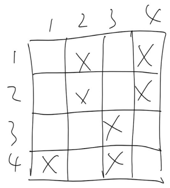
第9章 相异代表系

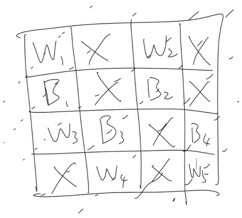
2021年4月29日　　9:48

例：1. 残缺的格子不能放
2. 不同行不同列



第1行 $A_1 = \{1,3\}$
第2行 $A_2 = \{1,3\}$
第3行 $A_3 = \{1,2,4\}$
第4行 $A_4 = \{2,4\}$
车不同行：每个集合选一个元素
车不同列：不同集合选不同元素
问题：$Y = \{1,2,3,4\}$，$A_1, A_2, A_3, A_4 \subseteq Y$，选 $e_1 \in A_1, e_2 \in A_2, e_3 \in A_3, e_4 \in A_4$，$e_1, e_2, e_3, e_4$互不相同

例：多米诺骨牌覆盖，残缺的棋盘如下，用1×2棋子覆盖
1. 不能覆盖残缺位置
2. 骨牌不能重叠



$W_1 \Rightarrow A_1 = \{B_1\}$
$W_2 \Rightarrow A_2 = \{B_2\}$
$W_3 \Rightarrow A_3 = \{B_1, B_3\}$
$W_4 \Rightarrow A_4 = \{B_3\}$
$W_5 \Rightarrow A_5 = \{B_4\}$
$Y = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$
$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \subseteq Y$
1. 集合A_i，不能覆盖残缺块
2. 每个集合选一个元素$\Longrightarrow$ 白色块不重叠
3. 每个集合选的元素不同$\Longrightarrow$ 黑色块不重叠

例：工作分配问题
员工：x_1, x_2, x_3, x_4
工作：y_1, y_2, y_3, y_4
$x_1: y_1, y_3 \quad \Longrightarrow A_1 = \{y_1, y_3\}$
$x_2: y_1, y_3 \quad \Longrightarrow A_2 = \{y_1, y_3\}$
$x_3: y_1, y_2, y_4 \quad \Longrightarrow A_3 = \{y_1, y_2, y_4\}$
$x_4: y_2, y_4 \quad \Longrightarrow A_4 = \{y_2, y_4\}$

定义（相异代表系）：集合$Y-$基集，子集族 $A_1, A_2, \dots, A_n$，$A_i \subseteq Y, (i = 1, 2, \dots, n)$，取 $e_1 \in A_1, e_2 \in A_2, \dots, e_n \in A_n$
1. $e_1, e_2, \dots, e_n$是$H = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$的代表系
2. 若$e_1, e_2, \dots, e_n$互不相同，称是相异代表系

例：$A_1 = \{a,b\}, A_2 = \{a,b\}, A_3 = \{a,b\}, A_4 = \{a,b,c,d\}$
$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |\{a,b\}| = 2$

若$A_1, A_2, \dots, A_n$有相异代表系$e_1, e_2, \dots, e_n$
$\Rightarrow \{e_1, e_2, \dots, e_k\} \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$
$\Rightarrow K = |\{e_1, e_2, \dots, e_k\}| \le |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k|$

婚配条件（MC）：
$A_1, A_2, \dots, A_n$有相异代表系，则任意 $1 \le k \le n$ 以及任意 $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$,都满足：$\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}\right| \ge k$

定理：给定基集 Y 上一个子集族 $H = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$，则 H 有相异代表系
$\Leftrightarrow$ 任给$1 \le k \le n$ 以及任意 $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$，都满足：$\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}\right| \ge k$
证明：“$\Longrightarrow$”已解释
“$\Longleftarrow$”对 n 作归纳：
$n = 1$，有代表系：$e_1 \in A_1 \Longrightarrow |A_1| \ge |\{e_1\}| = 1$
假设对小于等于 $n-1$ 集合，结论成立
下证，对 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 成立

严格空间：存在 k 个子集合 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$，使得$\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}\right| = k$

不妨设 $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = k$

令 $E = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$

由归纳假设 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 有相异代表系 $e_1, e_2, \dots, e_k \Rightarrow E = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$

下面考虑：$A_{k+1} \setminus E$, $A_{k+2} \setminus E$, $A_{k+3} \setminus E, \dots, A_n \setminus E$ ("\"表示集合减操作)

证明其有相异代表系

从 $A_{k+1} \setminus E$, $A_{k+2} \setminus E$, $A_{k+3} \setminus E, \dots, A_n \setminus E$ 中任取 l 个集合，设为 $A_{i_1} \setminus E, A_{i_2} \setminus E, \dots, A_{i_l} \setminus E$

取 $A_{i_1} \setminus E, \dots, A_{i_l} \setminus E, A_1, A_2, \dots, A_k$

由假设：$\left|(A_{i_1} \setminus E) \cup \dots \cup (A_{i_l} \setminus E) \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k\right|$
$= \left|\left[(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_l}) \setminus E\right] \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k\right|$
$= \left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_l} \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k\right| \ge k + l$

而 $\left|(A_{i_1} \setminus E) \cup \dots \cup (A_{i_l} \setminus E) \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k\right|$
$= \left|(A_{i_1} \setminus E) \cup \dots \cup (A_{i_l} \setminus E)\right| + |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k|$
$= \left|(A_{i_1} \setminus E) \cup \dots \cup (A_{i_l} \setminus E)\right| + k$

由上可知

$\Rightarrow \left|(A_{i_1} \setminus \mathrm{E}) \cup \cdots \cup (A_{i_l} \setminus \mathrm{E})\right| \geq l$
$\Rightarrow A_{k+1} \setminus \mathrm{E}, \quad A_{k+2} \setminus \mathrm{E}, \quad A_{k+3} \setminus \mathrm{E}, \quad \dots, \quad A_n \setminus \mathrm{E}$ 有相异代表系：$f_{k+1}, \dots, f_n$
$\Rightarrow e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_n$ 是 $A_1, \dots, A_n$ 的相异代表系

定理：设 $H = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ 是基集 Y 的子集族，设 t 是 $0 \leq t \leq n$ 整数，则 H 中能取出 t 个子集合，这些子集合有相异代表系，
当且仅当，任给 $k \geq n - t$，以及任意 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$，都满足 $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right| \geq k - (n - t)$
解释：$\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right| \geq k - (n - t)$
$\Leftrightarrow \left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right| + (n - t) \geq k$
$\underbrace{|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t|}_{k}$，若不够则从 $A_{t+1}, A_{t+2}, \dots, A_n$中选 {\$_{t+1}},{\$_{t+2}},…,{\$_n}加入
证明：取 $F = \{f_1, \dots, f_{n-t}\}$，其中 $\mathrm{f_i} \notin A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，令 $\mathrm{A_i^*} = \mathrm{A_i} \cup F$
下面证明：$A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*$有相异代表系 $\Leftrightarrow A_1, \dots, A_n$ 中可以选出 t 个集合 $A_1, A_2, \dots, A_t$ 有相异代表系
$A_1, A_2, \dots, A_t$ 有相异代表系 $\mathrm{e_1, e_2}, \dots, e_t$
$\Rightarrow e_1, e_2, \dots, e_t, f_1, f_2, \dots, f_{n-t}$ 是 $A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*$ 的相异代表系
设 $A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*$ 有相异代表系 $\mathrm{e_1, e_2, \dots, e_n}$
则 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$，令 $\mathrm{E^* = E - F}$
$\Rightarrow |E^*| = |E| - |F| \geq t$
$\Rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少可选出 t 个子集合它有相异代表系
$A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*$ 有相异代表系 $\Leftrightarrow$ 任给 k，以及 $1 \leq \mathrm{i_1} < \mathrm{i_2} < \cdots < \mathrm{i_k} \leq \mathrm{n}$，都满足
$\left|A_{i_1}^* \cup A_{i_2}^* \cup \cdots \cup A_{i_k}^*\right| \geq k$
$\Leftrightarrow \left|(A_{i_1} \cup F) \cup (A_{i_2} \cup F) \cup \cdots \cup (A_{i_k} \cup F)\right| \geq k$
$\Leftrightarrow \left|(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_n}) \cup F\right| \geq k$
$\Leftrightarrow \left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_n}\right| + |F| \geq k$
$\Leftrightarrow \left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_n}\right| \geq k - |F| = k - (n - t)$

推论：设 $H = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ 是基集 Y 上的相异代表系，其中，一些集合有相异代表系的最大子集合数为
$\min\{\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right| + (n - k)\}$
其中 $1 \leq k \leq n, 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$
证明：有 t 个子集合有相异代表系
$\Leftrightarrow$ 对任意 $\mathrm{k \geq n - t}$，都有 $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right| \geq k - (n - t)$
$\Leftrightarrow \left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right| + (n - k) \geq t$
取 t 最大值 $\Leftrightarrow$ 对上面的左式取最小值

稳定婚姻：
有 n 个男士 $a_1, a_2, \dots, a_n$
有 n 个女士 $A_1, A_2, \dots, A_n$
每位男士对女士有排序，每位女士对男士有排序，按排序婚配关系
稳定婚姻关系：任意两个男士a, b，两个女士A, B
婚配关系不能出现：a 配 A，b 配 B，使得 a 在 A 与 B 中，a 更喜欢 B，
B 在 a 与 b 中，B更喜欢 a，
问题描述：
$A = (a_{i,j}, b_{i,j})_{n \times n}$ 表示婚配关系的喜好（优先级）
$a_{i,j}$——a_i喜欢A_j的排序（优先级）
$b_{i,j}$——A_j喜欢a_i的排序（优先级）

例：2为男士m_1, m_2，两位女士w_1, w_2

$$\begin{array}{c|cc} & m_1 & m_2 \\ \hline w_1 & (1,2) & (2,2) \\ w_2 & (2,1) & (1,1) \end{array}$$

稳定婚配：$w_1 - m_1, w_2 - m_2$

例：

$$\begin{array}{c|ccc} & m_1 & m_2 & m_3 \\ \hline w_1 & (1,3) & (2,2) & (3,1) \\ w_2 & (3,1) & (1,3) & (2,2) \\ w_3 & (2,2) & (3,1) & (1,3) \end{array}$$

稳定：$w_1 - m_1, w_2 - m_2, w_3 - m_3$
$m_1 - w_2, m_2 - w_3, m_3 - w_1$

定理：每个排序矩阵，都有稳定的婚配：延迟认可算法（女士优先）
1. 每一位女士标记为"拒绝"
2. 每一位女士从没有拒绝过她的男士中选取排序最高者
3. 每一位男士在所有选择他并且他尚未拒绝的女士中挑选被他排名最高位的女士，对她推迟做决定（并移除她的拒绝状态），与此同时拒绝其他女士

例：

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline A & (1,2) & (2,1) & (3,2) & (4,1) \\ B & (2,4) & (1,2) & (3,1) & (4,2) \\ C & (2,1) & (3,3) & (4,3) & (1,4) \\ D & (1,3) & (4,4) & (3,4) & (2,3) \end{array}$$

算法过程：
（1）A 选择 a，B 选择 b，C 选择 d，D 选择 a；a 拒绝 D

（2）D 选择 d；d 拒绝 C
（3）C 选择 a；a 拒绝 A
（4）A 选择 b；b 拒绝 B
（5）B 选择 a；a 拒绝 B
（6）B 选择 c
稳定婚姻：$A-b, B-c, C-a, D-d$

定理：延迟算法得到的是稳定婚姻
证明：设延迟算法配对为$A-a, B-b$，
设对于 a，b，A 更喜欢 b，下面证明，对于 A，B 来说，b 一定更喜欢 B
因为 A 更喜欢 b，在选 a 之前，A 一定曾经选过 b，但 b 拒绝了 A，
即在 b 拒绝 A 的时候，一定有一个排序高于 A 的 X，X 选择了 b。
对于 b 来说，$B \geq X > A$
所以相对于 A，B 来说，b 更喜欢 B。

例：

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & a & b & c \\
\hline
A & (1,3) & (2,2) & (3,1) \\
B & (3,1) & (1,3) & (2,2) \\
C & (2,2) & (3,1) & (1,3)
\end{array}
$$

O：女士优先
Δ：男士优先

定理：通过延时认可算法，女士优先算法对每位女士来说都是最优的
证明：若存在稳定婚姻，男士 M 与女士 W 配对，则定义 M 对 W 是合适的。
下面证明：曾经拒绝过 W 的所有男士对 W 都是不合适的。
对步数归纳：
（1）第一步：A，B 都选择男士 a，a 偏向于 B，a 拒绝了 A。
下面说明：任何 $A-a$ 配对的婚姻都不稳定。
设 B 最后与 X 配对，相对于 X 来说，B 更喜欢 a，是不稳定的。

Chap 9: 1, 6, 10, 19
Chap 9: 17

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & a & b & c \\
\hline
A & (1,3) & (2,2) & (3,1) \\
B & (3,1) & (1,3) & (2,2) \\
C & (2,2) & (3,1) & (1,3)
\end{array}
$$