第12章 再论图论

2021年6月10日 11:38

12.1 色数

问题：电视台，距离近之间有干扰，用不同的频道

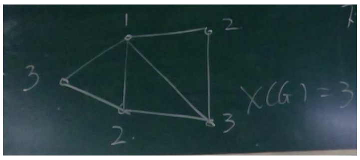
图：$G=(V,E)$，V：顶点——电视台，E：足够近

顶点分配颜色，相邻顶点不同色

k 色：$x(G)=k \iff$ 存在 k 色着色，不存在 k-1 色着色

定理：对于图 G，有 $1\le x(G)\le n$，且 $x(G)=1 \iff$ 无边图，$x(G)=n \iff G=K_n$

定理：设 H 是 G 的子图，则 $x(H)\le x(G)$，若 $H=K_p$，则 $x(G)\ge p$ （用于证明 $x(G)=k$）



设 $x(G)=k$，记 $V_1,V_2,\dots,V_k$ 是 G 中染 1 号色，2 号色，…，k 号色的顶点子集合 $\Rightarrow V_i$ 中顶点不相邻 $\Rightarrow G[V_i]$ 是零图（将没有任何边的图定义为零图）

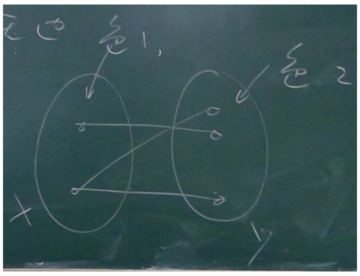
推论：设 G 是 n 阶图，G 含顶点最多导出子图为零图，其顶点数为 q，则 $x(G)\ge \frac{n}{q}$

证明：设 G 中染 1, 2, …, k 色的顶点集合为 $V_1,V_2,\dots,V_k$

$$\Rightarrow \mathrm{V}=\mathrm{V}_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_k$$
$$\Rightarrow n=|V|=|V_1|+|V_2|+\cdots+|V_k|\le k\cdot q$$
$$\Rightarrow k\ge \frac{n}{q}$$

定理：$x(G)=2 \iff G$ 有边，且为二分图

证明：$x(G)=1 \iff$ 无边



调度问题

多个任务：资源冲突，不能同时调度

贪心算法（可能得到的是局部最优，而不是全局最优）：

（1）将所有顶点编序号：$x_1,x_2,\dots,x_n$

（2）x_1 染成 1 色

（3）若已染 $x_1,x_2,\dots,x_{i-1}$，染 x_i 用 x_i 相邻顶点未用的颜色，取颜色号最小

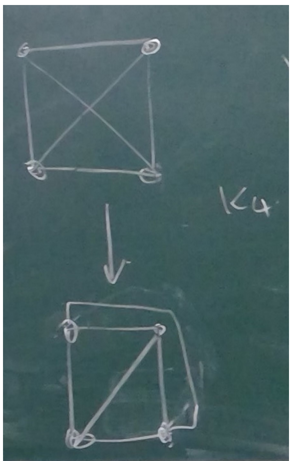
定理：贪心算法产生 G 的顶点的一个着色 $x(G)\le\Delta+1$，其中 Δ— — 顶点的最大度数

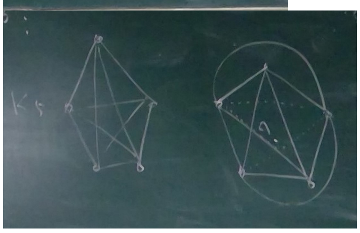
证明：x_1 用 1 染色，设 $x_1,x_2,\dots,x_{i-1}$ 染色号在 $1,2,\dots,\Delta+1$ 之间

因 $\deg(x_i)\le\Delta \Rightarrow x_i$ 的相邻顶点用了 Δ 种颜色，从 $1,2,\dots,\Delta+1$ 色中有颜色可以染 x_i

定理：若 G 不是完全图，也不是奇数阶循环图，则 $x(G)\le\Delta$

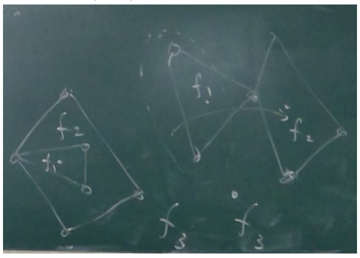
12.2 平面图





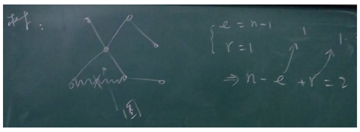
平面图：可画在平面上，使得任意两条边除公共顶点外，没有交点

平面图的面（区域）：



面数（区域数）：r

定理：设 G 是连通平面图，则 $n-e+r=2$，其中 n——顶点数，e——边数，r——面数



证明：设 G 是树，则 $n-e=1, r=1$，满足 $n-e+r=2$

若对 $n-e=k\geq 1$ 成立

若 $n-e=k+1\geq 2 \Longrightarrow$ G 有圈 C，取 $e\in E(C)$ 考虑 $G-e$，$G-e$ 是连通图

由归纳假设：$n(G-e)-e(G-e)+r(G-e)=2$

其中，$n(G-e)=n(G)$

$e(G-e)=e(G)-1$

$r(G-e)=r(G)-1$

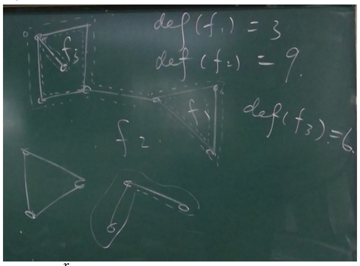
则 $n(G)-(e(G)-1)+(r(G)-1)=2$

即 $n(G)-e(G)+r(G)=2$

定理：设 G 是 $n\geq 3$ 的平面图，则 $n\leq 3e-6$

证明：先定义面的次数，$\deg(f_i)$：该面边界上的边数

（从面的一个顶点开始，沿着边走，最后走回出发点，途中经过的边数为 $\deg(f_i)$，下图中的桥走了 2 遍）



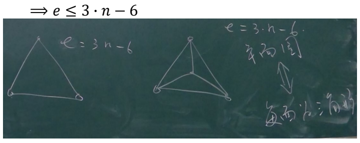
$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{r}\deg(f_i)=2\cdot e$

若 $n\geq 3$，$\deg(f_i)\geq 3 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{r}\deg(f_i)\geq 3\cdot r$

$\Longrightarrow 2e\geq 3r$

又 $\because n-e+r=2$

$\Longrightarrow e\leq 3\cdot n-6$



例：K_5 不是平面图

解：$n(K_5)=5$, $3\cdot n-6=9$

$e(K_5)=10>9=3\cdot n-6 \Longrightarrow K_5$ 不是平面图

K_n 是平面图 $\Leftrightarrow n\leq 4$

定理：若 $n\geq 3$，且 G 中无奇图，G 是平面图，则 $e\leq 2n-4$

证明：$\sum_{i=1}^{r}\deg(f_i)=2\cdot e$

每个面至少被 4 条边所围

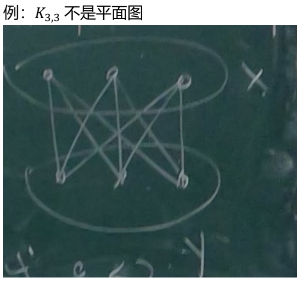
$\Longrightarrow \deg(f_i)\geq 4$

$\Longrightarrow 2e\geq 4r$

$\because n-e+r=2$

$\Longrightarrow e\leq 2n-4$

例：$K_{3,3}$ 不是平面图



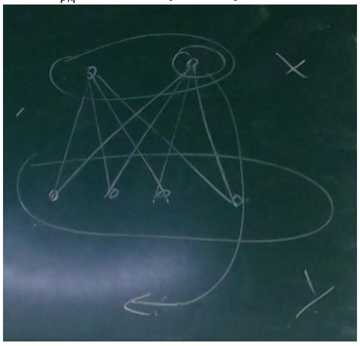
解：$K_{3,3}$ 无奇图，若 $K_{3,3}$ 是平面图，则 $e\leq 2n-4$

$n(K_{3,3})=6,\quad 2n-4=8$

$e(K_{3,3})=9>8=2n-4$

矛盾，故 $K_{3,3}$ 不是平面图

一般：$K_{p,q}$ 是平面图 $\Leftrightarrow p \le 2$ 或 $q \le 2$



同胚图：G 与 H 同胚

定理（kuralosky）：G 是平面图 $\Leftrightarrow$ G 中无与 $K_5, K_{3,3}$ 的同胚子图

12.3 五色定理

G 的色数 $x(G)$：$x(K_6) = 6$

定理：$x(\text{平面图}) \le 5$

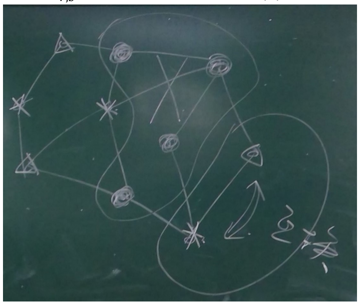
四色定理（猜想）：给定世界地图，每国一色，相邻国不同色，四色足够

地图染色 $\Leftrightarrow$ 平面图的顶点染色

引理：设 G 有一个 $x(G)$ 色的染色方案，r, b 是其中的两种颜色，

　　$G_{r,b}$ 是 G 中以 r, b 色顶点的导出子图，设 $H_{r,b}$ 是 $G_{r,b}$ 的一个连通分量，

　　将 $H_{r,b}$ 中颜色互换 $\Rightarrow$ 仍是 G 的 $x(G)$ 染色



证明：反证：若不是 G 的 $x(G)$ 染色 $\Rightarrow$ 某两个 r 色或某两个 b 色相邻，

　　不妨设为 x, y 为 r 色，x, y 相邻

　（1）$x, y \in V(H_{r,b}) \Rightarrow$ x, y 原来是 b 色且相邻，原来染色不对，矛盾

　（2）$x, y \notin V(H_{r,b}) \Rightarrow$ x, y 原来是 r 色且相邻，原来染色不对，矛盾

　（3）$x \in V(H_{r,b}), y \notin V(H_{r,b}) \Rightarrow$ x, y 相邻，在 $G_{r,b}$ 的同一个连通分量，矛盾

引理：$\delta(G) \le 5$，G 是平面图（δ——图中顶点的最小度数）

证明：$n \le 2$, $\delta(G) < 5$

　$n \ge 3 \implies e \le 3n - 6$

$$\delta(G) \cdot n \le \sum_{x \in V(G)} \deg(x) = 2e \le 6n - 12 \implies \delta(G) \le 6 - \frac{12}{n} \implies \delta(G) \le 5$$

五色定理：$x(G) \le 5$，G 是平面图

证明：对 n 作归纳

（1）$n \le 5$, $x(G) \le 5$

（2）设 $n = k$ 时，$x(G) \le 5$

（3）设 G，满足顶点数为 $n + 1$

　取 $x \in V(G), \deg(x) = \delta(G) \le 5$

　由归纳假设，$x(G - x) \le 5$，取 $G - x$ 的 5 染色，颜色分别为 1, 2, 3, 4, 5

　（3.1）$\deg(x) \le 4$，x 的相邻顶点至多用了 4 色，x 可染色

　（3.2）$\deg(x) = 5$，x 的相邻顶点用的颜色数 ≤ 4，x 可染色

　（3.3）$\deg(x) = 5$，x 的相邻顶点用了 5 种颜色，将 G 画在平面上，

　　　其邻顶点按顺时针方向为 a, b, c, d, e，其色依次为 1, 2, 3, 4, 5，

　　　考虑 $G_{1,3}$

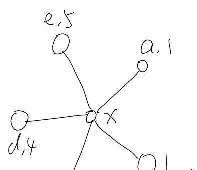
　　（A）a, c 不在 $G_{1,3}$ 的同一个连通分量，将 a 所在的连通分量中 1, 3 色互换，仍是染色，x 可染 1 色

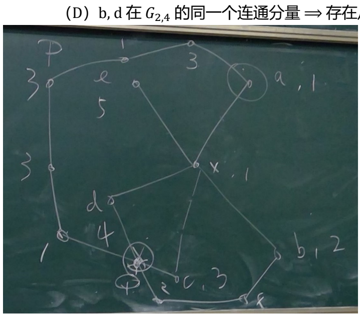
　　（B）a 与 c 在同一个连通分量，存在 1, 3 色顶点交替出现的路径 P，P 的终点和起点分别为 a, c

　　　下面考虑 $G_{2,4}$

　　（C）b, d 不在 $G_{2,4}$ 的同一个连通分量，同（A）

　　（D）b, d 在 $G_{2,4}$ 的同一个连通分量 $\Rightarrow$ 存在从 b 到 d 的路径 Q，Q 上 2, 4 色顶点交替出现





由假设可知 P 与 Q 有交点：

（a）不是顶点，与平面图矛盾

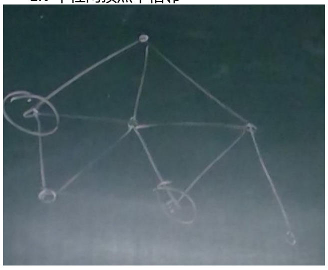
（b）是公共顶点，在 P 上是 1 或 3 色，在 Q 上是 2 或 4 色，矛盾

显然，（B）和（D）不能同时成立

12.4 独立数与团数

定义：独立集 I:

1. $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{V}(G)$;
2. I 中任两顶点不相邻



极大独立集，最大独立集

独立数 $a(G)$：最大独立集的顶点数，在 G 的顶点着色下，有相同着色的顶点的最大个数

G 的一个 $x(G) = k$ 的染色，$V_1, V_2, \dots, V_k$ 分别为染 1, 2, ..., k 色顶点集合 $\Rightarrow V_k$ 是独立集 $\Rightarrow |V_i| \le a(G)$

推论：$x(G) \ge \frac{n}{a(G)}$

证明：$n = |V| = |V_1| + |V_2| + \cdots + |V_k| \le k \cdot a(G)$

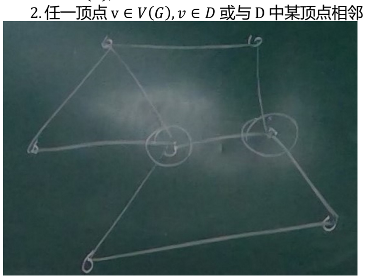
$\Rightarrow k \ge \dfrac{n}{a(G)}$

对于零图 N_n、完全图 K_n、完全二分图 $K_{m,n}$ 有：

$a(N_n) = n$, $a(K_n) = 1$, $a(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$

控制集 D:

1. $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{V}(G)$;
2. 任一顶点 $\mathrm{v} \in V(G), v \in D$ 或与 D 中某顶点相邻



极小控制集，最小控制集

控制数 $dom(G)$：最小控制集的顶点数

例：$dom(N_n) = n$，$dom(K_n) = 1$，$dom(K_{n,m}) = 2$，如果 $m, n \ge 2$

定理：$dom(G) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$，$n \ge 2$，G 是连通图

证明：取 G 的生成树 T，$dom(G) \le dom(T)$，

下证：$dom(T) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

对 n 作归纳：

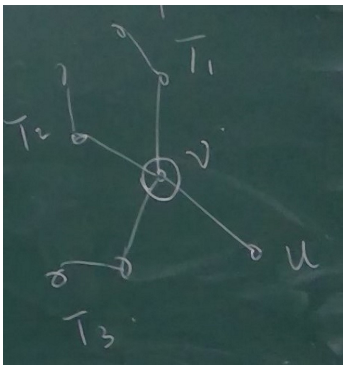
$n = 2$, $dom(K_2) = 1$

$n \ge 3$，取一个叶子 u，设与 v 相邻，

设 $T - v$ 的连通分支为 $T_1, T_2, \dots, T_k, u$

由归纳假设可知，$dom(T_i) \le \left\lfloor \frac{n_i}{2} \right\rfloor$, n_i 是 $\mathrm{T_i}$ 的顶点数

$dom(T) \le dom(T_1) + dom(T_2) + \cdots + dom(T_i) + 1 \le \left\lfloor \dfrac{n_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n_2}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \dfrac{n_k}{2} \right\rfloor + 1 \le \left\lfloor \dfrac{n_1 + n_2 + \cdots + n_k + 2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$



团 S:

1. $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{V}(G)$;
2. $G[S]$ = 完全图，即 S 导出的子图是完全图

团数 $w(G)$：团中顶点的最大数目

例：$w(N_n) = 1$, $w(K_n) = n$, $w(K_{m,n}) = 2$

12.5 匹配数

例：教员 A, B, C, D

四门课 日，英，德，法

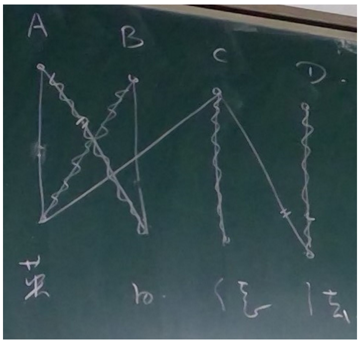
A：英，日

B：英，日

C：英，德，法

D：法

排课：每位老师教一门课，每门课有老师教



二分图

排课：无公共顶点的边子集

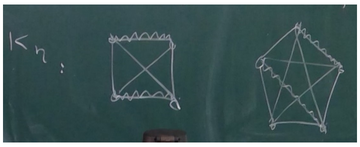
图论：$G = (V, E)$

匹配：1. $E' \subseteq E$

2. E' 中任两条边无公共顶点

完美匹配 M：G 中每个顶点是 M 中某边端点

最大匹配：边数最多



对于完全图 K_n，当 n 为偶数时，存在完美匹配

例：$Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

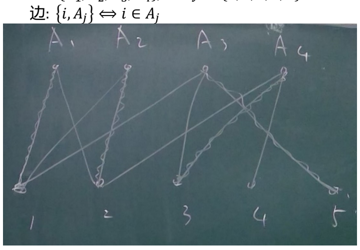
$A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

$A_1 = A_2 = \{1, 2\}, \quad A_3 = \{1, 3, 5\}, \quad A_4 = \{2, 3, 4\}$

$\Leftrightarrow$ 二分图

$x = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}, \quad y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

边: $\{i, A_j\} \Leftrightarrow i \in A_j$



相异代表系：$e_1 \in A_1, e_2 \in A_2, e_3 \in A_3, e_4 \in A_4 \vdash e_1, e_2, e_3, e_4$ 不同

图中边子集合 E'，E' 是匹配，且 A_1, A_2, A_3, A_4 是 E' 中边端点

一个相异代表系就是一个匹配

定理：设 G 是二分图，x, y 是顶点划分，由 G 构造子集族 A_G，设 t 是正整数，下面的子集族

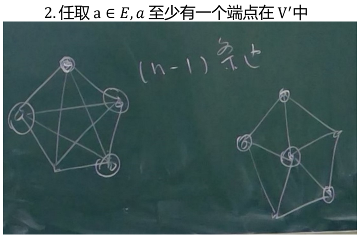
$A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_t}$ 有相异代表系 $(e_1, e_2, \dots, e_t)$ 等价于 $E' = \left\{\{e_{i_1}, A_{i_1}\}, \{e_{i_2}, A_{i_2}\}, \dots, \{e_{i_t}, A_{i_t}\}\right\}$ 是 G 的匹配

推论：$A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ 有相异代表系的最大子集合个数为

$$\min_{\substack{1 \le t \le n \\ 1 \le i_1 \le i_2 < \cdots < i_t \le n}} \{|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_t}| + (n - t)\}$$

覆盖：1. $V' \subseteq V$

2. 任取 $a \in E$, a 至少有一个端点在 V' 中



极小覆盖

最小覆盖：顶点数最小

覆盖数 $c(G)$：覆盖的顶点数

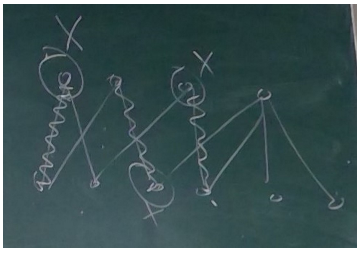
定理：C 是 G 的覆盖 $\Leftrightarrow V - C$ 是独立集

证明：C 是 G 的覆盖 $\Leftrightarrow$ G 中任意一条边至少有一个端点在 C 中

$\Leftrightarrow$ G 中任意一条边，其两个端点，不会同时在 $V - C$ 中

$\Leftrightarrow V - C$ 中任二顶点不相邻

$\Leftrightarrow V - C$ 是独立集



定理：设 G 是二分图，则 $c(G) = p(G)$，其中匹配数 $p(G)$: 最大匹配中边数

证明：（1）$c(G) \ge p(G)$

设 $M = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ 是 G 的最大匹配

设 C 是 G 的覆盖

因为 C 是覆盖，每个 a_i 有一个端点 $v_i \in C$

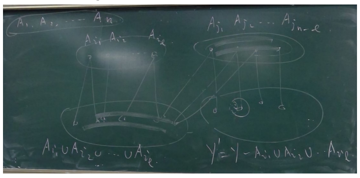
$\Rightarrow C \supseteq \{v_1, v_2, \dots, v_e\}$，因为 M 是匹配

$\Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_e$ 互不相同

$\Rightarrow |C| \ge |\{v_1, v_2, \dots, v_e\}| = e = p(G)$

$\Rightarrow c(G) \ge p(G)$

（2）$p(G) \ge c(G)$



由相异代表系：最大相异代表系数为

$$\min_{\substack{1\le k\le n \\ 1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}} \left\{\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right| + (n-k)\right\}$$

假设 $i_1, i_2, \dots, i_l$ 是满足上面最小值的下标

$p(G) = \left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_l}\right| + (n-l)$

令 $\{j_1, j_2, \dots, j_{n-l}\} = \{1, 2, \dots, n\} - \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$

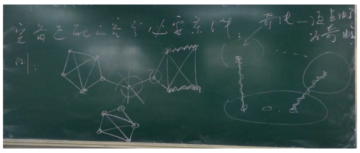
构造覆盖 $C = \left\{A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_{n-l}}\right\} \cup A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_l}$

$|C| = (n-l) + \left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_l}\right| = p(G)$

$\Rightarrow c(G) \le |C| = p(G)$

综上可知，$c(G) = p(G)$ 成立

例：$c(K_n) = n-1$，$p(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$



完备匹配的充分必要条件：

1. $G = (V, E)$
2. $G_{V\setminus U} = (V \setminus U, F)$

$G_{V\setminus U}$ 存在多个连通分量，称有奇数个顶点的连通分量为奇分量

$o(G_{V\setminus U}) = G_{V\setminus U}$ 奇片个数

定理（Tutte）：G 有完美匹配 $\Leftrightarrow \forall U \subseteq V, o(G_{V\setminus U}) \le |U|$

Chap 12: 6

Chap 12: 19，20，27，31，33

Chap 12: 49