算法设计与分析
Design and Analysis of Algorithms

主讲人 徐 云
Fall 2018，USTC

中国科学技术大学 计算机科学与技术系
University of Science and Technology of China
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND TECHNOLOGY

中国科学技术大学 计算机科学与技术系
University of Science and Technology of China
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND TECHNOLOGY

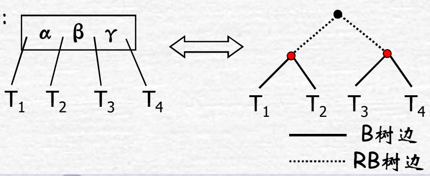
13.1 红黑树的性质

- 背景知识
- 红黑树的定义
- 一个图例
- 黑高的定义
- 关于高度的一个引理

背景知识（1）

- 树的高度决定了树上操作的成本，一些搜索树的高度如下：
  - 平衡二叉搜索树：O(logn)
  - 1962年提出的AVL树：≤1.44logn
  - 1972年提出的红黑树：≤2log(n+1)
- 4阶B树：#key(1~3), #subtree(2~4) ⇔ 红黑树 //转化

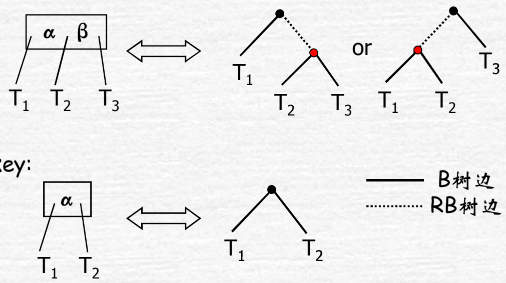
3 keys:



背景知识（2）

2 keys:

1 key:



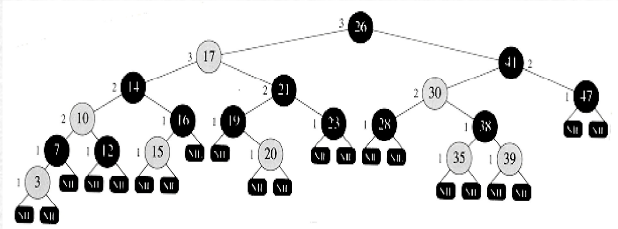
红黑树的定义

- Def. 1: 红黑树是满足下述性质的二叉搜索树
  ① 每个节点必须为红色或黑色； //性质1
  ② 根为黑色； //性质2
  ③ 树中的nil叶子为黑； //性质3
  ④ 若节点为红，则其两个孩子必为黑； //性质4
  ⑤ 每节点到其后代叶子的所有路径含有同样多的黑节点； //性质5
- 节点的结构

Parent			
left	Color	Key	right

一个图例

- Fig 13.1(a)



表达方式：

图(a)每个空指针域均连接到一个叶节点nil，比较浪费存储空间；
图(b)所有空指针域共享一个哨兵nil[T]，nil[T]为黑色；
图(c)省略nil[T];

黑高的定义

- Def. 2：节点x的黑高bh(x)是该节点到它的任何后代叶子路径上的黑节点数(不包括x本身)
  注：Fig 13.1(a)中节点旁的数字
- Def. 3：红黑树的黑高是根的黑高，记bh(root[T])

关于高度的一个引理（1）

- Lemma 13.1：一棵n个内点的红黑树的高度至多是2log(n+1)。
- Proof：
  ① 先证对任何以x为根的子树其内节点数$\geq 2^{bh(x)}-1$
  归纳基础：当bh(x)=0时，x就是nil[T]
  ∴ $2^{bh(x)}-1= 2^0-1=0$ 即为0个内节点，正确
  归纳假设：对x的左右孩子命题正确
  归纳证明：∵ x的左右孩子的黑高或为bh(x)或为bh(x)-1
  ∴ x的内点数=左孩子内点数+右孩子内点数+1
  $\geq(2^{bh(x)-1}-1)+(2^{bh(x)-1}-1)+1$
  $= 2^{bh(x)}-1$
  即第①点得证。

关于高度的一个引理（2）

- Proof(Cont.):
  ② 证明bh(root[T])≥h/2， h为红黑树的树高
  ∵ 红点的孩子必为黑 //红黑树的性质4
  ∴ 红点的层数＜h/2
  因此 ⇒ bh(root[T])≥h/2
  ③ 证明最后结论
  ∵ 红黑树有n个内点
  由① ⇒ $n\geq 2^{bh(root[T])}-1\geq 2^{h/2}-1$
  ∴ ⇒ h≤2log(n+1) □

中国科学技术大学 计算机科学与技术系
University of Science and Technology of China
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND TECHNOLOGY

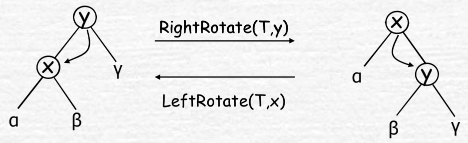
第13章 红黑树

13.2 旋转

- 左、右旋转定义
- 左旋实现的步骤
- 左旋算法

左、右旋的定义

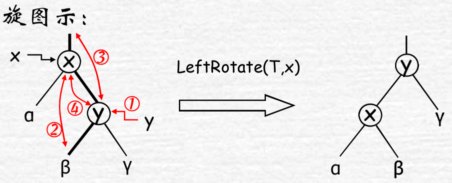
- 左、右旋转的图示



注：旋转过程中二叉搜索树(BST)性质不变：$\alpha \le x \le \beta \le y \le \gamma$

左旋实现的步骤

- 左旋图示：



- 步骤解释：需要变动的是3根粗链 临界情形

① y←right[x] //记录指向y节点的指针

② right[x]←left[y], p[left[y]]←x //β连到x右 β=nil[T]

p[y]表示y节点指向父节点的指针

③ p[y]←p[x], p[x]的左或右指针指向y //y连到p[x] P[x]=nil[T], 即x为根

④ Left[y]←x, p[x]←y //x连到y左

注：- 要注意先后顺序；- 每条边的修改涉及双向；

- 要考虑临界情形(特殊情形)；

左旋算法

```
LeftRotate(T, x)
{ //假定right[x] ≠ nil[T]
  //step ①
   y ← right[x];
  //step ②
   right[x] ← left[y]; p[left[y]] ← x;
  //step ③
   p[y] ← p[x];
   if p[x]=nil[T] then          //x是根
       root[T] ← y;             //修改树指针
   else  if  x=left[p[x]] then left[p[x]] ← y;
          else right[p[x]] ← y;  p[x]的左或右指针指向y
  //step ④
    left[y] ← x; p[x] ← y;
 }
T(n)=O(1)
```


中国科学技术大学 计算机科学与技术系
University of Science and Technology of China
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND TECHNOLOGY

13.3 插入

- 算法步骤
- RBInsert算法
- RBInsertFixup算法

算法步骤

step 1：将z节点按BST树规则插入红黑树中，
　z是叶子节点；

step 2：将z涂红；

step 3：调整使其满足红黑树的性质；

RBInsert算法（1）

```
RBInsert(T, z)
{  y ← nil[T];              //y用于记录：当前扫描节点的双亲节点
   x ← root[T];             //从根开始扫描
   while x ≠ nil[T] do      //查找插入位置
   {  y ← x;
      if key[z] < key[x] then     //z插入x的左边
         x ← left[x];
      else
         x ← right[x];            //z插入x的右边
   }
   p[z] ← y;                //y是z的双亲
   if y = nil[T] then          //z插入空树
      root[T] ← z;             //z是根
   else
      if key[z] < key[y] then
         left[y] ← z;          //z是y的左子插入
      else
         right[y] ← z;         //z是y的右子插入
```


RBInsert算法（2）

```
   left[z] ← right[z] ← nil[T];
   color[z] ← red;
   RBInsertFixup(T, z);
}
```

时间：T(n)=O(logn)

RBInsertFixup算法（1）

- 调整分析
  - idea：通过旋转和改变颜色，自下而上调整（z进行上溯），使树满足红黑树；
  - z插入后违反情况：
    ∵z作为红点，其两个孩子为黑（nil[T]）
    ∴满足性质1，3，5
    可能违反性质2：z是根
    可能违反性质4：p[z]是红
  - 调整步骤：
    (1)若z为根，将其涂黑；
    (2)若z为非根，则p[z]存在
    　①若p[z]为黑，无需调整

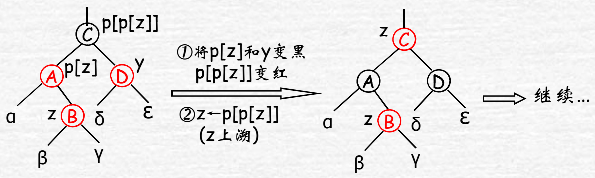
RBInsertFixup算法（2）

②若p[z]为红，违反性质4，则需调整
　∵ p[z]为红，它不为根
　∴ p[p[z]]存在且为黑

- 分6种情况进行调整：
  其中
  　case1~3为z的双亲p[z]是其祖父p[p[z]]的左孩子，
  　case4~6为z的双亲p[z]是其祖父p[p[z]]的右孩子。

RBInsertFixup算法（3）

Case 1：z的叔叔y是红色　黑色下沉，矛盾上移

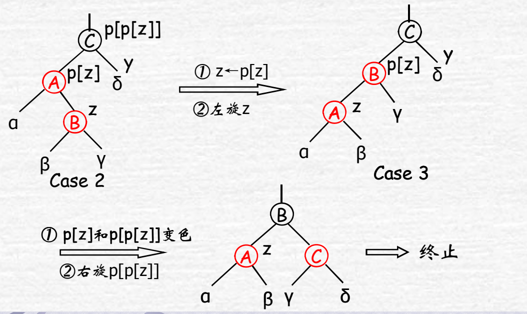


注：(1)变换后，新的z(上溯后)可能违反性质4，故调整最多至根；
　　(2)若红色传播到根，将根涂黑，则树的黑高增1；//临界处理
　　(3)z是p[z]的左、右孩子均一样处理；

RBInsertFixup算法（4）

Case 2：当z的叔叔y是黑色，且z是双亲p[z]的右孩子

Case 3：当z的叔叔y是黑色，且z是双亲p[z]的左孩子



RBInsertFixup算法（5）

- RBInsertFixup算法

```
RBInsertFixup(T, z)
{  while ( color[p[z]]=red ) do
   { //若z为根，则p[z]=nil[T]，其颜色为黑，不进入此循环
     //若p[z]为黑，无需调整，不进入此循环
      if p[z]=left[p[p[z]]] then   //case 1,2,3
      {  y ← right[p[p[z]]];    //y是z的叔叔
         if color[y]=red then   //case 1
         {  color[y]=black; color[p[z]]=black;
            color[p[p[z]]]=red; z ← p[p[z]];
         }
         else    //case 2 or case 3  y为黑
```


RBInsertFixup算法（6）

```
         else    //case 2 or case 3  y为黑
         {  if z=right[p[z]] then  //case 2
            {  z ← p[z];        //上溯至双亲
               leftRotate(T, z);
            }//以下为case 3
            color[p[z]]=black; color[p[p[z]]]=red;
            RightRotate(T, p[p[z]]); //p[z]为黑，退出循环
         }  //case 1's endif
      } //case 2 or 3' s
      else   //case 4,5,6's 与上面对称
      { … … }
   } //endwhile
   color[root[t]] ← black;
}
```


RBInsertFixup算法（5）

- 算法的时间复杂性
  - 调整算法的时间：O(logn)
  - 整个插入算法的时间：O(logn)
  - 调整算法中至多使用2个旋转

第13章 红黑树

13.1 红黑树的性质

13.2 旋转

13.4 插入

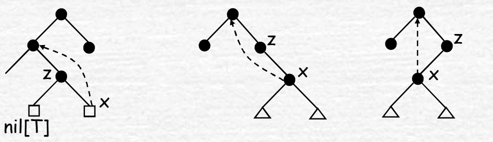
13.4 删除

13.4 删除

- 分析讨论
- 删除算法

分析讨论（1）

- z删除后BST的调整
  - case 1：z为叶子；　　case 2：z只有一个孩子(非空)



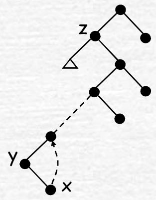
注：(1)删除z，连接x。这里x是z的中序后继；

(2)case 1是case 2的特例，因为处理模式是一样的。

(3)z是p[z]的左孩子，类似讨论；

分析讨论（2）

- case 3：z的两个孩子均非空；



注：(1)找z的中序后继，即找z的右子树中最左下节点y；

(2)删除y，将y的内容copy到z，再将y的右子连到p[y]左下。

- RBT性质的影响

删红点不影响，删黑点需要调整。 //这里是后面算法中y的颜色

删除算法（1）

- 删除算法

```
RBDelete(T, z)
{  if (left[z]=nil[T]) or (right[z]=nil[T]) then  //case 1,2
       y ← z;          //后面进行物理删除y
   else  //z的两子树均非空，case 3
       y ← TreeSuccessor(z);  //y是z的中序后继
   //此时，y统一地是x的双亲节点且是要删除节点
   //x是待连接到p[y]的节点，以下要确定x
   if left[y] ≠ nil[T]  then  //本if语句综合了case1,2,3的x
       x ← left[y];
   else
       x ← right[y];
   //以下处理：用x取代y与y的双亲连接
   p[x] ← p[y];
```


删除算法（2）

```
   if p[y]=nil[T] then   //y是根
       root[T] ← x;          //根指针指向x
   else  //y非根
       if  y=left[p[y]]  then  //y是双亲的左子
           left[p[y]] ← x;
       else
           right[p[y]] ← x;
   if  y≠z then             //case 3
       y的内容copy到z;
   if  color[y]=black then
       RBDeleteFixup(T, x);  //调整算法
   return  y;   //实际是删除y节点
}
```


删除算法（3）

- 调整算法：RBDeleteFixup(T, x)
  - 讨论

x：或是y的唯一孩子；或是哨兵nil[T]

可以想象将y的黑色涂到x上，于是

- 若x为红，只要将其涂黑，调整即可终止；
- 若x为黑，将y的黑色涂上之后，x是一个双黑节点，违反性质1。

处理步骤如下：

step 1：若x是根，直接移去多余一层黑色(树黑高减1)，终止；

step 2：若x原为红，将y的黑色涂到x上，终止；

step 3：若x非根节点，且为黑色，则x为双黑。通过变色、旋转使多余黑色向上传播，直到某个红色节点或传到根；

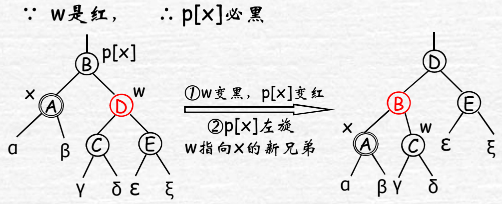
删除算法（4）

- 调整分8种情况

case 1~4为x是p[x]的左子；case 5~8为x是p[x]的右子

case 1：x的兄弟w是红色

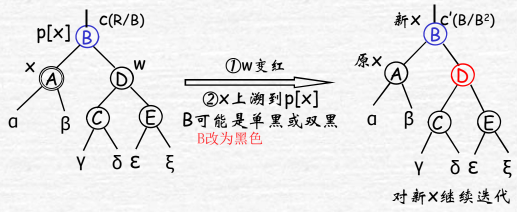
∵ w是红，　∴ p[x]必黑



目标：将case1转为case2,3,4处理

删除算法 (5)

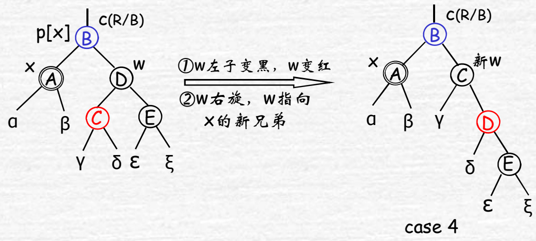
case 2：x的黑兄弟w的两个孩子均为黑



目标： x上移到B，通过A和D的黑色上移

删除算法 (6)

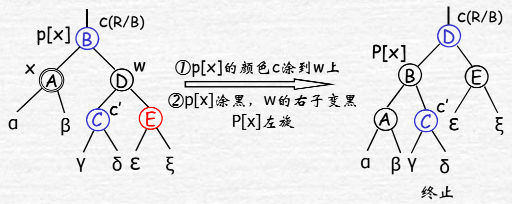
case 3：x的黑兄弟w的右子为黑且左子为红



目标： 将case3转为case4

删除算法 (7)

case 4：x的黑兄弟w的右子为红(左子为黑或红)



目标：终结处理。x的黑色上移给B，B的原色下移给D，D将黑色下移给C和E，通过旋转解决矛盾点C

- DeleteFixup(T, x)算法：P185

中国科学技术大学 计算机科学与技术系
University of Science and Technology of China
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND TECHNOLOGY

End of Chap13