

中国科学技术大学

2015--2016 学年第 1 学期考试试卷

考试科目: 组合数学

得分: _____

学生所在系: _____ 姓名: _____ 学号: _____

一、 (10 分) 证明: 在坐标平面上任取 13 个整点 (即横、纵坐标均为整数的点), 则必有一个以它们中的三个点为顶点的三角形, 其重心也是整点。

二、 (20 分) 20 本书要放在 5 个书架上, 每个书架至少能够放 20 本书。

(1) 如果只关心书架上书的数量, 有多少不同的摆放方法?

(2) 如果关心书所摆放的书架, 不关心在书架上的顺序, 有多少不同的摆放方法?

(3) 如果考虑书架上书的顺序, 有多少不同的摆放方法?

三、 (10 分) 用生成函数求解递推关系
$$\begin{cases} h_n = h_{n-1} + 9h_{n-2} - 9h_{n-3}, (n \geq 3); \\ h_0 = 0, h_1 = 1, h_2 = 2. \end{cases}$$

四、 (12 分) 求不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ 满足 $1 \leq x_1 \leq 6, 0 \leq x_2 \leq 7, 4 \leq x_3 \leq 8, 2 \leq x_4 \leq 6$ 的整数解的个数。

五、 (18 分) 分别求出满足下面两个条件、长度为 n 的 0-1 字符串个数:

(1) 不出现连续两个 1;

(2) 不出现连续两个 1, 且 0 总是连续出现 2 个或 3 个。

(20 分) 将一个正立方体的六个面分别用上、下、左、右、前、后来表示:

(1) 请写出六个面关于旋转与翻转的置换群;

(2) 写出该置换群的“上”不动类与“上”等价类;

(3) 假定对顶点用红、黄两着色, 定义权 $w(\text{红色})=r, w(\text{黄色})=y$, 给出为 $r^5 y^1$ 的映射全体;

(4) 给出不同的等价类数

(10 分) 请写出下面组合恒等式的组合意义:

$$\sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}.$$