第3章 鸽巢原理

2021年3月16日　　8:50

3.1 简单形式

1. 将n+1个物品放入n个盒子，则至少有一个盒子中有2个或更多的物品

   反证：每个盒子有x个物品，$x_1 \le 1$

   　　物品数$= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le 1 + 1 + \cdots + 1 = n$

   　　与n+1个物品矛盾

   至少有2个对象具有相同的性质

   例1：13个人至少有2个人生日在同一月

   解：13个人放入12个盒子中

   例2：n对夫妇，从这2n个人中至少选多少人能选出一对夫妇？

   解：（1）选n+1个人，由鸽巢原理，至少有一个盒子有2个人，可选出一对夫妇

   　（2）若选n个人，只选n位女士，不能选出一对夫妇

   例3：m个整数$a_1, \dots, a_m$，则存在k和l，使得$a_{k+1} + \cdots + a_l$能被m整除

   解：令$S_1 = a_1$

   　　$S_2 = a_1 + a_2$

   　　…

   　　$S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$

   　（1）$\exists S_i$，使$m|S_i$，即$k = 0$，$l = i$，$m|(a_1 + \cdots + a_i)$

   　（2）否则，S_i除以m的余数设为r_i，$r_i > 0$

   　　　m个余数r_1，r_2，…，r_m取值范围：1，2，…，$m-1$

   　　　即m个数只能取m-1个值

   　　　由鸽巢原理，至少有2个余数取值相等

   　　　即$\exists i$，j，使$r_i = r_j$，$m|S_j - S_i$，即$m|(a_{i+1} + \cdots + a_j)$即$k = i$，$l = j$

   例4：在边长为1的正方形中任选5个点，存在2个点距离$\le \frac{\sqrt{2}}{2}$

   解：将正方形均分成4个小正方形，5个点中存在2个点落在同一个小正方形中

   例5：11周，每天至少一盘棋，每周不超过12盘，则存在连续一段时间恰好下了21盘棋

   解：a_i：第i天下了a_i盘棋，$i = 1,2,\dots,77$

   　　$b_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$，前i天的总数

   　　问题求$a_{i+1} + \cdots + a_j = 21$，即$b_j - b_i = 21 \Rightarrow b_j = b_i + 21$

   　　考察：$b_1, b_2, \dots, b_{77}$，$b_1 + 21, b_2 + 21, \dots, b_{77} + 21$

   　　已知$a_i \ge 1, 1 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_{77} \le 132 < 153$

   　　　$22 \le b_1 + 21 < b_2 + 21 < \cdots < b_{77} + 21 \le 153$

   　　即154个对象$b_1, b_2, \dots, b_{77}$，$b_1 + 21, b_2 + 21, \dots, b_{77} + 21$

   　　只能在153个值中取值：1，2，….，153

   　　由鸽巢原理，必有2个对象相等

   　　$\because b_1, \dots, b_{77}$严格递增，$b_1 + 21, \dots, b_{77} + 21$严格递增

   　　$\therefore \exists i, j$，使得$b_j = b_i + 21$

   　　$\therefore a_{i+1} + \cdots + a_j = 21$

   例6：1~200选101个整数，则选出的数中必有2个数，其中一个被另一个整除

   解：设$a_i = 2^{s_i} \times r_i$，其中$2 \nmid r_i$，$i = 1, 2, 3, \dots, 101$

   　　这101个r_i只能取值：$1, 3, \dots, 199$(100个数)

   　　$\therefore$由鸽巢原理，存在i, j，使得$r_i = r_j$

   　　$a_i = 2^{s_i} \times r_i$　　若$s_i < s_j$，则$a_i | a_j$

   　　$a_j = 2^{s_j} \times r_j$　　　$s_i > s_j$，则$a_j | a_i$

   例7：中国剩余定理

   　　$\begin{cases} x \equiv a \ (mod\ m) \\ x \equiv b \ (mod\ n) \end{cases}$

   　　若m与n互素，$\forall a, 0 \le a \le m-1, \forall b, 0 \le b \le n-1$

   　　则存在整数x使得$x = pm + a$且$x = qn + b$

   证：形如$km + a$，例如$a, m + a, 2m + a, \dots, (n-1)m + a$

   　　是否$\exists p$，使得$pm + a$除以n余数恰好为b

   　　令r_i为他们除以n的余数，$i = 0, \dots, n-1$，则$0 \le r_i \le n-1$

   　（1）若存在$r_p = b$，即$pm + a = qn + b$

   　（2）否则，$r_p \ne b$，则n个余数$r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$只能取$n-1$个值：$\{0, 1, \dots, n-1\} - \{b\}$

   　　　$\therefore \exists r_i = r_j$，使得$n|(im + a) - (jm + a)$，即$n|(i - j)m$

   　　　又$\because$n与m互素$\Rightarrow n|i - j$

   　　　又$\because 0 \le i, j \le n-1 \Rightarrow 1 \le i - j \le n-1$

   　　　$\therefore n \nmid i - j$矛盾

   　　　故只有（1）成立

2. 将$q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1$个物品放入n个盒子

   则第一个盒中有$\ge q_1$个物品

   或第二个盒中有$\ge q_2$个物品

   …

   或第n个盒中有$\ge q_n$个物品

   反证：若都不满足

   　　物品数$\le (q_1 - 1) + (q_2 - 1) + \cdots + (q_n - 1)$

   　　　$= q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n$　矛盾

   推论1：$q_1 = q_2 = \cdots = 2$：鸽巢原理

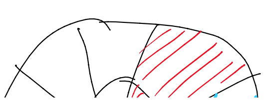
   　　$2n - n + 1 = n + 1$个物品

   推论2：$q_1 = q_2 = \cdots = q_n = r$

   　　将$(r-1)n + 1$个物品放入n个盒子，则至少有1个盒子有$\ge r$个物品

   变形：将m个物品放入n个盒子，则至少有一个盒子中有$\ge \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$个物品

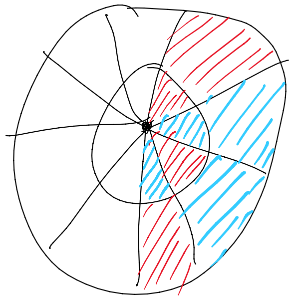
   　　$\left\lceil \frac{(r-1)n + 1}{n} \right\rceil = \left\lceil r - 1 + \frac{1}{n} \right\rceil = r$



将$(r-1)n+1$个物品放入n个盒子，则至少有1个盒子有$\ge r$个物品

变形：将m个物品放入n个盒子，则至少有一个盒子中有≥$\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$个物品

$\left\lceil \frac{(r-1)n+1}{n} \right\rceil = \left\lceil r-1+\frac{1}{n} \right\rceil = r$



例1：为使篮子中要么至少有8个苹果，要么至少6个香蕉，要么至少9个橘子，则篮子中至少放多少水果？

解：$8+6+9-3+1=21$

若取20个水果，可能出现7苹果，5香蕉，8橘子，故小于21个做不到

例2：2个大小碟子各等分成200个扇形，大碟子：任选100个着红色，100个蓝色；小碟子任意着红、蓝色，个数无限制

则存在某次扇形对齐时必有至少100个扇形同色

解：大碟固定，小蝶旋转，每次$\theta = \frac{2\pi}{200} = \frac{\pi}{100}$

$\therefore$ 有200次扇形对齐的位置

对每个小扇形（小蝶），200次对齐位置恰同色100次

$\therefore$ 200个小扇形在200次对齐位置，共同色$100 \times 200 = 20000$次

$\therefore$ 相当于20000次同色，分布在200次对齐位置中

则由鸽巢原理的加强形式，至少有一次对齐位置中，大小扇形同色≥$\frac{20000}{200} = 100$次

例3：n^2+1个实数组成序列$a_1,\dots,a_{n^2+1}$，（例如，$2, 0.2, -1, -3, 5, -6, 8, 2, -2, 4$）

则要么有长度为$n+1$的递增子序列，要么有n + 1的递减子序列

解：假设没有长度为n+1的递增子序列

m_i：以a_i为首的最长递增子序列长度，$i=1,2,3,\dots,n^2+1$

$1 \le m_i \le n$

即n^2+1个$\mathrm{m_i}$只能取n个值：$1,2,3,\dots,\mathrm{n}$

则至少$\left\lceil \frac{n^2+1}{n} \right\rceil = \mathrm{n}+1$个$m_i$值相等

不放设为$m_{i_1} = m_{i_2} = \cdots = m_{i_{n+1}} = \mathrm{m}$，$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1} \le n^2+1$

即以$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n+1}}$为首的最长递增子序列长度相同

假设对于某个$i=1,2,3,\dots,n$，有$a_{k_i} < a_{k_{i+1}}$那么，由于$k_i < k_{i+1}$，我们可做成一个从a_{k+1}

开始的最长的递增子序列，并将a_{k_i}放在前面而得到一个从a_{k_i}开始的递增子序列

由于这意味着$m_{k_i} > m_{k_{i+1}}$，因此我们得出$a_{k_i} \ge a_{k_{i+1}}$的结论

由于这对于每一个$i=1,2,3,\dots,n$均成立，则

$a_{k_1} \ge a_{k_2} \ge \cdots \ge a_{k_{n+1}}$

从而得出$a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_{n+1}}$是一个长度为n + 1的递减子序列

Chap3: 4,10,17