1) a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$

$$S_n = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{n-2}} - \cancel{\frac{1}{n-1}} + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1$$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^5 + n^2 + 20}{3n^2 - 5n + 10}$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^5 + n^2 + 20}{3n^2 - 5n + 10} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^5}{3n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{3} n^3 = +\infty$$

A SÉRIE DIVERGE, POIS $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$

2) e 3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n ; \quad a_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$$

$$S_n = \cancel{\sqrt[2]{2}} - \sqrt[1]{1} + \cancel{\sqrt[3]{3}} - \cancel{\sqrt[2]{2}} + \cancel{\cdots} \cancel{+} \sqrt[n+1]{n+1} - \cancel{\sqrt[n]{n}}$$

$$S_n = \sqrt[n+1]{n+1} - 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n+1} - 1 = 1 - 1 = 0$$

3) $\sum a_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n^2$ CONVERGE

Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos convergente.

Logo, para algum N suficientemente grande, temos $0 < a_n < 1$, com $n > N$

Assim $0 < a_n^2 < a_n$, para $n > N$.

Portanto, pelo teste da comparação, $\sum a_n^2$ é convergente

4) b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}+1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} \cdot n^{3/2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

Pelo teste da comparação no limite, $\sum \frac{\sqrt{n}+1}{n^2+1}$ converge, pois $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(2n)!}{3^n(2n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(2(n+1))!}{3^{n+1}(2(n+1)+1)!}}{\frac{2^n(2n)!}{3^n(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot(2n+2)!}{3^{n+1}(2n+3)!} \cdot \frac{3^n(2n+1)!}{2^n(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(\cancel{2n+2})(2n+1)\cancel{(2n)!}\,\cancel{(2n+1)!}}{3(2n+3)(\cancel{2n+2})\cancel{(2n+1)!}\,\cancel{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{3(2n+3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} < 1$$

$\left\{ \text{A SÉRIE CONVERGE PELO TESTE DA RAZÃO} \right.$

6) a) $\sum \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)$

Como $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são convergentes, então $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$.

Logo $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ e $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} = +\infty$

Então as séries $\sum \frac{1}{a_n}$ e $\sum \frac{1}{b_n}$ são divergentes e $\sum \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right) = \sum \frac{1}{a_n} + \sum \frac{1}{b_n}$

é divergente.

c) $\sum a_n b_n$

Sejam A_n e B_n as parciais de $\sum a_n$ e $\sum b_n$ respectivamente, isto é

$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

Considere P_n a parcial de $\sum a_n P_n$, isto é, $P_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$

Note que

$$A_n B_n = a_1 b_1 + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_2 + \cdots + a_1 b_n + \cdots + a_n b_n$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) + [a_2 b_1 + a_3 b_1 + \cdots + a_n b_1] + [a_1 b_2 + a_3 b_2 + \cdots + a_n b_2] + \cdots +$$

$$+ [a_1 b_n + \cdots + a_{n-1} b_{n-1}]$$

$$= P_n + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_2 b_n) + (a_1 b_2 + a_3 b_2 + \cdots + a_n b_2) + \cdots + (a_1 b_n + \cdots + a_{n-1} b_{n-1})$$

Como $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries de termos positivos, então $0 < P_n < A_n B_n$.

Segue daí, que a sequência P_n é convergente e portanto $\sum a_n b_n$ é convergente