第7章 递推关系与生成函数

2021年4月8日　　11:51

7.1 数列

1. Fibonacci数列

例1：一对兔子，第2个月开始每个月生出一对小兔子，每对小兔子从出生第2个月开始也每月生出一对小兔子

解：f_n：第n个月有多少对兔子

$$f_n=\begin{cases}0, & n=0\\1, & n=1\\f_{n-1}+f_{n-2}, & n\geq 2\end{cases}$$

性质：

（1）$f_0+f_1+\cdots+f_n=f_{n+2}-1$

证明：$f_{n-2}=f_n-f_{n-1}$

$f_0=f_2-f_1$

$f_1=f_3-f_2$

...

$f_n=f_{n+2}-f_{n+1}$

（2）f_n是偶数 $\Leftrightarrow 3|n$

例2：一步上1个或2个阶梯，上n个阶梯的方法数

$f_n=f(n-1)+f(n-2)$

$f_1=1, f_2=2$

7.2 生成函数

$h_0, h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$

1. 生成函数$g(x)=h_0+h_1x+\cdots+h_nx^n+\cdots$（形式幂级数）

例1：（1）$C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^r, \dots, C_n^n$

$g(x)=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^rx^r+\cdots+C_n^nx^n=(1+x)^n$

（2）$1,1,1,\dots,1,\dots$

$$g(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

上述等式两边求导可得：

$$g(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+(n+1)x^n+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}$$

（3）$C_a^0, C_a^1, \dots, C_a^r, \dots$

$g(x)=C_a^0+C_a^1x+\cdots+C_a^rx^r+\cdots=(1+x)^a$

2. 用生成函数求h_n

（1）求出h_n的生成函数g(x) $\begin{cases}\text{直接}\\ \text{间接：} h_n\to a_n\to g_{a_n}(x)\to g_{h_n}(x)\end{cases}$

（2）展开$g(x)$为形式幂级数

（3）x^n系数即为所求h_n

3. 生成函数的直接求法

例2：$x_1+x_2+\cdots+x_k=n$，非负整数解个数h_n

$\Leftrightarrow M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\dots,\infty\cdot a_k\}$的n组合数$h_n$

（1）$g(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)\dots(1+x+x^2+\cdots)$

（2）验证x^n系数恰为h_n，即每个x^n项 $\leftrightarrow$ 一个n组合

$x^{i_1}\cdot x^{i_2}\cdot\cdots\cdot x^{i_k}=x^{i_1+i_2+\cdots+i_k}=x^n$
$\leftrightarrow n$组合$\{i_1\cdot a_1, i_2\cdot a_2,\dots,i_k\cdot a_k\}$
$\therefore x^n$系数恰为n组合数$\mathrm{h_n}$
$\therefore g(x)$是h_n生成函数

(3) 展开$g(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)^k=\frac{1}{(1-x)^k}=(1-x)^{-k}=\sum_{i=0}^{\infty}C_{-k}^{i}(-x)^i=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^iC_{k+i-1}^{i}(-x)^i=\sum_{i=0}^{\infty}C_{k+i-1}^{i}x^i$

$\therefore h_n=C_{k+n-1}^{n}$

1) $\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$的n组合数$(k\ge n)$：$\mathrm{C_k^n}$

$g_1(x)=(1+x)(1+x)\dots(1+x)=(1+x)^k$

2) $\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\dots,\infty\cdot a_k\}$的n组合数

$g_2(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)\dots(1+x+x^2+\cdots)$

要求a_1至少取3个，a_2取偶数个

$g(x)=(x^3+x^4+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\dots(1+x+x^2+\cdots)$

3) $\{3\cdot a,4\cdot b,5\cdot c\}$的10组合数

$g_3(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$

例1：$(1+x+x^2+\cdots+x^5)(1+x+x^2)(1+x+x^2+\cdots+x^4)$

$x_1+x_2+x_3=n$的非负整数解个数，要求$0\le x_1\le 5$，$0\le x_2\le 2$，$0\le x_3\le 4$

例2：确定苹果，香蕉，橘子和梨的n组合数

要求：1）苹果偶数个，香蕉奇数个，橘子0~4个，至少1个梨

$$g(x)=(1+x^2+x^4+\cdots)(x+x^3+\cdots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(x+x^2+\cdots)$$
$$=\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^5}{1-x}\cdot\frac{x}{1-x}$$
$$=\frac{x^2(1-x^5)}{(1-x)^4(1+x)^2}$$

2）苹果偶数个，香蕉是5的倍数个，橘子0~4个，0或1个梨

$$g(x)=(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)$$
$$=\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1-x^5}{1-x}\cdot(1+x)$$
$$=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{i=0}^{\infty}C_{2+i-1}^{i}x^i$$

例3：（1）$x_1+x_2+\cdots+x_k=n$非负奇整数解个数h_n

$\Leftrightarrow\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\dots,\infty\cdot a_k\}$每个元素奇数个的n组合数

$$g(x)=(x+x^3+x^5+\cdots)^k=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^k=\frac{x^k}{(1-x^2)^k}=x^k\left(\sum_{i=0}^{\infty}C_{k+i-1}^{i}(x^2)^i\right)=\sum_{i=0}^{\infty}C_{k+i-1}^{i}\cdot x^{2i+k}$$

（2）$3x_1+4x_2+2x_3+5x_4=n$的非负整数解个数h_n

$\Leftrightarrow y_1+y_2+y_3+y_4=n$，其中$3|y_1$，$4|y_2$，$2|y_3$，$5|y_4$

$$g(x)=(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)$$
$$=\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}$$

7.3 指数型生成函数

$P(n,k)=n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$

$$g(x)=P(n,0)+P(n,1)x+P(n,2)x^2+\cdots+P(n,k)x^k+\cdots+P(n,n)x^n$$
$$=1+nx+n(n-1)x^2+\cdots+n(n-1)\dots(n-k+1)x^k+\cdots+n!\,x^n$$

$$g^{(e)}(x)=P(n,0)+\frac{P(n,1)x}{1!}+\frac{P(n,2)x^2}{2!}+\cdots+\frac{P(n,k)x^k}{k!}+\cdots+\frac{P(n,n)x^n}{n!}=(1+x)^n$$

1. 对排列数定义指数生成函数

$$g^{(e)}(x)=\sum h_n\cdot\frac{x^n}{n!}$$

注：指数生成函数展开后，$\frac{x^n}{n!}$的系数才是所求h_n，即$h_n=n!\cdot x^n$系数

例：1, 1, 1, …, 1, …的指数生成函数

$$g^{(e)}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^n$$

1. $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_k\}$，$n$排列数$h_n$，要求$a_i$出现次数集合为$M_i$，则$h_n$的指数生成函数为

$$g^{(e)}(x) = \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{j \in M_i} \frac{x^j}{j!} \right)$$

$$\because e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} + \cdots$$

$$\therefore \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

例1：1,2,3构造的n位数的个数h_n，其中1是偶数个，2至少3个，3至少4个

解：h_n的指数生成函数：

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\left(e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!}\right)\left(e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right)$$

例2：红白蓝给$1 \times n$棋盘着色，红色格子偶数个，着色方法数h_n

解：h_n的指数生成函数：

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2}(e^x)^2 = \frac{1}{2}(e^{3x} + e^x) = \frac{1}{2}\left(\sum \frac{(3x)^i}{i!} + \sum \frac{x^i}{i!}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum (3^i + 1)\frac{x^i}{i!}\right)$$

$$\therefore h_n 是 \frac{x^n}{n!} 系数 \frac{3^n + 1}{2}$$

例3：红白蓝给$1 \times n$棋盘着色，红色格子偶数个，蓝格子至少有1个，着色方法数h_n

解：h_n的指数生成函数：

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot e^x \cdot (e^x - 1) = \frac{1}{2}(e^{3x} - e^{2x} + e^x - 1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum (3^i - 2^i + 1)\frac{x^i}{i!}$$

$$h_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \dfrac{3^i - 2^i + 1}{2}, & n \geq 1 \end{cases}$$

7.4 求解线性齐次递推关系

K阶递推关系：h_n可用$h_{n-1}, h_{n-2}, \dots, h_{n-k}$表示，即$h_n = f(h_{n-1}, \dots, h_{n-k})$，其中$h_{n-k}$不可缺省

线性递推关系：$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \cdots + a_k h_{n-k} + b_n$

a_i, b_n：可能是n的函数 → 变系数

齐次线性：$b_n = 0$

非齐次线性：$b_n \neq 0$

K阶常系数线性齐次

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \cdots + a_k h_{n-k}，a_i 是常数，a_k \neq 0$$

特征方程：

$$x^k - a_1 x^{k-1} - \cdots - a_k = 0$$

特征根：

$$q_1, q_2, \dots, q_k$$

(1) 若$q_1, q_2, \dots, q_k$两两不同，则通解为

$$h(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots + c_k q_k^n$$

(2) 若有t个不同的特征根$q_1, q_2, \dots, q_t$，重数为$e_1, e_2, \dots, e_t$，$\sum e_i = k$，则通解为

$$q_1^n, nq_1^n, n^2 q_1^n, \dots, n^{e_1-1} q_1^n$$
$$q_2^n, nq_2^n, n^2 q_2^n, \dots, n^{e_2-1} q_2^n$$
$$\dots$$
$$q_t^n, nq_t^n, n^2 q_t^n, \dots, n^{e_t-1} q_t^n$$

通解是上述的线性组合

例1 $\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_1 = 1, f_2 = 1 \end{cases}$

解：$x^2 - x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\therefore$ 通解为$f_n = c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

将$f_1 = 1, f_2 = 1$代入可得c_1, c_2

例2 $\begin{cases} h_n = 2h_{n-1} + h_{n-2} - 2h_{n-3} \\ h_0 = 1, h_1 = 2, h_3 = 0 \end{cases}$

解：$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$$(x-2)(x-1)(x+1) = 0$$
$$x = 1, -1, 2$$

通解：$h_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot (-1)^n + c_3 \cdot 2^n$

将$h_0 = 1, h_1 = 2, h_3 = 0$代入可得$c_1, c_2, c_3$

例3：a, b, c组成长为n的字符串，两个a不连续出现，求能正常传输的字符串个数h_n

（1）首位是b或c

b, c						

$2\mathrm{h}_{\mathrm{n}-1}$

（2）首位是a

a	b, c					

$2h_{n-2}$

$\therefore \begin{cases} h_n = 2h_{n-1} + 2h_{n-2} \\ h_1 = 3, h_2 = 8 \end{cases}$

$$x^2 - 2x - x = 0$$
$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$\therefore h_n = c_1(1-\sqrt{3})^n + c_2(1+\sqrt{3})^n$

例4：$\begin{cases} h_n = 4h_{n-1} - 4h_{n-2} \\ h_0 = 1, h_1 = 3 \end{cases}$

解：$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x = 2$(二重)

$$h_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n$$

例5：$\begin{cases} h_n = -h_{n-1} + 3h_{n-2} + 5h_{n-3} + 2h_{n-4} \\ h_0 = 1, \dots \end{cases}$

解：$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$

$$x = -1, -1, -1, 2$$

$\therefore h_n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot n \cdot (-1)^n + c_3 \cdot n^2(-1)^n + c_4 \cdot 2^n$

2. 利用生成函数求解递推关系

（1）令$g(x)$是能求递推关系h_n的生成函数

（2）利用递推关系构造关于$g(x)$的方程

$$g(x) = \sum h_n x^n = \sum f(h_{n-1}, h_{n-2}, \ldots, h_{n-k})x^n$$

（3）求出$g(x)$，展开得到x^{n}系数即为h_n

例1：$\begin{cases} h_n = 4h_{n-1} - 4h_{n-2} \\ h_0 = 1, h_1 = 3 \end{cases}$

解：$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$

$$= 1 + 3x + \sum_{n=2}^{\infty}(4h_{n-1} - 4h_{n-2})x^n$$

$$= 1 + 3x + 4x\sum_{n=2}^{\infty} h_{n-1}x^{n-1} - 4x^2\sum_{n=2}^{\infty} h_{n-2}\, x^{n-2}$$

$$= 1 + 3x + 4x(g(x) - 1) - 4x^2 g(x)$$

$$(1 - 4x + 4x^2)g(x) = 1 - x$$

$$g(x) = \frac{1 - x}{(1 - 2x)^2}$$

7.5 求解线性非齐次递推关系

K阶常系数线性非齐次

$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \cdots + a_k h_{n-k} + b_n$　(1)，a_i是常数，$a_k \neq 0$

$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \cdots + a_k h_{n-k}$　(2)，a_i是常数，$a_k \neq 0$

非齐次(1)通解 = 齐次(2)通解 + (1)特解

1. 非齐次特解：h' (待定系数法)

根据b_n，设出h'的一般形式，代入(1)求出参数

$\boldsymbol{b_n}$	$\boldsymbol{h'}$**形式**
β^n	$h' = \begin{cases} r \cdot \beta^n, & \beta\text{不是特征根} \\ r \cdot n^e \cdot \beta^n, & \beta\text{是e重特征根} \end{cases}$
t次多项式	$h' = $ t次(t + 1)项式 $\cdot\, n^m \to 1$是m重特征根 $n^m(r_t n^t + r_{t-1}n^{t-1} + \cdots + r_1 n + r_0)$
t次多项式 $\cdot\, \beta^n$	$h' = n^m \cdot (r_t n^t + r_{t-1}n^{t-1} + \cdots + r_1 n + r_0) \cdot \beta^n$ β是m重特征根($m \geq 0$)

例：$\begin{cases} h_n = 2h_{n-1} + 3^n \\ h_0 = 2 \end{cases}$

解：（1）特征方程

$x - 2 = 0$

$x = 2$

（2）特解，设$h' = r \cdot 3^n$，代入

$\therefore r \cdot 3^n = 2 \cdot r \cdot 3^{n-1} + 3^n \Longrightarrow r = 3$

$\therefore$ 通解$h_n = c \cdot 2^n + 3^{n+1}$

Chap 7： 17, 18, 24(b), 25

Chap 7：40, 43, 51(不用展开g(x))