

Actividades sesión 12 de octubre  
Análisis de Algoritmos IV  
Maestría en Ciencias de la Computación  
Otoño 2020  
BUAP

Equipo 3

Erick Barrios González

Oscar Eduardo González Ramos

Oswaldo Jair García Franco

16 de octubre de 2020

## 1. Ejercicios

Resuelva las siguientes recurrencias exactamente, primero mediante cambio de variable, luego verifique sus respuestas empleando el resultado del ejemplo 4.

1

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2T(n/2) + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Reemplazamos  $n$  por  $2^i$ :

$$t_i = T(2^i)$$

$n/2$  se convierte en :

$$\frac{2^i}{2} = 2^{i-1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} t_i = T(2^i) &= 2T(2^{i-1}) + 1 \\ &= 2t_{i-1} + 1 \end{aligned}$$

Se reescribe como:

$$t_i - 2t_{i-1} = 1$$

Su polinomio característico es:

$$(x - 2)(x - 1)$$

Así todas las soluciones para  $t_i$  son de la forma:

$$t_i = c_1(2^i) + c_2$$

Ahora regresamos a la ecuación original

$$T(n) = c_1 2^{\lg n} + c_2 = c_1 n + c_2 \quad (1)$$

Como queremos obtener el orden exacto debemos probar que  $c_1$  es estrictamente positivo.

Sustituyendo la solución proporcionada por la ecuación (1) en la recurrencia original.

$$\begin{aligned} 1 &= T(n) - 2T(n/2) \\ &= (c_1 n + c_2) - 2(c_1 \frac{n}{2} + c_2) \\ c_2 &= -1 \end{aligned}$$

No obtuvimos el valor de  $c_1$  pero estamos en condiciones de afirmar que debe ser estrictamente positiva, de lo contrario la ecuación indicaría

falsamente que  $T(n)$  es negativa.

Entonces queda establecido que:

$$T(n) \in \Theta(n | n \text{ es potencia de } 2)$$

Comprobación con teorema Maestro:  $l = 2, b = 2, k = 0$

$$l > 2^0 = 1$$

Entonces  $T(n) \in \Theta(n^{\log_2(2)})$

$T(n) \in \Theta(n)$   $n$  es potencia de 2)

2

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 4T(n/2) + n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Reemplazamos  $n$  por  $2^i$ :

$$t_i = T(2^i)$$

$n/2$  se convierte en :

$$\frac{2^i}{2} = 2^{i-1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} t_i = T(2^i) &= 4T(2^{i-1}) + 2^i \\ &= 4t_{i-1} + 2^i \end{aligned}$$

Se reescribe como:

$$t_i - 4t_{i-1} = 2^i$$

Su polinomio característico es:

$$(x - 4)(x - 2)$$

Así todas las soluciones para  $t_i$  son de la forma:

$$t_i = c_1(4^i) + c_2(2^i)$$

Ahora regresamos a la ecuación original

$$T(n) = c_1 4^{\lg n} + c_2 2^{\lg n} = c_1 n^2 + c_2 n \quad (1)$$

Como queremos obtener el orden exacto debemos probar que  $c_1$  es estrictamente positivo.

Sustituyendo la solución proporcionada por la ecuación (1) en la recurrencia original.

$$\begin{aligned} n &= T(n) - 4T(n/2) \\ &= (c_1 n^{\lg 4} + c_2 n) - 4(c_1 (\frac{n}{2})^{\lg 4} + c_2 (\frac{n}{2})) \\ c_2 &= -1 \end{aligned}$$

No obtuvimos el valor de  $c_1$  pero estamos en condiciones de afirmar que debe ser estrictamente positiva, de lo contrario la ecuación indicaría falsamente que  $T(n)$  es negativa.

Entonces queda establecido que:

$$T(n) \in \Theta(n^2 | n \text{ es potencia de } 2)$$

Comprobación con teorema Maestro:  $l = 4, b = 2, k = 0$

$$l > 2^0 = 1$$

$$\text{Entonces } T(n) \in \Theta(n^{\log_2(4)})$$

$$T(n) \in \Theta(n^2 | n \text{ es potencia de } 2)$$

3

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2T(n/2) + \lg n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Reemplazamos  $n$  por  $2^i$ :

$$t_i = T(2^i)$$

$n/2$  se convierte en :

$$\frac{2^i}{2} = 2^{i-1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} t_i = T(2^i) &= 2T(2^{i-1}) + \lg(2^i) \\ &= 2t_{i-1} + i\lg 2 \\ &= 2t_{i-1} + i \end{aligned}$$

Se reescribe como:

$$t_i - 2t_{i-1} = i$$

Su polinomio característico es:

$$(x-2)(x-1)$$

Así todas las soluciones para  $t_i$  son de la forma:

$$t_i = c_1 2^i + c_2 + c_3 i$$

Ahora regresamos a la ecuación original

$$T(n) = c_1 n + c_2$$

Como queremos obtener el orden exacto debemos probar que  $c_1$  es estrictamente positivo.

Sustituyendo la solución proporcionada por la ecuación en la recurrencia original.

$$\begin{aligned} \lg n &= T(n) - 2T(n/2) \\ &= (c_1 n + c_2) - 2(c_1(\frac{n}{2}) + c_2) \\ c_2 &= -\lg n \end{aligned}$$

No obtuvimos el valor de  $c_1$  pero estamos en condiciones de afirmar que debe ser estrictamente positiva Por lo tanto :

$$T(n) \in \Theta(n | n \text{ es potencia de } 2)$$

Comprobación con teorema Maestro:  $l = 2, b = 2, k = 0$

$$l > b^k$$

Porque:  $2 > 2^0$

Por lo tanto:

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_2(2)})$$

$$T(n) \in \Theta(n | n \text{ es potencia de } 2)$$

4

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 5T(n/2) + (n \lg n)^2 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Reemplazamos  $n$  por  $2^i$ :

$$t_i = T(2^i)$$

$n/2$  se convierte en :

$$\frac{2^i}{2} = 2^{i-1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} t_i = T(2^i) &= 5T(2^{i-1}) + (2^i \lg(2^i))^2 \\ &= 5T(2^{i-1}) + (2^i i)^2 \end{aligned}$$

Se reescribe como:

$$t_i - 5t_{i-1} = i^2 4^i$$

Su polinomio característico es:

$$(x - 5)(x - 4)$$

Así todas las soluciones para  $t_i$  son de la forma:

$$t_i = c_1 5^i + c_2 4^i$$

Ahora regresamos a la ecuación original

$$T(n) = c_1 n^{\lg 5} + c_2 n^{\lg 4}$$

Como queremos obtener el orden exacto debemos probar que  $c_1$  es estrictamente positivo.

Sustituyendo la solución proporcionada por la ecuación en la recurrencia original.

$$\begin{aligned} (n \lg n)^2 &= T(n) - 5T(n/2) \\ &= (c_1 n^{\lg 5} + c_2 n^{\lg 4}) - 2(c_1 (\frac{n}{2})^{\lg 5} + c_2 (\frac{n}{2})^{\lg 4}) \\ c_2 n^{\lg 4} &= -(n \lg n)^2 / 4 \end{aligned}$$

Como  $c_2$  es negativa estamos en condiciones de afirmar que  $c_1$  debe ser estrictamente positiva Por lo tanto :

$$T(n) \in O(n^{\lg 5} | n \text{ es potencia de } 2)$$

Comprobación con teorema Maestro:  $l = 5, b = 2, k = 0$

$$l > b^k$$

Porque:  $5 > 2^0$

Por lo tanto:

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_2(5)})$$

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_2(5)} | n \text{ es potencia de } 2)$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2T(n/3) + 4 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Reemplazamos  $n$  por  $3^i$ :

$$\begin{aligned} t_i &= T(3^i) \\ t_i &= T(3^i) = 2T(3^{i-1}) + 4 \end{aligned}$$

Se reescribe como:

$$t_i - 2t_{i-1} = 4$$

Su polinomio característico es:

$$(x - 2)(x - 4)$$

Así todas las soluciones para  $t_i$  son de la forma:

$$t_i = c_1 2^i + c_2 4^i$$

Ahora regresamos a la ecuación original

$$\begin{aligned} T(n) &= C_1 2^{lg n} + C_2 4^{lg n} \\ T(n) &= C_1 n^{lg 2} + C_2 n^{lg 4} \quad (1) \end{aligned}$$

Como queremos obtener el orden exacto debemos probar que  $c_1$  es estrictamente positivo.

Sustituyendo la solución proporcionada por la ecuación en la recurrencia original.

$$\begin{aligned} 4 &= T(n) - 2T(n/3) \\ 4 &= (c_1 n^{lg 2} + c_2 n^{lg 4}) - 2(c_1 (\frac{n}{3})^{lg 2} + c_2 (\frac{n}{3})^{lg 4}) \\ c_2 &= -(\frac{8}{n^{lg 4}}) \end{aligned}$$

Por lo tanto se puede concluir que :

$$T(n) \in \Theta(n^{lg 2} | n \text{ es potencia de } 3)$$

Comprobación con teorema Maestro:  $l = 2, b = 3, k = 0$

$$l > b^k$$

Porque:  $2 > 3^0$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} T(n) &\in \Theta(n^{\log_3(2)}) \\ T(n) &\in \Theta(n^{\log_3(2)} | n \text{ es potencia de } 3) \end{aligned}$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ T(n/3) + 2 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Reemplazamos  $n$  por  $3^i$ :

$$t_i = T(3^i)$$

$$t_i = T(3^i) = T(3^{i-1}) + 2$$

Con manipulación algebraica obtenemos:

$$t_i - 2t_{i-1} + t_{i-2} = 0$$

Su polinomio característico es:

$$(x - 1)^2$$

Así todas las soluciones para  $t_i$  son de la forma:

$$t_i = c_1 1 + c_2 i$$

Ahora regresamos a la ecuación original

$$T(n) = C_1 1^{\lg n} + C_2 \lg n = C_1 + C_2 \lg n$$

Por lo tanto se puede concluir que :

$$T(n) \in O(\lg n | n \text{ es potencia de } 3)$$

Comprobación con teorema Maestro:  $l = 1, b = 3, k = 0$

$$l = b^k$$

$$\text{Porque: } 1 = 3^0$$

Por lo tanto:

$$T(n) \in \Theta(n^0 \log n) = \Theta(\log n)$$



$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2 \\ 2T(\sqrt{n}) + \lg n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Reemplazamos  $n$  por  $2^i$ :

$$\begin{aligned} t_i &= T(2^i) \\ t_i &= T(2^i) = 2T(2^{\frac{i}{2}}) + i \\ S(\frac{i}{2}) &= T(2^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Siendo la forma que podemos resolver:

Sustituimos  $i$  por  $2^i$

$$\begin{aligned} Si &= 2S(2^{i-1}) + i \\ Si - 2Si - 1 &= i \end{aligned}$$

Su polinomio característico es:

$$\begin{aligned} (x-2)(x-1)^2 \\ S(2^i) &= Si \end{aligned}$$

Con soluciones de la forma:

$$\begin{aligned} S(n) &= C_1 2^i + C_2 + C_3 i \\ T(n) &= \log n \log \log n \end{aligned}$$

Ahora regresamos a la ecuación original

$$\begin{aligned} T(n) &= C_1 2^{\log n \log \log n} + C_2 + C_3 \log n \log \log n \\ T(n) &= C_1 n \log \log n + C_2 + C_3 \log n \log(\log n) \end{aligned}$$

Por lo tanto se puede concluir que :

$$T(n) \in O(\log n \log(\log n))$$

Comprobación con teorema Maestro:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\sqrt{n}) + \log n \\ i &= \log n \text{ producciones} \\ T(2^i) &= 2T(2^{\frac{i}{2}}) + i \end{aligned}$$

Luego  $S(i) = T(2^i)$  produce la recurrencia

$$S(i) = 2S(\frac{i}{2}) + i$$

$$\text{Entonces } T(n) = T(2^i) = S(i) = \Theta(i \log i) = \Theta(\log n (\log \log n))$$

## 8 Teorema Maestro

El teorema maestro proporciona una manera de resolver recurrencias de la forma:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Donde  $a \geq 1$  y  $b > 1$  son constantes y  $f(n)$  es una función asintóticamente positiva.

Esta recurrencia describe el tiempo de un algoritmo que:

- Divide un problema de tamaño  $n$  en  $a$  subproblemas, cada uno de tamaño  $\frac{n}{b}$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes positivas.
- Los  $a$  subproblemas se resuelven recursivamente, cada uno en un tiempo  $T(\frac{n}{b})$ .
- El costo de dividir el problema y combinar los resultados de los subproblemas está descrito por la función  $f(n)$ .

Entonces  $T(n)$  puede estar acotada asintóticamente de la forma siguiente: 3 casos:

1. Si  $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$  para alguna constante  $\epsilon > 0$  entonces

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

2. Si  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ , entonces:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

3. Si  $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$  para alguna constante  $\epsilon > 0$ , y si  $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$  para alguna constante  $c < 1$  y una  $n$  suficientemente grande, entonces:

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

En los tres casos se compara la función  $f(n)$  con la función  $n^{\log_b a}$

Intuitivamente, la solución a la recurrencia estará determinada por la mayor de las funciones.

- En 1. La función  $n^{\log_b a}$  crece más rápido polinomialmente que  $f(n)$  por un factor  $n^\epsilon$ . Además,  $f(n)$  satisface la condición de regularidad que  $f(n)$  por un factor  $n^\epsilon$ . La solución está dada entonces por  $n^{\log_b a}$ .
- En 3. La función  $f(n)$  crece polinomialmente más rápido que  $n^{\log_b a}$  por un factor  $n^\epsilon$ . Además  $f(n)$  satisface la condición de regularidad que dice  $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$  para alguna constante  $c > 1$ .
- Los tres casos no cubren todas las posibilidades, el método no puede aplicarse si las funciones no crecen polinomialmente más rápido o si la condición de regularidad no se cumple.

## Referencias

- [1] Lavalle Martínez, José de Jesús; La presentación sobre la tercera parte de Análisis de algoritmos, Análisis y Diseño de Algoritmos. Buap, Otoño 2020.
- [2] Jiménez Salazer, Héctor y Lavalle Martínez, José de Jesús; Análisis y Diseño de Algoritmos. Traducción de partes del libro Fundamentals of Algorithmics de Brassard and Bratley FCC - BUAP, 2020.
- [3] Arturo Díaz Pérez. (2005). Teorema Maestro. 16/10/2020, de CINVESTAV Sitio web: <http://delta.cs.cinvestav.mx/~adiaz/anadis/Teorema-Maestro.pdf>
- [4] Alonso Jimenéz, J. A. (2019). Análisis de la complejidad de los algoritmos. Obtenido de Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial: <http://www.cs.us.es/~jalonso/cursos/i1m/temas/tema-28.html>