

Actividades sesión 12 de octubre  
Análisis de Algoritmos IV  
Maestría en Ciencias de la Computación  
Otoño 2020  
BUAP

Equipo 3  
Erick Barrios González  
Oscar Eduardo González Ramos  
Oswaldo Jair García Franco

15 de octubre de 2020

## 1. Ejercicios

Resuelva las siguientes recurrencias exactamente, primero mediante cambio de variable, luego verifique sus respuestas empleando el resultado del ejemplo 4.

1

$$t_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2T(n/2) + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Reemplazamos  $n$  por  $2^i$ :  
 $t_i = T(2^i)$

$n/2$  se convierte en :  
 $\frac{2^i}{2} = 2^{i-1}$

Entonces:  
 $t_i = T(2^i) = 2T(2^{i-1}) + 1$   
 $= 2t_{i-1} + 1$

Se reescribe como:  
 $t_i - 2t_{i-1} = 1$

Que es la forma de una recurrencia no homogénea

Su polinomio característico es:

$$(x - 2)(x - 1)$$

Así todas las soluciones para  $t_i$  son de la forma:

$$t_i = c_1(2^i) + c_2$$

Ahora regresamos a la ecuación original  
usamos el hecho de que  $T(2^i) = t_i$ , Así  $T(n) = tlgn$   
 $T(n) = c_12^{lgn} + c_2 = c_1n + c_2$  (1)

Lo cual es suficiente para concluir que :

$$T(n) \in O(n|n \text{ es potencia de } 2)$$

Como queremos obtener el orden exacto debemos probar que  $c_1$  es estrictamente positivo.

Sustituyendo la solución proporcionada por la ecuación (1) en la recurrencia original.

$$\begin{aligned} 1 &= T(n) - 2T(n/2) \\ &= (c_1n + c_2) - 2(c_1\frac{n}{2} + c_2) \\ c_2 &= -1 \end{aligned}$$

No obtuvimos el valor de  $c_1$  pero estamos en condiciones de afirmar que debe ser estrictamente positiva, de lo contrario la ecuación (1) indicaría

falsamente que  $T(n)$  es negativa.

Entonces queda establecido que:

$T(n) \in \Theta(n | n \text{ es potencia de } 2)$

Comprobación con teorema Maestro:  $l = 2, b = 2, k = 0$

$$l > 2^0 = 1$$

Entonces  $T(n) \in \Theta(n^{\log_2(2)})$

$T(n) \in \Theta(n | n \text{ es potencia de } 2)$

2

$$t_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 4T(n/2) + n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Reemplazamos  $n$  por  $2^i$ :  
 $t_i = T(2^i)$

$n/2$  se convierte en :  
 $\frac{2^i}{2} = 2^{i-1}$

Entonces:

$$\begin{aligned} t_i &= T(2^i) = 4T(2^{i-1}) + 2^i \\ &= 4t_{i-1} + 2^i \end{aligned}$$

Se reescribe como:

$$t_i - 4t_{i-1} = 2^i$$

Que es la forma de una recurrencia no homogénea

Su polinomio característico es:  
 $(x - 4)(x - 2)$

Así todas las soluciones para  $t_i$  son de la forma:

$$t_i = c_1(4^i) + c_2(2^i)$$

Ahora regresamos a la ecuación original  
usamos el hecho de que  $T(2^i) = t_i$ , Así  $T(n) = t \lg n$   
 $T(n) = c_1 4^{\lg n} + c_2 2^{\lg n} = c_1 n^2 + c_2 n \quad (1)$

Lo cual es suficiente para concluir que :  
 $T(n) \in O(n^2 | n \text{ es potencia de 2})$

Como queremos obtener el orden exacto debemos probar que  $c_1$  es estrictamente positivo.

Sustituyendo la solución proporcionada por la ecuación (1) en la recurrencia original.

$$\begin{aligned} n &= T(n) - 4T(n/2) \\ &= (c_1 n^2 + c_2 n) - 4(c_1 (\frac{n}{2})^2 + c_2 (\frac{n}{2})) \\ c_2 &= -1 \end{aligned}$$

No obtuvimos el valor de  $c_1$  pero estamos en condiciones de afirmar que debe ser estrictamente positiva, de lo contrario la ecuación (1) indicaría falsamente que  $T(n)$  es negativa.

Entonces queda establecido que:  
 $T(n) \in \Theta(n^2 | n \text{ es potencia de 2})$

Comprobación con teorema Maestro:  $l = 4, b = 2, k = 0$

$$l > 2^0 = 1$$

Entonces  $T(n) \in \Theta(n^{\log_2(4)})$   
 $T(n) \in \Theta(n^2 | n \text{ es potencia de } 2)$

## Referencias

- [1] Lavalle Martínez, José de Jesús; La presentación sobre la tercera parte de Análisis de algoritmos, Análisis y Diseño de Algoritmos. Buap, Otoño 2020.
- [2] Jiménez Salazer, Héctor y Lavalle Martínez, José de Jesús; Análisis y Diseño de Algoritmos. Traducción de partes del libro Fundamentals of Algorithmics de Brassard and Bratley FCC - BUAP, 2020.