



中国科学技术大学 计算机科学与技术系
University of Science and Technology of China
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND TECHNOLOGY

算法设计与分析

Design and Analysis of Algorithms

主讲人 徐云

Fall 2018, USTC



Part 1 Foundation

Part 2 Sorting and Order Statistics

Part 3 Data Structure

chap 10 Elementary Data Structures

chap 11 Hash Tables

chap 12 Binary Search Trees

chap 13 Red-Black Trees

chap 14 Augmenting Data Structures

Part 4 Advanced Design and Analysis Techniques

Part 5 Advanced Data Structures

Part 6 Graph Algorithms

Part 7 Selected Topics

Part 8 Supplement



第13章 红黑树

13.1 红黑树的性质

13.2 旋转

13.3 插入

13.4 删除



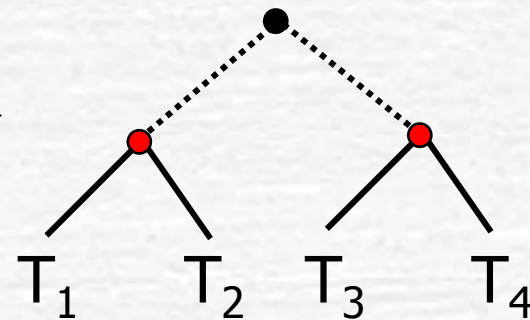
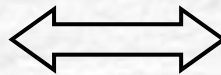
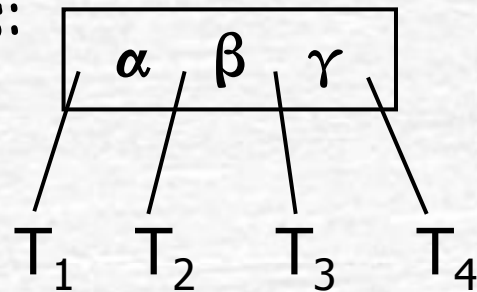
13.1 红黑树的性质

- 背景知识
- 红黑树的定义
- 一个图例
- 黑高的定义
- 关于高度的一个引理

背景知识 (1)

- 树的高度决定了树上操作的成本，一些搜索树的高度如下：
 - 平衡二叉搜索树: $O(\log n)$
 - 1962年提出的AVL树: $\leq 1.44 \log n$
 - 1972年提出的红黑树: $\leq 2 \log(n+1)$
- 4阶B树: $\#key(1\sim 3), \#subtree(2\sim 4) \Leftrightarrow$ 红黑树 //转化

3 keys:

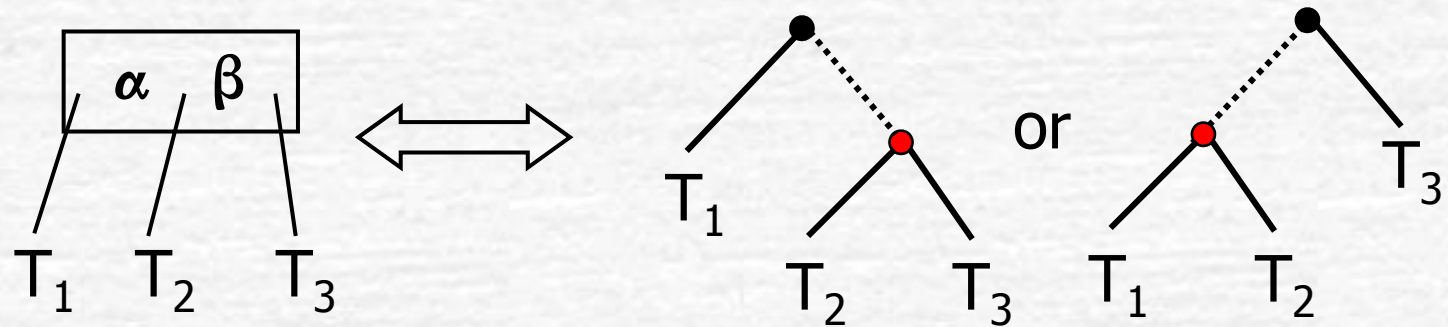


—— B树边

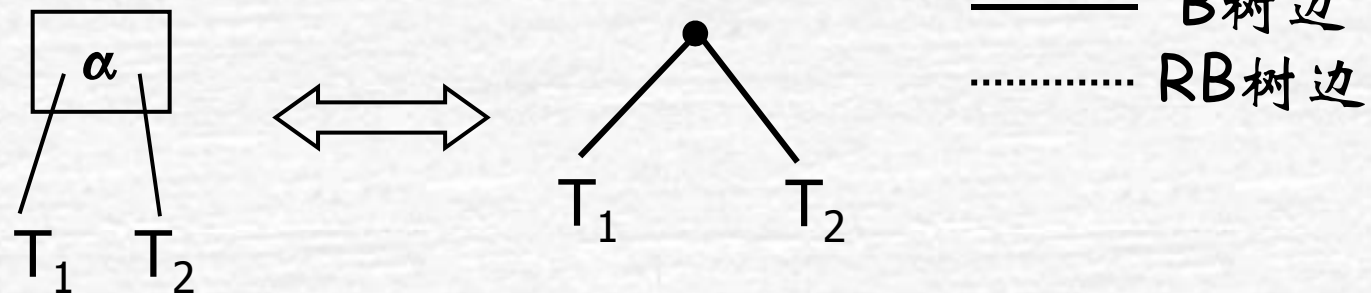
..... RB树边

背景知识 (2)

2 keys:



1 key:

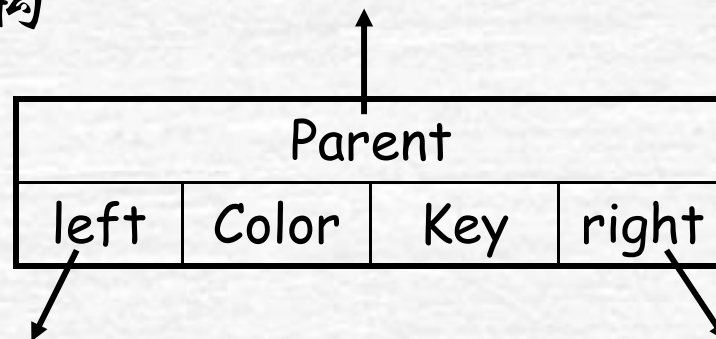


红黑树的定义

- Def. 1: **红黑树**是满足下述性质的二叉搜索树

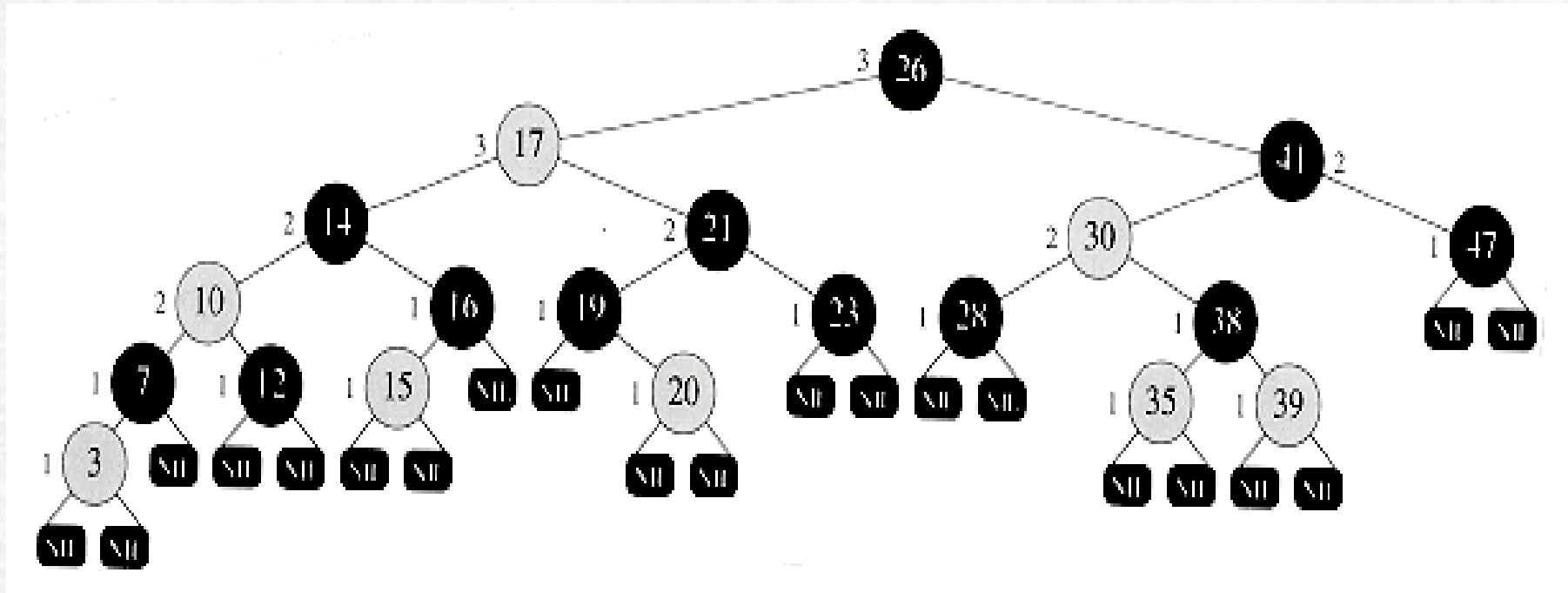
- ① 每个节点必须为红色或黑色; //性质1
- ② 根为黑色; //性质2
- ③ 树中的nil叶子为黑; //性质3
- ④ 若节点为红, 则其两个孩子必为黑; //性质4
- ⑤ 每节点到其后代**叶子**的所有路径含有同样多的黑节点; //性质5

- 节点的结构



一个图例

- Fig 13.1(a)



表达方式:

图(a)每个空指针域均连接到一个叶节点nil, 比较浪费存储空间;

图(b)所有空指针域共享一个哨兵nil[T], nil[T]为黑色;

图(c)省略nil[T];

黑高的定义

- Def. 2: 节点 x 的黑高 $bh(x)$ 是该节点到它的任何后代叶子路径上的黑节点数(不包括 x 本身)
注: Fig 13.1(a)中节点旁的数字
- Def. 3: 红黑树的黑高是根的黑高, 记 $bh(\text{root}[T])$

关于高度的一个引理 (1)

- Lemma 13.1: 一棵 n 个内点的红黑树的高度至多是 $2\log(n+1)$ 。

- Proof:

① 先证对任何以 x 为根的子树其内节点数 $\geq 2^{bh(x)}-1$

归纳基础: 当 $bh(x)=0$ 时, x 就是 $nil[T]$

$\therefore 2^{bh(x)}-1 = 2^0-1=0$ 即为0个内节点, 正确

归纳假设: 对 x 的左右孩子命题正确

归纳证明: $\because x$ 的左右孩子的黑高或为 $bh(x)$ 或为 $bh(x)-1$

$$\begin{aligned}\therefore x \text{的内点数} &= \text{左孩子内点数} + \text{右孩子内点数} + 1 \\ &\geq (2^{bh(x)-1}-1) + (2^{bh(x)-1}-1) + 1 \\ &= 2^{bh(x)}-1\end{aligned}$$

即第①点得证。

关于高度的一个引理 (2)

- Proof(Cont.):

② 证明 $bh(\text{root}[T]) \geq h/2$, h 为红黑树的树高

\because 红点的孩子必为黑 // 红黑树的性质4

\therefore 红点的层数 $< h/2$

因此 $\Rightarrow bh(\text{root}[T]) \geq h/2$

③ 证明最后结论

\because 红黑树有 n 个内点

由① $\Rightarrow n \geq 2^{bh(\text{root}[T])} - 1 \geq 2^{h/2} - 1$

$\therefore \Rightarrow h \leq 2\log(n+1)$





第13章 红黑树

13.1 红黑树的性质

13.2 旋转

13.3 插入

13.4 删除

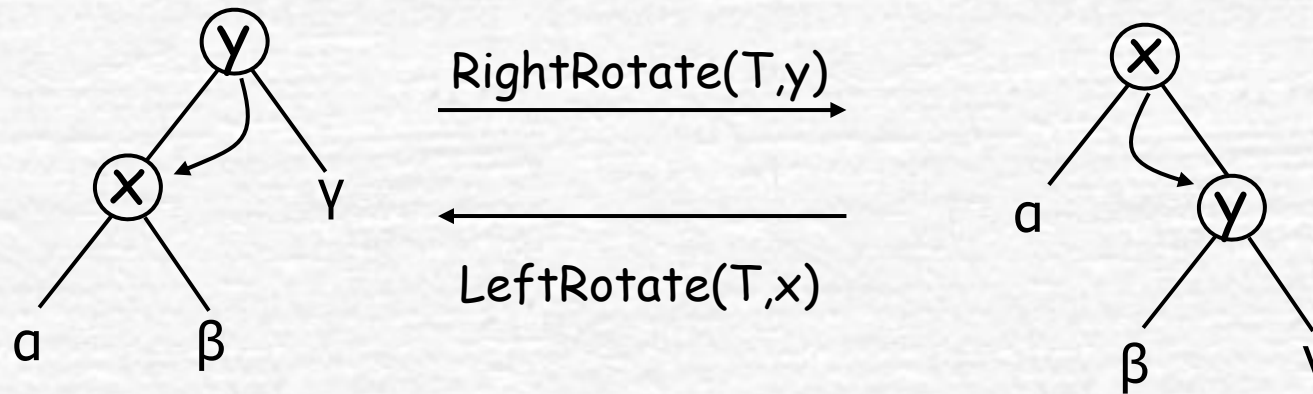


13.2 旋转

- 左、右旋转定义
- 左旋实现的步骤
- 左旋算法

左、右旋的定义

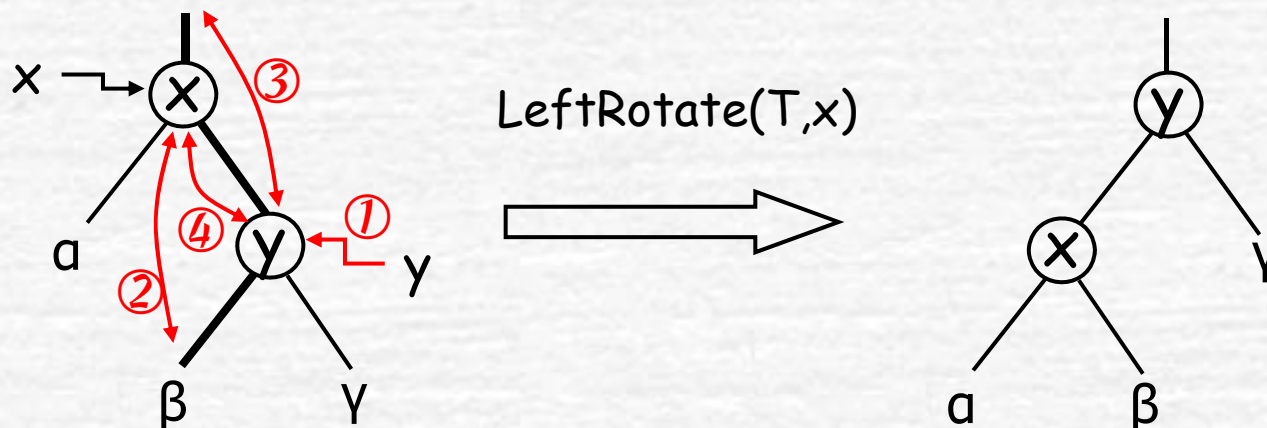
- 左、右旋转的图示



注：旋转过程中二叉搜索树(BST)性质不变： $a \leq x \leq \beta \leq y \leq \gamma$

左旋实现的步骤

● 左旋图示：



● 步骤解释：需要变动的是3根粗链

临界情形

① $y \leftarrow \text{right}[x]$ //记录指向y节点的指针

② $\text{right}[x] \leftarrow \text{left}[y], p[\text{left}[y]] \leftarrow x$ //β连到x右

$\beta = \text{nil}[T]$

③ $p[y] \leftarrow p[x], p[x]$ 的左或右指针指向y //y连到p[x] $p[x] = \text{nil}[T]$, 即x为根

④ $\text{Left}[y] \leftarrow x, p[x] \leftarrow y$ //x连到y左

根

注：- 要注意先后顺序；- 每条边的修改涉及双向；

- 要考虑临界情形(特殊情形)；

左旋算法

```
LeftRotate(T, x)
{ //假定right[x] ≠ nil[T]
  //step ①
  y ← right[x];
  //step ②
  right[x] ← left[y]; p[left[y]] ← x;
  //step ③
  p[y] ← p[x];
  if p[x]=nil[T] then      //x是根
    root[T] ← y;          //修改树指针
  else if x=left[p[x]] then left[p[x]] ← y;
    else right[p[x]] ← y; //p[x]的左或右指针指向y
  //step ④
  left[y] ← x; p[x] ← y;
}
T(n)=O(1)
```




第13章 红黑树

13.1 红黑树的性质

13.2 旋转

13.3 插入

13.4 删除



13.3 插入

- 算法步骤
- RBInsert 算法
- RBInsertFixup 算法

算法步骤

- step 1: 将 z 节点按BST树规则插入红黑树中,
 z 是叶子节点;
- step 2: 将 z 涂红;
- step 3: 调整使其满足红黑树的性质;

RBInsert算法 (1)

```
RBInsert(T, z)
{
  y ← nil[T];           //y用于记录：当前扫描节点的双亲节点
  x ← root[T];           //从根开始扫描
  while x ≠ nil[T] do    //查找插入位置
  {
    y ← x;
    if key[z] < key[x] then //z插入x的左边
      x ← left[x];
    else
      x ← right[x];        //z插入x的右边
  }
  p[z] ← y;               //y是z的双亲
  if y = nil[T] then      //z插入空树
    root[T] ← z;          //z是根
  else
    if key[z] < key[y] then
      left[y] ← z;        //z是y的左子插入
    else
      right[y] ← z;       //z是y的右子插入
  }
```


RBInsert算法 (2)

```
left[z] ← right[z] ← nil[T];  
color[z] ← red;  
RBInsertFixup(T, z);  
}
```

时间: $T(n) = O(\log n)$

RBInsertFixup算法 (1)

- 调整分析

- idea: 通过旋转和改变颜色, 自下而上调整 (z进行上溯), 使树满足红黑树;

- z插入后违反情况:

- ∵ z作为红点, 其两个孩子为黑 ($\text{nil}[T]$)

- ∴ 满足性质1, 3, 5

- 可能违反性质2: z是根

- 可能违反性质4: $p[z]$ 是红

- 调整步骤:

- (1) 若z为根, 将其涂黑;

- (2) 若z为非根, 则 $p[z]$ 存在

- ① 若 $p[z]$ 为黑, 无需调整

RBInsertFixup算法 (2)

②若 $p[z]$ 为红，违反性质4，则需调整

$\because p[z]$ 为红，它不为根

$\therefore p[p[z]]$ 存在且为黑

➤ 分6种情况进行调整：

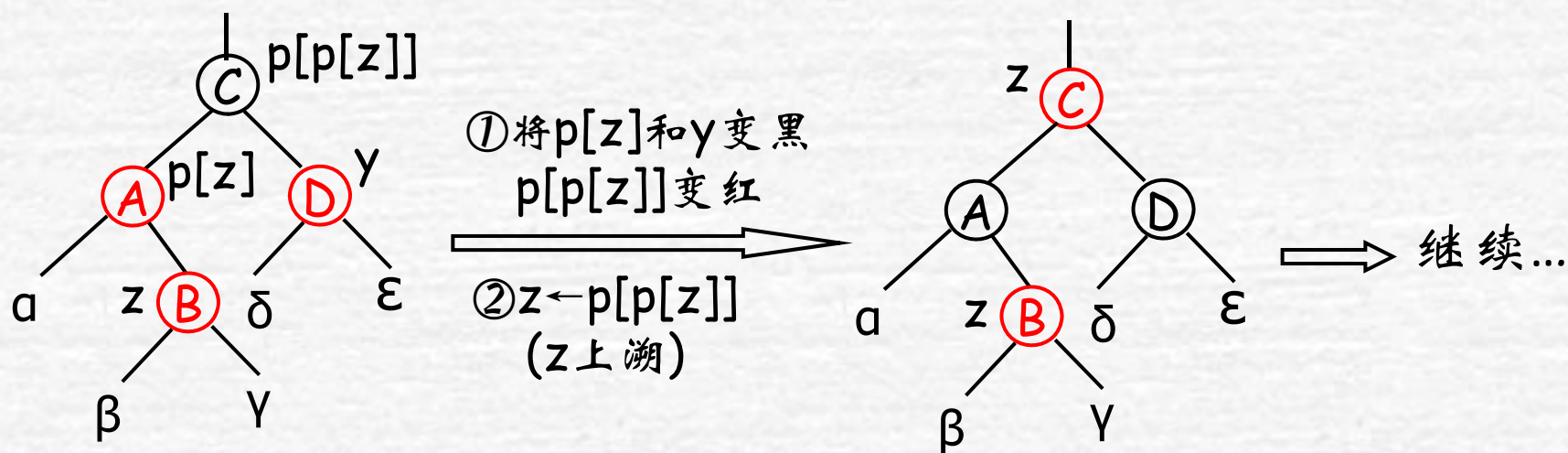
其中

case1~3为 z 的双亲 $p[z]$ 是其祖父 $p[p[z]]$ 的左孩子，

case4~6为 z 的双亲 $p[z]$ 是其祖父 $p[p[z]]$ 的右孩子。

RBInsertFixup算法 (3)

Case 1: z 的叔叔 y 是红色 黑色下沉，矛盾上移

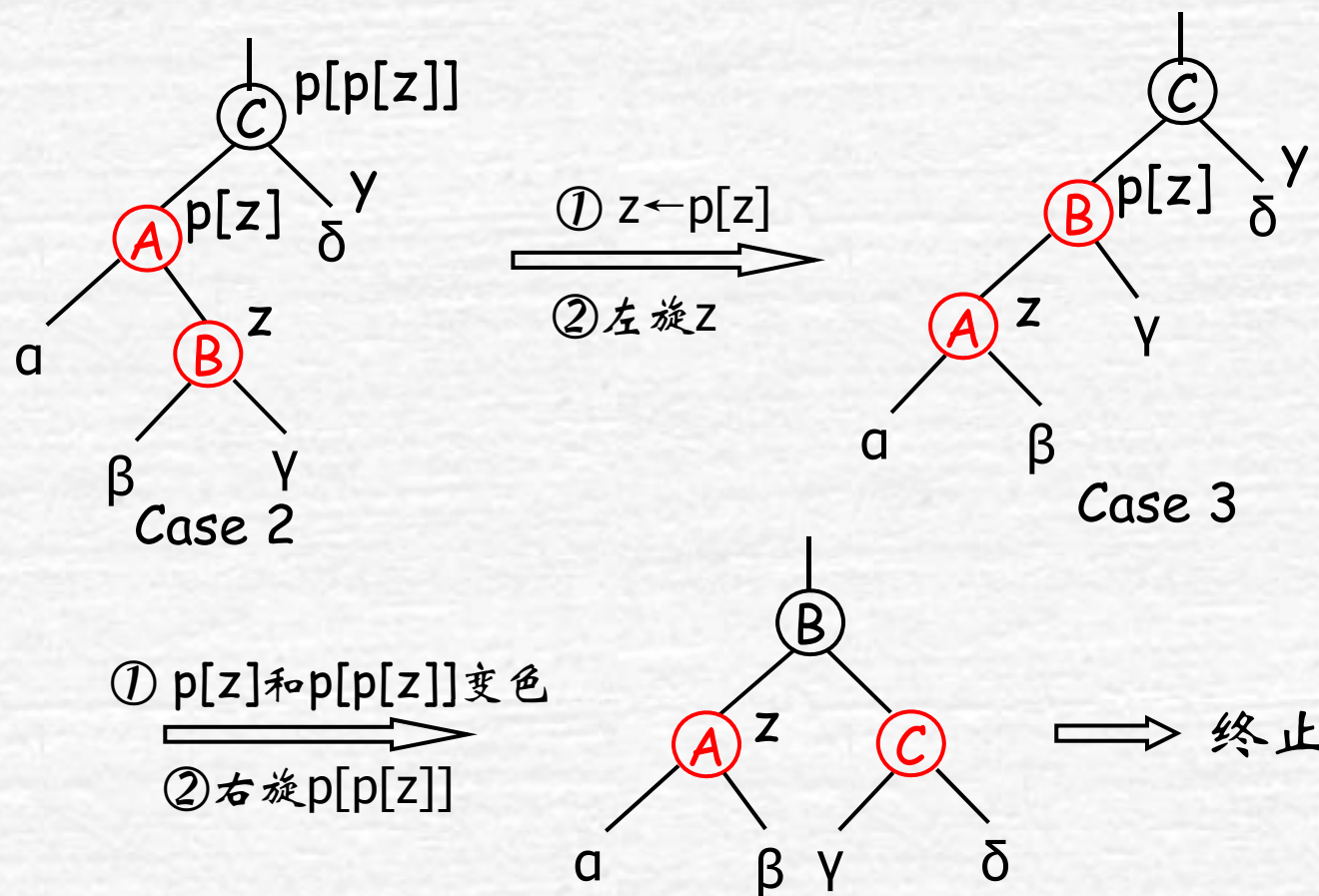


- 注: (1)变换后, 新的 z (上溯后)可能违反性质4, 故调整最多至根;
(2)若红色传播到根, 将根涂黑, 则树的黑高增1; //临界处理
(3) z 是 $p[z]$ 的左、右孩子均一样处理;

RBInsertFixup算法 (4)

Case 2: 当 z 的叔叔 y 是黑色, 且 z 是双亲 $p[z]$ 的右孩子

Case 3: 当 z 的叔叔 y 是黑色, 且 z 是双亲 $p[z]$ 的左孩子



RBInsertFixup算法 (5)

- RBInsertFixup算法

RBInsertFixup(T, z)

{ while (color[p[z]]=red) do

{ //若z为根, 则p[z]=nil[T], 其颜色为黑, 不进入此循环

//若p[z]为黑, 无需调整, 不进入此循环

if p[z]=left[p[p[z]]] then //case 1,2,3

{ y ← right[p[p[z]]]; //y是z的叔叔

if color[y]=red then //case 1

{ color[y]=black; color[p[z]]=black;

color[p[p[z]]]=red; z ← p[p[z]];

}

else //case 2 or case 3 y为黑

RBInsertFixup算法 (6)

```
else    //case 2 or case 3  y为黑
{
  if z=right[p[z]] then //case 2
  {
    z ← p[z];    //上溯至双亲
    leftRotate(T, z);
  } //以下为case 3
  color[p[z]]=black; color[p[p[z]]]=red;
  RightRotate(T, p[p[z]]); //p[z]为黑，退出循环
} //case 1's endif
} //case 2 or 3' s
else //case 4,5,6's 与上面对称
{ ... ... }
} //endwhile
color[root[t]] ← black;
}
```


RBInsertFixup算法 (5)

- 算法的时间复杂性
 - 调整算法的时间: $O(\log n)$
 - 整个插入算法的时间: $O(\log n)$
 - 调整算法中至多使用2个旋转



第13章 红黑树

13.1 红黑树的性质

13.2 旋转

13.4 插入

13.4 删除



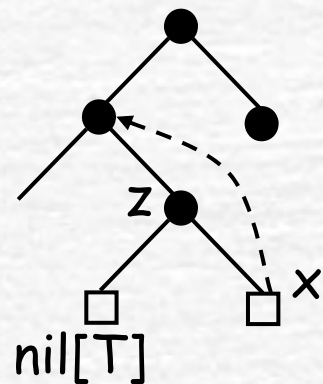
13.4 删除

- 分析讨论
- 删除算法

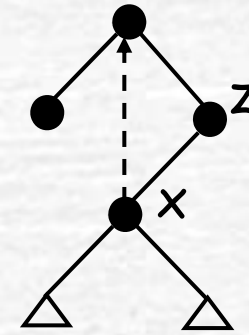
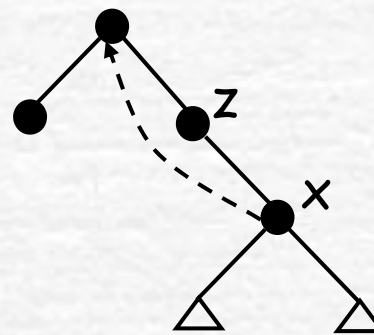
分析讨论 (1)

- z删除后BST的调整

➤ case 1: z为叶子;



case 2: z只有一个孩子(非空)



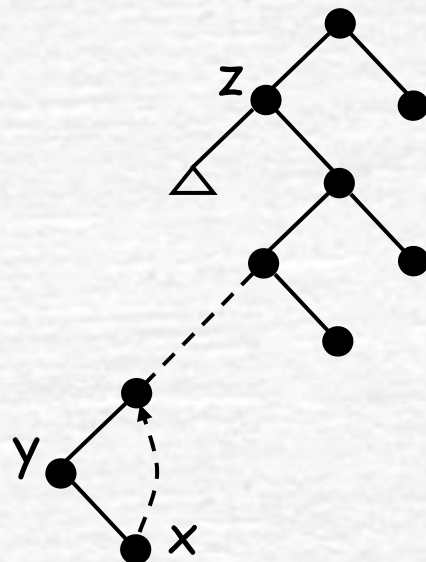
注: (1)删除z, 连接x。这里x是z的中序后继;

(2)case 1是case 2的特例, 因为处理模式是一样的。

(3)z是p[z]的左孩子, 类似讨论;

分析讨论 (2)

- case 3: z 的两个孩子均非空;



注: (1)找 z 的中序后继, 即找 z 的右子树中最左下节点 y ;
(2)删除 y , 将 y 的内容copy到 z , 再将 y 的右子连到 $p[y]$ 左下。

● RBT性质的影响

删红点不影响, 删黑点需要调整。 //这里是后面算法中 y 的颜色

删除算法 (1)

- 删除算法

RBDelete(T, z)

{ if (left[z]=nil[T]) or (right[z]=nil[T]) then //case 1,2

 y ← z; //后面进行物理删除y

else //z的两子树均非空, case 3

 y ← TreeSuccessor(z); //y是z的中序后继

 //此时, y统一地是x的双亲节点且是要删除节点

 //x是待连接到p[y]的节点, 以下要确定x

 if left[y] ≠ nil[T] then //本if语句综合了case1,2,3的x

 x ← left[y];

 else

 x ← right[y];

 //以下处理: 用x取代y与y的双亲连接

 p[x] ← p[y];

删除算法 (2)

```
if p[y]=nil[T] then //y是根
    root[T] ← x;      //根指针指向x
else //y非根
    if y=left[p[y]] then //y是双亲的左子
        left[p[y]] ← x;
    else
        right[p[y]] ← x;
if y≠z then //case 3
    y的内容copy到z;
if color[y]=black then
    RBDeleteFixup(T, x); //调整算法
return y; //实际是删除y节点
}
```

删除算法 (3)

- 调整算法: $\text{RBDeleteFixup}(T, x)$ 时间 $O(\log n)$, 至多3次旋转

➤ 讨论

x : 或是 y 的唯一孩子; 或是哨兵 $\text{nil}[T]$

可以想象将 y 的黑色涂到 x 上, 于是

- 若 x 为红, 只要将其涂黑, 调整即可终止;
- 若 x 为黑, 将 y 的黑色涂上之后, x 是一个双黑节点, 违反性质1。

处理步骤如下:

step 1: 若 x 是根, 直接移去多余一层黑色(树黑高减1), 终止;

step 2: 若 x 原为红, 将 y 的黑色涂到 x 上, 终止;

step 3: 若 x 非根节点, 且为黑色, 则 x 为双黑。通过变色、旋转使多余黑色向上传播, 直到某个红色节点或传到根;

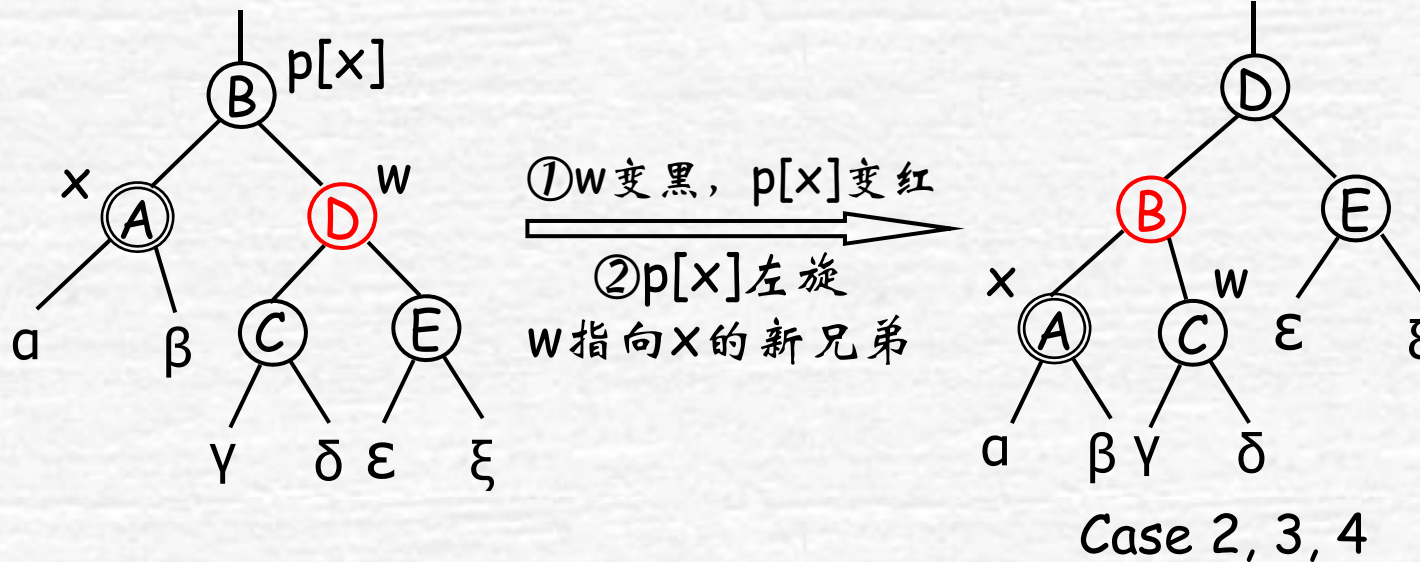
删除算法 (4)

调整分8种情况

case 1~4为 x 是 $p[x]$ 的左子；case 5~8为 x 是 $p[x]$ 的右子

case 1: x 的兄弟 w 是红色

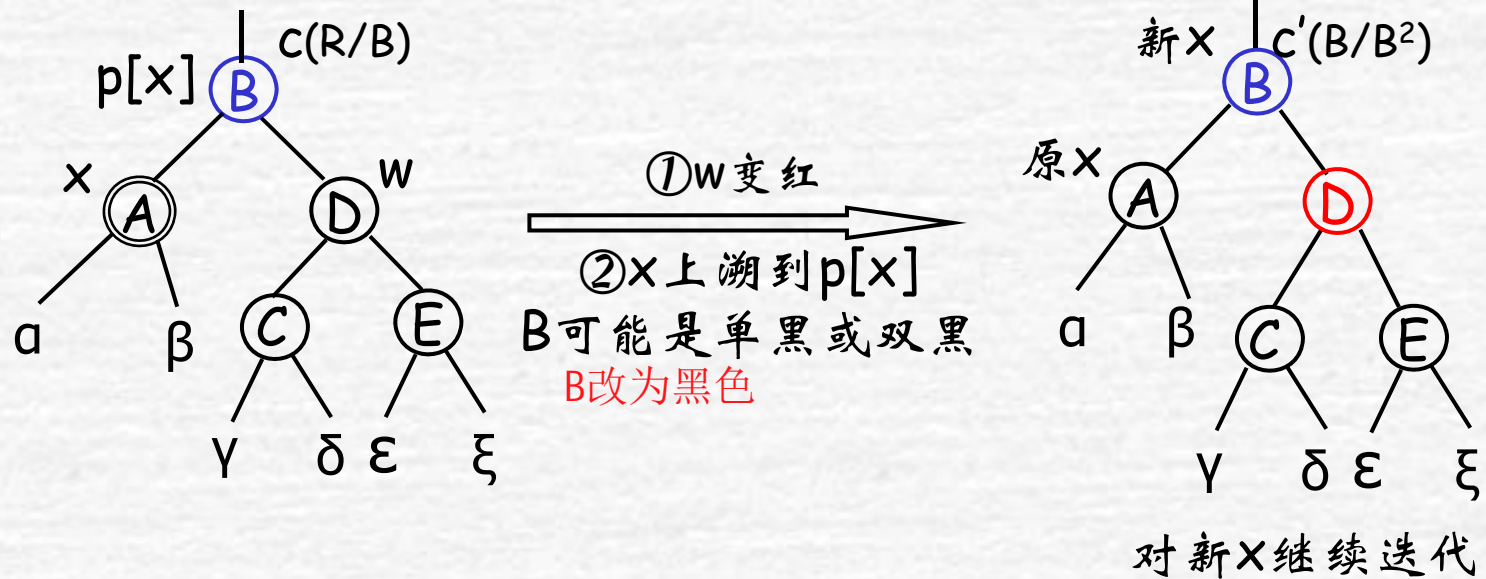
$\because w$ 是红, $\therefore p[x]$ 必黑



目标: 将case1转为case2,3,4处理

删除算法 (5)

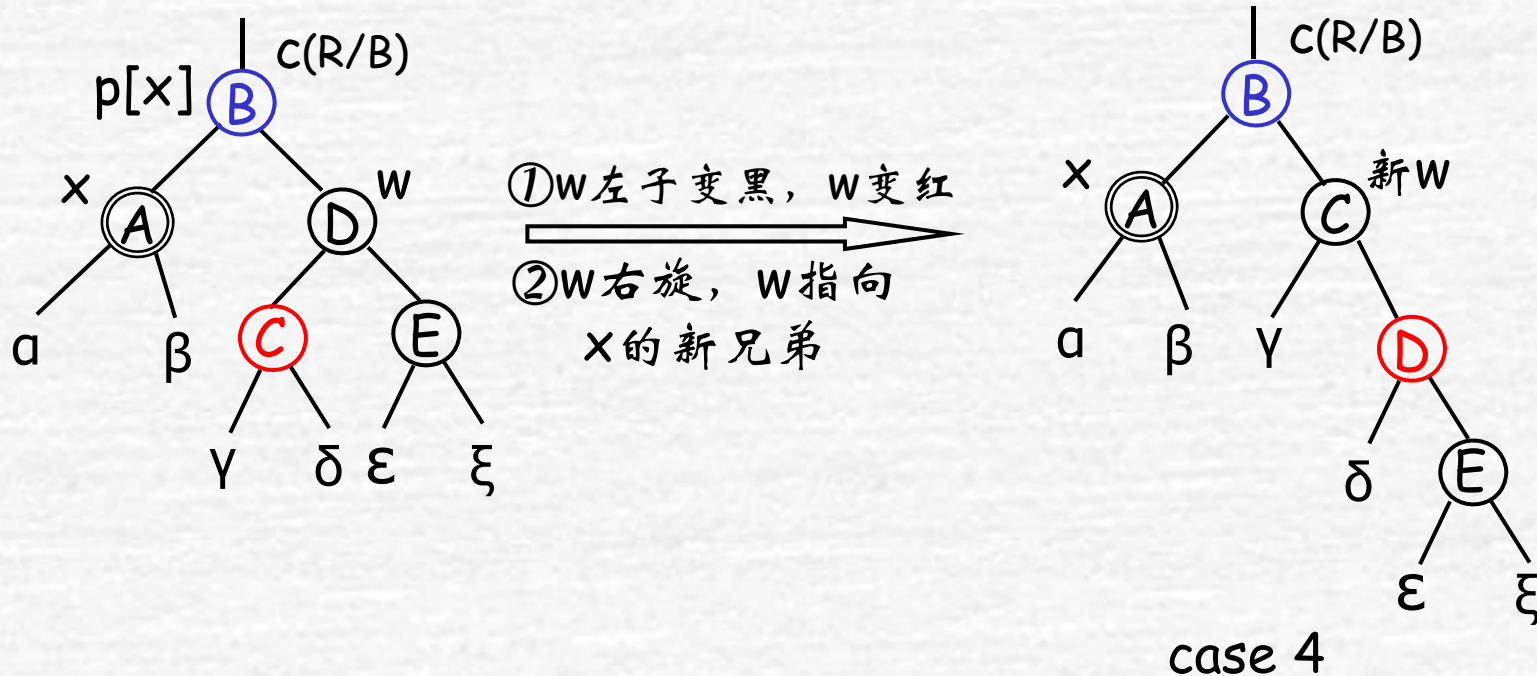
case 2: x 的黑兄弟 w 的两个孩子均为黑



目标: x 上移到 B , 通过 A 和 D 的黑色上移

删除算法 (6)

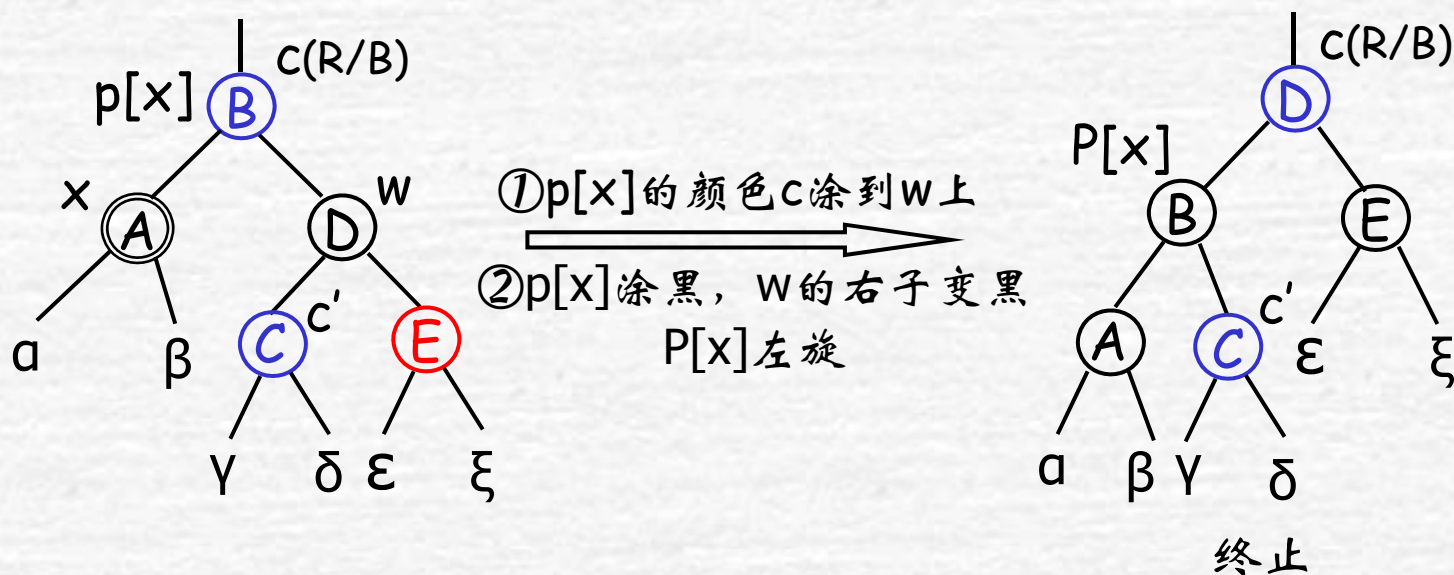
case 3: x 的黑兄弟 w 的右子为黑且左子为红



目标: 将case3转为case4

删除算法 (7)

case 4: x 的黑兄弟 w 的右子为红(左子为黑或红)



目标: 终结处理。 x 的黑色上移给 B , B 的原色下移给 D ,
 D 将黑色下移给 C 和 E , 通过旋转解决矛盾点 C

- DeleteFixup(T, x) 算法: P185



End of Chap13

