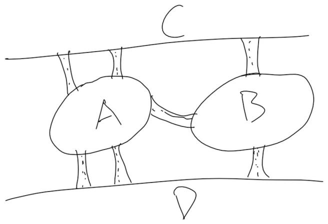
第11章 图论导引

2021年5月6日　　10:16

例：哥尼斯堡七桥问题：从某地出发，经过每座桥恰一次，回到出发地

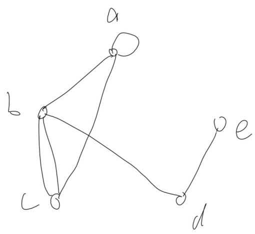


从某个点出发，经过每条边恰好一次，回到出发点
$V = \{A, B, C, D\}$
$E = \{\{A,C\},\{A,C\},\{A,D\},\{A,D\},\{A,B\},\{B,C\},\{B,D\}\}$

影响力最大化：
投放 k 个样品，给 k 个人试用
$V = \{人\}$
$E = \{\{a,b\},\dots\}$ (好友)

基本性质
定义：图 $G = (V, E)$
　（1）$V \neq \emptyset$，顶点集合，顶点的个数 n 叫做图 G 的阶
　（2）$E = \{\{a,b\},\dots | a,b,\dots \in V\}$
　　$v \in V$：顶点　$\Rightarrow$ 边 x 连接 a, b
　　$x = \{a,b\}$，边　　a, b 相邻；a, b 与 x 关联

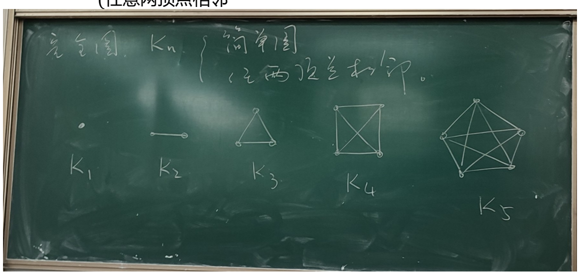
$|V|$— 图的阶，以 n 表示
例：$V = \{a,b,c,d,e\}$
　$E = \{\{a,b\},\{a,a\},\{a,c\},\{b,c\},\{d,e\},\{b,c\},\{b,d\}\}$



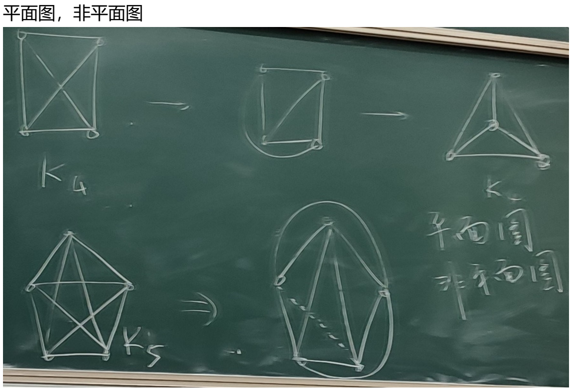
其中，$\{a,a\}$ 是环边，$\{b,c\}$ 是重边

多重图：有重边
一般图：可以有重边和环边
简单图：无环，无重边

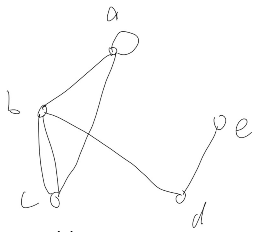
完全图：$K_n \begin{cases} \text{简单图} \\ \text{任意两顶点相邻} \end{cases}$



平面图，非平面图



定义：顶点度数 $\deg(v)$
　$\deg(v) = v$ 关联的非环边数 $+ 2 \times$ 关联的环边数
　对于图：



$\deg(a) = 2 + 2 \times 1 = 4$
$\deg(b) = 4 + 2 \times 0 = 4$
度数序列：（降序排列）
4，4，3，2，1

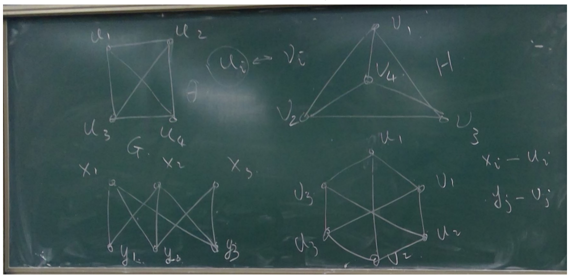
定理：设$d_1, d_2, \ldots, d_n$是图的度数序列，则

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \times m$$，其中 m 是边数

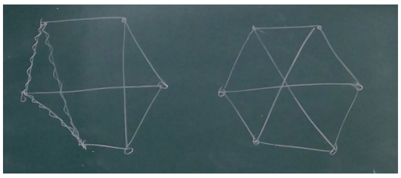
证明：图从无边的图开始加边，所有顶点度数和为 0，逐渐加边：
（1）加环边：某顶点度数增加 2；
（2）加非环边：某两顶点度数各加 1。

推论：度数为奇数的顶点数为偶数
例：某次晚会，握手致意，握手次数为奇数的人数为偶数，

图的同构
$G = (V, E), H = (V', E')$
若存在一一映射$\theta: V \to V'$，满足：任何$x, y \in V$，x, y 之间在 G 中存在 k 条边$\Leftrightarrow \theta(x), \theta(y)$在 H 中存在 k 条边



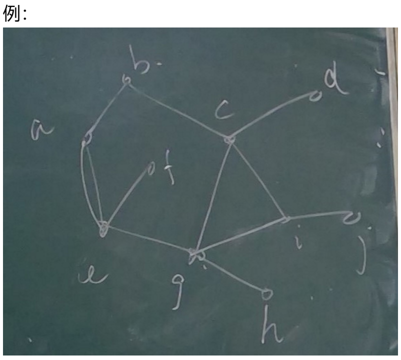
判断图同构（必要条件，用来判断图不同构）：
（1）顶点数相同，边数相同
（2）度数序列相同
证明图同构是困难的



左图有3阶圈（3条边），右图没有

途径：$\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{m-1}, x_m\}$，连接 x_0 到 x_m，长度 m，x_0 是起点，x_m 是终点
简写：$x_0 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{m-1} - x_m$，（没有重边）
迹：边不重复的途径
路径：顶点不重复的途径
路径⟹ 迹 ⟹ 途径
回路：$x_0 = x_m$
闭迹：$x_0 = x_m$
圈：$x_0 = x_m$（圈是中间没有圈且点不重复的闭路，也可以说是一个起点和内部顶点互不相同的闭迹，
圈是闭迹，但闭迹不一定是圈）
连通：两个顶点连通⟺ 存在途径
图连通：任意两个点之间连通

例：



途径：$\{a,b\},\{b,c\},\{c,i\},\{i,c\}$
圈：$c-i-g-c$

子图
$G=(V,E), H=(V',E')$
H 是 G 的子图：$H\subseteq G \Leftrightarrow V'\subseteq V, E'\subseteq E$

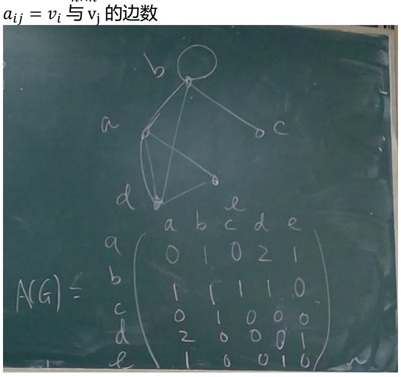
导出子图
$G_U=(V,E')$
（1）$U\subseteq V$
（2）$E'=\{(a,b)|(a,b)\in E, a,b\in U\}$

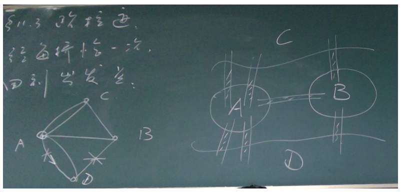
生成子图
H 是 G 的生成子图
（1）$H\subseteq G$
（2）$V'=V$

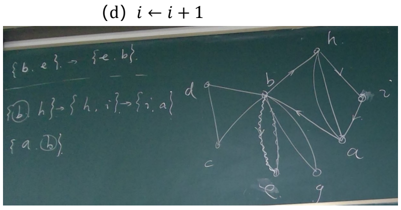
定理：设 G=(V, E) 是一般图，则 V 可以划分为一些非空子集合 $V_1,V_2,\dots,V_k$，使得
（1）V_i 的导出子图 $G_i=(V_i,E_i)$ 是连通图
（2）$\forall a,b\in V, a,b$ 之间连通 $\Leftrightarrow a,b$处于同一个 V_i
G_i-G 的连通分量

定理：$G=(V,E)$ 与 $H=(V',E')$ 同构的必要条件：
（1）G 是简单图 $\Rightarrow$ H也是简单图
（2）G 与 H 的连通分量相同
（3）有相同长度的圈
（4）有相同的导出子图

图的邻接矩阵、

$V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$
$A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$
$a_{ij}=v_i$ 与 v_j 的边数


11.3 欧拉迹
经每条边恰一次，回到出发点

必要条件：每个顶点度为偶数。
经过每条边恰一次的迹：欧拉迹（欧拉开迹，欧拉闭迹）

引理：若 G 中每个顶点度数为偶数，则 G 中每条边都在某个闭边上。
证明：设边为 $a_0=\{x_0,x_1\}$
算法：（1）$i=1$
（2）令 $w=\{x_0,x_1\}$
（3）令 $F=\{a_0\}$
（4）当 $x_0\neq x_i$ 时，做：
(a) 找一条不在 F 中边 $a_i=\{x_i,x_{i+1}\}$
(b) 令 $w\leftarrow w\cup\{x_{i+1}\}$
(c) 令 $F\leftarrow F\cup\{a_{i+1}\}$
(d) $i\leftarrow i+1$


构造子图 $H=(W,F)$，则 $H\subseteq G$，H 分为

（1）$x_0=x_i$，则 H 中每个顶点度数为偶数

（2）$x_0\neq x_i$，则 H 中 x_0,x_i 的度数为奇数，其余顶点度数为偶数

$\Longrightarrow$ 在 $\mathrm{G-F}$ 中，当 $x_0\neq x_i$，则 $\mathrm{G-F}$ 中，x_i 的度数为奇数，在 $\mathrm{G-F}$ 中有与 $\mathrm{x_i}$ 关联的边

$\Longrightarrow$ 算法（a）可以执行

定理：设 G 是连通图，则 G 是欧拉图 $\Leftrightarrow$ G 中每个顶点的度数均是偶数

证明：“$\Rightarrow$”已解释

“$\Leftarrow$”任取边 $a_1\in E(G)$，在 G 中找一个含 a_1 的闭迹

$\mathrm{r_1}$: 子图 $G_1=(W_1,F_1)$，考虑 $\mathrm{G_2=(V,E-F_1)}$

若 $\mathrm{G_2}$ 中无边，r_1 是欧拉闭迹

若 G_2 中仍有边，则存在 $\mathrm{r_1}$ 上某顶点 $\mathrm{z_1}$，$\mathrm{G_2}$ 上某条边 $\mathrm{a_2}$，$\mathrm{a_2}$ 与 $\mathrm{z_1}$ 关联，因为 G,G_1 中所有顶点度数为偶数

$\Rightarrow$ 在 G_2 存在含 a_2 的闭迹 r_2，通过 z_1 相连，$r_1\cup r_2$ 是一个闭迹

推论：设 G 是一个连通图，则 G 中有以 u, v 为起, 终点的欧拉开迹

$\Leftrightarrow$ G 中 u, v 的度数为奇数，其余顶点度数为偶数

证明：$G+\{u,v\}$ 的每个顶点度数为偶数

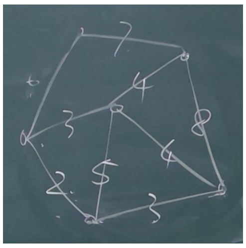
$\Leftrightarrow$ $G+\{u,v\}$ 中含闭的欧拉迹 r

$\Leftrightarrow$ $r-\{u,v\}$ 是 G 中以 u, v 为起, 终点的欧拉开迹

定理：设 G 是一般连通图，并设 G 中奇度数顶点的个数 $m>0$，则 G 的边可以被划分为 $\frac{m}{2}$ 个开迹，当不能被划分为少于 $\frac{m}{2}$ 个开迹

对于具有 m 个奇度数顶点的图，需要将笔从纸上至少移开的次数为 $\frac{m}{2}-1$ 次

中国邮路问题：



邮差送信，经过每条街道至少一次，求最短路径。

抽象成加权图

（1）欧拉图 $\Rightarrow$ 欧拉闭迹

（2）不是欧拉图

（2.1）只有两个度数为奇数的顶点，加的边是两者间的最短路径

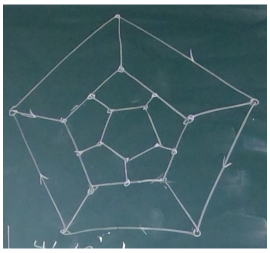
（2.2）度数为奇数的顶点数为 $2m$ $(m>1)$

（a）最短路径

（b）最佳匹配

11.3 哈密尔顿路径与哈密尔顿圈

正十二面体：20个顶点



经过每个顶点恰一次，回到出发点

哈密尔顿路径：经过图中所有顶点的路径

哈密尔顿圈：含所有顶点的圈

哈密尔顿图是 NP 完全问题

$K_n(n\geq 3)$是哈密尔顿圈

定理：有桥的阶 $n\geq 3$ 图不是哈密尔顿图（桥：连通图中的一条边，若将其删除，将得到不连通的图）

证明：设 G 有桥 e，则 $G-e$ 有两个连通分量 G_1,G_2，

若 G 有哈密尔顿圈 C，C 上从 G_1 到 G_2 以及从 G_2 到 G_1 都走过 e，e上顶点重复

不是圈，矛盾

定理：设 G 是哈密尔顿图，$S\subset V(G)$，则 $w(G-S)\leq |S|$，其中 $w-$ 连通分量数

证明：设 C 是 G 的哈密尔顿圈，则 $w(C-S)\leq |S|$ 而 $w(G-S)\leq w(C-S)\leq |S|$

Ore 条件：

任取顶点 $x,y\in V(G)$，都满足 $\deg(x)+\deg(y)\geq \mathrm{n}$

（1）顶点度数普遍高

（2）某个顶点度数低 $\Rightarrow$ 有大度数的顶点很多

定理：若 G 是满足 Ore 条件的阶数$n \geq 3$的简单图，则 G 是哈密尔顿图

证明：（1）先证 G 是连通图

若不然，G 至少有两个连通分量，设为 G_1, G_2

取$u \in V(G_1), v \in V(G_2)$

$\Rightarrow \deg(u) \leq |V(G_1)| - 1, \deg(v) \leq |V(G_2)| - 1$

$\deg(u) + \deg(v) \leq |V(G_1)| - 1 + |V(G_2)| - 1 \leq n - 2$，矛盾

算法：（1）从任意顶点开始，两端不断延伸，找路径，直到不能延长为止，设为

$r: y_1 - y_2 - \cdots - y_m$

（2）检查 y_1 与 y_m 是否邻接：

（i）如果 y_1 与 y_m 不邻接，转（3），否则转（ii）

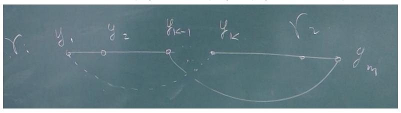
（ii）如果 $m = n$，则算法停止，有哈密尔顿圈

（iii）如果 $m < n$，则存在 r 外的顶点 z 与 r 上某个顶点 y_k 相邻

以 $r_1: z - y_k - \cdots - y_m - y_1 - \cdots - y_{k-1}$ 代替 r，转（2）

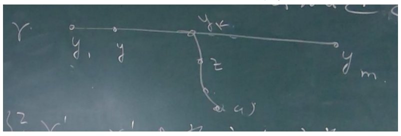
（3）找一个 k，使得 y_1 与 y_k 邻接，y_{k-1} 与 y_m 邻接，

以 $r_2: y_k - \cdots - y_m - y_{k-1} - \cdots - y_1$，代替 r_1，转（ii）



证（iii）可行：图 G 连通，因 $m < n$，除了 r 上顶点外，G 还有顶点 w，因为 G 连通，w 与 $y_1, y_2, \dots, y_m$ 中某顶点之间有路径 r'

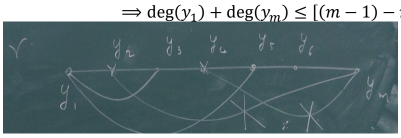
r' 中有两个顶点z, y_k，z 不在 r 上



证（3）可行：若（3）不可行，因为构造 r 时，两端不能延长 $\Rightarrow y_1, y_m$ 相邻的顶点都在 r 上

设 $\deg(y_1) = n_1 \ \Rightarrow \deg(y_m) \leq (m-1) - n_1$

$\Rightarrow \deg(y_1) + \deg(y_m) \leq [(m-1) - n_1] + n_1 = m - 1 \leq n$，矛盾



推论：设 $n \geq 3$ 且 G 中任意顶点 u 的度数 $\deg(u) \geq \frac{n}{2}$，则 G 是哈密尔顿图（G中必存在哈密尔顿圈）

推论：设 $n \geq 3$，G 中任意两个顶点 x, y（二者不邻接），有 $\deg(x) + \deg(y) \geq n - 1$，则 G 有哈密尔顿路径

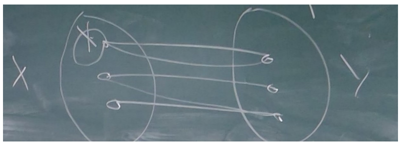
旅行商问题：

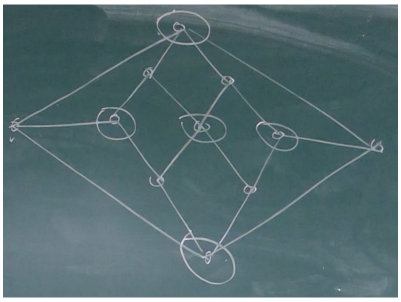
经过所有城市恰一次，回到出发点，求最短路径

11.4 二分多重图

若图 G 的顶点集合分成两个部分 X, Y ($X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$)，使得 X(Y) 内顶点不相邻，称为二分图

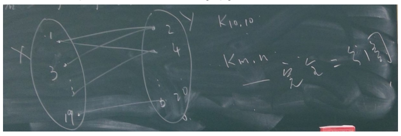
图中允许有重边，不能有环





例：$G = (\{1, 2, \dots, 20\}, E)$

若 $i + j =$ 奇数，连边 $\{i, j\}$



一个有二分 X, Y 的二分图 G 称为完全二分图，如果 X 中的每个顶点与 Y 中的每个顶点都邻接

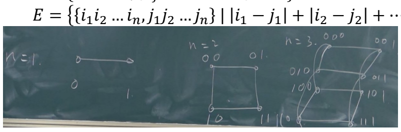
有 m 个左顶点、n 个右顶点的完全二分图记为 $K_{m,n}$

定理：一个多重图是二分的当且仅当它的每一个圈的长度都是偶数

例：n 维立方体 $Q_n = (V, E)$

$V = \{i_1 i_2 \dots i_n \mid i_j = 0, 1, 1 \le j \le n\}$

$E = \{\{i_1 i_2 \dots i_n, j_1 j_2 \dots j_n\} \mid |i_1 - j_1| + |i_2 - j_2| + \dots + |i_n - j_n| = 1\}$



Q_n是二分图：

$V_e = \{i_1\, i_2\, i_3 \dots i_n \mid i_1\, i_2 \dots i_n$ 有偶数个1$\}$

$V_o = \{i_1\, i_2 \dots i_n \mid i_1\, i_2 \dots i_n$ 有奇数个1$\}$

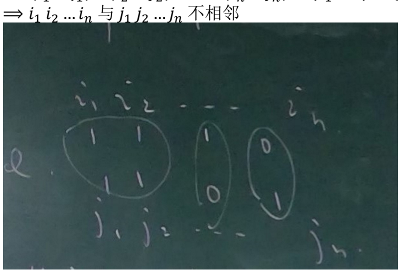
下证 V_e 中的顶点不相邻：

设 $i_1\, i_2 \dots i_n, j_1\, j_2 \dots j_n \in V_e$，则 $i_1\, i_2 \dots i_n, j_1\, j_2 \dots j_n$ 中都恰有偶数个 1，分别为 e_1, e_2 个，e_1, e_2 为偶数

设两者的分量同时为 1 的有 e 个

$\Rightarrow |i_1 - j_1| + |i_2 - j_2| + \dots + |i_n - j_n| = (e_1 - e) + (e_2 - e) = (e_1 + e_2) - 2e =$ 偶数 $\ne 1$

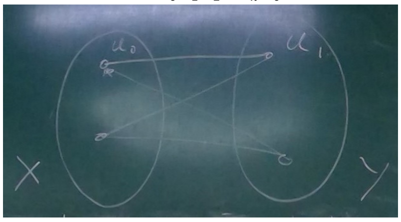
$\Rightarrow i_1\, i_2 \dots i_n$ 与 $j_1\, j_2 \dots j_n$ 不相邻



定理：G 是二分图 $\Leftrightarrow G$ 中无奇阶圈 (阶表示长度)

证明：设 G 的顶点集划分为 X，Y

若 G 中有圈 $C = u_0\, u_1\, u_2 \dots u_k\, u_0$



不妨设 $u_0 \in X$

$\Rightarrow u_1, u_3, \dots, u_k \in Y, u_0, u_2, u_4, \dots \in X$

$\Rightarrow k$ 是奇数，C 的长度是 $k + 1$ 为偶数

"$\Leftarrow$" 设 G 是无奇阶圈的图，不妨设 G 连通

任取 $v_0 \in V(G)$，构造 $X = \{u \mid dist(v_0, u) =$ 偶数$\}$，$Y = \{u \mid dist(v_0, u) =$ 奇数$\}$

则 $X \cap Y = \emptyset$，$X \ne \emptyset$，$Y \ne \emptyset$，且 $V(G) = X \cup Y$

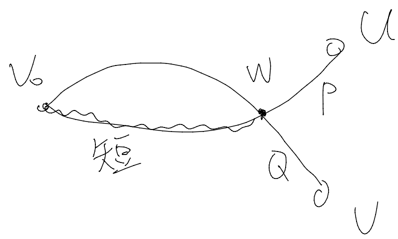
任取 $u, v \in X$，下证 u 与 v 不相邻

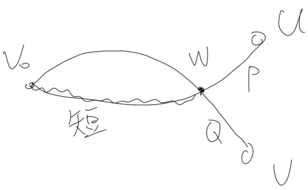
反证：设 u 与 v 相邻，设 v_0 到 u, v 的最短路径分别为 P 与 Q，则 P 与 Q 的长度为偶数

设 w 是 P 与 Q 从 v_0 开始的最后一个公共顶点

$\Rightarrow P(w, u) + Q(w, v) + uv$ 是一个圈

若 $P(v_0, w)$ 比 $Q(v_0, w)$ 短，则 $P(v_0, w) + Q(w, v)$ 是比 $Q(v_0, v)$ 更短的路径，矛盾





同理：$\Rightarrow P(v_0, w)$ 长度 $= Q(v_0, w)$长度

$\Rightarrow P(w, u) + Q(w, v) + uv$ 圈长

$= P(w, u) + Q(w, v) + 1$

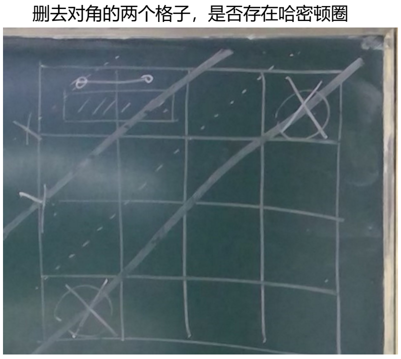
$= [P(v_0, u) - P(v_0, w)] + [Q(v_0, v) - Q(v_0, w)] + 1$

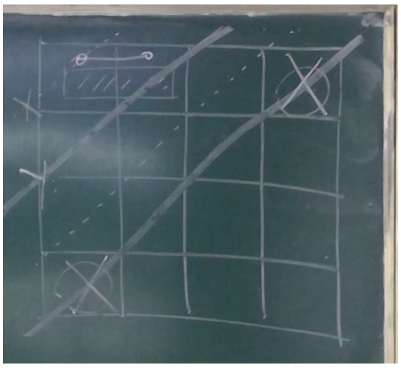
$=$ 奇数

$P(w, u) + Q(w, v) + uv$ 组成一个奇阶圈，矛盾 $\Rightarrow$ X 中顶点不相邻

例：8×8 棋盘有多米诺骨牌覆盖，构造二分图，顶点——格子，边——可用一张牌覆盖，构造的图是二分图

删去对角的两个格子，是否存在哈密顿圈

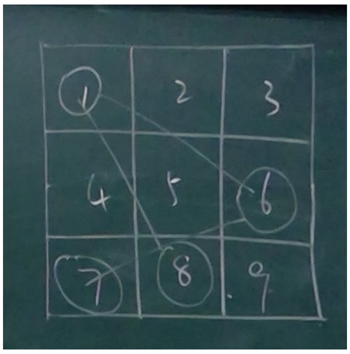




64 个格子：X 中有 32 个，Y 中 32 个，删除对角，Y 中有 30 个顶点

而二分图中有哈密顿圈 $\Rightarrow |X| = |Y|$

例：跳马问题



11.5 树

n 个顶点，连通图至少需要 $n-1$ 条边

结论：（1）n 个顶点连通图的边数 $\geq n-1$

（2）存在 n 个顶点，$n-1$ 条边的连通图

（3）对于 n 个顶点，$n-1$ 条边的连通图 $\Rightarrow$ 每条边都是桥

定义：树——连通且每条边都是桥的图

定理：设 G 是连通图，则 G 是树(连通+每条边是桥)等价于其有 $n-1$ 条边

证明：若 G 有 $n-1$ 条边，则任删一条边 e，边数变为 $n-2$ 条

$\Rightarrow G-e$ 不连通，$\Rightarrow$ e 是桥

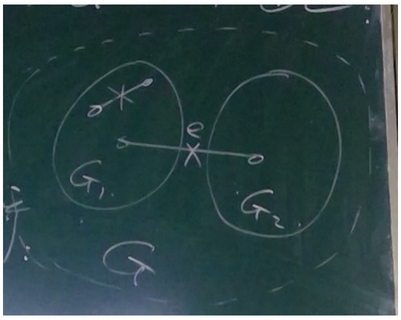
“$\Rightarrow$”设 G 的每条边都是桥

n = 1 边数 = 0

n = 2 边数 = 1

假设对 $n \leq k$ 的图 G 成立，取图 G，顶点数 $n = k+1$，任取边 $e \in E(G)$

考虑图 $G-e$，因为 e 是桥 $\Rightarrow G-e$ 不连通



有两个连通图 G_1, G_2，对于 G_1 来说，任取边 $e_1 \in E(G_1)$

因为 e_1 是 G 的桥 $\Rightarrow e_1$ 是 G_1 的桥 $\Rightarrow$ G_1的边数 = G_1的顶点数 - 1

同理：G_2的边数 = G_2的顶点数 -1

$\Rightarrow$ G 的边数 = G_1 的边数 + G_2的边数 + 1

= (G_1的顶点数 -1) + (G_2的顶点数 -1) + 1

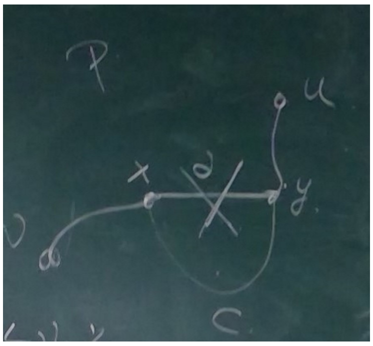
= G 的顶点数 -1

引理：设 a 是 G 的一条边，则 a 是桥 $\Leftrightarrow$ a 不在任何一个圈上

证明：

“$\Rightarrow$”设 a 是桥，$a = xy$

反证：设 a 在圈 C 上



下证：$G-a$ 仍连通

任取 u, v 是 $G-a$ 中的两个顶点

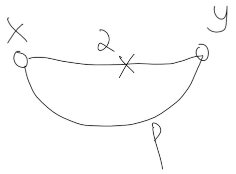
因 G 连通 $\Rightarrow$ u, v 在 G 中有路径 $P(u,v)$

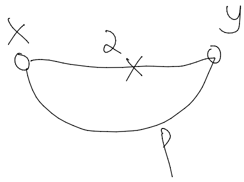
（1）$a \notin E(P)$ $\Rightarrow P$ 仍是 $G-a$ 中的路径 $\Rightarrow u,v$ 在 $G-a$ 中连通

（2）$a \in E(P)$，则 $P(u,v)+C-a$ 是从 u 到 v 的途径，u, v 在 $G-a$ 中连通

矛盾，故 a 不在圈上

“$\Leftarrow$” 设 $a=xy$ 不在圈上





设 a 不是桥 $\Rightarrow G-a$ 仍连通

则在 $G-a$ 中 x, y 连通

从 x 到 y 有路径 $P(x,y)$

$P(x,y)+a$ 是含 a 的圈，矛盾

故 a 是桥

推论：树中无圈

定理：G 是树，等价于 G 中任两个顶点间恰有一条路径，即最短路径

证明：“$\Rightarrow$” 设 G 是树 $\Rightarrow$ G 是连通图：任给两个顶点 u, v，u 到 v 有路径

另一方面，若 u, v 之间有两条不同的路径 $P(u,v), Q(u,v)$

从 P 与 Q 的第一个分叉顶点开始，到下一个公共顶点，构成圈，矛盾

$\Rightarrow$ u, v 之间至多一条路径

$\Rightarrow$ 恰有一条路径

“$\Leftarrow$” 设 G 中任两个顶点间恰有一条路径

任取两个顶点 u, v，u 与 v 之间有路径

$\Rightarrow u,v$ 连通 $\Rightarrow$ G 是连通图

任取一条路径 $a=xy$

则 a 是 x 到 y 的唯一一条路径

$\Rightarrow G-a$ 中无从 x 到 y 的路径

$\Rightarrow G-a$ 不连通 $\Rightarrow a$ 是桥 $\Rightarrow G$ 是树

定理：对于 $n \geq 2$ 的树来说，至少有 2 个叶子（悬挂点）

证明：设 G 是 $n \geq 2$ 的树，其顶点度数序列设为 $d_1, d_2, \dots, d_n$

$\Rightarrow d_1+d_2+\cdots+d_n = 2 \times (n-1)$

对于 $n \geq 2$ 的树，无度数为 0 的顶点

若 G 中至多一个叶子

$\Rightarrow d_1+d_2+\cdots+d_n \geq 1+2\times(n-1) = 2n-1 > 2(n-1)$

矛盾

一般的连通图

（1）无圈 $\Leftrightarrow$ 树

（2）有圈，删除圈上的边，得到无圈连通图——树

定义：设 G 是连通图，设 T 是 G 的生成子图，且 T 是树，则称 T 是 G 的生成树

定理：任意一个连通图都存在生成树

生成树

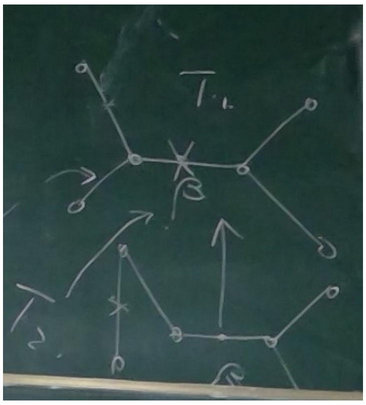
G 是连通图，T 是 G 的生成子图，且为树

定理：设 T 是 G 的生成树，$a \in E(G)$，$a \notin E(T)$，则存在 $b \in E(T)$，使得 $T+a-b$ 仍是 G 的生成树

证明：因为 T 是树 $\Rightarrow$ T 是连通图 $\Rightarrow T+a$ 中含圈 C （a 在 C 上）取 C 上某条边 $b \neq a$

$\Rightarrow$ T + a − b 仍是连通图（圈上边不是桥）$T+a-b$ 的边数为 $n-1 \Rightarrow T+a-b$ 仍是树

定理：设 T_1, T_2 是图 G 的生成树，b 是 T_1 的一条边，则在 T_2 中存在边 a，使得 T_1-b+a 仍是 G 的生成树

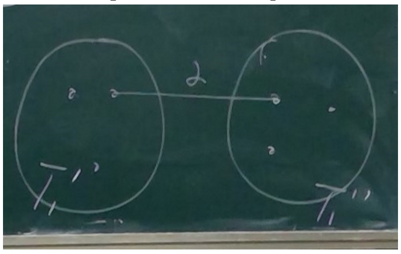


证明：$b \in E(T_1)$ $\Rightarrow T_1 - b$ 不连通，有两个连通片，设为 T_1', T_1''

因为 T_2 是 G 的生成树，T_2 中存在边 a，a 的两个端点分别属于 T_1', T_1''

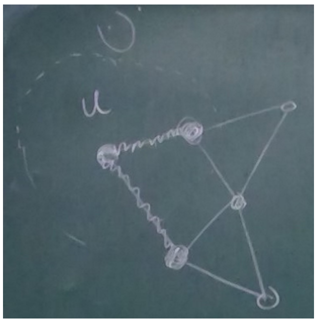
$\Rightarrow T_1 - b + a$ 是连通图，且边数为 $n-1$

故，T_2 中存在边 a，使得 $T_1 - b + a$ 仍是 G 的生成树



11.7 再论树

求生成树算法：



连通图 $G=(V,E), u \in V$

（1） $U=\{u\}, F=\emptyset$

（2）若存在 $x \in U, y \in V-U$，使得 $a=\{x,y\}$，则 $U \leftarrow U \cup \{y\}, F \leftarrow F \cup \{a\}$

（3）$T=(U,F)$

定理：G 是连通图 ⟺ 算法得到的 T 是生成树

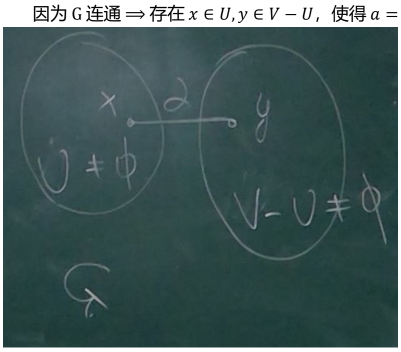
证明：若 T 是生成树 ⟹ G 是有连通生成子图 ⟹ G 是连通图

"⟹" 设 G 是连通图，从算法得到 T 是连通图，且 $|U|=|F|+1 \Rightarrow T$ 是树

下证：在算法结束时，$U=V$

若不然，$U \subset V \Rightarrow V \neq \emptyset, V-U \neq \emptyset$

因为 G 连通 ⟹ 存在 $x \in U, y \in V-U$，使得 $a=\{x,y\} \in E \Rightarrow$ 算法没终止，矛盾



求距离树

边权图：$G=(V,E)$，边权函数 C：$E \rightarrow K^*$

定义路径 r 的长度：

设 $r: x_0 - x_1 - x_2 - \cdots - x_k$

$$c(r)=\sum_{j=0}^{k-1} c(x_j, x_{j+1})$$

求距离树算法：Dijkstra 算法 （u - 距离树）

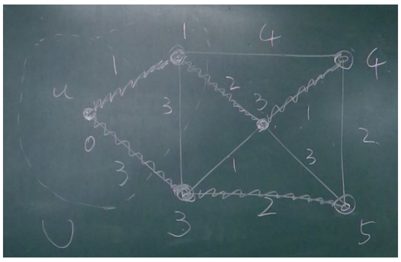
$d(x,y)$表示 x 到 y 的最短距离

算法：（1）$U=\{u\},d(u)=0,F=\emptyset,T=(U,F)$

（2）若存在 U 中顶点与 $V-U$ 中顶点相邻，则选取 $x\in U,y\in V-U$，使得 $d(x)+c(\{x,y\})$ 最小

（3）$U\leftarrow U\cup\{y\},F\leftarrow F\cup\{x,y\},d(y)=d(x)+c(\{x,y\})$

（4）$T=(U,F)$



定理：G 是连通图，则 Dijkstra 算法得到的是一棵生成树 T，且 $D(x)$ 是 G 中 u 到 x 的距离

证明：（1）T 是 G 的生成树（前面定理）

（2）$D(x)$ 是 T 中从 u 到 x 的路径长度

对算法步骤进行归纳：$d(u)=0$ 正确

算法的每一步，$\forall x\in U$，$D(x)$ 是 T 上从 u 到 x 的路径长度，在 U 中加入 y，F 中加入 $a=\{x,y\}$，

原有的从 u 到 x 的路径加上 a 是 u 到 y 的路径 $\Rightarrow D(y)$ 是 T 上从 u 到 y 的路径长度

（3）$\forall x\in V$，$D(x)$ 是 G 中从 u 到 x 的最短路径长度

若不然，存在某个顶点 y，使得 $D(y)$ 大于 u 到 y 的距离 $d(u,y)$，即 $D(y)>d(u,y)$

不妨设 y 是满足 $D(y)>d(u,y)$ 且第一个加入 U 的顶点

设 $r=u-x_0-x_1-\cdots-x_j-x_{j+1}-\cdots-x_k-y$ 是 u 到 y 最短路径

假设 r 上在 y 之前加入 U 的最后一个顶点是 x_j，则 $d(x_j)+c(\{x_j,x_{j+1}\})\le d(u,y)<D(y)$，

$\Rightarrow x_{j+1}$ 先于 y 加入 U，矛盾

最小生成树

求代价最小的连通网络

图论模型：给定边权图 $G=(V,E),C:E\to k^*$，求最小生成树 T

$$c(T)=\sum_{e\in E(T)}c(e)=\min c(T^*)$$

T^* 是 G 的生成树

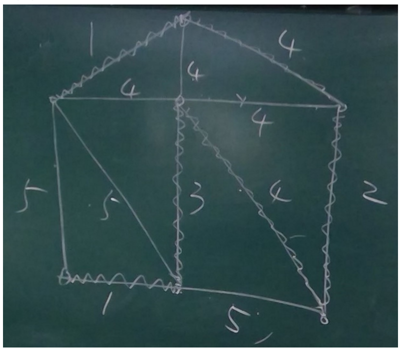
Kruskal 算法：$G=(V,E)$

（1）令 $U=V,F=\emptyset$

（2）若存在不属于 F 的边，加入 F 中之后不产生圈，则取一条满足该条件且权最小的边 a

（3）令 $F\leftarrow F\cup\{a\}$

（4）$T=(V,F)$



选权最小的边：一次选边的时间复杂度 $O(|E|)$，生成树的时间复杂度为 $O(n|E|)$

先对边按权排序：$O(|E|\log|E|)$

定理：若 G 是连通图，则 Kruskal 算法得到的是最小生成树

证明：（1）T 是生成树

首先 T 无圈，若 T 不连通，因为 G 连通，G 中一定存在边，其两个端点不在 T 的同一个连通片，算法不会终止

（2）T 是最小生成树

设 T 的边按权排序为 $a_1,a_2,a_3,\dots,a_{n-1}$

若 T 不是最小生成树，T^* 是最小生成树

设 $a_1,a_2,a_3,\dots,a_{k-1}\in E(T^*)$，但 $a_k\notin E(T^*)$

则 $T^*+\mathrm{a_k}$ 有圈 C，C 上有一条边 b 且 $b\notin E(T)$

令 $T^{**}=T^*+a_k-b$，T^{**} 是 G 的生成树

因为 T^* 是最小生成树 $\Rightarrow c(T^*)\le c(T^{**})=c(T^*)+c(a_k)-c(b)$

$\Rightarrow c(a_k)\ge c(b)$

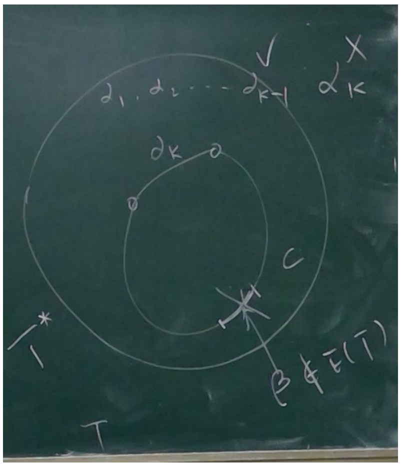
另一方面，$\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_{k-1},a_k\}\subseteq E(T)$ 无圈，$\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_{k-1},b\}\subseteq E(T^*)$ 无圈

由算法知，$c(a_k)\le c(b)$

$\Rightarrow c(a_k)=c(b)$

$\Longrightarrow c(T^{**}) = c(T^{*})$

T^{**} 是最小生成树，最后，多次调整，使 $T^{**} = T$



Prime 算法和正确性证明见书 P277

Chap 11: 2，4，8，11

Chap 11: 29，35，41，43，44

Chap 11: 46，47，50，62，64

Chap 11: 79，86，91