2(t) &= Ee^{\lambda_+ t} + Fe^{\lambda_- t} \end{aligned} \quad \text{y además} \quad (7)$$

se halla de forma similar

Las constantes  $C, D, E, F$  se determinan a partir de las condiciones iniciales. Se observa en estas expresiones que si  $Re(\lambda_+)$  o  $Re(\lambda_-) > 0$  el punto fijo es inestable pues  $x_i \rightarrow \infty$  a medida que  $t \rightarrow \infty$ . La ecuación característica se puede encontrar también si se considera la matriz jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \text{ y se hallan sus autovalores porque } |J - \lambda I| = 0 \text{ es la Ec. (5).}$$

Podemos analizar el tipo de punto fijo haciendo uso de la matriz jacobiana, calculando su traza  $Tr J = f_{11} + f_{22}$ , su determinante  $\Delta = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}$  y usando la tabla siguiente:

	$Tr J < 0$	$Tr J > 0$
$\Delta > (Tr J)^2/4$	<i>Foco estable</i>	<i>Foco inestable</i>
$0 < \Delta < (Tr J)^2/4$	<i>Nodo estable</i>	<i>Nodo inestable</i>
$\Delta < 0$	<i>Punto silla</i>	<i>Punto silla</i>

Hay por tanto varios pasos en el análisis de puntos fijos: i) hallar los puntos fijos usando (3). ii) hallar  $J$ . iii) hallar  $Tr J$ ,  $\Delta$  y usar la tabla anterior. iv) hallar  $\lambda_+$  y  $\lambda_-$  usando (6) y por último hallar  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  usando (7).

Vamos ahora a explicar esta tabla:

i)  $\Delta > (Tr J)^2/4 \Rightarrow$  el argumento de la raíz en (6) es negativo  $\Rightarrow \lambda_{\pm} = R \pm i\Omega$   
donde  $R = Tr(J)/2$  y  $\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{(f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})}$ . (8)

Como  $R = Re(\lambda_{\pm})$  entonces si  $Tr(J) > 0$  ( $Tr J < 0$ ) el punto fijo es *inestable* (*estable*).  
Veamos ahora que el punto fijo es un *foco*:

$$x_1(t) = Ce^{\lambda_+ t} + De^{\lambda_- t} = e^{Rt}(Ce^{i\Omega t} + De^{-i\Omega t}).$$

Supongamos que  $x_1(0) = 0 \Rightarrow C = -D \Rightarrow x_1(t) = Ce^{Rt}(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}) = 2iCe^{Rt}\sin\Omega t$ .

$x_2(t)$  se comporta igual (el comportamiento que obtendríamos si considerásemos condiciones iniciales cualesquiera es similar). Luego  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  oscilan con amplitud creciente (decreciente) si  $R > 0$ , *foco inestable* ( $R < 0$ , *foco estable*), como se puede ver en la siguiente figura.

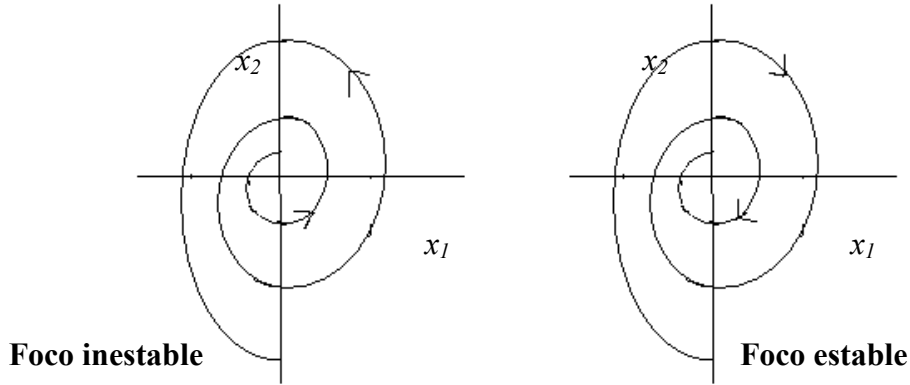


Fig. 10. Trayectorias cercanas a los puntos fijos que aparecen cuando  $\Delta > (Tr J)^2/4$ .

En el caso especial en que  $R = 0$  al punto fijo se le llama CENTRO y la trayectoria es periódica, formando una curva cerrada alrededor del punto fijo: *CICLO LIMITE* (ver Fig. 11). Si las trayectorias en la vecindad del ciclo límite son repelidas (atraídas) hacia él a medida que  $t$  crece el ciclo límite es *inestable* (*estable*).

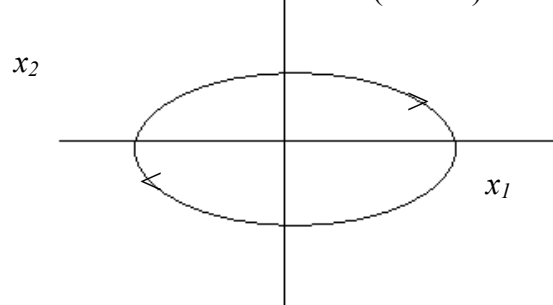


Fig. 11. Ciclo límite alrededor del punto fijo.

ii)  $0 < \Delta < (Tr J)^2/4$ .

Usando Ec. (8) y  $0 < \Delta$  se obtiene que  $\Omega < |f_{11} + f_{22}|/2$ . Si  $\Delta < (Tr J)^2/4$  entonces el argumento de la raíz en ec. (6) es positivo  $\rightarrow \lambda_{\pm}$  son números reales.

Si  $\text{Tr } J > 0 \rightarrow (f_{11} + f_{22}) > 0 \rightarrow \lambda_{\pm} = (f_{11} + f_{22})/2 \pm \Omega > 0 \Rightarrow \text{Nodo Inestable}$

Si  $\text{Tr } J < 0 \rightarrow (f_{11} + f_{22}) < 0 \rightarrow \lambda_{\pm} = (f_{11} + f_{22})/2 \pm \Omega < 0 \Rightarrow \text{Nodo Estable}$

Sabemos que  $J$  es  $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$  en la base  $(x_1, x_2)$  y que en la base de los vectores propios

de  $J$ ,  $(x_1', x_2')$ , la matriz jacobiana es diagonal :  $\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$ .

Si  $\text{Tr}(J) > 0$ :

$\frac{\partial f_1}{\partial x_1'}|_0 = \lambda_+ > 0, \frac{\partial f_1}{\partial x_2'}|_0 = 0$  Aplico a  $f_1$  los argumentos que vimos en el caso 1-

dimensional para la dirección  $x_1'$  el punto fijo es nodo inestable en esa dirección.

$\frac{\partial f_2}{\partial x_1'}|_0 = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x_2'}|_0 = \lambda_- > 0$  Aplico a  $f_2$  los argumentos que vimos en el caso 1-

dimensional para la dirección  $x_2'$  el punto fijo es nodo inestable en esa dirección.

Si  $\text{Tr}(J) < 0$ , aplicando los argumentos anteriores el punto fijo es estable en las direcciones  $x_1'$  y  $x_2'$ .

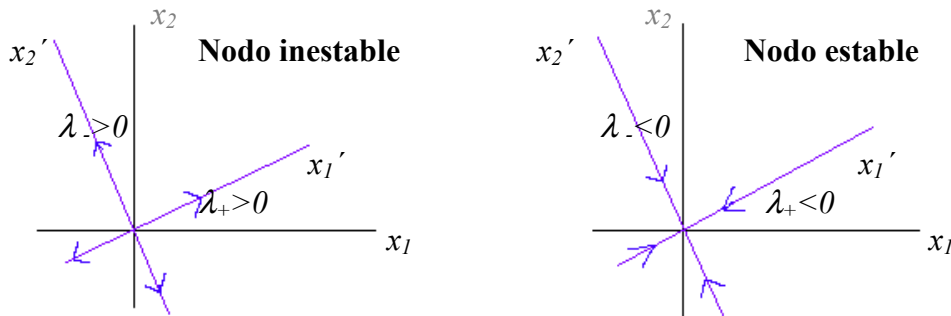


Fig. 12. Puntos fijos que aparecen cuando  $0 < \Delta < (\text{Tr } J)^2/4$ .

### iii) $\Delta < 0$

Usando Ec. (8) y  $\Delta < 0$  se obtiene que  $\Omega > |f_{11} + f_{22}|/2$ . De nuevo el argumento de la raíz en la ec. (6) es positivo  $\rightarrow \lambda_{\pm}$  son números reales.

Si  $\text{Tr } J > 0 \rightarrow (f_{11} + f_{22}) > 0$  y como  $\lambda_{\pm} = (f_{11} + f_{22})/2 \pm \Omega \rightarrow \lambda_+ > 0, \lambda_- < 0 \Rightarrow \text{Punto silla}$

Si  $\text{Tr } J < 0 \rightarrow (f_{11} + f_{22}) < 0$  y como  $\lambda_{\pm} = (f_{11} + f_{22})/2 \pm \Omega \rightarrow \lambda_+ > 0, \lambda_- < 0 \Rightarrow \text{Punto silla}$

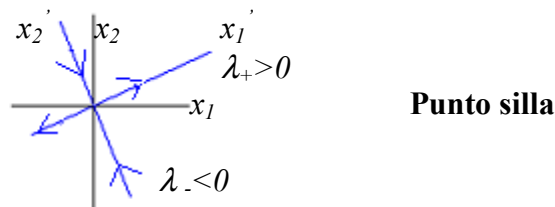


Fig. 13. Puntos fijos que aparecen cuando  $\Delta < 0$ .

Las posibles trayectorias en 2 dimensiones son: puntos fijos, trayectorias que se alejan

al  $\infty$ , ciclos límite, trayectorias que se acercan asintóticamente a un punto fijo o trayectorias que se acercan asintóticamente a un ciclo límite. En sistemas continuos de una o dos dimensiones todas las trayectorias son regulares: *no hay caos determinista*.

### Espacio de estados 3-dimensional

El estudio de los puntos fijos es similar al caso bidimensional. Consideramos el sistema dinámico continuo:

$$\dot{X}_1 = f_1(X_1, X_2, X_3) \quad (9)$$

$$\dot{X}_2 = f_2(X_1, X_2, X_3)$$

$$\dot{X}_3 = f_3(X_1, X_2, X_3)$$

$(X_{10}, X_{20}, X_{30})$  es un punto fijo si

$$f_1(X_{10}, X_{20}, X_{30}) = 0 \quad (10)$$

$$f_2(X_{10}, X_{20}, X_{30}) = 0$$

$$f_3(X_{10}, X_{20}, X_{30}) = 0$$

La naturaleza de cada punto fijo está determinada por los valores propios de la matriz jacobiana,  $J$ , de las derivadas parciales de  $f_i$  evaluadas en el punto fijo. Los elementos de esta matriz (3 X 3) son  $f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \big|_0$  y los valores propios se hallan resolviendo la

ecuación característica  $|J - \lambda I| = 0$ . Esta es una ecuación cúbica cuyas soluciones son los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . En la Fig. 14 vemos los puntos fijos en 3 dimensiones.

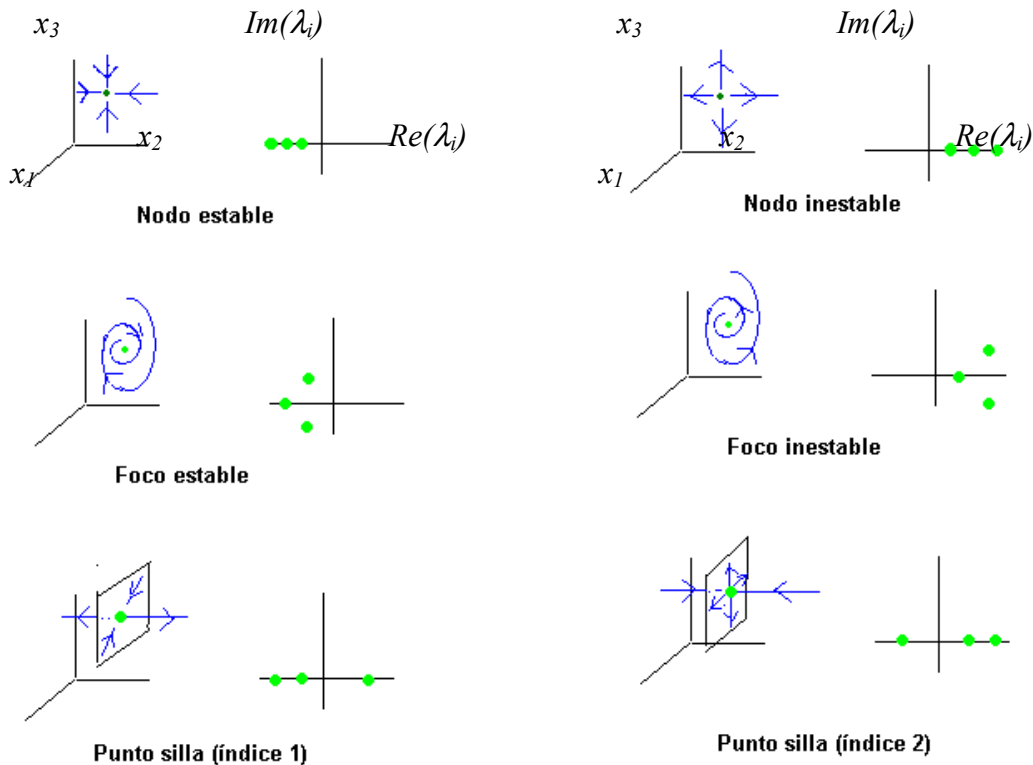


Fig. 14. Tipos de puntos fijos en tres dimensiones.

Las trayectorias que van directamente al punto silla forman el *manifold estable*.  
 “ “ “ se van del “ “ “ “ *manifold inestable*.

El comportamiento global de las trayectorias en el espacio de estados está organizado por los manifolds estables e inestables.

## ESTABILIDAD DINAMICA

En un experimento físico es imposible reproducir exactamente un conjunto dado de condiciones iniciales o evitar completamente la presencia de algún ruido que contamina la señal a medir. Por esto es importante estudiar la influencia de pequeñas variaciones en las condiciones iniciales sobre las soluciones del sistema dinámico. La sensibilidad de una solución dada a estas variaciones define su *estabilidad dinámica*.

Estabilidad en el sentido de Lyapunov: una trayectoria,  $\bar{x}(t)$ , es uniformemente estable si cualquier otra trayectoria,  $\bar{y}(t)$ , tal que en un instante dado,  $t_0$ , los dos puntos  $\bar{x}(t_0), \bar{y}(t_0)$  estén suficientemente cerca, los puntos  $\bar{x}(t)$  e  $\bar{y}(t)$  se mantienen próximos en todo tiempo.

Ya hemos estudiado en la sección anterior la estabilidad dinámica de las soluciones puntos fijos. Se puede estudiar también la estabilidad de las soluciones ciclos límite con la llamada Teoría de Floquet o la estabilidad de una solución cualquiera del sistema dinámico. Ilustramos en la Fig. 15 la estabilidad dinámica de un par de soluciones.

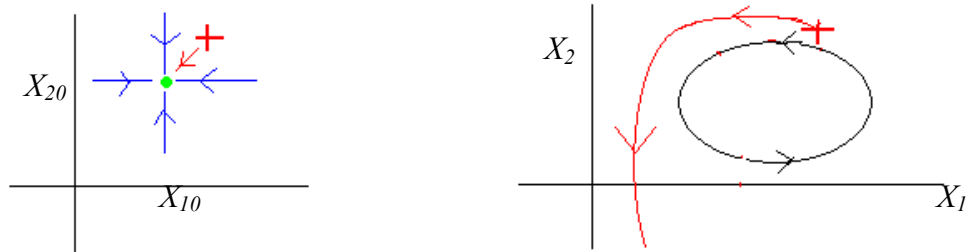


Fig. 15. Punto fijo estable (izquierda) y ciclo límite inestable (derecha).

Se observa en la parte izquierda de la figura como si hay una pequeña variación de las condiciones iniciales (el sistema está en la cruz) el sistema evoluciona hacia el punto fijo porque éste es un nodo estable. En la parte derecha se ve como la variación en las condiciones iniciales (cruz) lleva al sistema a alejarse del ciclo límite pues éste es inestable (lo podemos calcular usando Teoría de Floquet). Sin embargo la estabilidad de una solución cualquiera (que no sea punto fijo o ciclo límite) hay que calcularla integrando numéricamente el sistema dinámico o midiendo la evolución temporal de una solución y de cualquier otra solución cercana.



## SISTEMAS CAÓTICOS. EXPONENTES DE LYAPUNOV.

Veamos que se necesitan espacios de tres dimensiones o mas para tener comportamiento caótico cuando tenemos un sistema dinámico continuo. El comportamiento caótico está caracterizado por la divergencia de trayectorias cercanas en el espacio de estados: la separación entre dos trayectorias cercanas aumenta exponencialmente con el tiempo, *al menos a tiempos cortos*. Esta restricción es necesaria porque tratamos sistemas cuyas trayectorias permanecen acotadas en una región finita del espacio de estados. Luego hay tres requerimientos para que haya comportamiento caótico:

- 1.- Las trayectorias distintas no pueden cortarse (Tma. unicidad de sol. Ec. Dif. Ord.)
- 2.- Las trayectorias están acotadas.
- 3.- Las trayectorias cercanas divergen exponencialmente.

Estas condiciones no pueden satisfacerse simultáneamente en espacios de 1 ó 2 dimensiones. Sin embargo en 3 dim. las trayectorias inicialmente cercanas pueden diverger doblándose por encima y por debajo, una encima de otra: las trayectorias cercanas divergen inicialmente y después se curvan en el espacio de estados formando en el proceso una estructura intrincada. Claramente la geometría asociada a esas trayectorias va a ser extraña. A los atractores asociados a esas trayectorias se les llama *atractores extraños*.

La noción de divergencia exponencial de trayectorias cercanas se formaliza mediante el *exponente de Lyapunov*. Si dos trayectorias cercanas sobre un atractor caótico están separadas en  $d_0$  en  $t=0$ , entonces las trayectorias evolucionan de tal forma que su separación en el tiempo  $t$ ,  $d(t)$  satisface:

$$d(t) = d_0 e^{\lambda t} \quad (11)$$

donde  $\lambda$  es el *exponente de Lyapunov para las trayectorias*. Si  $\lambda > 0$  el comportamiento es caótico.

De esta definición vemos que el caos es una propiedad de una colección de trayectorias. Sin embargo, el caos también aparece en el comportamiento de una trayectoria aislada: a medida que la trayectoria recorre el atractor caótico regresará eventualmente cerca de algún punto ya visitado previamente (no puede volver exactamente al mismo punto porque entonces la trayectoria sería periódica). Si las trayectorias divergen exponencialmente la trayectoria en una segunda visita a ese punto tendrá un comportamiento posterior bastante diferente del que tuvo posteriormente a su primera visita. Luego la impresión de la evolución temporal de esa trayectoria será de no reproducibilidad, de no periodicidad, es decir, de caos.

El valor de  $\lambda$  nos va a dar idea del grado de caoticidad del sistema. Veamos como obtener  $\lambda$  si tenemos un sistema dinámico continuo. Si éste es unidimensional,  $dx/dt=f(x)$ , consideremos un punto inicial,  $x_0$ , y un punto cercano,  $x$ . Llamemos  $x_0(t)$  la trayectoria que surge en  $x_0$  y  $x(t)$  la trayectoria que nace en  $x$ . La distancia entre las dos trayectorias es  $d(t)=x(t)-x_0(t)$ . Desarrollo  $f(x)$  alrededor de  $f(x_0)$  y me quedo en el término lineal del desarrollo, pues  $x$  es cercano a  $x_0$ :  $f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0)$ .

Entonces

$$\dot{d} = \dot{x} - \dot{x}_0 = f(x) - f(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} d \Rightarrow d(t) = d_0 e^{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} t}$$

Si comparamos con la Ec. (11) obtenemos que:

$$\lambda = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}. \quad \text{Luego si } \lambda > 0 \text{ (} \lambda < 0 \text{) las dos trayectorias divergen (convergen).}$$

En espacios de estados de dos o mas dimensiones podemos asociar un exponente de Lyapunov en cada punto  $\bar{x}_0$  (exponente local) con la velocidad de expansión o de contracción de las trayectorias para cada una de las direcciones en el espacio de estados. Los exponentes de Lyapunov son los autovalores de la matriz jacobiana evaluada en  $\bar{x}_0$ . Por ejemplo en 3 dimensiones, si la matriz jacobiana es diagonal, los 3 autovalores

$$\text{son } \lambda_1 = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}_0}, \lambda_2 = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}_0}, \lambda_3 = \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right|_{\bar{x}_0}. \text{ Como } \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}_0} \text{ depende de } \bar{x}_0, \lambda_i \text{ cambiará con}$$

$\bar{x}_0$  y debemos encontrar un valor promedio para  $\lambda_i$  sobre la historia de la trayectoria: evaluamos  $\lambda_i$  sobre la trayectoria y calculamos su valor promedio.

Podemos dar ahora una definición matemática de sistema caótico más precisa que la dada anteriormente. Un sistema caótico es aquel que tiene al menos un exponente de Lyapunov promedio positivo. Al conjunto de exponentes de Lyapunov promedio se le denomina *Espectro de exponentes de Lyapunov*.

## ATRACTORES

Para caracterizar el caos cuantitativamente se hace uso de dos descripciones distintas, pero relacionadas. La primera hace énfasis en la dependencia temporal, en la *dinámica* del comportamiento caótico. Con ésta ya hemos trabajado al hacer uso de los exponentes de Lyapunov. El segundo tipo de descripción hace énfasis en la *naturaleza geométrica* de las trayectorias en el espacio de estados: dejamos al sistema evolucionar un tiempo largo (para que llegue al atractor) y examinamos la geometría de las trayectorias en el espacio de estados. Dentro de esta descripción nos encontraremos el concepto importante e intrigante de los *fractales*. Intuitivamente esperamos que la descripción dinámica y geométrica estén relacionadas. Sin embargo las relaciones teóricas entre ambas son aun débiles y son principalmente conjeturas y por tanto queda mucho trabajo por hacer sobre la teoría que una ambas descripciones.

El *atractor* es el conjunto de puntos del espacio de estados hacia el que tienden las trayectorias cuando el tiempo se hace muy grande.

### Tipos de atractores:

1 dimensión:                      Puntos fijos estables

2 dimensiones:                      “                      “                      “                      y ciclos límite estables.

3 ó mas dimensiones:                      “                      “                      “                      ,                      “                      “                      “                      , superficies cerradas y *Atractores Extraños*.

Ya nos hemos encontrado con estos objetos, salvo con los atractores extraños. Un ejemplo de atractor que es una superficie cerrada es un toro bidimensional en un espacio de 3 dimensiones cuando el cociente de periodos es irracional, pues en este caso la trayectoria no se cierra y recubre el toro completamente.

Los atractores extraños son atractores caóticos y fractales. Que sean caóticos significa que hay una gran sensibilidad a las condiciones iniciales. Para entender qué es un atractor fractal hemos de examinar la noción de dimensión.

*Dimensión topológica de un objeto:* es el número de coordenadas necesarias para especificar un punto del objeto. Esta es la noción usual de dimensión:  $\dim(\text{punto})=0$ ,  $\dim(\text{curva})=1$ ,  $\dim(\text{volumen})=3$ .

¿Cuál es la dimensión de un atractor? Está claro si el atractor es un punto fijo (0), un ciclo límite (1) o una superficie cerrada. Pero necesitamos un concepto mas amplio de dimensión para cuantificar la dimensión de un atractor extraño. Para un sistema dinámico disipativo la dimensión de un atractor ha de ser menor que la dimensionalidad del espacio de estados,  $p$ , porque sabemos que un volumen  $p$ -dimensional del espacio de estados debe colapsar a cero a medida que el tiempo aumenta (por ejemplo, el atractor puede ser una superficie  $p-1$  dimensional que ocupará un volumen cero).

*Dimensión de Capacidad (o de contado de cajas)*

Construimos cajas de lados de longitud  $l$  para cubrir el espacio ocupado por el objeto geométrico considerado: en un espacio de 1 dimensión topológica construiremos segmentos de longitud  $l$ , en espacios de dos dimensiones construiremos cuadrados de lado  $l$ , en espacios de tres dimensiones, cubos de lado  $l$ ...). Contamos el número mínimo de cajas,  $N(l)$ , que se necesitan para cubrir todos los puntos del objeto geométrico. A medida que  $l$  disminuye,  $N(l)$  aumenta porque necesitamos mas cajas para cubrir todos los puntos del objeto. La *dimensión de capacidad*,  $D_0$ , se define como:

$$D_0 = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log N(l)}{\log l} \quad (12)$$

Veamos de donde sale esta definición. La dimensión  $D_0$  es el número al que hay que elevar  $l$  para que  $N(l) = k / l^{D_0}$ , donde  $k$  es una constante de proporcionalidad.

Tomando logaritmos neperianos y despejando  $D_0$  se obtiene  $D_0 = \frac{-\log N(l)}{\log l} + \frac{\log k}{\log l}$ .

Haciendo el límite  $l \rightarrow 0$  obtendremos la definición anterior (12). Veamos con algunos ejemplos que esa definición da resultados razonables.

Ej) Consideremos un espacio de dos dimensiones. Un punto aislado lo puedo recubrir con un cuadrado de lado  $l$ . Luego  $N(l)=1$  y de la ecuación (12) obtengo que  $D_0=0$ . Una línea de longitud  $L$  la recubro con  $N(l)=L/l$  cuadrados de longitud  $l$ . Aplico la ecuación (12) y obtengo  $D_0=1$ .

Para los objetos regulares obtengo que  $D_0 = \text{Dimensión topológica}$ .

Objeto Fractal: objeto en el que la dimensión  $D_0$  es no entera. Veamos algunos ejemplos:

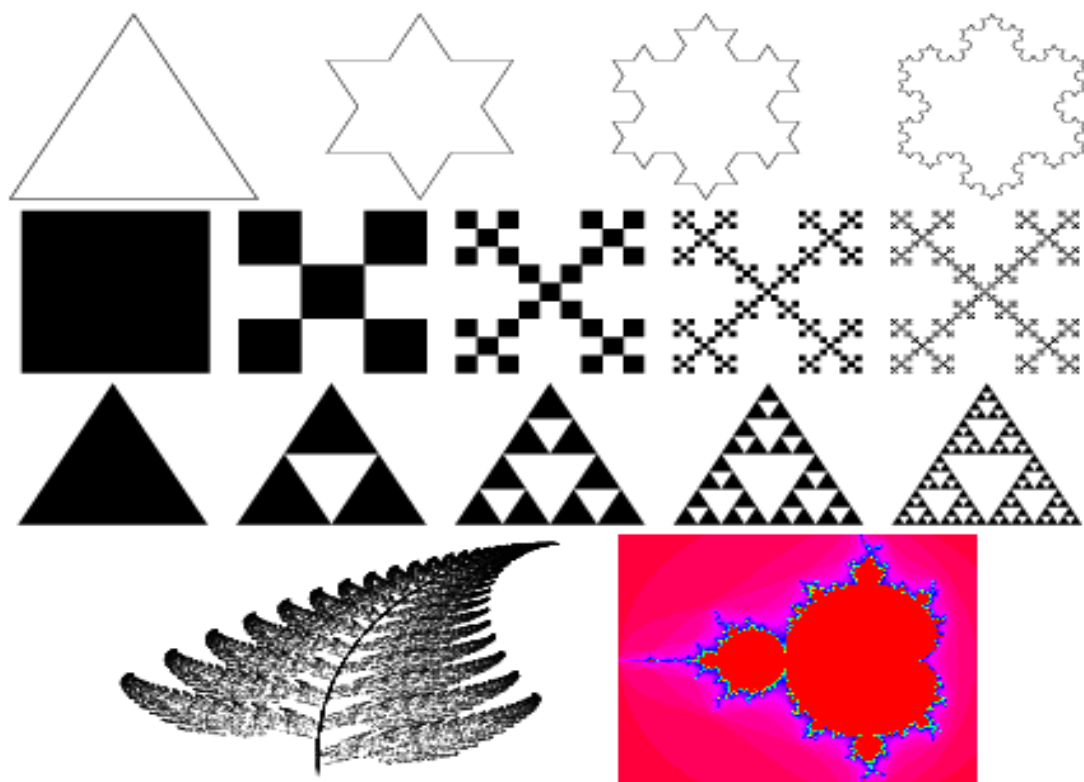


Fig. 16. Ejemplos de fractales. De arriba abajo: curva de Koch, caja fractal, Sierpinsky Gasket, helecho obtenido con un sistema de funciones iteradas, conjunto de Mandelbrot.

Calculemos ahora la dimensión de capacidad del fractal denominado la alfombra de Sierpinsky:

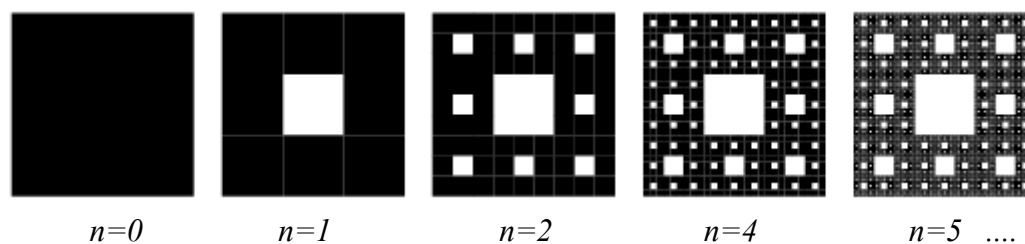


Fig. 17. Primeros pasos de la construcción de la alfombra de Sierpinsky.

A una alfombra cuadrada negra de lado unidad ( $n=0$ ) le recortamos el cuadrado interior ( $n=1$ ). A los cuadrados negros que nos quedan les volvemos a quitar el cuadrado interior y repetimos el proceso indefinidamente. Lo que nos queda (lo negro) es el fractal alfombra de Sierpinsky. El número de cuadrados negros en la iteración  $n$  es  $8^n$ . Por tanto en la iteración  $n$  necesitamos  $8^n$  ( $= N(l)$ ) cuadrados negros de lado  $(1/3)^n$  ( $= l$ ) para recubrir la superficie negra. Entonces la dimensión de este fractal es:

$$D_0 = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log N(l)}{\log l} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 8^n}{\log(3^{-n})} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 8}{-n \log 3} = \frac{\log 8}{\log 3} = 1.89278926...$$

Los atractores extraños son fractales, por tanto los atractores extraños tienen dimensión no entera. Por ejemplo,  $D_0$  (atractor de Lorenz)=2.06,  $D_0$  (atractor de Henon)=1.25. En <http://mathworld.wolfram.com/Fractal.html> encontrarás una selección de fractales y su explicación y en <http://www.cygnus-software.com/gallery/stampindex.htm> encontrarás una galería con bonitas imágenes fractales.

*Los objetos fractales son autosimilares:* esto significa que tienen un aspecto similar cuando se observan a distintas escalas. Es decir, aparece el mismo tipo de estructuras en todas las escalas. Por ejemplo, las sucesivas ampliaciones de una zona de la alfombra de Sierpinsky tienen la misma apariencia que la alfombra de Sierpinsky en la escala original. Esta propiedad es aprovechada para la generación por ordenador de imágenes que simulan estructuras naturales (montañas, árboles, paisajes ...). Puedes comprobar como aparecen estructuras similares a distintas escalas en las siguientes animaciones: <http://www.cygnus-software.com/zoommovies/index.html> (para verlas has de descargar previamente el fichero *Fractal Extreme Movie Player* en <http://www.cygnus-software.com/downloads/downloads.htm> ). Estas animaciones (muy vistosas) consisten en zooms continuos sobre una zona particular del fractal. La versión de demostración del programa que hace estas animaciones te permite crear tus propios paseos sobre alguno de los muchos fractales que tiene programados (necesitas descargar *Fractal Extreme* en <http://www.cygnus-software.com/downloads/downloads.htm> ).

Las dimensiones de un objeto se pueden definir de varias formas. La definición de dimensión de capacidad es estática: cojo el atractor y cuento cajas. Otras definiciones (dimensiones generalizadas) tienen en cuenta la evolución dinámica en el atractor conteniendo como caso particular a la dimensión de capacidad.

## ESTABILIDAD ESTRUCTURAL Y BIFURCACIONES

Una forma de analizar la dinámica es a través del análisis de la *estabilidad estructural*. En este análisis el interés se desplaza a conocer el efecto sobre las soluciones de pequeños cambios en los parámetros. Los autovalores asociados a un punto fijo dependen de los parámetros del sistema. A medida que los parámetros cambian la naturaleza de los autovalores y por tanto el carácter de los puntos fijos puede cambiar. Por ejemplo, un nodo estable puede convertirse en un punto silla. El estudio de cómo cambia el carácter de los puntos fijos (o de otro tipo de atractores) a medida que los parámetros del sistema cambian se denomina la *Teoría de Bifurcaciones*. Cuando un punto fijo cambia su carácter a medida que cambian los parámetros del sistema, el comportamiento de las trayectorias en la vecindad de ese punto fijo cambiará.

Veamos primero los cambios en la estabilidad de un atractor en particular cuando se cambia un parámetro para el caso de 1 dimensión. Sea por ejemplo el sistema dinámico:  $\dot{x} = \mu - x^2$ . Si  $\mu > 0$  hay dos puntos fijos:  $x_1 = \mu^{1/2}$  y  $x_2 = -\mu^{1/2}$ . Los autovalores de los puntos fijos son  $\lambda_1 = -2\mu^{1/2}$  y  $\lambda_2 = 2\mu^{1/2}$  porque  $\lambda_i = d(\mu - x^2)/dx|_{x_i}$ . Por tanto  $x_1$  es un nodo estable y  $x_2$  es un nodo inestable. Si variamos el parámetro  $\mu$  desde valores negativos a positivos vemos que ocurre una bifurcación en  $\mu = 0$  porque en  $\mu = 0$  tenemos un punto silla que cambia a un par de puntos, uno de ellos atractor y el otro repulsor. A esta bifurcación se la conoce con el nombre de bifurcación silla-nodo.

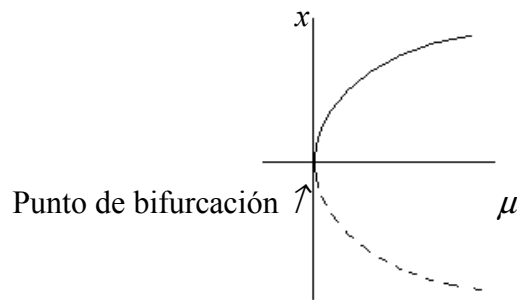


Fig. 18. Diagrama de bifurcación para la bifurcación silla-nodo. En él se dibujan la posición de los puntos fijos en función del parámetro y se indica su estabilidad (estable: línea continua, inestable línea discontinua)

Veamos ahora un ejemplo de bifurcación en un espacio de estados bidimensional. Al nacimiento de un ciclo límite estable se le llama *Bifurcación de Hopf*.

Sea el sistema dinámico:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(\mu - (x_1^2 + x_2^2)) \\ \dot{x}_2 &= +x_1 + x_2(\mu - (x_1^2 + x_2^2))\end{aligned}$$

Si cambiamos a coordenadas polares,  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ , obtenemos que

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned}$$

Luego  $\theta(t) = t + \theta_0$  y el ángulo aumenta con el tiempo a medida que la trayectoria describe una espiral alrededor del origen. Si  $\mu < 0$  solo hay un punto fijo,  $r=0$ , de autovalor  $\mu$ . Por tanto para  $\mu < 0$  el autovalor es negativo y el punto fijo es estable (foco). Si  $\mu > 0$  el punto fijo  $r=0$  pasa a ser un foco inestable y aparece un nuevo punto fijo,  $r = \mu^{1/2}$ . Este punto fijo corresponde a un ciclo límite de periodo  $2\pi$ . Entonces un ciclo límite aparece en  $\mu=0$  y hay una bifurcación de Hopf en ese valor.

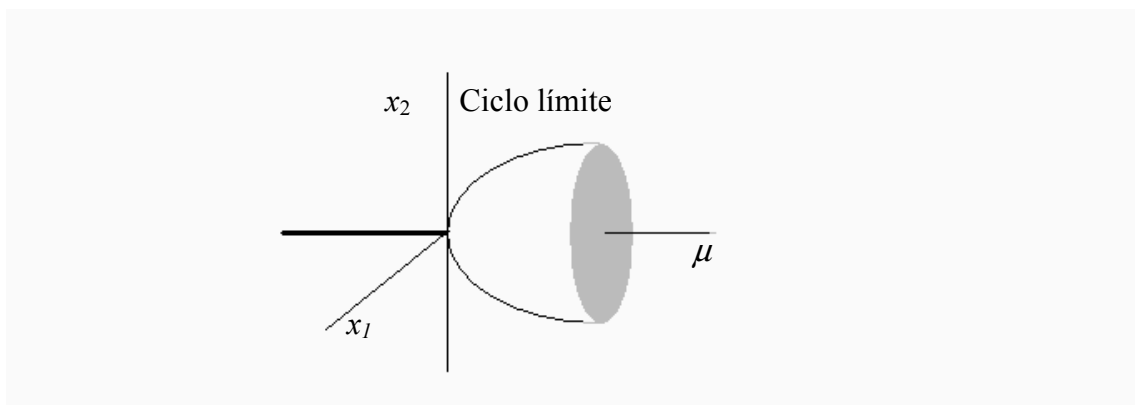


Fig. 19. Diagrama de bifurcación para la bifurcación de Hopf.

## SIGNOS DEL CAOS

Como hemos visto hay diversos indicadores para saber si un sistema presenta un comportamiento de caos determinista. En primer lugar una evolución temporal irregular y aperiódica puede ser un primer indicador del carácter caótico del sistema. Este carácter puede ser confirmado viendo si hay una gran sensibilidad de la evolución a pequeños cambios en las condiciones iniciales. Un indicador más cuantitativo es el cálculo de los exponentes de Lyapunov promedio. Si al menos uno tiene parte real positiva el sistema es caótico. Por último veremos otra forma de apreciar si un sistema tiene evolución caótica o no: atendiendo al espectro de la señal.

La definición del espectro se basa en la transformada de Fourier de una señal  $x(t)$ :

$$X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t) e^{i\omega t} dt$$

El espectro de potencia,  $P(\omega)$ , se define como,  $P(\omega) = |X(\omega)|^2$ . Si el movimiento es periódico o cuasiperiódico el espectro consiste en líneas discretas que aparecen a las frecuencias correspondientes, mientras que si el movimiento es caótico  $P(\omega)$  es una función con valores apreciables (y ruidosos) en un rango muy ancho de frecuencias. En la figura 20 se puede apreciar la diferencia entre ambos tipos de espectros de potencia.

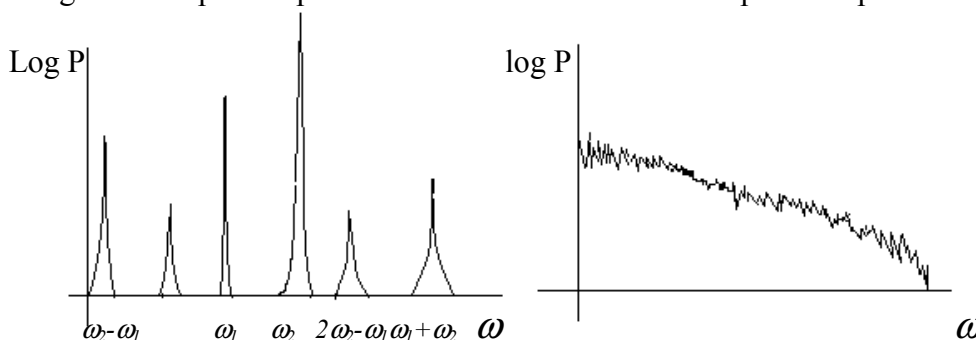


Fig.20 . Representación esquemática del espectro de potencia de una variable dinámica cuando la evolución es cuasiperiódica con frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  (izquierda) y cuando la evolución es caótica (derecha).

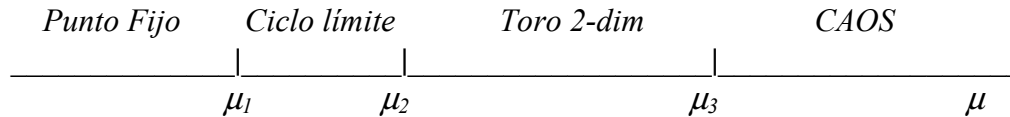
## RUTAS HACIA EL CAOS

Muy a menudo, cuando un parámetro  $\mu$  cambia y aparece una bifurcación a un valor  $\mu_1$ , ésta es seguida por una secuencia de nuevas bifurcaciones a valores  $\mu_i$  ( $i=1,2,\dots$ ) con  $\mu_{i+1} > \mu_i$ . Cada nuevo atractor que aparece en la cadena de bifurcaciones es normalmente más complicado que el anterior, y eventualmente llega a ser caótico. A esta secuencia se la llama *Ruta hacia el caos*. El número de tipos de rutas hacia el caos es desconocido, pero se ha observado que algunas aparecen muy a menudo y por esta razón se les llama *Escenarios*. Describiremos brevemente los escenarios más importantes que se conocen en la actualidad.

### Escenario de Ruelle-Takens-Newhouse

Este escenario consiste en una secuencia de tres bifurcaciones de Hopf en los valores críticos  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  y  $\mu_3$ . Como muestra el diagrama inferior, el atractor es un punto fijo si

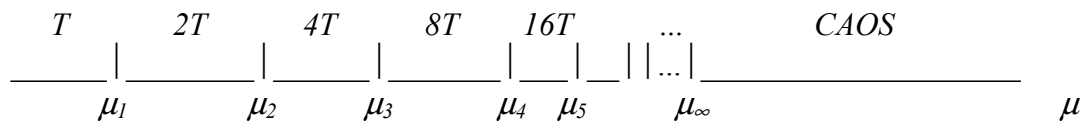
$\mu < \mu_1$ . En  $\mu = \mu_1$  se transforma en un ciclo límite de periodo T. En  $\mu = \mu_2$  se transforma en un toro bidimensional con un cociente de frecuencias irracional (comportamiento cuasiperiódico) y en  $\mu = \mu_3$  aparece una nueva frecuencia independiente. El movimiento para  $\mu > \mu_3$  debería estar sobre un toro tridimensional, pero este toro es inestable y el movimiento se vuelve caótico.



Este escenario se puede identificar observando el espectro de potencia,  $P(\omega)$ , de una variable dinámica. Como hemos visto en el apartado anterior el espectro cambia al ir de una evolución cuasiperiódica (el espectro consiste en picos a frecuencias  $f_1=1/T_1$ ,  $f_2=1/T_2$ ,  $f_1-f_2$ ,  $2f_2$ ,  $f_1+f_2$ ,  $2f_1-f_2...$ ) a una evolución dinámica caótica (espectro ancho sin picos definidos).

#### Ruta al caos por doblamiento de periodo (o Escenario de Feigenbaum)

Muy a menudo aparece una secuencia de bifurcaciones de la forma:



donde  $2^m T$  ( $m=0,1,2...$ ) representa el periodo de un atractor ciclo límite y  $\mu_n$  son los valores del parámetro  $\mu$  en los que hay bifurcaciones.

Se verifican las siguientes propiedades:

i)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m = \mu_\infty$  existe.

ii)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mu_m - \mu_{m-1}}{\mu_{m+1} - \mu_m} = \delta = 4.669201609....$  donde  $\delta$  es un número universal.

iii) Dentro del dominio caótico aparecen ventanas estrechas que corresponden a atractores periódicos.

Rutas al caos por doblamiento de periodo ocurren en los ejemplos estudiados al comienzo del tema: modelo de Lorenz y Mapa logístico.

#### Ruta al caos de Intermittencia (o Escenario de Pomeau-Manneville)

Este escenario está caracterizado por el hecho de que cuando un parámetro  $\mu$  supera un cierto valor crítico  $\mu_c$ , las oscilaciones regulares de la variable dinámica son interrumpidas en tiempos aleatorios por comportamientos irregulares. La duración de estas etapas irregulares es bastante regular y depende poco de  $\mu$ , pero la duración media de las oscilaciones regulares disminuye a medida que  $\mu$  aumenta hasta que desaparecen.