第2章 排列与组合

2021年3月11日　　9:49

2.1 四个计数原理

1. 加法原理（分类，子问题不相交，子问题的并集是原问题）
   $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$
   例1：一名学生选修一门数学或生物课程，其中数学有4门，生物有3门
   　　∴选课方法数：$4 + 3 = 7$
2. 乘法原理（分步）
   $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdots \cdot n_k$
   $$A \xrightarrow{n_1} C \xrightarrow{n_2} B$$
   例2：$3^4 \times 5^2 \times 11^7 \times 13^4$的正整数因子个数
   　　因子形如：$3^{x_1} \times 5^{x_2} \times 11^{x_3} \times 13^{x_4}$，且$0 \le x_1 \le 4, 0 \le x_2 \le 2, 0 \le x_3 \le 7, 0 \le x_4 \le 4$
   　　$\therefore 5 \times 3 \times 8 \times 5$
   例3：有多少各位数字不同且非0的两位数？
   　　乘法：$9 \times 8 = 72$
   　　　　十位数可放9个数字，个位可放8个，共计72个
   　　减法：$90 - 9 - 9 = 72$
   　　　　两位数有90个，9个包含0的数，9个两位相同的数字
3. 减法原理
   $n - n_1$(n_1:不满足条件的方法数)
   例4：密码由0~9，a~z的6位字符串，有多少个有重复字符的密码？
   　　6位字符串个数：36^6
   　　无重复字符：$36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31$
4. 除法原理
   一个有限集合，把它划分为 k 个部分使得每一部分包含的对象数目相同
   计数对象恰好等分，类别数$k = \frac{\text{总数}}{\text{每一类方法数}}$
   例5：6个橘子，9个苹果，有多少种水果篮？
   解：橘子7种选择，苹果10种选择，共70种选择，除去空篮子，有69种
5. 计数问题
   ①有序排列｛不重复，重复｝
   ②无序组合｛不重复，重复｝

普通集合 $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}, a_i \neq a_j$
多重集合 $M = \{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \ldots, k_n \cdot a_n\}, k_i$: 有限或∞
例6：1000~9999有多少各位数字不同的奇数？
　　个位5种选择，千位非0，则$5 \times 8 \times 8 \times 7$
例7：0~10000有多少数字恰含一个5？

解一：①一位数：1

②二位数：$9+8=17$

③三位数：$9\times 9+2\times 8\times 9$

④四位数：$9\times 9\times 9+3\times 8\times 9\times 9$

解二：4×9^3

例8：1,1,1,3,8组成多少五位数？

先排3有5种，再排8有4种，剩下的放1，共计$5\times 4\times 1=20$

1,1,1,3,3组成多少五位数？

从5个位置中选2个放3，剩下的放1，则$C_5^2\times 1\times 1=10$

2.2 排列

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

n个元素的r排列数

例1：4x4矩阵放1~16有多少种方法？

16!

例2：26个字母排序，5个元音a,e,i,o,u不连续

先排21个辅音，在22个空隙中插入5个元音：$21!\times P(22,5)$

例3：{1,2,...,9}有多少各位数字不同的7位数，5和6不连续出现？

①5，6都不出现

7!

②5，6恰出现一次

$2\times 7\times P(7,6)$

③5，6都出现

5出现在头或尾：$2\times 5\times P(7,5)$

5出现在中间：$5\times 4\times P(7,5)$

减法原理：

$P(9,7)-2\times C_7^5\times 6!$

也可以用插入法求解

线性排列与圆排列

n圆排列 $\Leftrightarrow$ n个线性排列(移位)

$\Rightarrow \frac{n!}{n}=(n-1)!$

或者：确定一个元素，剩余n-1个元素的全排列

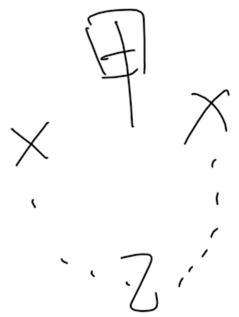
例：10个人围圆桌就座，有2人不愿意相邻

解一：

所有情况 - 2人打包后的排序情况

$9!-2\times 8!$

解二：



$7 \times 8!$

2.3 组合

组合 = 子集

$S=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$的r组合或r子集: $\{a_{i_1},a_{i_2},\dots,a_{i_r}\}$

$$C_n^r=\begin{cases}0, & r>n\\ 1, & r=n=0\ or\ r=0\\ \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}=\dfrac{P(n,r)}{r!}, & others\end{cases}$$

性质:

（1） $C_n^r=C_n^{n-r}$

proof: $S=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$

S的任一r子集A$\leftrightarrow n-r$子集B

$|A|=r\leftrightarrow|B|=n-r$

$\therefore$ 左边 = S的r子集个数 = n − r子集个数 = 右边

（2） $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$

左边 = n元素集合S的k子集个数

k元子集：①含a_1: C_{n-1}^{k-1}

②不含a_1: C_{n-1}^k

（3） $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$

统计n元集合S的所有子集数

方法一：按0元子集，1元子集，…，n元子集数的统计

方法二：构成S的一个子集A，S中每个元素在与不在A中构成不同的子集，故$2\times2\times\cdots\times2=2^n$

2.3 多重集合的排列

1. $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\dots,\infty\cdot a_k\}$的r排列数：$k^r$
2. $M=\{k_1\cdot a_1,k_2\cdot a_2,\dots,k_n\cdot a_n\}$的全排列数：$\dfrac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!\,k_2!\dots k_n!}$

proof: $C_{k_1+k_2+\cdots+k_n}^{k_1}\cdot C_{k_2+\cdots+k_n}^{k_2}\cdot C_{k_3+\cdots+k_n}^{k_3}\cdot\cdots\cdot C_{k_n}^{k_n}=\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$

例：8x8棋盘放置不相互攻击的8个车的方法数

分步: ①选出8个不同行不同列的位置

$(1,j_1),(2,j_2),\dots,(8,j_8)$,其中$j_1\dots j_8$是1~8的全排列

②对8个车排列

两两不同：8!

完全相同：1

$\{3\cdot r,2\cdot b,3\cdot w\}$：$\dfrac{8!}{3!\,2!\,3!}$

2.5 多重集合的组合

$M=\{\infty\cdot a_1,\dots,\infty\cdot a_k\}$ 或 $\{k_1\cdot a_1,\dots,k_n\cdot a_n\},\qquad k<\infty$

1. $S=\{\infty\cdot a_1,\dots,\infty\cdot a_k\}$的r组合数为$C_{r+k-1}^{r}$（$a_i$重复数$\geq r$）

   pf：r组合$=\{x_1\cdot a_1,\dots,x_k\cdot a_k\}$

   使$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$，$x_i\geq 0$ 不定方程(1)

   S的r组合 $\leftrightarrow$ 不定方程(1)的非负整数解

   r组合数$=$(1)的非负整数解个数$=\{r\cdot 1,(k-1)\cdot\Delta\}$的全排列数，$(k-1)$个$\Delta$把r个1分成k组

   $$=\frac{(r+k-1)!}{r!\,(k-1)!}=C_{r+k-1}^{r}$$

2. $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$的非负整数解个数为$C_{r+k\text{-}1}^{r}$

   例1: 6种面包圈，一盒中装一打面包圈，有多少种搭配？

   解：$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\dots,\infty\cdot a_6\}$的12组合数$\mathrm{C}_{12+6-1}^{12}$

   例2：$1,2,\dots,k$组成的长度为r的递减序列有多少？

   解：$S=\{\infty\cdot 1,\dots,\infty\cdot k\}$的r组合数$C_{r+k-1}^{r}$

   r组合 $\leftrightarrow$ r递减序列

3. $S=\{\infty\cdot a_1,\dots,\infty\cdot a_k\}$每种元素至少出现一次的r组合数(下限)，对于上限可用容斥原理

   $x_1+x_2+\cdots+x_k=r\quad(1)$

   其中$x_1\geq 1\rightarrow x_1-1\geq 0$

   令$y_i=x_i-1$则$\mathrm{y_i}\geq 0$

   (1)变为$y_1+y_2+\cdots+y_k=r-k,\qquad \mathrm{y_i}\geq 0$

   则$C_{r-k+k-1}^{r-k}=C_{r-1}^{r-k}=C_{r-1}^{k-1}$

   例：$x_1+x_2+x_3+x_4=20$, 其中$x_1\geq 3,x_2\geq 1,x_3\geq 0,x_4\geq 5$

   解：$y_1=x_1-3,y_2=x_2-1,y_3=x_3,y_4=x_4-5,y_i\geq 0$

   问题$\rightarrow$ $y_1+y_2+y_3+y_4=11$，则C_{11+4-1}^{11}

4. 古典概型

   $S=\{e_1,\dots,e_n\}$等可能

   $$P(A)=\frac{\text{A的结果数}}{\text{总的结果数}}$$

2.6 有限概率

例1：1~n中找出一个整数序列$i_1,i_2,\dots,i_n$

（1）此序列是1~n排列的概率

（2）恰有n-1个不同整数的概率

解：$|S|=n\cdot n\cdot\cdots\cdot n=n^n$

$\{\infty\cdot 1,\dots,\infty\cdot n\}$的n排列

（1）$n!$

$$P(A)=\frac{n!}{n^n}$$

（2）$C_n^1\cdot C_{n-1}^{n-2}\cdot C_n^2\cdot(n-2)!$

$$P(B)=\frac{C_n^1\cdot C_{n-1}^{n-2}\cdot C_n^2\cdot(n-2)!}{n^n}$$

例2：8x8棋牌放5个相同车，车既在行1, 2, 3, 4, 5又在列4, 5, 6, 7, 8的概率

解：$|S|=C_8^5\cdot C_8^5\cdot 5!\cdot 1$

$|\mathrm{A}|=5!\cdot 1$

$$P(A)=\frac{|A|}{|S|}$$

作业Chap 2: 9, 18, 37, 61