Actividades sesión 28 de Septiembre
Análisis de Algoritmos III
Maestría en Ciencias de la Computación
Otoño 2020
BUAP

Equipo 3
Erick Barrios González
Oscar Eduardo González Ramos
Oswaldo Jair García Franco

9 de octubre de 2020

1. Ejercicios

Resuelva las siguientes recurrencias exactamente con y sin manipulación algebraica:

1.
$$t_n = \begin{cases} n+1 & \text{si n = 0 o n = 1} \\ 3t_{n-1} - 2t_{n-2} + 3 \cdot 2^{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con manipulación algebraica

Reescribimos la recurrencia:

$$t_n - 3t_{n-1} - 2t_{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2}$$

La cual es de la forma de la Ecuación (1) con $b = 2$ y $p(n) = 3$ un polinomio de grado 0.
Reemplazamos n en la recurrencia por $n - 1$ y multiplicar por -2

$$-2t_{n-1} + 6t_{n-2} - 4t_{n-3} = -3 \cdot 2^{n-2}$$

Así obtenemos:

$$t_n - 5t_{n-1} + 8t_{n-2} - 4t_{n-3} = 0$$

Su polinomio caracteristíco es:

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$$

Cuyas raices son $r_2 = 2$ y $r_1 = 2$ (raíces múltiples) y $r_1 = 1$

$$t_n = C_1 + C_2^n + C_3 n 2^n$$

Si $C_3 > 0$ entonces $t_n \ \epsilon \ O(n2^n)$

Sin manipulación algebraica

Reescribimos la recurrencia:

$$t_n - 3t_{n-1} - 2t_{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2}$$

La cual es de la forma de la Ecuación (1) con $b = 2$, $p(n) = 3$ y $d = 0$ un polinomio de grado 0.
Así su polinomio característico es:

$$(x-2)^2(x-1)$$

Cuyas raices son $r_2 = 2$ y $r_1 = 2$ (raíces múltiples) y $r_1 = 1$

$$t_n = C_1 + C_2^n + C_3 n 2^n$$

Si $C_3 > 0$ entonces $t_n \; \epsilon \; O(n2^n)$
Si sustituimos la Ecuación en la recurrencia original, obtenemos:

$$3 \cdot 2^{n-2} = (C_1 + C_2^n + C_3 n 2^n) - 3(C_1 + C_2^{n-1} + C_3(n-1)2^{n-1})$$

$$3 \cdot 2^{n-2} = \frac{C_3 2^n}{2}$$

$$3 = \frac{C_3 2^n}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$3 = 2C_3$$

Por lo tanto

$$C_3 = \frac{3}{2}$$

2.

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{si n = 0 o n = 1} \\ T(n-1) + T(n-2) + C & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con manipulación algebraica

Reescribimos la recurrencia:

$$T(n) - T(n-1) - T(n-2) - C$$

$$T(n) - T(n-1) - T(n-2) = C$$

La cual es de la forma de la Ecuación (1) con $b = 1$ y $p(n) = 1$ un polinomio de grado 0.
Formando la nueva ecuación

$$T(n) - T(n-1) - T(n-2) = C$$

Multiplicando por -1 y remplazando n por $n-1$

$$-T(n-1) + T(n-2) + T(n-3) = -C$$

Así obtenemos:

$$\begin{array}{ll} T(n) - T(n-1) - T(n-2) & = C \\ \quad - T(n-1) + T(n-2) + T(n-3) & = -C \\ \hline \end{array}$$

Sumando estas dos ecuaciones tenemos:

$$T(n) - 2T(n-1) + T(n-3) = 0$$

Así su polinomio característico es:

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

Cuyas raices son $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $r_3 = 1$ y $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Así:

$$T(n) = C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + C_3 \qquad (2)$$

Sin manipulación algebraica

Sustituyendo (2) en la recurrencia original $T(n) - T(n-1) - T(n-2) = C$

$$T(n) = C_1\theta^n + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + C_3$$

$$C = (C_1\theta^n + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + C_3) - (C_1\theta^{n-1} + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} + C_3) - (C_1\theta^{n-2} + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2} + C_3)$$

$$C = C_1(\theta^n - \theta^{n-1} - \theta^{n-2}) + C_2((\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2}) + C_3(1-1-1)$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$C_1\theta + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) + C_3 = 1$$

$$C_1\theta^2 + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 + C_3 = 1$$

$\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$C_1 = \frac{3\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}$$

$$C_2 = -\frac{3\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}$$

$$C_3 = 1$$

3.

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{si n = 0 o n = 1} \\ T(n-1) + T(n-2) + Cn & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con manipulación algebraica

Reescribimos la recurrencia:

$$T(n) - T(n-1) - T(n-2) - Cn$$

Formando la nueva ecuación

$$T(n) - T(n-1) - T(n-2) = Cn$$

Multiplicando por -1 y remplazando n por $n-1$

$$T(n) - T(n-1) - T(n-2) \qquad\qquad = Cn$$

$$-T(n-1) + T(n-2) + T(n-3) = -Cn + C$$

Sumando las ecuaciones tenemos:

$$T(n) - 2T(n-1) + T(n-3) = -C$$

Multiplicando por -1 y remplazando n por $n-1$ en la nueva ecuación

$$-T(n-1) + 2T(n-2) + T(n-4) = -C$$

Sumando las ecuaciones tenemos:

$$T(n) - 3T(n-1) + 2T(n-2) + T(n-3) - T(n-4) = 0$$

Así su polinomio característico es:

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1 = (x-1)^2(x^2 - x - 1)$$

Cuyas raices son $r_1 = 1$, $r_2 = 1$ de multiplicidad 2, $r_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $r_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Así:

$$T(n) = C_1 + C_2 + C_3\theta^n + C_4(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

Sustituyendo en la recurrencia original

$$C_1 + nC_2 + C_3\theta^n + C_4(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n - C_1 - (n-1)C_2 - C_3\theta^{n-1} - C_4(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} -$$

$$C_1 - (n-2)C_2 - C_3\theta^{n-2} - C_4(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

Sin manipulación algebraica

$$T(n) - T(n-1) - T(n-2) = Cn$$

La cual es de la forma de la Ecuación (1) con $b = 1$, $p(n) = n$ y $d = 1$ un polinomio de grado 1.
Así su polinomio característico es:

$$(x^2 - x - 1)(x - 1)^2$$

Cuyas raices son $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $r_3 = 1$, $r_4 = 1$ de multiplicidad 2, Entonces

$$T(n) = C_1\Theta^n + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}^n) + C_3 + C_4n$$

4. $a_n = a_{n-1} + n + 2, \qquad a_0 = 0$

Con manipulación algebraica

Reescribimos la recurrencia:

$$a_n - a_{n-1} = n + 2$$

Multiplicando por -1 y remplazando n por $n-1$

$$-a_{n-1} + a_{n-2} = -n - 1$$

Sumando las ecuaciones tenemos:

$$\begin{array}{rl} a_n - a_{n-1} & = n+2 \\ + \qquad - a_{n-1} + a_{n-2} & = -n-1 \\ \hline a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} & = 1 \end{array}$$

Multiplicando por -1 y remplazando n por $n-1$ en la nueva ecuación

$$-a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3} = -1$$

Sumando las ecuaciones anteriotres tenemos:

$$\begin{array}{rl} a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} & = 1 \\ + \qquad - a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3} & = -1 \\ \hline a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} & = 0 \end{array}$$

Así su polinomio característico es:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

Cuya raíz es $r_1 = 1$ de multiplicidad 3
Por lo tanto todas las soluciones son de la forma:

$$a_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2$$

La solución general se encuentra resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 & n &= 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 &= 1 & n &= 1 \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 &= 2 & n &= 2 \end{aligned}$$

Donde obtenemos que:

$$C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 0$$

Sin manipulación algebraica

Reescribimos la recurrencia:

$$a_n - a_{n-1} = n + 2$$

En este caso, $b = 1$ y $p(n) = n$
Así su polinomio característico es:

$$(x-1)^3(x-2)$$

Cuyas raices son $r_1 = 2$ y $r_2 = 1$ de multiplicidad 3
Por lo tanto todas las soluciones son de la forma:

$$a_n = C_1 2^n + C_2 1^n + C_3 n 1^n + C_4 n^2 1^n$$
$$a_n = C_1 2^n + C_2 + C_3 n + C_4 n^2$$

Sustituyendo en la recurrencia original

$$n + 2 = a_n - a_{n-1}$$
$$n+2 = (C_1 2^n + C_2 + C_3 n + C_4 n^2) - (C_1 2^{n-1} + C_2 + C_3(n-1) + C_4(n^2 - 2_n + 1))$$
$$n + 2 = C_1(2^n - 2^{n-1}) + C_3(n - n + 1) + C_4(n^2 - 2n + 1)$$
$$n + 2 = C_1 2^{n-2} + C_3 + C_4(2^n) - C_4$$

5. $a_n = a_{n-1} + 7n, \qquad a_0 = 0$

Con manipulación algebraica

Reescribimos la recurrencia:

$$a_n - a_{n-1} = 7n$$

Multiplicando por -1 y remplazando n por $n-1$

$$-a_{n-1} + a_{n-2} = 7n + 7$$

Sumando las ecuaciones tenemos:

$$a_n - a_{n-1} \qquad = 7n$$

$+$

$$- a_{n-1} + a_{n-2} = 7n + 7$$

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 7$$

Multiplicando por -1 y remplazando n por $n-1$ en la nueva ecuación

$$-a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = -7$$

Sumando las ecuaciones anteriotres tenemos:

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} \qquad = 7$$

$+$

$$- a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = -7$$

$$a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 0$$

Así su polinomio característico es:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

Cuya raíz es $r_1 = 1$ de multiplicidad 3
Por lo tanto todas las soluciones son de la forma:

$$a_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2$$

La solución general se encuentra resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$
\begin{aligned}
&C_1 = 0 && n = 0\\
&C_1 + C_2 + C_3 = 1 && n = 1\\
&C_1 + 2C_2 + 4C_3 = 2 && n = 2
\end{aligned}
$$

Donde obtenemos que:

$$C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 0$$

Sin manipulación algebraica

Reescribimos la recurrencia:

$$a_n - a_{n-1} = 7$$

En este caso, $b = 7$, $p(n) = n$ y d=1
Así su polinomio característico es:

$$(x-1)(x-7)^2$$

Cuyas raices son $r_1 = 1$, $r_2 = 7$ y $r_3 = 7$ de multiplicidad 2
Por lo tanto todas las soluciones son de la forma:

$$a_n = C_1 + C_2 7^n + C_3 n 7^n$$

La solución general se encuentra resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + 0 &= 0 & \quad n = 0 \\ C_1 + 7C_2 + 7C_3 &= 1 & \quad n = 1 \\ C_1 + 49C_2 + 98C_3 &= 2 & \quad n = 2 \end{aligned}$$

Donde obtenemos que:

$$C_1 = -\frac{1}{3}, C_2 = \frac{1}{3}, C_3 = -\frac{1}{7}$$

Por lo tanto

$$a_n = -\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})7^n + n7^{n-1}$$

Referencias

[1] Lavalle Martínez, José de Jesús; La presentación sobre la tercera parte de Análisis de algoritmos, Análisis y Diseño de Algoritmos. Buap, Otoño 2020.

[2] Jiménez Salazer, Héctor y Lavalle Martínez, José de Jesús; Análisis y Diseño de Algoritmos. Traducción de partes del libro Fundamentals of Algorithmics de Brassard and Bratley FCC - BUAP, 2020.