算法设计与分析
Design and Analysis of Algorithms

主讲人　徐 云

Fall 2018，USTC

第14章 数据结构的扩张

14.1 动态顺序统计

14.2 如何扩充一个数据结构

14.3 区间树

14.1 动态顺序统计

- OS树的定义
- 选择问题及算法
- 求秩问题及算法
- OS树的维护：插入
- OS树的维护：删除

OS树的定义（1）

- Def：

  OS(Order-Statistic)树是一棵红黑树在每个节点上扩充一个域size[x]而得到的，它是以x为根的子树中内部节点的总数(包括x)，即子树大小。

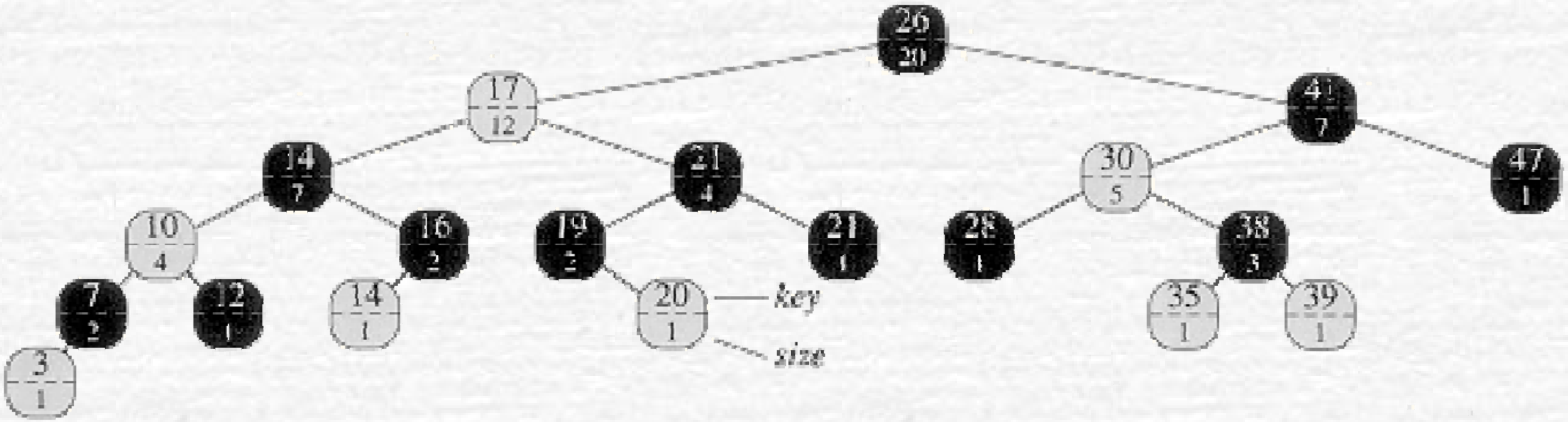
$$size[x]=\begin{cases} 0 & if\ \ x=nil[T] \\ size[left[x]]+size[right[x]]+1 & other \end{cases}$$

- 节点结构：

key
size

OS树的定义 (2)

- OS树的一个图例：Fig. 14.1



选择问题及算法

- 选择问题：在以X为根的子树中，查找第i个最小元素。
- 算法：

OSSelect(x, i)

{

(1): r ← size[left[x]]+1;

(2): ①若i=r，则返回X；

②若i＜r，则递归地在X的左子树中继续找第i个元素；

③若i＞r，则递归地在X的右子树中继续找第i-r个元素；

}

时间：O(logn)

求秩问题及算法

- 求秩问题：在OS树中，给定元素x求其rank。
- 算法：

```
RankOS(T,x)
  r = size[left[x]]+1
  y = x
  while y != root[T]:
    if y == right[p[y]]:
      r += size[left[y]]+1
    y = p[y]
  return r
```

step 1: 在以x为根的子树中，x的秩：

$r \leftarrow size[left[x]]+1$;

step 2: ①若x是根，则返回r；

②若x是双亲的左子，则x在以p[x]为根的子树中的秩是r；

③若x是双亲的右子，则x在以p[x]为根的子树中的秩是$r \leftarrow r+size[left[p[x]]]+1$；

④x上移至p[x]；

重复②，③，④直至①成立时终止；

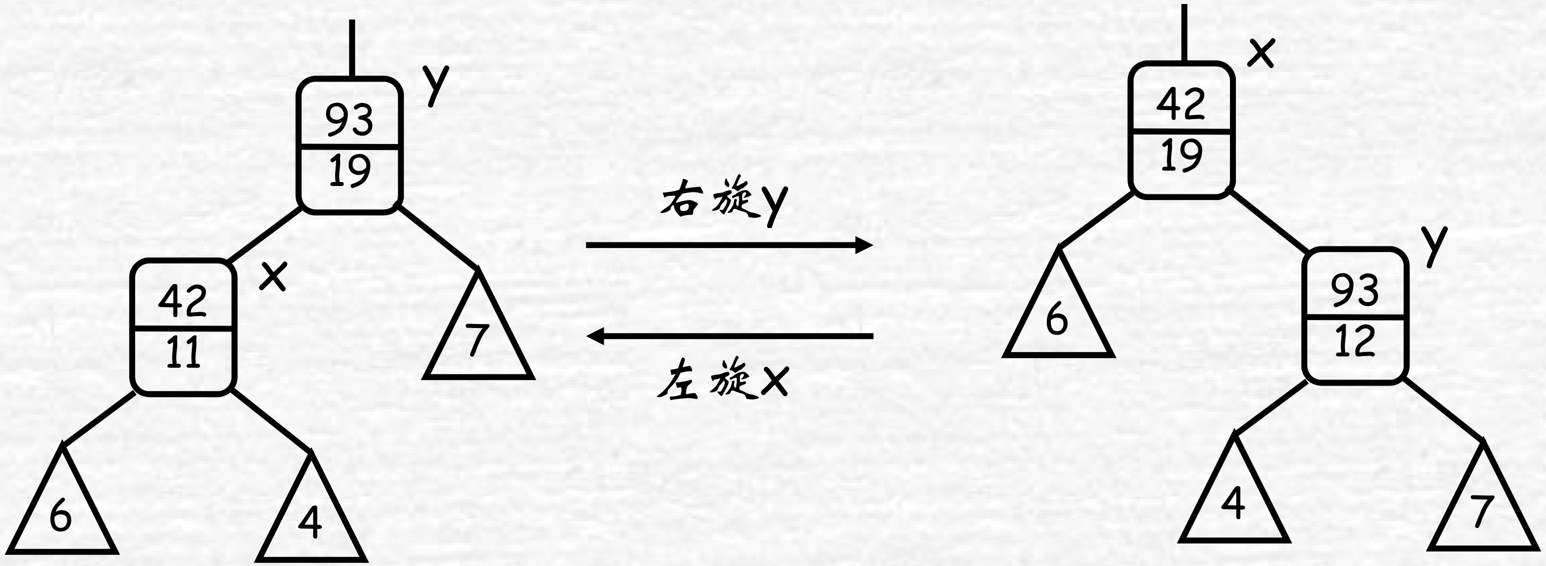
时间：O(logn)

OS树的维护：插入 (1)

- 插入算法
  - Phase 1：从根向下插入新节点，将搜索路径上所经历的每个节点的size+1，新节点的size置为1；
    - 附加成本：O(logn)
  - Phase 2：采用变色和旋转方法，从叶子向上调整；
    - 变色不改变size；
    - 旋转可能改变size：
      ∵ 旋转是局部操作，
      又，只有轴上的两个节点的size可能违反定义
      ∴ 只需要在旋转操作后，对违反节点size进行修改
    - 附加成本：旋转为O(1)，总成本为O(logn)，

OS树的维护：插入（2）

- 例：LeftRotate(T, x)



➢ 左旋x后：

size[y] ← size[x]

size[x] ← size[left[x]]+size[right[x]]+1

∵插入过程至多有2个旋转

∴附加成本为O(1)

OS树的维护：删除

- 删除算法
  - Phase 1：物理上删除y，在删除y时从y上溯至根，将所经历的节点的size均减1；
    - 附加成本：O(logn)
  - Phase 2：采用变色和旋转方法，从叶子向上调整；
    - 变色不改变size；
    - 旋转可能改变size，至多有3个旋转；
    - 附加成本：O(logn)

- Remark：上面介绍的插入和删除均是有效维护，有效维护保证扩充前后的基本操作的渐近时间不变。

第14章 数据结构的扩张

14.1 动态顺序统计

14.2 如何扩充一个数据结构

14.3 区间树

14.2 如何扩充一个数据结构

- 扩充的目的
- 扩充的步骤
- 扩充红黑树的定理

扩充的目的和步骤

- 扩充的目的
  - 开发新的操作
  - 加速已有的操作
- 扩充的步骤
  1. 选择基本结构；
  2. 确定附加信息：如，数据、指针；
  3. 维护附加信息和有效性；
  4. 开发新操作。
- 例：OS树
  1. 选择红黑树作为OS树的基本结构；
  2. 在红黑树上增加size；
  3. 有效性证明；
  4. Select，Rank操作；

扩充红黑树的定理

- 定理14.1

  假设f是红黑树T的n个节点上扩充的域，

  对$\forall x \in T$，假设x的f域的内容能够仅通过节点x、left[x]、right[x]的信息（包括f域）的计算就可以得到，则

  扩充树上的插入和删除维护操作（包括对f域的维护）不改变原有的渐近时间O(logn)。

第14章 数据结构的扩张

14.1 动态顺序统计

14.2 如何扩充一个数据结构

14.3 区间树

14.3 区间树

- 基本概念
- 区间重叠的三分律
- 红黑树的扩充：区间树
- 查找算法及正确性

基本概念

- 区间：一个事件占用的时间
- 闭区间：实数的有序对$[t_1,t_2]$，使$t_1 \le t_2$
- 区间的对象表示：$[t_1,t_2]$可以用对象i表示，有两个属性：

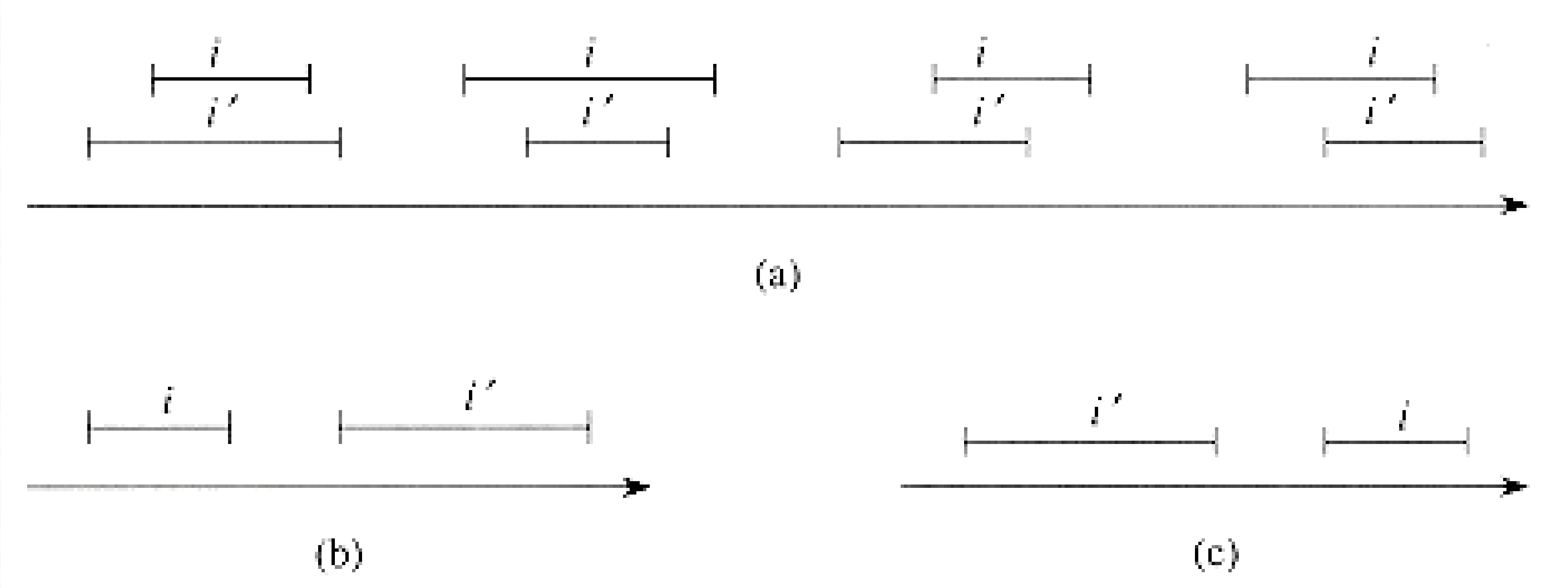
  $low[i]=t_1$　　//起点或低点

  $high[i]=t_2$　　//终点或高点
- 区间的重叠：

  $i \cap i' \neq \varnothing$

  $\Leftrightarrow (low[i] \le high[i'])$ and $(low[i'] \le high[i])$

区间重叠的三分律



(a)i和i′重叠

(b)i在i′前： high[i]<low[i′]

(c)i′在i前： high[i′]<low[i]

红黑树的扩充：区间树

- **Step 1：基本结构**

以红黑树为基础，对∀x∈T，x包含区间int[x]的信息(低点和高点)，key=low[int[x]]。

- **Step 2：附加信息** 左子树高点、右子树高点、本结点高点三者最大值

max[x]=max(high[int[x]], max[left[x]], max[right[x]])

- **Step 3：维护附加信息(有效性)**

由定理14.1及max的定义⇒有效

节点x

key

max

- **Step 4：开发新操作**

查找与给定区间重叠的区间

查找算法及正确性（1）

查找与给定区间重叠的区间

- 查找算法IntervalSearch(T, i)

基本思想：

step 1：x ← root[T]； //从根开始查找

step 2：若x≠nil[T]且i与int[x]不重叠

if x的左子树非空且左子树中最大高点≥low[i] then

x ← left[x]； //到x的左子树中继续查找

else //左子树必查不到，到右子树查

x ← right[x]；

step 3：返回x //x=nil or i和x重叠

查找算法及正确性（2）

- 算法的正确性
  - 关键说明：如果存在重叠区间，则一定会找到。
  - 定理14.2
    - case 1：若算法从x搜索到左子树，则左子树中包含一个与i重叠的区间或在x的右子树中没有与i重叠的区间；
    - case 2：若从x搜索到右子树时，则在左子树中不会有与i重叠的区间
  - 证明：先证case2，然后再证case1
    - case 2：走x右分支条件是

      left[x]=nil or max[left[x]] < low[i]

      若左子树为空，则左子树不含有与i重叠的区间；

查找算法及正确性（3）

- case 2(cont.)：严格数学证明：high[i'] <= max[left[x]] < low[i],即high[i']<low[i]所以i'在i之前

  若左子树非空，由于有max[left[x]] < low[i]

  ∵ max[left[x]]是左子树中最大高点 左子树所有区间都在low[i]之前

  ∴ 左子树中的区间不可能与i重叠

- case 1：

  若左子树包含与i重叠的区间，则走左分支正确；

  若左子树无区间与i重叠，下证x的右子树中也无区间与i重叠。

  ∵ max[left[x]]≥low[i]

  ∴ 存在区间i'∈{x 左子树的区间}，使得

  high[i'] = max[left[x]]≥low[i]

  ⇒ 只有i'和i重叠或i在i'前

  又左子树无区间与i重叠 ∴只有i在i'前，即 high[i] < low[i']

  对∀区间i''∈{x右子树的区间}，由BST性质有 low[i']≤low[i'']

  由此 ⇒ high[i] < low[i'']，∴ i和i''不重叠 i在i''之前

  综上，定理得证。 □

End of Chap14