第6章 容斥原理

2021年4月1日　　10:51

6.1 容斥原理

设S是有限集合，P_1，P_2是S中元素的性质，A_1，A_2分别是具有P_1，P_2性质的元素集合，则S中既没有性质P_1也没有性质P_2的元素个数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

证明：对任意$x \in S$，证明它对等号左右两边贡献始终相等

$\forall x \in S$

（1）$x \in \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$，对左边贡献 $= 1$

$x \in \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \Longrightarrow x \notin A_1$且$x \notin A_2 \therefore x \notin A_1 \cap A_2$，对右边贡献 $= 1 - 0 - 0 + 0 = 1$

（2）$x \notin \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$，对左边贡献 $= 0$

$x \notin \overline{A_1 \cup A_2} \Leftrightarrow x \in A_1 \cup A_2$

（2.1）$x \in A_1$但$x \notin A_2$，$x \notin A_1 \cap A_2$

右边$= 1 - 1 - 0 + 0 = 0$

（2.2）$x \notin A_1$但$x \in A_2$，$x \notin A_1 \cap A_2$

右边$= 1 - 0 - 1 + 0 = 0$

（2.3）$x \in A_1$且$x \in A_2$，$x \in A_1 \cap A_2$

右边$= 1 - 1 - 1 + 1 = 0$

设S是有限集合，P_1，P_2，…，P_m是S中元素的性质，A_1，A_2，…，A_m分别是具有P_1，P_2，…，P_m性质的元素集合，则S中没有性质P_1，P_2，…，P_m的元素个数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}| = |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^t \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_t} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_t}| + \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

证明：$\forall x \in S$

（1）x恰有0个性质，$x \in \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}$

左边 $= 1$

右边 $= 1 - 0 + 0 - \ldots = 1$

（2）x恰有m个性质，$x \in A_1, \ldots, A_m$

左边 $= 0$

$$\begin{aligned}
\text{右边} &= 1 - m \cdot 1 + C_m^2 \cdot 1 - C_m^3 + \cdots + (-1)^t C_m^t + \cdots + (-1)^m C_m^m \\
&= C_m^0 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \cdots + (-1)^t C_m^t + \cdots + (-1)^m C_m^m \\
&= (1 + x)^m = (1 - 1)^m = 0
\end{aligned}$$

（3）x恰有$t(< m)$个性质

左边 $= 0$

$$\begin{aligned}
\text{右边} &= 1 - C_t^1 + C_t^2 - C_t^3 + \cdots + (-1)^k C_t^k + \cdots + (-1)^t C_t^t \\
&= (1 + x)^t = (1 - 1)^t = 0
\end{aligned}$$

$|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_m}|$：一个性质都没有

$|A_1 \cup \cdots \cup A_m|$：至少有一个性质

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_m| = |S| - |\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_m}| = (|A_1| + \cdots + |A_m|) - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots$$

例1：1~1000不能被5，6，8整除的个数

解：$S = \{1, 2, \ldots, 1000\}, |S| = 1000$

P_1: 能被5整除 $|A_1| = \dfrac{1000}{5} = 200$

P_2: 能被6整除 $|A_2| = \left\lfloor \dfrac{1000}{6} \right\rfloor = 166$

P_3: 能被8整除 $|A_3| = \left\lfloor \dfrac{1000}{8} \right\rfloor = 125$

$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \dfrac{1000}{30} \right\rfloor = 33$, $|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \dfrac{1000}{24} \right\rfloor = 41$, $|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \dfrac{1000}{40} \right\rfloor = 25$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \dfrac{1000}{120} \right\rfloor = 8$

所求为$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 41 + 25) - 8 = 600$

例2：M, A, T, H, I, S, F, U, N的所有排列中MATH, IS, FUN不出现的个数

解：S = 9个字符的全排列

P_1: $MATH$出现 $\dashrightarrow |A_1| = 6!$

P_2: IS出现 $\dashrightarrow |A_2| = 8!$

P_3: FUN出现 $\dashrightarrow |A_3| = 7!$

$|A_1 \cap A_2| = 5!, |A_1 \cap A_3| = 4!$, $|A_2 \cap A_3| = 6!$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3!$

所求为$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

例3：0~99999有多少含2，5，8的数字

解：S：0~99999

P_1: 不含2 $\dashrightarrow |A_1| = 9^5$

P_2: 不含5 $\dashrightarrow |A_2| = 9^5$

P_3: 不含8 $\dashrightarrow |A_3| = 9^5$

$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = 8^5, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 7^5$

所求为$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 10^5 - 3 \times 9^5 + 7^5$

6.2 带重复的组合

例1：$T = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$的10组合数

解：$|S| = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$的10组合数 $= C_{10+3-1}^{10}$

P_1: a的个数至少为4 $\dashrightarrow |A_1| = C_{6+3-1}^{6}$

P_2: b的个数至少为5 $\dashrightarrow |A_2| = C_{5+3-1}^{5}$

P_3: c的个数至少为6 $\dashrightarrow |A_3| = C_{4+3-1}^{4}$

$|A_1 \cap A_2| = C_{1+3-1}^{1} = 3, |A_1 \cap A_3| = C_{0+3-1}^{0} = 1$, $|A_2 \cap A_3| = 0$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

所求为$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$

6.3 错位排列

1~n全排列$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$，满足$i_1 \neq 1, i_2 \neq 2, \ldots, i_n \neq n$

错排数 D_n

$D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 9$

1. $D_n = n!\left(1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n!}\right)$

pf1(容斥原理):

S: 1~n的全排列，$|S| = n!$

P_i: 第i个位置是i，$(i = 1, 2, \ldots, n)$

所求即为$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|$

$|A_i| = 1 \cdot (n-1)!$，$(i = 1, 2, \ldots, n)$

$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

…

$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$，$(1 \le k \le n)$

…

$|A_i \cap \cdots \cap A_n| = (n-n)! = 1$

$$\begin{aligned}
\therefore D_n &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^k \sum |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots + (-1)^n |A_i \cap \cdots \cap A_n| \\
&= n! - n \cdot (n-1)! + C_n^2 (n-2)! + \cdots + (-1)^k C_n^k (n-k)! + \cdots + (-1)^n C_n^n (n-n)!
\end{aligned}$$

$$\because C_n^k (n-k)! = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!}$$

$$\begin{aligned}
\therefore D_n &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{n!}{k!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\
&= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right)
\end{aligned}$$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$

$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} + \cdots$

$e^{-1} \approx \frac{D_n}{n!}$，$\left(\left|e^{-1} - \frac{D_n}{n!}\right| < \frac{1}{(n+1)!}\right)$

pf2(递推关系):

首位是2, 3, 4, ..., n的n阶错排

$D_n = (n-1)d_n$，d_n: 首位是2的n阶错排数

（1）1在第2位

3~n填入第3~n位，原问题缩小为n-2个数字，即D_{n-2}

（2）1不在第2位

1, 3~n填入2~n位，原问题缩小为n-1个数字，即D_{n-1}

由上可知，$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

$n! = n(n-1)!$

$n! = (n-1)((n-2)! + (n-1)!)$

例：n男n女

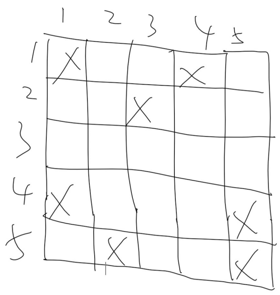
（1）n位女士选舞伴：$n!$

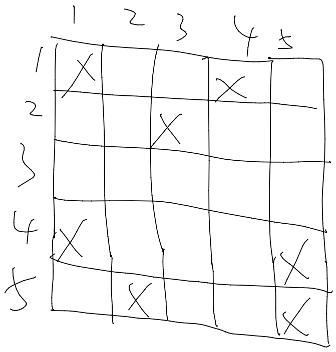
（2）每人换舞伴：D_n

（3）每人拿到帽子：$n! \cdot n!$ (区分男女帽式)，$(2n)!$ (不区分)

（4）没有人拿到自己的帽子：$D_n \cdot D_n$(区分)

6.4 带有禁止位置的排列





上图：$x_1 = \{1,4\}, x_2 = \{5\}, x_3 = \{2\}, x_4 = \{1\}, x_5 = \{4,5\}$

问题：1~n的全排列，$x_1, \ldots, x_n \subseteq \{1, \ldots, n\}$，求1~n的全排列$i_1, \ldots, i_n$个数，使$i_1 \notin x_1, i_2 \notin x_2, \ldots, i_n \notin x_n$

个数记为$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

错排$D_n = P(\{1\}, \ldots, \{n\})$

定理6.4.1：将n个非攻击型不可区分的车放到带有禁止位置的n行n列棋盘上的放置方法数为

$n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! + \cdots + (-1)^k r_k(n-k)! + \cdots + (-1)^n r_n(n-n)!$

其中，r_i 等于棋盘上禁止放置 i 个车的方格的个数

解法(容斥原理)：

S: 1~n全排列，$|S| = n!$

P_i: 第i位放置x_i中元素，$(i = 1, 2, \ldots, n)$

所求为$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|$

$|A_i| = |x_i| \cdot (n-1)!$

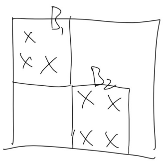
r_1: 1个字符放在1个禁止位置的方法数，$r_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

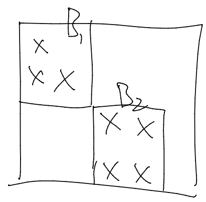
r_2: 2个字符放在2个禁止位置的方法数，r_2 = 不同行不同列2个"X"的组合数

r_k: k个字符放在k个禁止位置的方法数，$\mathrm{r_k}$ = k个不同行不同列的"X"的组合数

$\therefore |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! + \cdots + (-1)^k r_k(n-k)! + \cdots + (-1)^n r_n(n-n)!$

r_k的计算：划分棋盘为行列不交的小棋盘(行, 列 ≤ 3)





如上图，$B_1: r_1 = 3, r_2 = 1, r_3 = r_4 = \cdots = 0$

$B_2: r_1 = 4, r_2 = 2, r_3 = r_4 = \cdots = 0$

$\therefore$ 对棋盘B: $r_1 = 3 + 4$

$r_2 = 1 + 2 + 3 \times 4$，B_1取2个或$\mathrm{B_2}$取2个或$\mathrm{B_1, B_2}$各取一个

$r_3 = 3 \times 2 + 1 \times 4$，$B_1$取2个, B_2取1个或B_1取1个, B_2取2个

$r_4 = 1 \times 2$，B_1取2个, B_2取2个

另一种禁止位置问题

1~n的全排列，不要出现12, 23, ..., (n-1)n的排列数

解(容斥原理)：

S: 1~n全排列，$|S| = n!$

P_i: $i(i+1)$出现，$i = 1, 2, \ldots, n-1$

所求为$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}}|$

$|A_i| = (n-1)!$

$|A_i \cap A_j|$:

（1）$j = i + 1: (n-2)!$

（2）$j > i + 1: (n-2)!$

$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$

$\overbrace{i_1(i_1+1) \quad i_2(i_2+1) \quad \ldots \quad i_k(i_k+1) \qquad n-2k\text{剩余}}^{k+(n-2k)=n-k}$

重合t次，$(k-t) + (n-2k+t) = n-k$

$Q_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}}| = n! - C_{n-1}^1(n-1)! + C_{n-1}^2(n-2)! + \cdots + (-1)^k C_{n-1}^k(n-k)! + \cdots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1}(n-n)!$

$Q_1 = 1, Q_2 = 1, Q_3 = 3, Q_n = D_n + D_{n-1}$

Chap6: 1, 9

Chap6: 15, 24c, 28