Governo do Estado do Pará
Universidade do Estado do Pará
Campus I – Belém
Centro de Ciências Sociais e Educação

Jair Pinheiro Pereira

Paulo Sérgio Oliveira

Número de Ouro

Belém - Pará

2023

Jair Pinheiro Pereira

Paulo Sérgio Oliveira

Número de Ouro

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau do curso de Licenciatura Plena em Matemática, do Centro de Ciências Sociais e Educação, da Universidade do Estado do Pará.
Orientador: Prof. Rubens Vilhena.

Belém-Pará

2023

Número de Ouro

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau do Curso de Licenciatura Plena em Matemática, do Centro de Ciências Sociais e Educação, da Universidade do Estado do Pará.

Data de aprovação: ___/___/_____

Banca Examinadora

____
Prof. - Orientador

____
Examinador 1

____
Examinador 2

Dedico este trabalho .....

Dedico ....

AGRADECIMENTOS

Agradeço ....

Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar a parte menor e a maior a mesma relação entre esta e o todo.

Zeizing, 1855

A Geometria tem dois grandes tesouros. Um é o Teorema de Pitágoras. O outro, a divisão de uma linha nas razões extrema e média. O primeiro podemos comparar a uma medida de ouro. O segundo podemos chamar de uma jóia preciosa.

Johannes Kepler (1571-1630)

RESUMO

Este trabalho descreve a importância do número de ouro na Matemática, arte e educação. O número de ouro é considerado complexo, já que contém conceitos como harmonia, beleza e equilíbrio, e tem múltiplas funções e aplicações. É importante na educação porque pode ser usado para fortalecer noções sobre sistemas de medição, equações e progressões geométricas. Além disso, é uma ferramenta valiosa na arquitetura e pintura, ajudando a definir traços convencionais e a dar forma às ideias do artista. O texto conclui que o número de ouro é uma ferramenta importante e versátil, com uma dimensão lúdica que pode despertar o interesse dos estudantes pela Matemática e pelo processo de descoberta.

.

Palavras-chave: Razão Áurea. Número de Ouro. Ensino. Artes.

ABSTRACT

This work describes the importance of the golden number in Mathematics, art, and education. The golden number is considered complex, as it contains concepts such as harmony, beauty, and balance, and has multiple functions and applications. It is important in education because it can be used to reinforce notions of measurement systems, equations, and geometric progressions. Furthermore, it is a valuable tool in architecture and painting, helping to define conventional shapes and give form to the artist's ideas. The text concludes that the golden number is an important and versatile tool with a playful dimension that can spark students' interest in Mathematics and the discovery process.

Keywords: Golden Ratio. Golden Number. Teaching. Arts.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

.

LISTA DE TABELAS

.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

.

LISTA DE SÍMBOLOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O número de ouro é uma dimensão complexa com conceitos como harmonia, beleza e equilíbrio, que são característicos da Matemática. Ele tem múltiplas aplicações e funções versáteis, podendo ser usado para fortalecer noções sobre sistemas de medição e divisão, equações de 2º grau, progressões geométricas e somas. O número de ouro abrange diversos aspectos da realização humana, incluindo história, biologia, zoologia, arte clássica e moderna, representando a perfeição das coisas. Na arquitetura e engenharia, ele pode ser a solução para equilibrar e resolver problemas. Além disso, o número de ouro tem uma dimensão lúdica que pode despertar o interesse dos estudantes pelas matemáticas. Desde a sua descoberta, sua importância tem aumentado, sendo considerado sagrado no Egito antigo e hoje tendo uma dimensão técnico-científica. Na arte, especialmente na arquitetura e pintura, ele é uma ferramenta valiosa para a criação de obras artísticas. Em resumo, o número de ouro é uma ferramenta valiosa e versátil tanto na arte quanto na educação.

2. JUSTIFICATIVA

O texto destaca a dimensão lúdica do número de ouro e a sua importância como motivador para o aprendizado de matemática. Ele destaca a importância da curiosidade em torno do número de ouro e sua evolução ao longo da história, desde ser considerado sagrado no Egito antigo até seu significado técnico-científico atual.

Também demonstraremos que o número de ouro é uma ferramenta valiosa e versátil, tanto na arte quanto na educação. Ele é usado como uma ferramenta para revelar a essência artística de uma obra de arte e é uma ferramenta valiosa para o ensino e aprendizado de Matemática.

Assim, baseado nesse trabalho, concluiremos que o número de ouro é uma dimensão importante e versátil, que tem aplicações em muitas áreas e pode ser utilizado como uma ferramenta valiosa para o ensino e aprendizado de Matemática, bem como para a criação de obras artísticas.

3. METODOLOGIA

Esta monografia tem por finalidade realizar um aprofundamento científico acerca do tema, além de que este trabalho sirva de acervo bibliográfico para docentes e discentes que se sintam interessados em saber sobre a importância do número de ouro. Nesta pesquisa, buscamos fazer um levantamento bibliográfico. Essa proposta metodológica e defendida por André Fontenelle (2017)

> Trata-se da investigação realizada tendo como fontes livros, artigos e outros textos de caráter científico já publicados. Nesse tipo de investigação, de caráter predominantemente teórico, busca-se especialmente desvendar os relacionamentos entre conceitos, ideias e características de um objeto.

Em relação à abordagem, ela é qualitativa, que segundo Gerhardt & Silveira (2009) na pesquisa qualitativa, o desenvolvimento da pesquisa é imprevisível e o pesquisador tem como finalidade buscar e produzir informações aprofundadas e ilustrativas, seja ela pequena ou grande, de modo que ela seja capaz de produzir novas informações. Quanto à sua natureza é uma pesquisa básica, pois nosso objetivo é gerar conhecimentos novos para avanço do entendimento da teoria sem ainda uma aplicação prática prevista devido às limitações e consequências da pandemia atual. Quanto aos seus objetivos é uma pesquisa exploratória uma vez que neste trabalho queremos obter uma maior familiaridade com o assunto. Por esses motivos, quanto ao procedimento, nosso trabalho assume a forma de pesquisa bibliográfica.

Para encontrar as fontes que foram usadas neste trabalho, inicialmente realizamos a busca de materiais no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, em seguida realizamos um levantamento bibliográfico na internet, com o auxílio de nosso orientador, de livros de literatura estrangeira. O estudo foi elaborado a partir de material já publicado, como livros, artigos, periódicos, Internet, etc. Pode-se dizer que esta pesquisa é um tipo de revisão bibliográfica, ou levantamento bibliográfico.

Usamos o quadro 1, para organizar e destacar as obras e seus autores apresentados na pesquisa, em que nos dividimos por áreas da matemática, tais como Matemática Pura e Educação Matemática.

Quadro 1 – Autores que fundamentaram a pesquisa

Autor(es)	**Obras**	**Área**

Fonte: Autores

Neste mesmo sentido, Gil (2007, p. 44) explica que os exemplos mais característicos desse tipo de pesquisa são investigações sobre ideologias, ou, como é o nosso caso, aquelas que se propõem à análise das diversas posições acerca de um problema.

4 – ABORDAGEM HISTÓRICA DO NÚMERO DE OURO

O número de ouro é um número irracional muito particular. Foi usado pelos egípcios na construção das suas pirâmides. Para os Gregos era um número mágico e usavam-no na construção dos seus edifícios. Também foi usado na Arte (na pintura, por exemplo), e aparece inúmeras vezes ligado a uma concepção estética, bem como na Biologia e na construção de violinos.

Também é conhecido como a seção áurea, é uma proporção matemática encontrada em vários aspectos da natureza e da arte. A proporção é dada pela relação entre dois números, onde a razão entre o número maior e o número menor é a mesma que a razão entre a soma dos dois números e o número maior. Essa proporção é aproximadamente 1,618, e é frequentemente representada pela letra grega "phi".

A história do número áureo remonta aos antigos gregos, que o associaram à perfeição e à beleza. O matemático grego Pitágoras e seus seguidores foram os primeiros a explorar a seção áurea e suas propriedades matemáticas. Eles acreditavam que a seção áurea representava a harmonia e a ordem no universo.

Na arquitetura, o número áureo é encontrado em muitos edifícios antigos, incluindo a Parthenon e outros templos gregos. Também é comum em obras de arte, como pinturas e esculturas, onde é usado para criar proporções esteticamente agradáveis.

Na arte renascentista, artistas como Leonardo da Vinci e Rafael usaram o número áureo em suas obras. O arquiteto renascentista Leon Battista Alberti escreveu sobre a importância da seção áurea na arquitetura, na arte e na construção de violinos.

Na atualidade, o número áureo continua a ser estudado e utilizado em vários campos, como matemática, arquitetura, arte, design, música, biologia e até mesmo física. É considerado como uma proporção esteticamente agradável e encontrado em diversas situações e ocorrências naturais.

No Egito há uma lenda citada no livro de Contador (2007) e descrita por Heródoto que diz que “as grandes pirâmides do Egito foram construídas de modo que a área de uma de suas faces inclinadas é igual ao quadrado de sua altura”.

Segundo Contador:

> Em desenhos primitivos ou rupestres encontra-se a proporção áurea, não que os nossos ancestrais tivessem tal consciência geométrica, mas com certeza a instruíram, na especulação de beleza e na forma das proporções. (Contador, 2007, p. 97)

Em várias partes do Egito foram encontradas construções e artefatos que exibem a proporção áurea em suas medidas, exemplos dessas construções são o templo egípcio Osiriom, a crípita de khesira, além do túmulo egípcio encontrado em 1919 que pertencia ao sacerdote Petosiris e sua família.

Não só no Egito, mas em outros lugares houve a presença da proporção áurea, pois uma das características da razão áurea é a auto propagação; vários povos a utilizaram sem terem trocado informações matemáticas, um exemplo disso é os pitagóricos que não podiam falar sobre suas descobertas, outro artefato que possui a presença de proporções áureas em suas medidas foi um tablete de escrita cuneiforme encontrado na Babilônia.

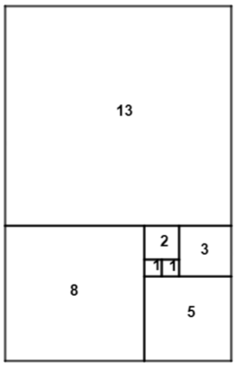
É possível encontrar na literatura científica diversos autores que sustentam a associação do número Φ com fenômenos biológicos e aplicações do mesmo na arte, arquitetura e em proporções de medidas humanas e de outros seres, a respeito das publicações sobre o número Φ:

Representação do número de ouro

Costuma-se representar o número de ouro pela letra grega maiúscula Φ (fi) e corresponde a metade da soma da raiz quadrada de cinco com a unidade. É um número irracional, dado pela dízima infinita não periódica 1,61803398...

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803398\ldots \qquad (4.1)$$

A designação adotada para este número, é a inicial do nome de Fídias que foi escultor e arquiteto encarregado da construção do Pártenon, em Atenas. Um exemplo desta maravilha é o fato de que se desenharmos um retângulo cujos lados tenham uma razão entre si igual ao número de Ouro este pode ser dividido num quadrado e noutro retângulo cuja razão entre os dois lados consecutivos é também igual ao número de Ouro. Este processo pode ser repetido indefinidamente mantendo-se a mesma razão.



Toda essa maravilha e ainda mais algumas curiosidades citadas em baixo estiveram na origem da escolha desse tema, que será dedicado ao estudo desse fenômeno, através de análise das diferentes propriedades e características do mesmo.

- O ciclo menstrual da mulher é de 28 dias, portanto $\frac{1}{\varphi}$ de 28 será 17,5 dias, onde é a fase final de amadurecimento, sendo garantida a fertilização.

- A razão entre a altura de uma pessoa e a medida do seu umbigo ao chão é igual ao número de ouro.

Assim a estrutura desta monografia será da seguinte forma

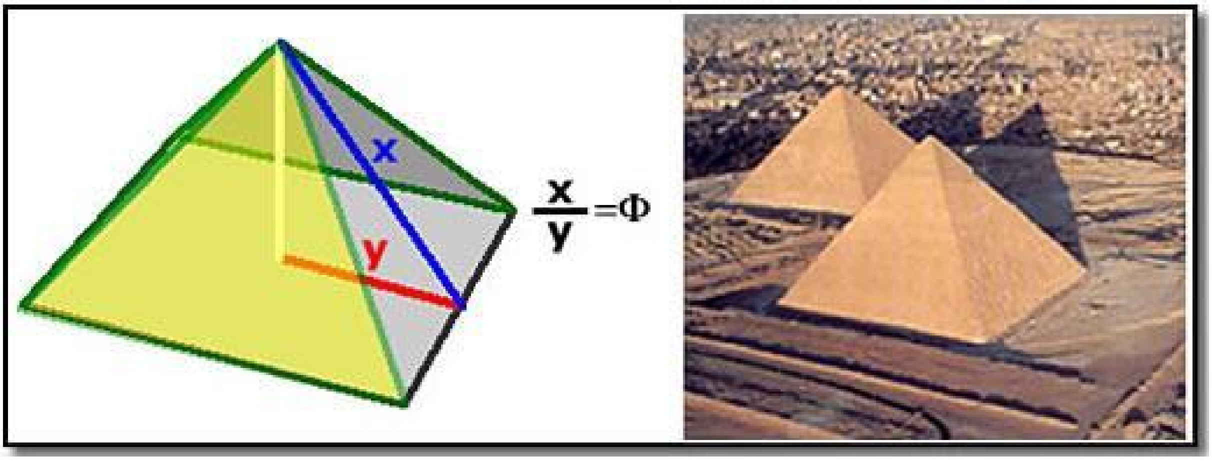
O primeiro capítulo apresentará um pouco da história do número de ouro e a observação de alguns polígonos áureos e da espiral de ouro nas pinturas e na natureza; o capítulo 2 será dedicado à representação do citado número pela fração contínua infinita e sua apresentação como uma irracionalidade quadrática, um número algébrico e ainda prova que ele é um número irracional; o capítulo 3 será consagrado às extensões quadráticas de corpos, construção de números com ajuda de régua e compasso, em particular número de ouro e a divisão de um segmento em média e extrema razão; Construção do retângulo de ouro, triângulo de ouro, pentagrama pitagórico, decágono regular e a espiral maravilhosa são explicados no último capítulo.

No século XVI, Luca Pacioli juntamente com Leonardo DaVinci, (1445-1517) publicou o livro “De Divine Proportione”, foi ao ponto de remeter o número como sendo uma oferta de Deus, divina proporção. De acordo com Afeitos e Rabelo(2012, pg.7) a palavra proporção é usada por nós diariamente e não só no contexto matemático. Expressamos através da palavra proporção uma relação entre partes de coisas relativamente ao seu tamanho ou à sua quantidade, mas também de uma maneira estética, a forma de como observamos uma relação harmoniosa e agradável aos nossos sentidos, especificamente a visão.

Com esta abordagem pretendemos focalizar as mais variadas perspectivas do número de ouro (rácio dourado) e analisar as suas aplicabilidades e funcionalidades. Para tal julgamos ser fundamental socorrer de diversas fontes bibliográficas que informam sobre os estudos que se prendem com o fabuloso número também conhecido por proporção divina. Fazendo recurso a diversas gravuras e perspectivas emergentes do estudo sobre o número de ouro, procuraremos dar conta quer do seu sentido mítico/mitológico e em última instância do seu sentido técnico-científico.

4.1 OS EGÍPCIOS

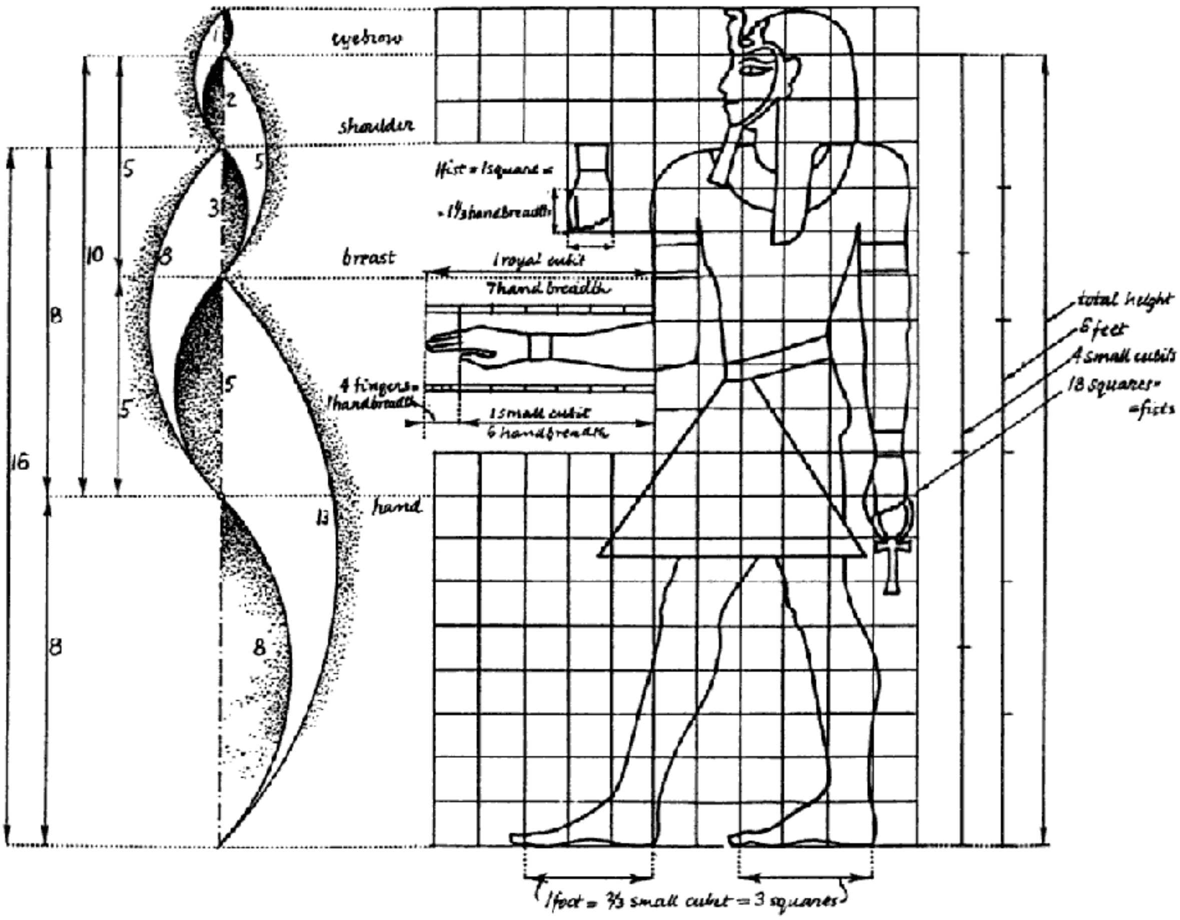
Os egípcios consideravam o número de ouro sagrado, tendo uma importância extrema na sua religião, e chamavam-no não de número de ouro, mas sim de "número sagrado". Utilizavam-no para a construção de templos e sepulcros para os mortos, pois consideravam que caso isto não acontecesse, o templo poderia não agradar aos deuses, ou a alma do falecido não conseguiria chegar ao Além. Para, além disso, os egípcios consideravam-no muito agradável esteticamente, usando-o também no seu sistema de escrita e na decoração dos seus templos e na construção de pirâmides.



Fonte: https://www.bpiropo.com.br/graficos/FPC20070226h.jpg

4.1.1 A Arte Egípcia

Durante a maior parte da história do Egito, as proporções da figura humana foram relacionadas com a largura da palma da mão, e baseavam-se no "número sagrado".

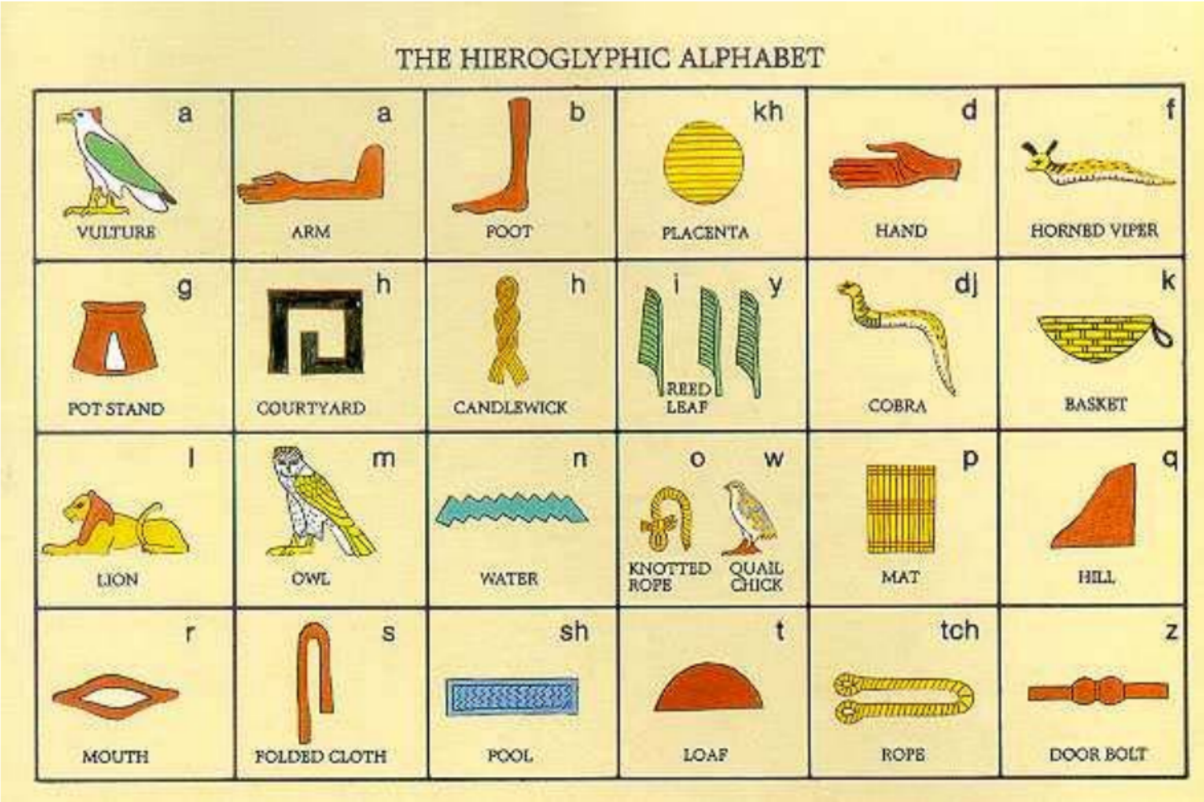


Fonte: http://likovna-kultura.ufzg.unizg.hr/Ucimo-gledati-zine/Slike%201/egipat.pro.gif

Os egípcios usavam medidas estabelecidas pelas proporções do corpo humano devido ao fato de estas serem proporcionais, de acordo com a razão de ouro (0.618...), tornando as suas obras esteticamente mais agradáveis. Estas ideias foram utilizadas pelos construtores e artesãos, para estabelecer as malhas quadrangulares que usavam para as proporcionalidades do seu trabalho.

4.1.2 Os Hieróglifos

Muitos hieróglifos têm proporções baseadas no número de ouro. Os Egípcios utilizavam o número de ouro para que fosse mais fácil que todos conseguissem escrever de acordo com as mesmas proporções. Egípcia



Fonte: https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/aureo.pdf

Na figura x, a letra "h" é, de fato, uma espiral de ouro. Outros símbolos, como o "p" e "sh" são retângulos de ouro. O uso das mãos e dos pés nos hieróglifos mostra que os Egípcios tinham conhecimento que o corpo humano está relacionado de diversas formas com o número de ouro.

4.1.3 Os Templos

Observando a fig. x são visíveis na fachada do templo vários retângulos de ouro, e existem inúmeras arcadas criadas por centenas de pilares, todos eles proporcionais ao retângulo de ouro. Em egípcio antigo, ‘Philae’ significa ‘o fim’, e definia a fronteira sul do Egipto. Este templo era dedicado à deusa Ísis, esposa de Osiris e mãe de Horus.

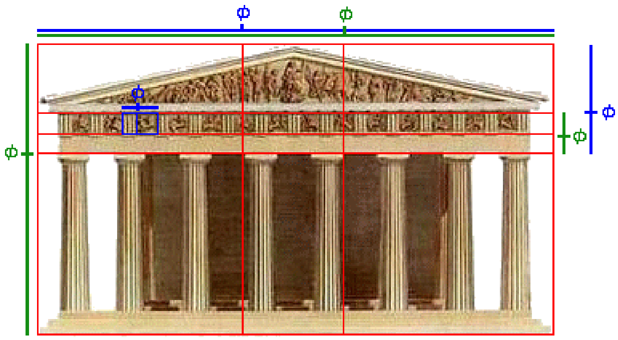
Fonte: https://www.360meridianos.com/wp-content/uploads/2018/02/aswan-egito-templo-de-philae-deusa-isis.jpg

A figura x, o Templo de Dendara foi conhecido como a morada de Hathor, a deusa do amor, felicidade e beleza. As arcadas são proporcionais ao retângulo de ouro, e no interior do templo existe uma escadaria em espiral, com uma forma muito semelhante à da espiral de ouro.

Fonte: https://discoveringegypt.com/wp-content/uploads/2014/06/Dendara1.jpg

4.2 OS GREGOS

O Parthénon, agora em ruínas, é um dos templos que foi construído em Atenas por volta de 447 e 433 a. C. Nele podemos observar a proporção áurea, no retângulo que contém a fachada, o que revela a preocupação de realizar uma obra bela e harmoniosa.

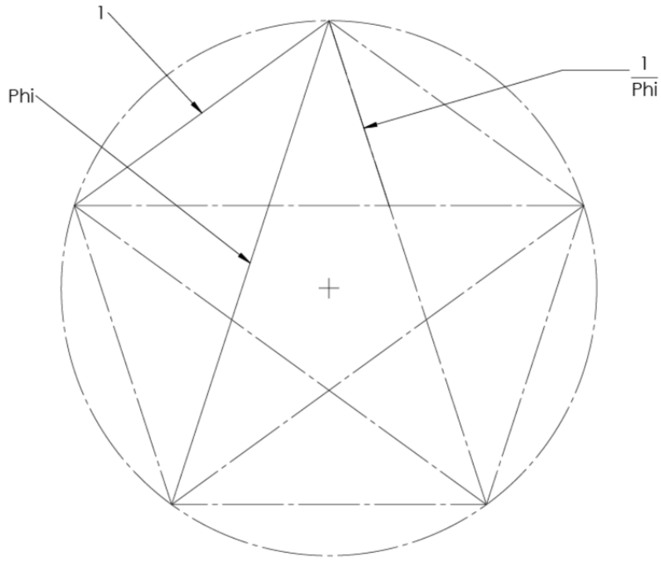


Fonte: https://s3.amazonaws.com/gs-geo-images/64702319-729b-472f-a94b-b2e30ab613c5_l.gif

Posteriormente, os gregos consideraram que o retângulo cujos lados apresentavam esta relação apresentava uma especial harmonia estética que lhe chamaram retângulo áureo ou retângulo de ouro, considerando esta harmonia como uma virtude excepcional. Endoxus foi um matemático grego que se tornou conhecido devido à sua teoria das proporções e ao método da exaustão, criou uma série de teoremas gerais de geometria e aplicou o método de análise para estudar a secção que se acredita ser a secção de ouro.

4.2.1 Os Pitagóricos

Os Pitagóricos usaram também a secção de ouro na construção da estrela pentagonal. (Fig.x). Estes não conseguiram exprimir a razão existente entre o lado do pentágono regular estrelado (pentáculo) e o lado do pentágono regular inscritos numa circunferência como quociente entre dois números inteiros. Quando chegaram a esta conclusão ficaram muito espantados, pois tudo isto era muito contrário a toda a lógica que conheciam e defendiam e por isso lhe chamaram irracional. Este número era o número ou secção de ouro.



Fonte: https://www.instructables.com/The-Golden-Proportion/

4.3 ARTE

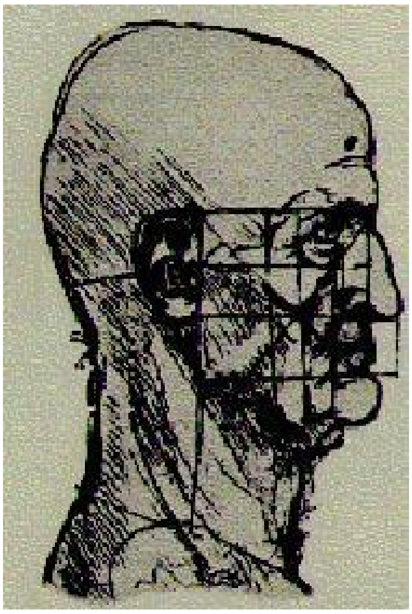
O Retângulo de Ouro é uma das formas geométricas mais satisfatórias visualmente. Vários peritos têm encontrado exemplos do rectângulo de ouro quer em fachadas de construções da Grécia Antiga, quer em obras-primas da escultura e da pintura.

Leonardo da Vinci[1] e Piet Mondrian[2]. Pensavam ambos que a Arte deve manifestar beleza e movimento. Assim, ambos expressavam movimento introduzindo retângulos de ouro nas suas obras, pois o facto destes poderem definir espirais que curvam até ao infinito dão uma sensação de movimento. Ao introduzir a secção de ouro nas suas pinturas, permitiam que estas se tornassem mais agradáveis à vista.

4.3.1 Leonardo da Vinci

Observe a face do esboço de um homem idoso de Leonardo da Vinci, apresentado na (Fig.x). Este desenhou nesta face um quadrado, que por sua vez foi subdividido em vários retângulos, alguns dos quais com dimensões muito próximas das do retângulo de ouro.

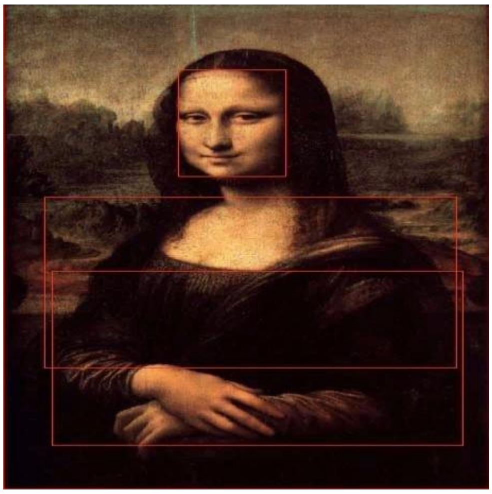
[1] Leonardo DA VINCI (1452 - 1519) – Italiano, foi Pintor, Escultor, Arquiteto e Engenheiro.
[2] Piet MONDRIAN (1872 - 1944) – Holandês.



Fonte: http://www.csun.edu/~lmp99402/Math_Art/Golden%20Mean/DaVinci%20Golden%20mean.jpg

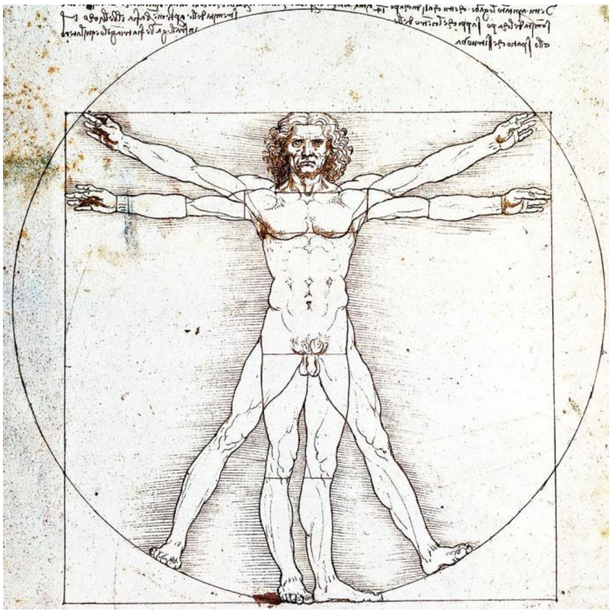
Observe a pintura de Mona Lisa, (Fig.x) nota-se que é possível desenhar um quadrilátero que engloba o rosto da Mona Lisa. O quadrilátero resultante é exatamente o retângulo de ouro. É fácil observar que as três principais áreas da pintura (o rosto, do pescoço à zona mesmo acima das mãos, do decote do vestido até à zona imediatamente abaixo das mãos) podem definir também retângulos de ouro.

As dimensões do quadro em si também coincidem com as dimensões do retângulo de ouro.



Fonte:
https://www.researchgate.net/figure/The-Golden-Ratio-in-Art-Fig-14-The-Sacrament-of-the-Last-Supper_fig4_325403361

Da Vinci estudou intensivamente as proporções do corpo humano. No esboço abaixo é possível confirmar a aplicação da secção de ouro.



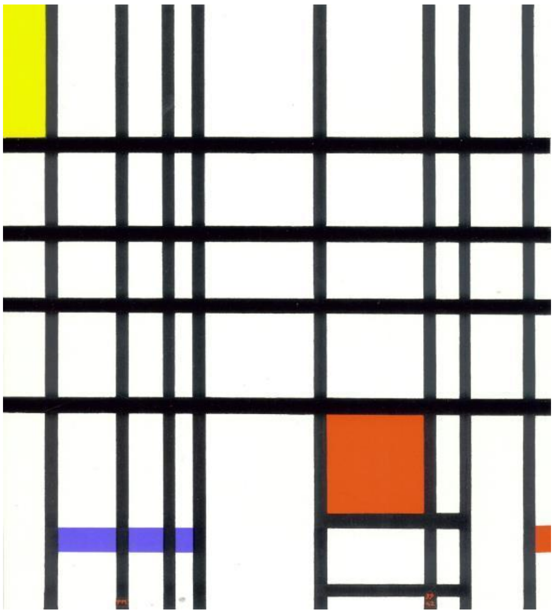
Fonte: http://luciliadiniz.com/wp-content/uploads/2020/06/530.jpg

Nesta obra de Leonardo da Vinci, se dividirmos a distância dos pés até ao umbigo do homem pela distância do umbigo até ao topo da cabeça, obtemos aproximadamente o valor 0.618.

4.3.2 Piet Mondrian

Piet Mondrian utilizou linhas pretas horizontais e verticais para delimitar blocos de puro branco, vermelho, azul ou amarelo, exprimindo a sua concepção da harmonia e do equilíbrio pleno.

Composição em Vermelho, Amarelo e Azul

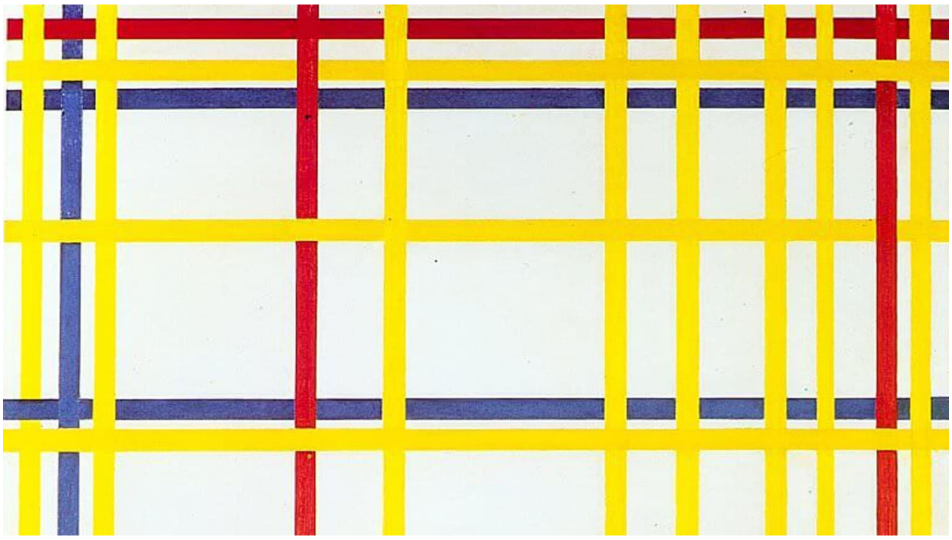


Fonte: https://images.rkd.nl/rkd/thumb/650x650/0b7a192b-b511-f2b8-b11f-d6a5551fc45b.jpg

Esta obra foi concebida em 1942, encontrando-se agora em Londres. Pretende mostrar o equilíbrio existente entre a Natureza e as construções humanas. Pode-se verificar a existência de alguns retângulos de ouro na pintura.

4.3.3 A Cidade de New York

Esta obra foi inspirada pela visita que Mondrian efetuou a Nova Iorque. Apesar de as formas geométricas já serem menos rígidas e mais complexas, ainda é possível encontrar na pintura alguns retângulos de ouro.

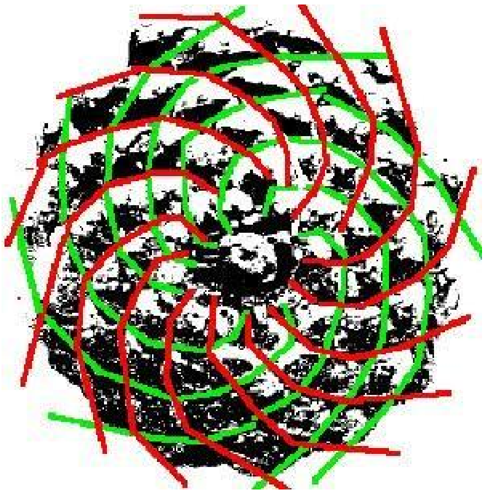


Fonte: https://edition.cnn.com/style/article/piet-mondrian-painting-upside-down-trnd/index.html

4.4 BIOLOGIA

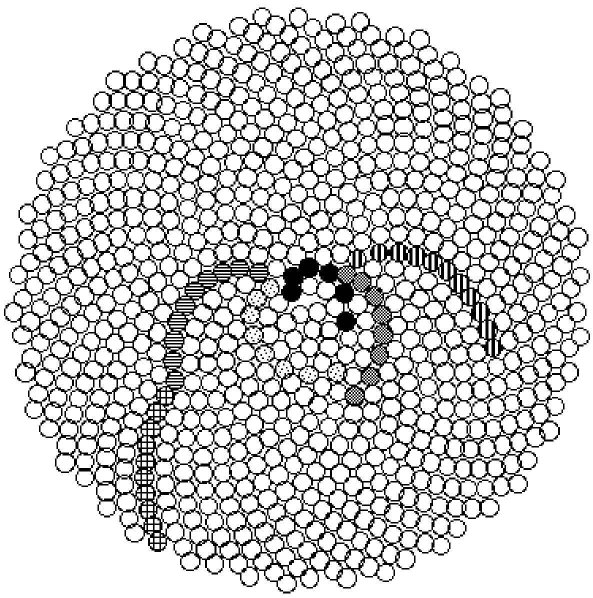
.4.4 .1 Girassóis e Pinhas

A espiral de ouro pode ser encontrada quer nas pinhas, quer nos girassóis.



Fonte: https://sites.google.com/site/hanseo201737399/golden-ratio

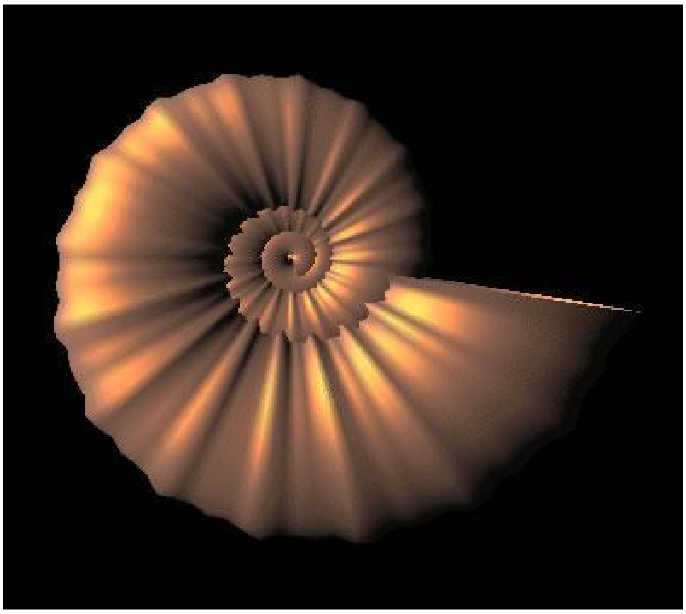
Pode-se ver que as sementes nas pinhas parecem formar espirais que curvam quer para a direita quer para a esquerda. Tendo as sementes dispostas desta maneira, formando as espirais, permite que as sementes se encontrem distribuídas uniformemente, não se encontrando concentradas demais no centro e dispersas demais nos bordos, tendo todas as sementes o mesmo tamanho.



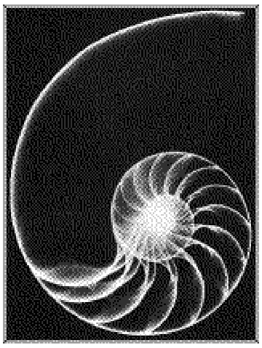
Fonte: https://www.geocities.ws/jyce3/manyfibseeds.GIF

Este padrão não é perfeito na maioria dos girassóis, mas se se conseguir encontrar um bom espécime verifica-se que as suas sementes formam espirais, curvando quer para a esquerda quer para a direita, de forma a estarem todas equidistantes. Afirma-se que esta disposição permite melhorar a eficiência dos girassóis na captação quer de água, quer de luz.

4.4.2. As conchas marinhas (Nautilus)



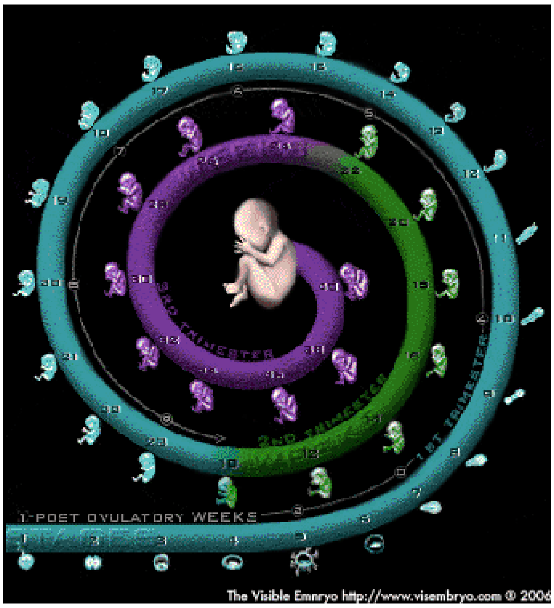
Fonte: http://www.dim.uchile.cl/~simetria/estetico/imagenes/spiral3.jpg



Fonte: https://profmbacelar.blogspot.com/2018/11/a-sucessao-de-fibonacci-na-natureza.html

O diagrama x mostra uma concha marinha. O diagrama y mostra que é possível desenhar uma espiral ao longo da concha, que é exatamente a espiral de ouro. Isto acontece devido ao fato de o crescimento da concha ser proporcional ao crescimento do organismo que contém.

4.4.3. O embrião humano



Fonte: https://i0.wp.com/www.visembryo.com/images/BirthSpiral_fp.gif?zoom=2

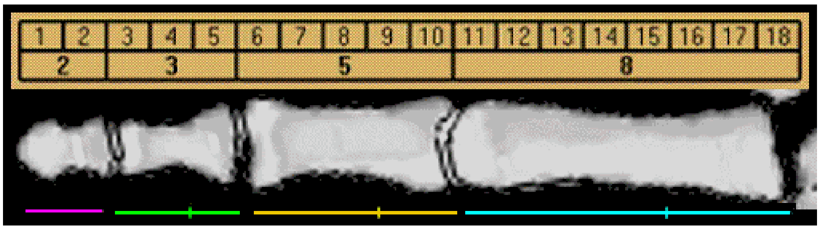
Conforme se vai desenvolvendo o embrião humano, é possível observar neste crescimento um padrão semelhante ao que permite traçar a espiral de ouro, à medida que se afasta cada vez mais do centro. Neste caso, o padrão ocorre no desenvolvimento do embrião humano devido ao fato de o crescimento do organismo ser proporcional ao tamanho do organismo.

4.4.4. A Mão Humana

Um exemplo muito interessante é o da mão humana. Para explicá-lo, devemos pegar, como na Secção Áurea, linhas nas quais as maiores são “fi” vezes as menores, como mostrado na figura:

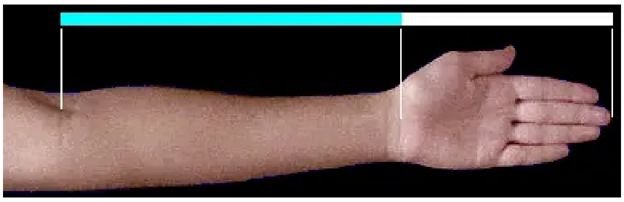
Fonte: https://www.goldennumber.net/wp-content/uploads/2012/05/fibonacci-line.gif

Agora veja a radiografia de um dedo indicador. Cada parte do dedo é maior que a parte anterior de acordo com a Secção Áurea.



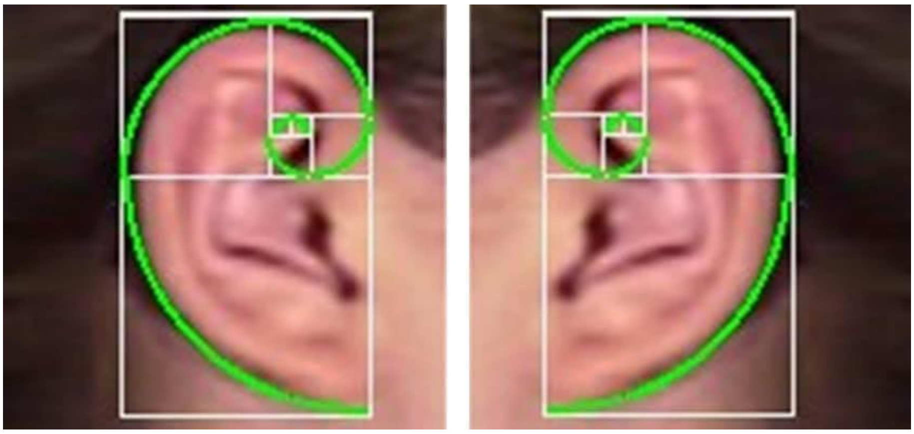
Fonte: http://1.bp.blogspot.com/-8F3qzaRriek/UZASp2KjgcI/AAAAAAAAPmI/9O-_LBa8RL0/s1600/finger.gif

A Razão entre a medida da mão e a medida do braço é a razão áurea.



Fonte: https://discover.hubpages.com/education/How-Design-a-Room-with-the-Golden-Mean

4.4.5. A Orelha humana



Fonte: https://grecohairrestoration.com/wp-content/uploads/2013/05/Greco-Leonardo-Fibonacci.jpg

É possível observar nas orelhas um padrão semelhante ao que permite traçar a espiral de ouro.

4.5 SÉRIE DE FIBONACCI

A contribuição de Fibonacci[3] para o número de ouro está relacionada com a solução de um problema por ele formulado que veio dar origem a uma sucessão a que posteriormente se associou o seu nome - Fibonacci - ficando assim conhecida na história como a Sucessão de Fibonacci. O problema é: "Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?" Todo este problema considera que os coelhos estão permanente fechados num certo local e que não ocorrem mortes.

Leonardo prosseguiu para os cálculos: no primeiro mês, teremos um par de coelhos que se manterá no segundo mês, tendo em consideração que se trata de um casal de coelhos jovens; no terceiro mês de vida darão origem a um novo par, e assim teremos dois pares de coelhos; para o quarto mês só temos um par a reproduzir, o que fará com que obtenhamos no final deste mês, três pares. Em relação ao quinto mês serão dois, os pares de coelhos a reproduzir, o que permite obter cinco pares destes animais no final deste mês. Continuando desta forma, ele mostra que teremos 233 pares de coelhos ao fim de um ano de vida do par de coelhos com que partimos. Listando a sucessão 1, 1, 2, 3, 5, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 na margem dos seus apontamentos, ele observou que cada um dos números a partir do terceiro é obtido pela adição dos dois números antecessores, e assim podemos fazê-lo em ordem a uma infinidade de números de meses.

Se dividirmos cada um destes números pelo seu antecedente, reparamos que essa razão vai tender para um certo valor.

Isto é, se fizermos $\frac{F2}{F1} = 1$; $\frac{F3}{F2} = 2$; $\frac{F4}{F3} = 1,5$; $\frac{F5}{F4} = 1,6(6)$; $\frac{F6}{F5}$ =1,6 e se continuarmos assim sucessivamente, obtemos a seguinte sequência de números:
1,000 000; 2,000 000; 1,500 000; 1,666 666; 1,600 000; 1.625 000; 1,615 385; 1,619 048; 1,617 647; 1,618 182; 1,617 978; 1,618 056; 1,618 026; 1,618 037; 1,618 033; ...

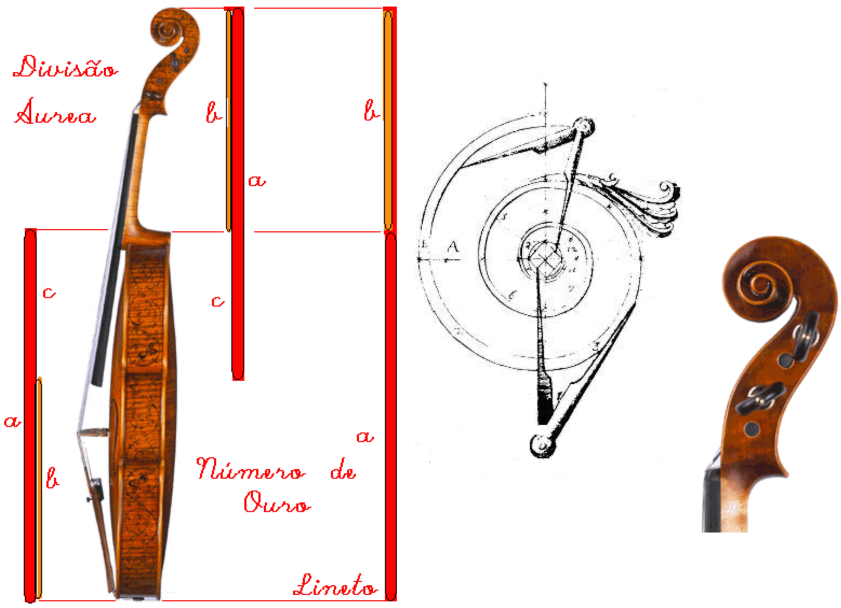
Então $\frac{F+1}{Fn}$ aproxima-se cada vez mais de φ (Phi)

[3] Leonardo de pisa (Fibonacci) (1175 a 1250) - nasceu em Pisa (Itália)

Esta expansão decimal prolongar-se-á sem nunca se repetir (logo é um número irracional). De fato, quando se prolongam estas "razões de Fibonacci" indefinidamente, o valor gerado aproxima-se cada vez mais do número de ouro.

4.6 O NÚMERO DE OURO E A CONSTRUÇÃO DE VIOLINOS

Não há como negar a beleza do instrumento violino. Parece que nós, seres humanos, percebemos a beleza ou sentimos a beleza de uma forma quando segue um padrão ou algo que não sabemos definir, que está embutido em nosso ser, provavelmente porque esta forma mantém relações em suas linhas que nos causam essa sensação do belo. Assim, um violino é uma dessas peças. Quando o violino foi criado a estética das proporções foi objecto de preocupação de vários artistas. Alguns violinos foram criados a partir do que foi chamado "O Número de Ouro" e em suas linhas pode-se observar essas relações.



Fonte: https://musicaeadoracao.com.br/25388/segmento-aureo-aplicado-a-construcao-de-violoncelos-violinos/

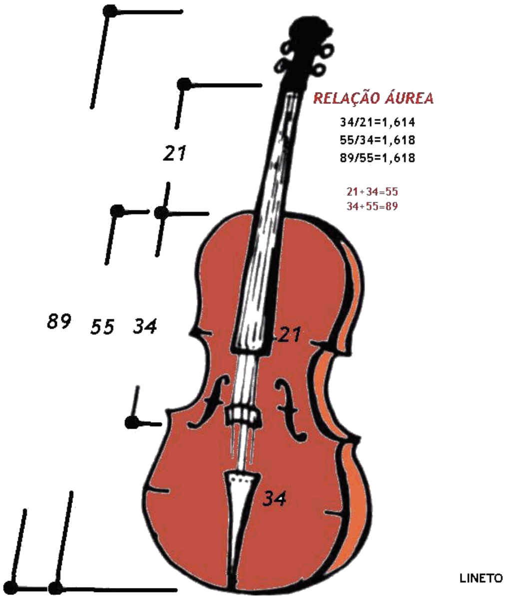
Vejamos como este violoncelo, com estas medidas, tem relações métricas que são relações áureas.

Relação Áurea:

$$\frac{34}{21} = 1{,}614$$

$$21+34 = 55;\ \frac{55}{34} = 1{,}618$$

$$34 + 55 = 89;\ \frac{89}{55} = 1{,}618$$



Fonte: https://musicaeadoracao.com.br/recursos/imagens/tecnicos/matematica/luiz_neto/violpro2.gi

5. O NÚMERO DE OURO DO PONTO DE VISTA DA TEORIA ELEMENTAR DOS NÚMEROS

5.1 NÚMERO DE OURO COMO UMA FRAÇÃO CONTÍNUA INFINITA

Definição 2.1.1. Ao número escrito sob a forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}} \qquad (1)$$

Onde a_0, a_1, a_2,… são números inteiros tais que: $a_1 \geq 1$, sendo (i = 1,2,..., n), chama-se fração contínua infinita.

Podemos também escrever (1) sob a forma $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ onde os números $a_0; a_1, a_2, \ldots$ são elementos de uma fração contínua com parte inteira a_0.

Para uma fração contínua infinita (1), vamos considerar as frações próximas:

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad A_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \ldots,$$

$$A_s = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{s-1} + \cfrac{1}{a_s}}}}}$$

Definição 2.1.2. n–ésima fração próxima (0≥n) para uma fração contínua infinita (1) é da forma:

$$\frac{P_n}{Q_n} = A_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{a_n}}} \qquad (2)$$

Onde P_0, P_1, P_2 … e Q_0, Q_1, Q_2, …, definidas por recorrência, pondo:

$$P_n = P_{n-1}.a_n + P_{n-2} \ ,$$
$$Q_n = Q_{n-1}.\,a_n + Q_{n-2} \ , \qquad (2 \le n) \qquad (3)$$

Com condições iniciais:

$$P_0 = a_0, \quad Q_0 = 1, \quad P_1 = a_0.\,a_1 + 1, \quad Q_1 = a_1 \qquad (4)$$

É fácil ver que (3) e (4) determinam univocamente os números P_0, P_1, P_2 … e a Q_0, Q_1, Q_2, … a partir dos elementos a_0, a_1, a_2, ...

Teorema 2.1.1. Se a_0, a_1, a_2, …são elementos da fração contínua (1), então a sucessão de números P_0, P_1, P_2, …, Q_0, Q_1, Q_2, …, definidas pelas fórmulas (3) e (4) tem a propriedade seguinte: para todo n (n ≥ 2) o número racional $\frac{P_n}{Q_n}$ é igual a n-ésima fração próxima (2).

Na seqüência disso vem a definição 3:

Definição 2.1.3. A fração contínua infinita (1) chama-se convergente se existir e for finito o limite das suas frações próximas, isto é, se existir um número α tal que:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \alpha\,. \qquad (5)$$

Assim se o valor de (1) for igual a α, escreve-seα α = [a_0, a_1, a_2, …].

Exemplo 2.1.1. Para o número de ouro $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ que se decompõe em fração contínua infinita [1; 1, 1, 1, …] encontram-se as seguintes frações próximas:

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
P_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	...
Q_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Teorema 2.1.2. Qualquer fração contínua infinita é convergente.

Definição 2.1.4. Seja α = [a_0; a_1, a_2,…]; aos quocientes completas na decomposição de α chamaremos de α_1, α_2, α_3, …, definidos pelas igualdades

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_s + \cfrac{1}{a_{s+1}}}}}}$$

S ≥ 0, $\alpha = \alpha_0$ para s = -1

Teorema 2.1.3. Seja $\alpha = [\alpha_0, \alpha_{1,} \alpha_{2,}...]$ α_{s+1} – quociente completo na decomposição de α , então:

$$\alpha = \frac{P_sQ_s + P_{s-1}}{\alpha Q_s - P_s} \quad (6)$$

e

$$\alpha_{s+1} = \frac{P_sQ_s + P_{s-1}}{\alpha Q_s - P_s} \quad (7)$$

Onde P_s, Q_s, Os_{-1}, Q_{s-1} são os numeradores e denominadores de s-ésima e (s-1)-ésima frações próximas a α.

Teorema 2.1.4. Cada número real se decompõe numa fração continua (finita ou infinita).
Demonstração.

- ∀α ∈ IR é um número racional então existe uma única fração contínua finita igual a α.
- Consideremos o caso quando α é um número irracional.

Designemos por a_0 a parte inteira de **α** e por $\boldsymbol{\alpha_1} = \frac{1}{-a_0}$, logo, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \frac{1}{1}$. Assim como α é um número irracional, $\boldsymbol{\alpha}_0 \neq 1$ e $\boldsymbol{\alpha}_1$, também, é irracional, além disso, $\boldsymbol{\alpha}_1 >$

1. Desse modo, para qualquer α irracional, é possível encontrar um número inteiro $\alpha_0 = [\alpha]$ e um número irracional α_1 tais que $\alpha = \alpha_0 + \frac{1}{{}_1}$ Determinado, da mesma maneira, para α_1 os números: $\alpha_1 = [\alpha_1]$ e $\alpha_2 > 1$ para α_2 - os números: $\alpha_2 = [\alpha_2]$ e $\alpha_3 > 1$, etc., obtemos:

$\{ = {}_0 + \frac{1}{{}_1} \quad {}_0 = [] \quad {}_1 = {}_1 + \frac{1}{{}_2} \quad {}_1 = [{}_1]$. . . . .

(8)

Onde para s ≥ 1 todos os números irracionais $\alpha_s > 1$. Desse modo, para todos os tais *s* os números $\alpha_s = [\alpha_s] \geq 1$.

Os números $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ formam uma sucessão infinita dos inteiros e, sendo que para s ≥ 1 se verifica $\alpha_s > 1$ podemos, a partir desses números, formar uma fração contínua infinita $a_0 + 1\rfloor a_1 + 1\rfloor a_2 + \cdots$ que segundo o teorema 2 é convergente.

Mostremos agora que o valor dessa fração é igual ao número dado α. . Realmente, das igualdades (8) obtemos: $\alpha = a_0 + 1\rfloor a_1 + 1\rfloor a_2 + \ldots + 1\rfloor a_{s-1} + 1\rfloor \alpha_{s+1}$

e tendo em conta o teorema: $\alpha = \frac{P_s a_{s+1} + P_{s-1}}{Q_s a_{s+1} - Q_{s-1}}$,

$$\left| \alpha - \frac{P_s}{Q_s} \right| = \left| \frac{P_s a_{s-1} + P_{s-1}}{Q_s a_{s+1} - Q_{s-1}} - \frac{P_s}{Q_s} \right| = \frac{1}{(Q_s a_{s+1}) Q_s} < \frac{1}{Q_s^2 a_{s+1}} < \frac{1}{Q_s^2},$$ Assim como

$Q_s \to \infty$, o valor de $\left| \alpha - \frac{P_s}{Q_s} \right|$, com o crescimento de s, torna-se menor do que qualquer que seja número positivo dado, isto é, $\frac{P_s}{Q_s} = \alpha$.

Exemplo 2.1.2. Encontrar os quatro primeiros elementos da decomposição em fração contínua do número $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989\ldots$

Encontremos primeiro, ${}_0 = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right] = 1$;

${}_1 = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \approx 1{,}618033988095\ldots$; ${}_1 = [{}_1] = 1$;

$${}_2 = \frac{1}{{}_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}-1} - 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \approx 1{,}618033988095\ldots; \quad {}_2 = [\ {}_2] = 1;$$

$${}_3 = \frac{1}{{}_2 - a_2} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \approx 1{,}618033988095\ldots; \quad {}_3 = [\ {}_3] = 1;$$

Deste modo,

$\emptyset = 1 + \frac{1\,|}{|1} + \frac{1\,|}{|1} + \frac{1\,|}{|1} + \cdots$

Ou

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{r_1} \Rightarrow r_1 = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\sqrt{5}+2}{4} = 1 + \frac{1}{r_2} \Rightarrow r_2 = \frac{4}{2\sqrt{5}-2} = \frac{8\sqrt{5+8}}{8} == 1 + \frac{1}{r_3}$$

Sendo $r_i = \frac{1}{\alpha - \alpha_{i-1}}$

Teorema 2.1.5. Seja $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots]$. Designemos por $\alpha'_s = [\alpha_s, \alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \ldots]$.

Então:

(i) $[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}, \alpha'_s]$, isto é $\alpha'_s = \alpha_s$ representa o s-ésimo quociente completo na decomposição de α:

(ii) $\alpha_s = [\alpha_s]$

Consideremos a questão inversa

Exemplo 2.1.3. Determinar um número real correspondente à fração contínua infinita seguinte:

$\alpha = 1 + \frac{1\,|}{|1} + \frac{1\,|}{|1} + \frac{1\,|}{|1} + \cdots$

Segundo o teorema 4 temos:

$$\alpha = 1 + \frac{1\,|}{|1} + \frac{1\,|}{|1} + \frac{1\,|}{|1} + \cdots = \frac{P_3\alpha + P_2}{Q_3\alpha + Q_2}.$$

Utilizando a tabela anteriormente apresentada, encontramos:

	α_0	α_1	α_2	α_3
	1	1	1	1
P_n	1	2	3	5

Q_n	1	1	2	3

Logo $P_3 = 5,\ P_2 = 3,\ Q_3 = 3\ e\ Q_2 = 2$, onde n = 0,1,2,3.

Assim, $\alpha = \frac{5\alpha+3}{3\alpha+2} \Leftrightarrow 3\alpha^2 - 3 = 0$ e sendo que $\alpha > 0$, obtemos $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Teorema 2.1.6. Para qualquer número real α, existe um conjunto de frações racionais $\frac{a}{b}$ tais que:

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2} \qquad \text{(i)}$$

Demonstração:

Comecemos por decompor α em fração contínua.

Mostremos que de três quaisquer frações próximas vizinhas P_n/Q_n pelo menos uma poderá servir como a/b na desigualdade (i).

A demonstração será feita pelo método de redução ao absurdo.

Suponhamos que para quaisquer três frações próximas vizinhas se verificam as desigualdades:

$$\left|\alpha - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}.Q_{n-1}^2},\ \left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}.Q_n^2} \text{ e } \left|\alpha - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}.Q_{n+1}^2} \qquad \text{(ii)}$$

Como P_{n+1}/Q_{n+1} e P_n/Q_n se situam em lados opostos de α, então a partir das desigualdades (ii) e supondo n par vem que:

$$\frac{P_n}{Q_n} + \frac{1}{\sqrt{5}\,Q_n^2} \leq \alpha \leq \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{5}\,Q_{n-1}^2}$$

O que nos permite concluir que em ambos os casos temos,

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{Q_{n-1}^2} + \frac{1}{Q_n^2}\right) \leq \left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right| = \frac{1}{Q_n.Q_{n-1}}$$

Se multiplicarmos por $Q_n^2 (Q_n^2 \neq 0)$ vem,

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{Q_n^2}{Q_{n-1}} + 1\right) \leq \frac{1}{Q_n.Q_{n-1}} \text{ donde } \frac{Q_n^2}{Q_{n-1}^2} + 1 \leq \frac{\sqrt{5}Q_n}{Q_{n-1}} \text{ logo } \left(\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right) - \sqrt{5}.\frac{Q_n}{Q_{n-1}} + 1 \leq 0$$

O que significa,

$$\left[\left(\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right)^2\right] - \ 2.\frac{\sqrt{5}}{2} \ . \ \frac{Q_n}{Q_{n-1}} + \ \frac{1}{4} \leq 0$$

Ou que

$$\left(\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Donde

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

.........Porque Q_n e Q_{n-1} são números inteiros, então a igualdade nunca tem lugar podendo ocorrer apenas,

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{(iii)}$$

$^{P_n}/_{Q_n}$ e $^{P_{n+1}}/_{Q_{n+1}}$ situam-se em lados opostos de α , então pelas desigualdades de(ii) obtém-se:

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{(iv)}$$

Tendo em conta que $a_{n+1} \geq 1$, vem que,

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{Q_n \ . \ Q_{n+1} + Q_{n-1}}{Q_n} = Q_{n-1} + \frac{Q_{n-1}}{Q_n} = a_{n+1} + \frac{1}{\frac{Q_n}{Q_{n-1}}} > \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} > 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} =$$

O fato de termos suposto que ocorriam as três desigualdades de (ii) levou-nos a uma contradição. Assim, podemos concluir que pelo menos, para, para uma das três frações próximas $^{P_{n-1}}/_{Q_{n-1}}$, $^{P_n}/_{Q_n}$, $^{P_{n+1}}/_{Q_{n+1}}$, tomando como $^{a}/_{b}$, devem satisfazer a desigualdade (i).

…….Ao atribuir a n , valores diferentes, obtemos um conjunto infinito de frações que satisfazem a desigualdade (i)

5.2. RÁCIO DOURADO – IRRACIONALIDADE QUADRÁTICA

Os números racionais são raízes das equações lineares: $ax + b = 0$, com coeficientes inteiros.

No conjunto dos números irracionais destaca-se uma classe de irracionalidades que são raízes das equações quadráticas com coeficientes inteiros. A tais números vamos chamar irracionalidades quadráticas.

Definição 2.2.1. Um número real α chama-se irracionalidade quadrática se é raiz irracional de uma equação da forma:

$ax^2 + bx + c = 0$ (1)

com coeficientes inteiros que não são iguais a zero simultaneamente. É claro, que para tal α será $\alpha \neq 0,\ c \neq 0$.

Os coeficientes $a,\ b,\ c$ de (1) podem ser tomados primos entre si; nesse caso ao discriminante da equação (1) $D = b^2 - 4ac$ vamos chamar de discriminante de α.

As raízes de (1) são: $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Logo, qualquer irracionalidade quadrática pode ser representada sob a forma $\alpha = \frac{P+\sqrt{D}}{Q}$, onde P e Q são números inteiros, $(D > 1)-$ inteiro que não é quadrado de um número inteiro. À raiz $\alpha' = \frac{P-\sqrt{D}}{Q}$, chama-se irracionalidade quadrática conjugada com α.

OBS 2.2.1: Na definição da irracionalidade quadrática é fundamental que os coeficientes das equações quadráticas sejam números inteiros.

Lembremos alguns fatos importantes nesse contexto:

Definição 2.2.2. Chama-se número algébrico a todo o número que seja solução de uma equação do tipo:

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \ (\alpha \neq 0)$ (2)

com os coeficientes $a_0,\ a_1, a_2,\ \ldots, a_{n-1}, a_n$, inteiros

OBS 2.2.2 o seu grau é o menor número possível em (2)

A equação de menor grau para um dado número algébrico é essencialmente única. Outras equações possíveis são as que se obtêm a partir daquela, multiplicando-a por diferentes fatores.

Definição 2.2.3. Um polinômio mínimo de um número algébrico α é polinômio de grau mínimo, com coeficientes racionais que tem α como sua raiz.

Exemplo 2.2.1. O número de $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + 1\rfloor 1 + 1\rfloor 1 + 1\rfloor 1 +$ ... Ouro é algébrico de grau 2 e também uma irracionalidade quadrática pois é raiz de uma equação do 2º grau com coeficientes inteiros. O seu polinômio mínimo é: $x^2 - x - 1 = 0$, de coeficientes inteiros.

Essa equação tem uma outra raiz que é $\sigma = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

É fácil mostrar que o número de ouro é um número irracional. Para provar essa afirmação, utilizemos o raciocínio de redução ao absurdo.

Suponhamos que α é um racional, isto é $\alpha = \frac{a}{b}$, com α, b inteiros, $b \neq 0$ e m.d.c $(a, b) = 1$, ou seja, a e b não têm fatores comuns, e α é uma fração irredutível. Como

$\alpha^2 - \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a^2 - ab = b^2 \Leftrightarrow b^2 = \alpha(a - b)$

, então $\alpha | b^2$ logo $a|b$ o que é um absurdo, pois por hipótese a e b não têm fatores comuns. A contradição obtida prova a afirmação.

6. EXTENSÃO QUADRÁTICA DE CORPOS – CONSTRUTIVIDADE DOS NÚMEROS

6.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Definição 3.1.1. Se a raiz α de uma equação do segundo grau sobre um corpo Δ, não pertence a Δ, então a extensão simples algébrica $\Delta(\alpha)$, obtida de Δ por junção a α, chama-se extensão quadrática de Δ.

Teorema 3.1.1. Se Δ_1 - extensão quadrática de Δ então qualquer $\xi \in \Delta_1$ se exprime por radicais quadráticos sobre o corpo Δ.

Demonstração:

Se Δ_1 é uma extensão quadrática de Δ, então $\Delta_1 = \Delta\left(\alpha_1\right)$, onde α_1 - raiz de $ax^2 + bx + c = 0$

Onde $a,\ b\ ,\ c \in \Delta,\ \ a \neq 0,\ \ \alpha_1,\ \alpha_2 \notin \Delta$.

É óbvio que $\alpha_2 \in \Delta_1 = \Delta\left(\alpha_1\right)$, pois $\alpha_2 = -\frac{b}{a} - \alpha_1$.

(segundo as fórmulas de Viett[4]) $\Longrightarrow \{\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a}\ \alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{a},\ \alpha \neq 0$

Logo, $\Delta_1 = \Delta\left(\alpha_1\right) = \Delta\left(\alpha_1\alpha_2\right)$ é o corpo de decomposição de $f(x) = ax^2 + bx + c$, pois contém todas as raízes de $f(x)$ e qualquer número de $\Delta\left(\alpha_1\right)$ se exprime por radicais quadráticos sobre Δ, pois α_1, α_2 se exprimem em radicais quadráticos sobre Δ.

[4] Viett (Fransua) – Matemático Francês (1540 - 1603)

Teorema 3.1.2. Um número ξ exprime-se por radicais quadráticos sobre um corpo Δ se existe uma sucessão finita de corpos Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n tais que:

(i) Δ_1 - extensão quadrática de Δ;

(ii) Δ_{i+1} - extensão quadrática de Δ_i; $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$;

(iii) $\xi \in \Delta_n$;

Quando é que um número α é construtível ou não sobre um corpo Δ:

- Se $\alpha \in \Delta$, a resposta é obvia.
- Se $\alpha \notin \Delta$, então consideremos uma extensão simples $\Delta(\alpha)$,

Se α é construtível sobre Δ, então todos os números de $\Delta(\alpha)$, são construtíveis.

Quer dizer a possibilidade de construir α sobre Δ é equivalente a possibilidade de construir todos os números de Δ.

Teorema 3.1.3 Um número $\xi \in \mathbb{R}$ é construtível sobre um corpo $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ se ξ se exprime por radicais quadráticos sobre Δ.

Demonstração:

Condição suficiente:

Suponhamos que ξ se exprime por radicais quadráticos sobre Δ, isto é, ξ se obtém como resultado de uma sucessão finita das operações de extração de raiz quadrática dos números de Δ e outras operações aritméticas.

Sabendo que os resultados das operações racionais sobre “números construtíveis” são, também, construtíveis e a raiz quadrada de um número construtível $\alpha > 0$ é, também, construtível (pois o segmento de comprimento $\sqrt{a}$ é possível construir com ajuda de régua e compasso como média geométrica entre segmentos dos comprimentos α e 1), podemos concluir que ξ é, também, construtível.

Condição necessária

Seja ξ é construtível sobre Δ.

Isso significa que é conhecida uma sucessão finita das construções com régua e compasso que leva dos pontos de um conjunto (de coordenadas de Δ) ao ponto com coordenada ξ. A utilização da régua não leva fora de Δ.

Com uma ajuda do compasso podemos construir números que pertencem a Δ ou a Δ_1 – extensão quadrática de Δ. Aplicando os mesmos raciocínios a Δ_1, obtemos Δ_2 que é uma extensão quadrática de Δ_1.

Da mesma maneira obtemos Δ_3, Δ_4, ..., Δ_i ... – uma sucessão das extensões quadráticas em que cada Δ_i é uma extensões quadráticas de $\Delta_{i-1} (\forall i \in I)$.

Assim como a sucessão das construções é finita, num determinado passo chegamos a ξ.

Logo, existe um fio de extensões quadráticas $\Delta \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq ... \subseteq \Delta_k$ tal que $\xi \in \Delta_k$.

Segundo o teorema 3.1.2, ξ exprime-se por radicais quadráticas sobre Δ.

6.2 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM AJUDA DE INSTRUMENTOS EUCLIDEANOS

Os problemas geométricos de construção com régua não graduada e compasso podem ser interpretadas algebricamente, utilizando o método de coordenadas.

O objetivo das construções geométricas é a construção pedida a partir dos objetos inicialmente dados.

Em cada problema de construção podemos distinguir dois sistemas de pontos:

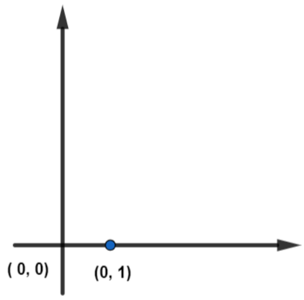
- Sistema dos pontos dados
- Sistema dos pontos procurados (a construir).

Se considerarmos os pontos num sistema de coordenadas (plano cartesiano real) podemos dizer que é dado um conjunto dos números reais (coordenadas dos pontos dados) e precisamos de determinar o outro conjunto dos números reais (coordenadas dos pontos procurados).

Quando um problema de construção é solúvel por meio de instrumentos euclideano (régua e compasso), podemos dizer que cada número procurado pode ser construído a partir dos números do conjunto dado.

Definição 3.2.1. Dizemos que um numero $\alpha \in \mathbb{R}$ é construtível sobre um conjunto $M \subset R$ se, sabendo coordenadas de m pontos (que pertencem a M), é possível construir com régua e compasso pelo menos um ponto que tem α como uma das coordenadas.

Tomamos: $(0,\ 1) \in M$



Designemos por T_M o conjunto de todos os números reais construtíveis sobre M, onde $M \subseteq T_M$.

OBS. 3.2.2: T_M é sempre um corpo numérico.

Pois com $a,\ b\ (b \neq 0) \in T_M$

São construtíveis os números $a + b;\ a - b; ab; \frac{a}{b};\ \sqrt{a}$.

Em particular, são construtíveis todos os números racionais $\mathbb{Q}$, pois $\mathbb{Q}$ contém $(0,\ 1)$.

OBS. 3.2.3: Se $P\{M\}$ é corpo numérico mínimo que contem M, então cada número $\alpha \in P\{M\}$ é construtível. (pois $P\{M\} \subseteq T_m$ por definição de corpo mínimo).

Em particular, qualquer número racional é construtível, pois $\mathbb{Q}$ um corpo mínimo que contém (0,1).

⇒ Sendo que a possibilidade de construir um número ξ a partir do conjunto M dos números dados é equivalente à sua construtividade a partir de $P\{M\}$, podemos considerar o conjunto de números dados como um corpo.

⇒ A essência algébrica de uso de régua e compasso em construções geométricas caracteriza-se pelas afirmações seguintes:

- É impossível construir um novo número sobre um corpo Δ (número que não pertence a Δ) com ajuda de uma só régua (não graduada).
- Se um número α é construtível sobre Δ com ajuda de compasso, então α pertence a Δ ou a uma extensão quadrática de Δ.

Estas afirmações são consequências do facto de que as equações de rectas são lineares, e as equações da circunferência são do 2º grau.

Por isso, as coordenadas dos pontos de intersecção de tais linhas exprimem-se pelas coordenadas dos pontos que determinam essas linhas, e são racionais ou obtém-se por extração de raízes quadráticas.

Teorema 3.2.1. Um número $\alpha \in \mathbb{R}$, é construtível sobre um corpo $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ se α se exprime por radicais quadráticos sobre $\mathbb{K}$.

OBS. 3.2.4: A resolubilidade de um problema de construção com régua e compasso e a resolubilidade de uma equação algébrica por meio de radicais quadráticos são aspectos de um mesmo problema.

OBS. 3.2.5: No contexto do trabalho, considerando a questão de construtividade de números expressos por radicais quadráticos, lembremos o algoritmo de construção de $\sqrt{\alpha}$:

Passo1. Construímos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ tais que $A - B - C$ e $AB = 1,\ BC = a$;

Passo2. Com centro em M (ponto médio de $\overline{AC}$) e raio $MA = MC = \frac{1+a}{2}$, raçamos a circunferência $(M,\ MA)$.

Passo 3. Tiramos uma perpendicular a $\overline{AC}$ em B que intersecta a circunferência em dois pontos, D e D'.

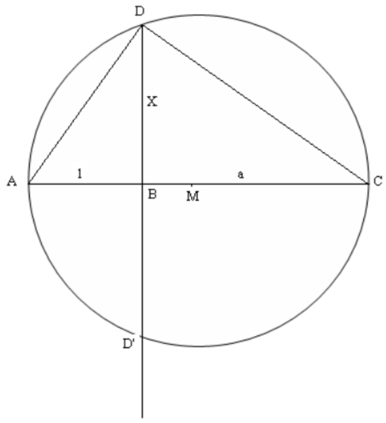
Passo 4. O segmento $\overline{BD}$ tem comprimento igual a $\sqrt{a}$.

Demonstração:

A justificação da veracidade do processo acima descrito baseia-se no seguinte:

- Seja $\overline{BD} = x,$
- Como (critério AA) se tem

$\frac{x}{1} = \frac{BD}{AB} = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{x}$, donde $x^2 = a,\ i.é,\ x = \sqrt{a} = BD$



6.3 CONSTRUÇÃO DO NÚMERO DE OURO

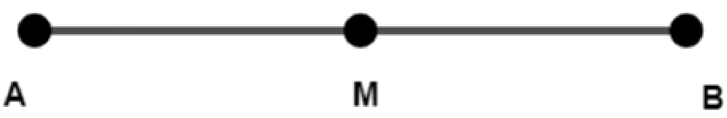
Tendo em conta a fundamentação teórica, acima exposta podemos afirmar que o número de ouro $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, pertence a $Q(\sqrt{5})$ (extensão quadrática de Q) pois expressa-se sob a forma $a + b\sqrt{5}$, onde $a, b \in Q$ e pode ser construído com ajuda instrumentos euclideanos

Como é que se realiza tal construção?

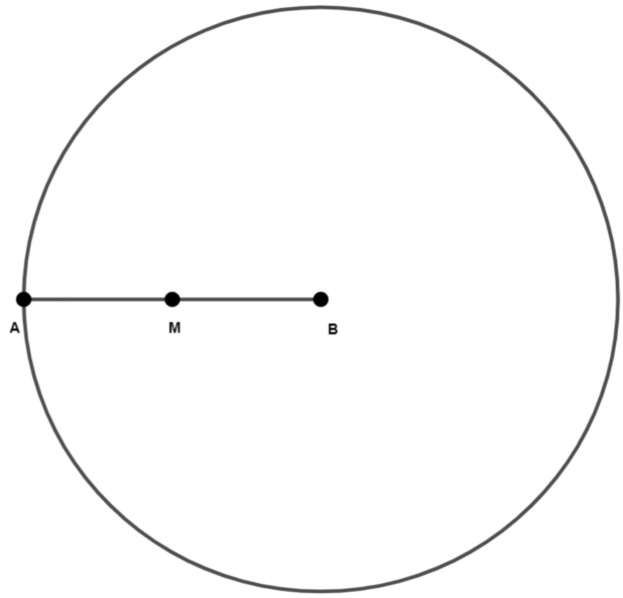
O procedimento é a seguinte:

Passo 1: Considera-se um segmento de reta $[AB]$ de comprimento igual à unidade.

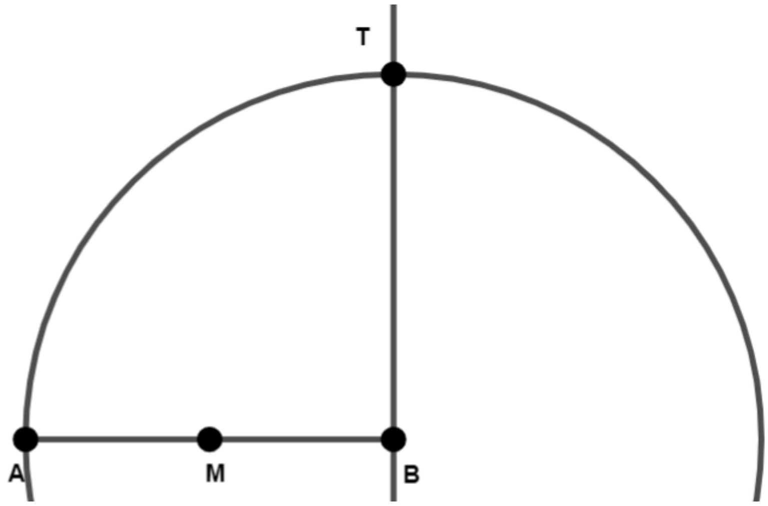
Passo 2: Determina-se o ponto médio, M, do segmento de reta $[AB]$.



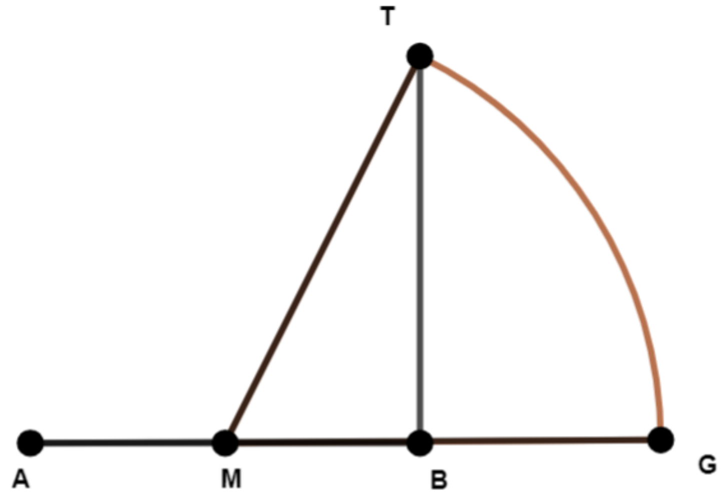
Passo 3: Com o compasso em B e abertura igual ao comprimento do segmento de reta $[AB]$, traça-se uma circunferência.



Passo 4: Traça-se uma reta perpendicular ao segmento de reta $[AB]$, e determine-se um ponto T de intersecção da reta com a circunferência.



Passo 5: Une-se o ponto M com o ponto T. Com o compasso em M e abertura até T traça-se o arco, e determina-se o ponto $G = (AB) \cap (M, MT)$



$\overline{AG} = \Phi$

Porque $\overline{AG} = \Phi$?

Demonstração:

Mostremos que o comprimento do segmento AG é igual ao número procurado.

Realmente, Se $\overline{AB} = 1$ então $\overline{MB} = \frac{1}{2}$.

Do Teorema de Pitágoras vem:

$MT^2 = MB^2 + BT^2 \Leftrightarrow MT^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 \Leftrightarrow MT^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow MT = \frac{\sqrt{5}}{2} \; MT = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

Como MT é um comprimento, então o seu valor tem de ser positivo.

Donde $MT = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Da construção realizada (passo 5), sabe-se que $MT = MG$.

Logo, $AG = AM + MG \Leftrightarrow AG = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow AG = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6.4 DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO

Euclides[5], escreveu uma coleção de 13 (treze) volumes sobre geometria, intitulada “Elementos ”.

Esta é uma das obras matemáticas mais importantes até ao nosso século.

---

[5] Euclides – Matemático Grego (365 a.C. 300 a.C.)

A geometria euclideana está presente em definições básicas (noções primitivas) e axiomas ou postulados. A partir destes o matemático provou outros fatos aos quais chamou de proposições.

Assim sendo, encontramos no Livro 6, a Definição3 que é a definição de divisão de um segmento de reta em média e extrema razão.

Definição 3.4.1. Um segmento de reta diz-se dividido em média e extrema razão quando o comprimento total do segmento de reta está para o maior, assim como o segmento maior está para o menor.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \qquad (1)$$

Divide-se o segmento de reta $[AB]$ em dois segmentos, de modo que o menor deles seja $[BC]$ e o maior $[AC]$.

Supõe-se que $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC} = b$ então de (1) vem que

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

Faz-se $x = \frac{b}{a}$

Logo,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow 1 - x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Como se está a tratar de medidas, exclui-se $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Então $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Como

$$x = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{-1\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)a \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)a$$

Nota-se que fazendo $a = 1$ vem $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. A este valor chama-se razão de ouro, ou razão áurea.

Para se encontrar o ponto C, basta fazer a seguinte construção geométrica:

Passo 1. Traça-se o segmento AB e constrói-se o quadrado ABA'B';

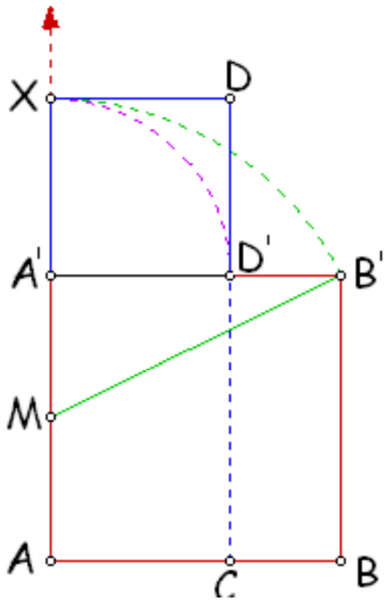
Passo 2. Constrói-se M como o ponto médio de AA';

Passo 3. Prolonga-se o segmento AA' e constrói-se a circunferência de centro M e raio MB';

Passo 4. Acha-se o ponto X de intersecção da circunferência com a semi-reta AA';

Passo 5. Constrói-se o quadrado de lado A'X;

Passo 6. O prolongamento do lado DD' determina o ponto C em AB que secciona o segmento na razão desejada.



Justificação da construção

Seja o triângulo $MA'B'$, fazendo $AB = a$ e $MX = d$. Pelo teorema de Pitágoras vem que:

$$d^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow d^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{\sqrt{5}a}{2}$$

Logo:

$$A'X = \frac{\sqrt{5}a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$$

Fazendo $a = 1$ temos $A'X = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

7. PROPORÇÃO DIVINA NAS CONSTRUÇÕES DE FIGURAS GEOMÉTRICA

Relacionadas com o Número de Ouro estão algumas figuras geométricas muito conhecidas e utilizadas na Matemática, como por exemplo, o retângulo, o triângulo, pentágono e o decágono.

De seguida será apresentado um estudo das referidas figuras geométricas.

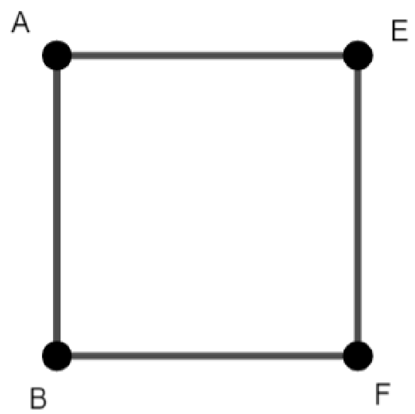
7.1 retângulo é de ouro

Definição 4.1.1: Um retângulo é de ouro se a razão entre o comprimento e a largura é igual ao número de ouro.

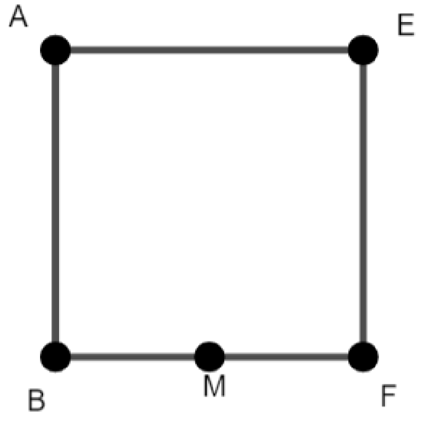
Como construir um retângulo de ouro?

Os Gregos tinham um processo simples de construir rectângulo de ouro. Vejamos os passos necessários do referido processo:

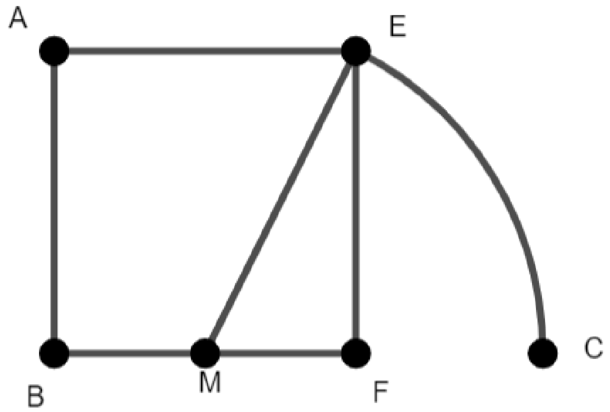
Passo 1 – Desenha-se um quadrado ABEF cujo comprimento do lado consideramos igual à unidade.



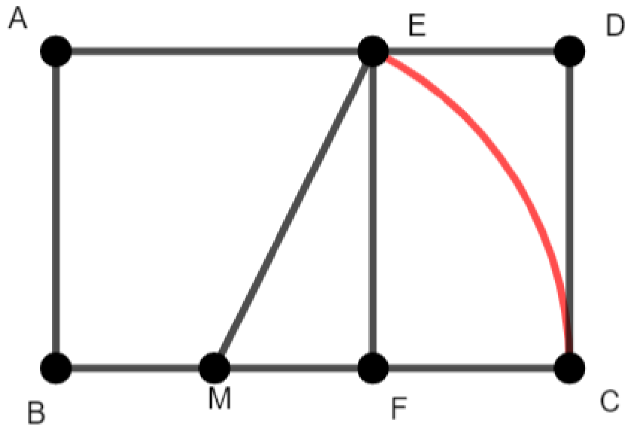
Passo 2 – Marca-se o ponto médio de um dos lados, escolhe-se por exemplo o lado BF



Passo 3 – Do ponto médio M, do segmento BF traça-se um arco cujo comprimento é igual a ME.



Passo 4 – Completa-se o retângulo ABCD.



Demonstração:

O retângulo obtido é o retângulo de ouro. Porquê?

Se $\overline{BF} = 1$ então $\overline{MF} = \frac{1}{2}$

Pelo Teorema de Pitágoras vem que

$$ME^2 = MF^2 + FE^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 \Leftrightarrow ME^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow ME = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad ME = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Como ME é um comprimento, então o seu valor tem se ser positivo.

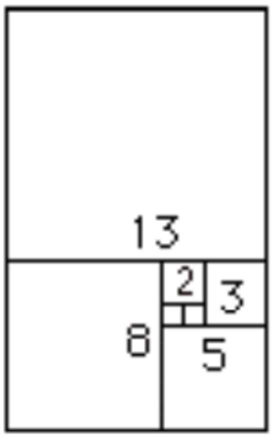
Donde $ME = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Pela construção feita, sabe-se que $ME = MC$.

Então $BC = BM + MC \Leftrightarrow BC = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow BC = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é o comprimento do retângulo. A largura do referido retângulo é 1.

Logo a razão entre o comprimento e a largura do retângulo é: $\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é o número de ouro.

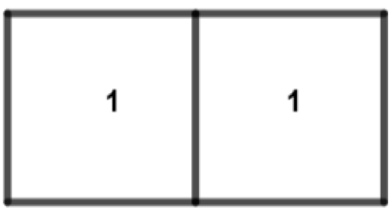
OBS 4.1.2: Um retângulo de ouro pode tornar-se num quadrilátero e noutro retângulo de ouro. Deste modo FCDE é igualmente um retângulo de ouro. Este processo pode ser continuado repetidamente.



Para além do processo acima descrito, existe um outro que permite obter um retângulo com medidas muito próximas às do retângulo de ouro.

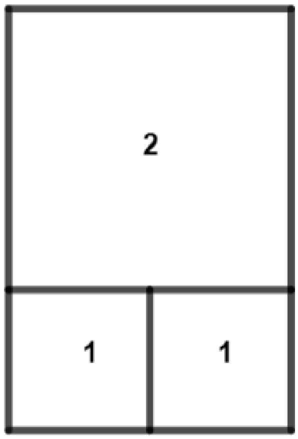
Passo 1 – Começa-se com um quadrado de lado unitário.

Passo 2 – Junta-se um quadrado de  lado unitário de forma a formar um retângulo.

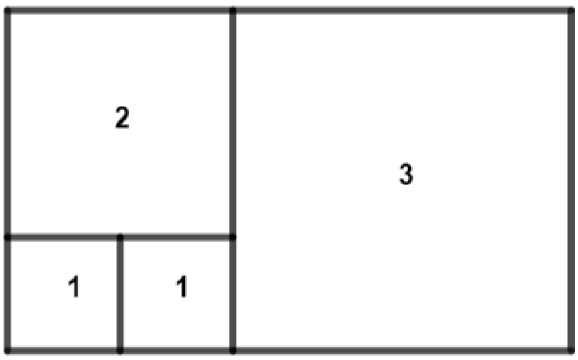


Este retângulo não é o retângulo de ouro, uma vez que a razão entre o comprimento e a largura é 2.

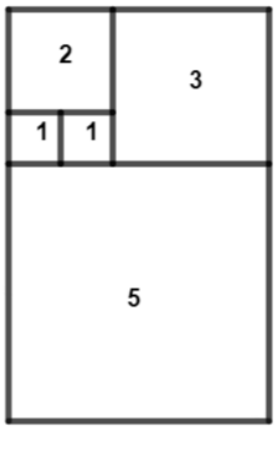
Passo 3 – Continua-se a juntar, sucessivamente, quadrados cujos lados têm a medida do comprimento dos retângulos.



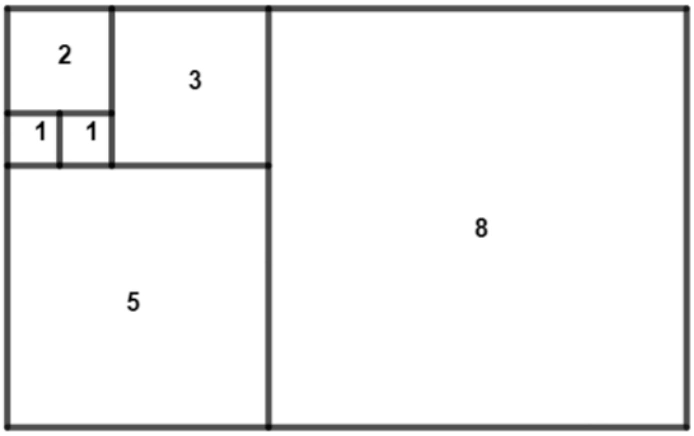
Este retângulo não é um retângulo de ouro uma vez que $\frac{comprimento}{largura} = \frac{3}{2} = 1,5$



Este retângulo não é o retângulo de ouro, porque $\frac{comprimento}{largura} = \frac{5}{3} = 1,(6)$



Este retângulo também não é o retângulo de ouro, porque $\frac{comprimento}{largura} = \frac{8}{5} = 1,\ 6$

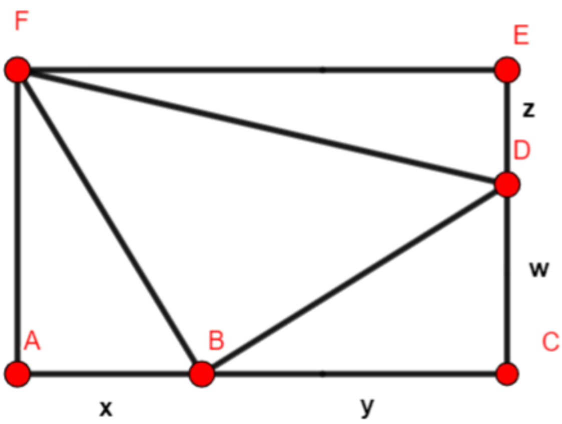


Este retângulo também não é o retângulo de ouro, porque $\frac{comprimento}{largura} = \frac{13}{8} = 1,625$. No entanto é um valor que é muito próximo do Número de Ouro.

À medida que o comprimento aumenta, aumenta também a largura, e a razão entre o comprimento e a largura se aproxima mais do número de ouro.

Um problema que também é bastante interessante, é o que a seguir se cita:

“Dados um retângulo qualquer e um triângulo inscrito no retângulo dado, de forma que quando removido deixa três triângulos todos com a mesma área. Será que os lados do retângulo estão divididos na mesma razão? E qual é essa razão?”



Demonstração:

Sejam: $ACEF$ um retângulo e

$AB = x\, ACEF\;\; AB = x,\;\; BC = y,\;\; CD = w,\;\; DE = Z$ unidades de medidas.

(1) A área do triângulo ABF é $A = \frac{x * (W+Z)}{2}$

(2) A área do triângulo BCD é $A = \frac{y * w}{2}$

(3) A área do triângulo DEF é $A = \frac{z*(x+y)}{2}$

Igualando as áreas iguais dos triângulos $ABF,\ BCD$ e DEF obtemos:

$$\frac{x^*(w+z)}{2} = \frac{y^*w}{2}\quad \frac{x^*(w+y)}{2} = \frac{z^*(x+y)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(w+y) = yw\quad x(w+z) = z(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{yw}{w+z}\qquad \frac{y}{x} = \frac{w}{z}$$

Donde se conclui que os dois lados do retângulo são divididos na mesma razão.

Tendo em conta esse resultado, estamos em condições de determinar a referida razão. Realmente, $\frac{y}{\frac{yw}{w+z}} = \frac{w}{z} \Leftrightarrow \frac{w+z}{w} = \frac{w}{z}\ w^2 = z^2 + zw\ \frac{w^2}{z^2} = 1 + \frac{zw}{z^2} \Leftrightarrow \frac{w^2}{z^2} - \frac{w}{z} - 1 = 0$

Designando a razão $\frac{w}{z}$ por X, a última equação toma a forma: $X^2 - X - 1 = 0$ e terá como solução positiva o Número de Ouro, ou seja, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Conclui-se que $\frac{w}{z} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{y}{x}$, isto é, *cada lado do retângulo é dividido na mesma razão, que é o Número de ouro*.

7.2. TRIÂNGULO DE OURO

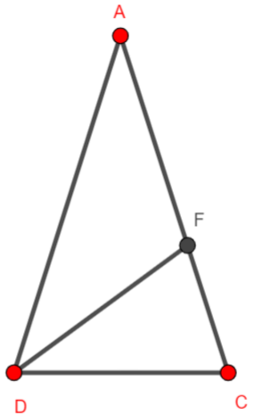
Definição 4.2.1 Um triângulo diz-se de ouro se a razão entre a base e um dos seus lados é igual ao número de ouro.

Proposição 4.2.1.: O triângulo isóscele cujos ângulos têm de amplitude 72º, 72º e 36º é um triângulo de ouro.

Demonstração:

Bissecta-se o ângulo ADC, obtém-se assim o triângulo, que também é isósceles, uma vez que tem dois ângulos com a mesma amplitude.

Assim $\overline{DF} = \overline{DC}$



No triangulo ADF, $A\hat{D}F$ = 36º, $D\hat{A}F$ = 36º e $A\hat{F}D$ = 108º. Então o triângulo ADF é isósceles logo $AF = DF$.

Tem-se que $DF = DC$ e $AF = DF$, então $DF = DC = AF$.

O triangulo DCF é semelhante ao triangulo ADC porque tem de um para o outro dois ângulos respectivamente iguais ($D\hat{C}F = D\hat{C}A$ e $D\hat{F}C = A\hat{C}D$).

Como o triangulo $DCF \sim$ triangulo ADC então tem de um para o outro os respectivos lados proporcionais, isto é,

$\frac{CD}{FC} = \frac{CA}{DF} = \frac{AD}{DC}$. Como $DF = AF$ e $DC = AF$ vem que
$\frac{AF}{FC} = \frac{CA}{AF} = \frac{AD}{AF} = r$.

Faz $FC = 1$ então $\frac{AF}{FC} = r$ $\frac{AF}{1} = r$ $AF = r$.

$AC = AF + FC$ $AC = r + 1$

$\frac{CA}{AF} = r$ $\frac{r+1}{r} = r$ $r + 1 = r^2$ $r^2 - r - 1 = 0$ $r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$ $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Como $r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ é um número negativo e por definição r é positivo, logo escolhe-se $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é o número de ouro.

Logo $\frac{AD}{DC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, isto é, a razão entre a medida de um dos lados do triângulo e a medida da sua base é o Número de Ouro.

7.3 PENTAGRAMA PITAGÓRICO

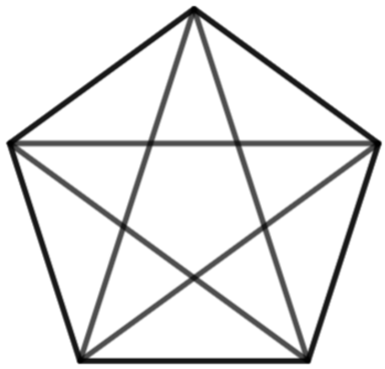
O Pentagrama é um símbolo muito mais antigo do que se pode pensar.

Para os Pitagóricos, o Pentagrama, era um símbolo sagrado que mostrava a harmonia entre o corpo e a alma. Era também usado como um símbolo de reconhecimento entre eles.

Os Pitagóricos atribuíam virtudes especiais ao pentagrama, porque é uma figura que pode ser construída com uma única linha fechada entrelaçada, por isso é considerada por eles como um símbolo de perfeição.

O Pentagrama contém o Número de Ouro.

Considere-se um pentágono regular, com as respectivas diagonais:

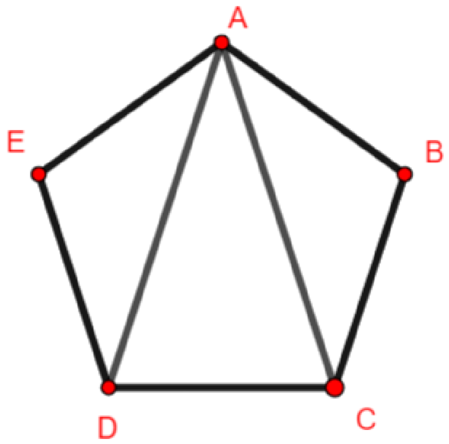


Proposição 4.3.1.: O quociente entre as suas diagonais e os seus lados é o Número de Ouro.

Demonstração:

Como já é nosso conhecido da geometria, a amplitude de um ângulo interno de polígono regular com n lados é igual a: $180° - \frac{360°}{n}$.

Neste caso $n = 5$ então $180° - \frac{360°}{5} = 108° - 72° = 108°$.



O triângulo AED é isósceles, uma vez que $AE = ED$, então $D\hat{A}E = A\hat{D}E$, e $A\hat{E}D = 108°$.

A soma dos ângulos internos de um triangulo é igual a 360º, logo

$180° = A\hat{E}D + D\hat{A}E + A\hat{D}E \;\; 180° + 2 \times A\hat{D}E \;\; 180° - 108° = 2 \times A\hat{D}E \;\; 72° = 2 \times A\hat{D}E \;\; A\hat{D}E = 36$

.

Como $D\hat{A}E = A\hat{D}E$ então $D\hat{A}E = 36°$.

O triangulo ABC é geometricamente igual ao triangulo AED, porque $A\hat{E}D = A\hat{B}C$, $AB = AE$ e $BC = ED$.

Então $B\hat{A}C = 36°$ e $B\hat{C}A = 36°$.

Considere-se agora o triangulo ADC,

$\hat{A} = E\hat{A}D + D\hat{A}C + B\hat{A}C \;\; 108º = 36° + D\hat{A}C + 36° \;\; D\hat{A}C = 108° - 36° \;\; D\hat{A}C = 36°$.

$\hat{D} = E\hat{D}A + A\hat{D}C \;\; 108° = 36° + A\hat{D}C \;\; A\hat{D}C = 72°$.

$\hat{C} = B\hat{C}A + A\hat{C}D \;\; 108° = 36° + A\hat{C}D \;\; A\hat{C}D = 72°$.

Logo o triangulo ADC é um triangulo de ouro, então:

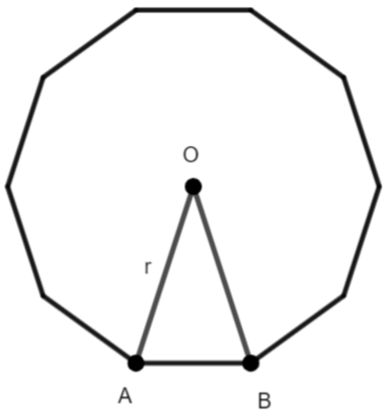
$$\frac{AD}{DC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

7.4 DECÁGONO REGULAR

Proposição 4.4.1 O lado do decágono regular é áureo em relação ao raio da circunferência circunscrita à volta dele

Demonstração

Tendo em conta que um ângulo central relativo a cada lado do decágono mede 36º, e o fato que o triângulo OAB é isósceles (pois $AO = OB =$ raio), das proporções trigonométricas vem:



$$\frac{a}{2r} = sen18°, \quad \left(\frac{1}{2sen18°} = \Phi\right)$$

$$\frac{a}{r} = 2sen18°$$

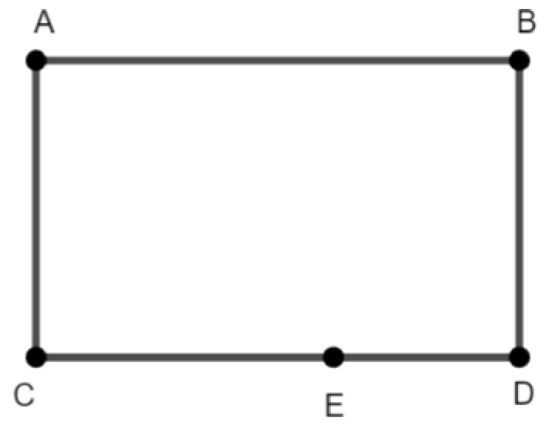
$$\frac{a}{r} = \frac{1}{\Phi}$$

7.5 A ESPIRAL MARAVILHOSA (logarítmica)

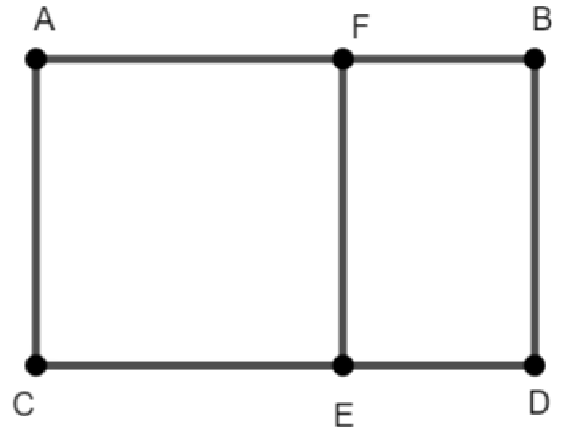
A Espiral de Ouro é baseada no padrão de quadrados que pode ser construído no interior de um Retângulo de Ouro.

Consideremos o processo de construção desse fenômeno.

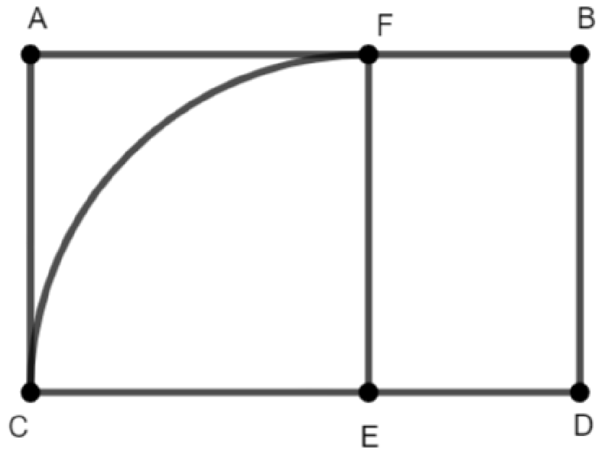
Passo 1: Para iniciar a construção de uma espiral logarítmica com régua e compasso, desenha- se um retângulo áureo $ABCD$, marcando um ponto E em AB, tal que : $CE \equiv BD$;



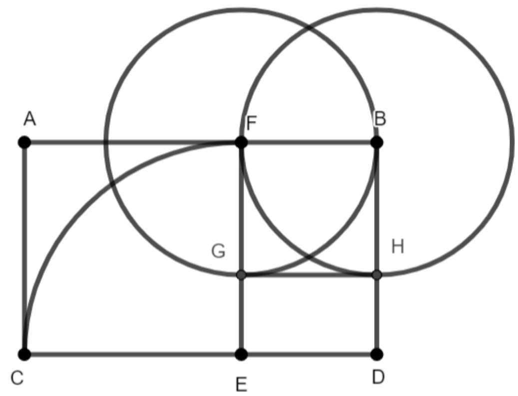
Passo 2: Traça-se uma perpendicular EF por E isto é $EF \perp AB$;

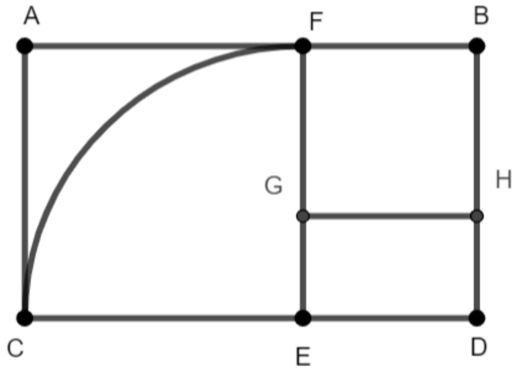


Passo 3: Com o centro em E, faz-se o arco CF

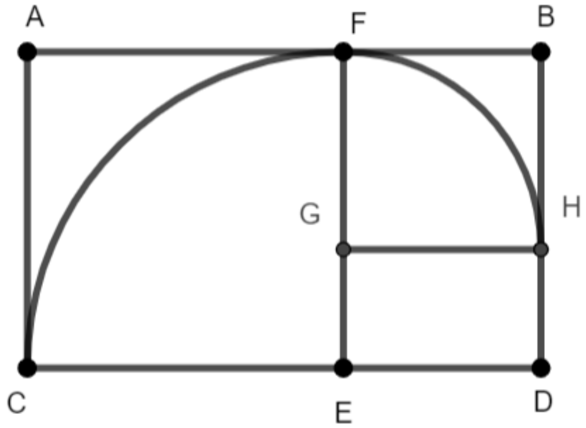


Passo 4: Com o raio FB, determinam-se os Pontos G em FE e H em BD

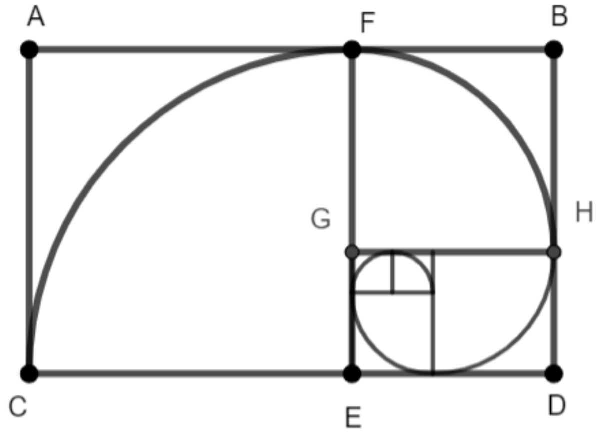




Passo 5: Com o raio GF e centro em G, traça-se o arco FH



Passo 6…etc: repete-se sucessivamente o procedimento acima, e determina-se a Espiral Logarítmica, Também chamada Espiral Equiangular.



CONCLUSÃO

Após estabelecer a estratégia, adotamos uma abordagem que se concentra em vários paradigmas, enfocando a compreensão desse número e sua utilidade prática. Concluímos que o número de ouro é uma dimensão complexa, pois contém conceitos como harmonia, beleza e equilíbrio, que são característicos da Matemática como ciência. A multiplicidade desse número é resultado, em parte, de suas múltiplas funções e aplicações versáteis. É um número que pode ser usado para fortalecer noções sobre sistemas de medição e divisão com números decimais, equações de 2º grau, progressões geométricas e somas. Em resumo, é possível tirar proveito desse "número incrível", especialmente no ensino e aprendizado de Matemática, onde sua virtuosidade é de grande importância.

Agora, sendo a Matemática um dos alicerces para a realização humana, é evidente que o número de ouro abrange diversos aspectos dessa realização. Este número, devido a sua ampla gama, inclui áreas como história, biologia, zoologia, arte clássica e moderna. De fato, devido às suas aplicações e funções, o número de ouro acaba por representar a perfeição das coisas. Conclui-se que é uma espécie de número que sintetiza a natureza, pois pode ser aplicado em diversos setores técnico-científicos. Na arquitetura e engenharia, ele pode ser a solução para equilibrar e resolver vários problemas.

Não se pode ignorar a dimensão lúdica do número de ouro, já que as fórmulas e aplicações envolvidas carregam consigo uma atração lúdica que pode ser a base para despertar o interesse dos estudantes pelas matemáticas e pelo processo de descoberta. É compreensível que os estudantes encontrem dificuldades no aprendizado, mas um professor capacitado pode ser fundamental para inspirar uma nova atitude em relação à disciplina. A identificação e o entendimento do número de ouro, suas funcionalidades e aplicações, são um excelente ponto motivador.

A curiosidade em torno do número de ouro é inerente a sua importância, significado e envolvimento com mitos e realidades. Isto é evidenciado pelas múltiplas aplicações do mesmo.

O número de ouro é, sem dúvida, um número único e especial em suas características e aplicações. Desde a sua descoberta até hoje, sua importância tem aumentado. No Egito antigo, era considerado sagrado e possuía uma dimensão mitológica. Nos dias de hoje, no entanto, seu significado vai além disso, abrangendo também uma dimensão técnico-científica. Sua utilização em áreas como arquitetura e outras esferas do conhecimento e da atividade humana é testemunho da sua relevância.

Podemos afirmar que o número de ouro tem uma importância essencial no campo da arte, especialmente na arquitetura e pintura. Ele é usado como uma ferramenta para revelar a essência artística de um trabalho, definindo traços convencionais e dando forma às ideias do artista. O número de ouro é, portanto, uma ferramenta valiosa para a criação de obras artísticas.

Defendemos a ideia de que o número de ouro é uma ferramenta valiosa e versátil, tanto na arte quanto na educação. A sua presença na arquitetura e na pintura reforça a sua importância artística. Além disso, acreditamos que ele pode ser usado para motivar o ensino de matemática, geometria e outras disciplinas, tornando a aprendizagem mais interessante. Por isso, sugerimos que os planos curriculares incluam conteúdos relacionados a esse número e que as pessoas que conhecem suas virtualidades trabalhem juntas para divulgar e destacar a importância desse número, que representa a perfeição das coisas.

Referencias.

AFEITOS Carlos, **O número de Ouro**: Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, 2013, Covilhã, Portugal. 92 p.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Número de ouro e secção Áurea** – considerações e sugestões para a sala de aula. Editora da FURB, (1996);

BOREVITCH, Z. I., CHAFAREVITCH, I. R.. **Théorie des Nombres**. Editions Jacques Gabay. Paris (1980).

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BURSTAB A.A..**Teoria dos números**. Moscovo (1966).

Carlos Afeitos & Paulo Rebelo, **O número de ouro no Ensino Secundário**, Terceira conferência da Faculdade de Ciências da Universidade da Beira Interior, 2012, Covilhã, Portugal.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **A matemática na arte e na vida**.São Paulo: Livraria da Física, 2007.

CONWAY, John H., RICHARD K. Guy. **O livro dos números**. Traduzido por José Sousa Pinto. Gradiva universidade de Aveiro, (1999).

LELTCHUK, U. I., PALEVTCHENKO, I. I.. **Aulas práticas de Álgebra e Teoria dos Números** Minsk (1986).

MARKOWSKY, G.; **Misconceptions About The Golden Ratio**. College Mathematics Journal, vol. 23, n. 1, pp. 2-19, 1992. Disponível em http://www.umcs.maine.edu/ markov/GoldenRatio.pdf.

ZAVALO S. G., KASTARTTCHUK V. N., HATSET B. I..**Álgebra e teoria dos números**, Kiev, (1980)

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Licenciatura em Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/nº – Telégrafo
66050-540 Belém - PA