中国科学技术大学 计算机科学与技术系
University of Science and Technology of China
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND TECHNOLOGY

算法设计与分析
Design and Analysis of Algorithms

主讲人　徐云

Fall 2018, USTC

- Part 1 Foundation
- Part 2 Sorting and Order Statistics
- Part 3 Data Structure
  - chap 10 Elementary Data Structures
  - chap 11 Hash Tables
  - chap 12 Binary Search Trees
  - chap 13 Red-Black Trees
  - chap 14 Augmenting Data Structures
- Part 4 Advanced Design and Analysis Techniques
- Part 5 Advanced Data Structures
- Part 6 Graph Algorithms
- Part 7 Selected Topics
- Part 8 Supplement

第13章 红黑树

13.1 红黑树的性质

13.2 旋转

13.3 插入

13.4 删除

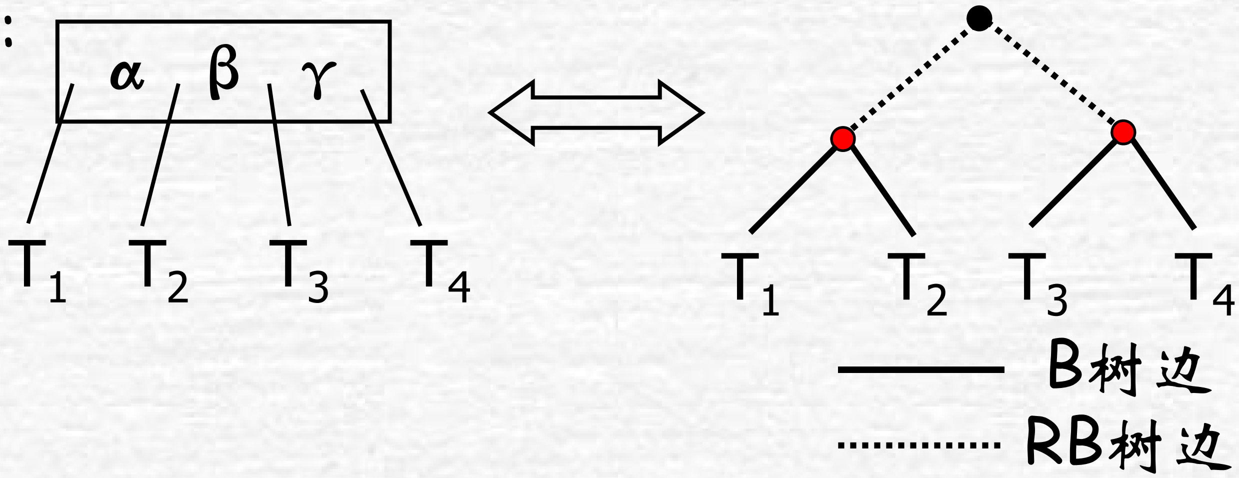
13.1 红黑树的性质

- 背景知识
- 红黑树的定义
- 一个图例
- 黑高的定义
- 关于高度的一个引理

背景知识（1）

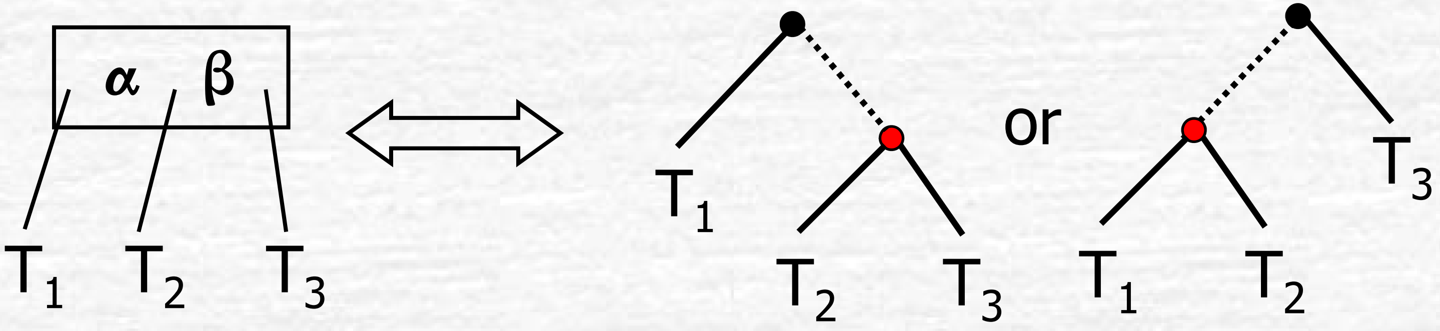
- 树的高度决定了树上操作的成本，一些搜索树的高度如下：
  - 平衡二叉搜索树：O(logn)
  - 1962年提出的AVL树：≤1.44logn
  - 1972年提出的红黑树：≤2log(n+1)
- 4阶B树：#key(1~3), #subtree(2~4) ⇔ 红黑树 //转化

3 keys:

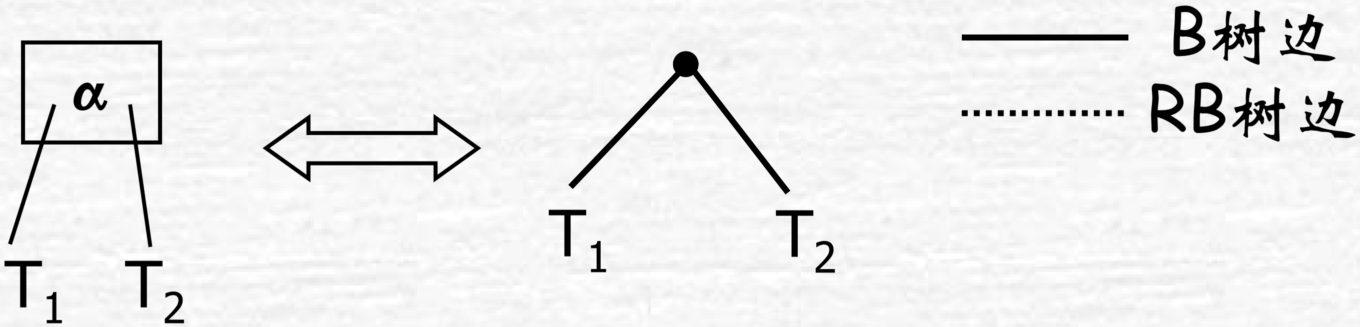


背景知识（2）

2 keys:

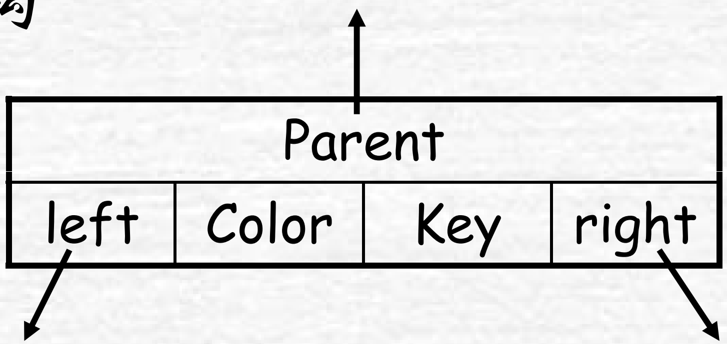


1 key:



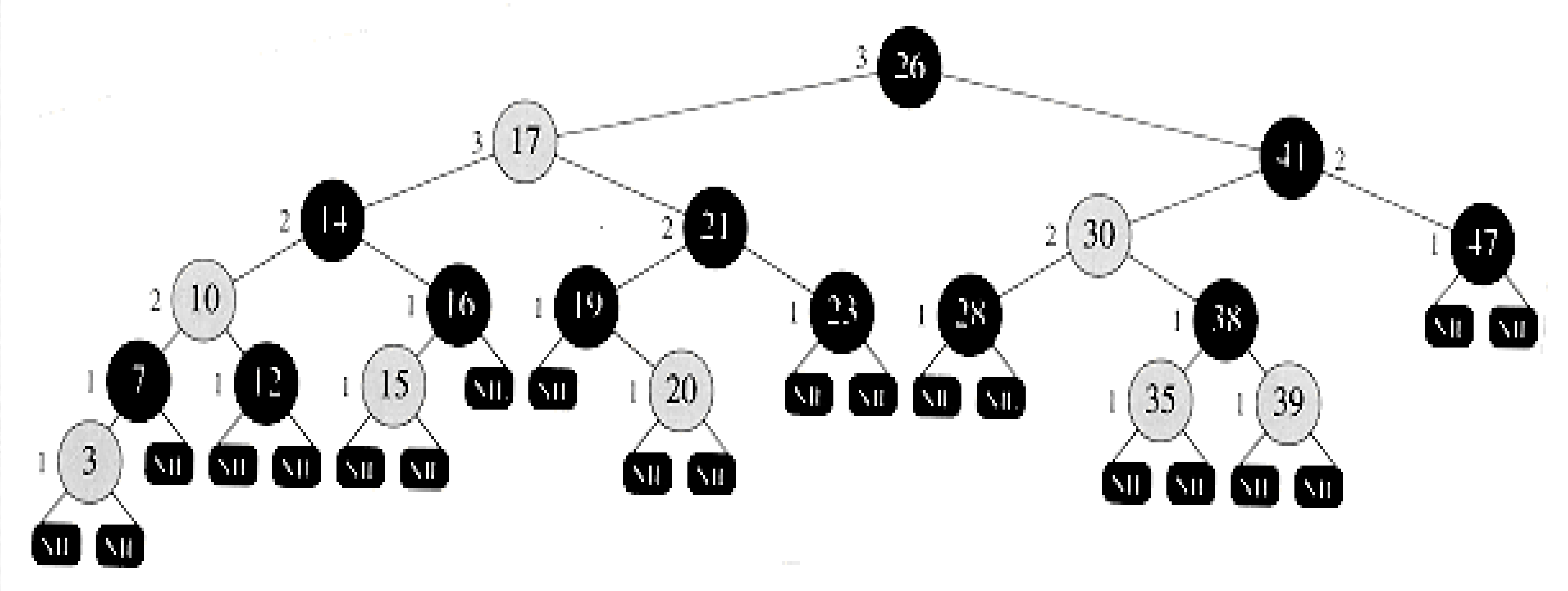
红黑树的定义

- Def. 1: 红黑树是满足下述性质的二叉搜索树
  ① 每个节点必须为红色或黑色； //性质1
  ② 根为黑色； //性质2
  ③ 树中的nil叶子为黑； //性质3
  ④ 若节点为红，则其两个孩子必为黑； //性质4
  ⑤ 每节点到其后代叶子的所有路径含有同样多的黑节点； //性质5
- 节点的结构



一个图例

- Fig 13.1(a)



表达方式:

图(a)每个空指针域均连接到一个叶节点nil，比较浪费存储空间；

图(b)所有空指针域共享一个哨兵nil[T]，nil[T]为黑色；

图(c)省略nil[T];

黑高的定义

- Def. 2：节点x的黑高bh(x)是该节点到它的任何后代叶子路径上的黑节点数(不包括x本身)

  注：Fig 13.1(a)中节点旁的数字

- Def. 3：红黑树的黑高是根的黑高，记bh(root[T])

关于高度的一个引理（1）

- Lemma 13.1：一棵n个内点的红黑树的高度至多是$2\log(n+1)$。
- Proof：

① 先证对任何以x为根的子树其内节点数$\geq 2^{bh(x)}-1$

归纳基础：当$bh(x)=0$时，x就是nil[T]

$\therefore\ 2^{bh(x)}-1= 2^0-1=0$　即为0个内节点，正确

归纳假设：对x的左右孩子命题正确

归纳证明：$\because$ x的左右孩子的黑高或为$bh(x)$或为$bh(x)-1$

$\therefore$ x的内点数=左孩子内点数+右孩子内点数+1

$$\geq(2^{bh(x)-1}-1)+(2^{bh(x)-1}-1)+1$$

$$= 2^{bh(x)}-1$$

即第①点得证。

关于高度的一个引理（2）

- Proof(Cont.):

② 证明$bh(root[T]) \geq h/2$，　　h为红黑树的树高

$\because$ 红点的孩子必为黑　　//红黑树的性质4

$\therefore$ 红点的层数$<h/2$

因此 $\Rightarrow bh(root[T]) \geq h/2$

③ 证明最后结论

$\because$ 红黑树有n个内点

由① $\Rightarrow n \geq 2^{bh(root[T])}-1 \geq 2^{h/2}-1$

$\therefore \Rightarrow h \leq 2\log(n+1)$ $\square$

第13章 红黑树

13.1 红黑树的性质

13.2 旋转

13.3 插入

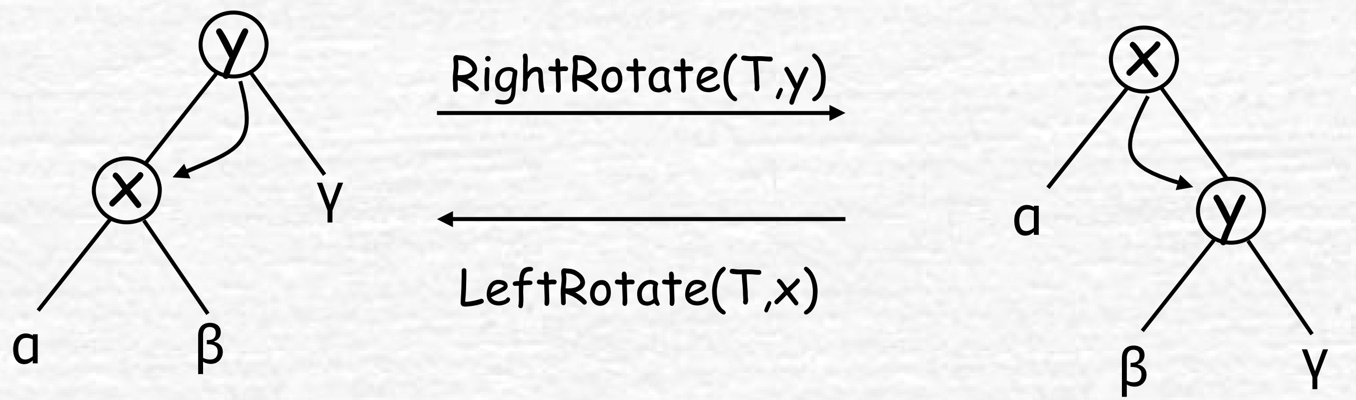
13.4 删除

13.2 旋转

- 左、右旋转定义
- 左旋实现的步骤
- 左旋算法

左、右旋的定义

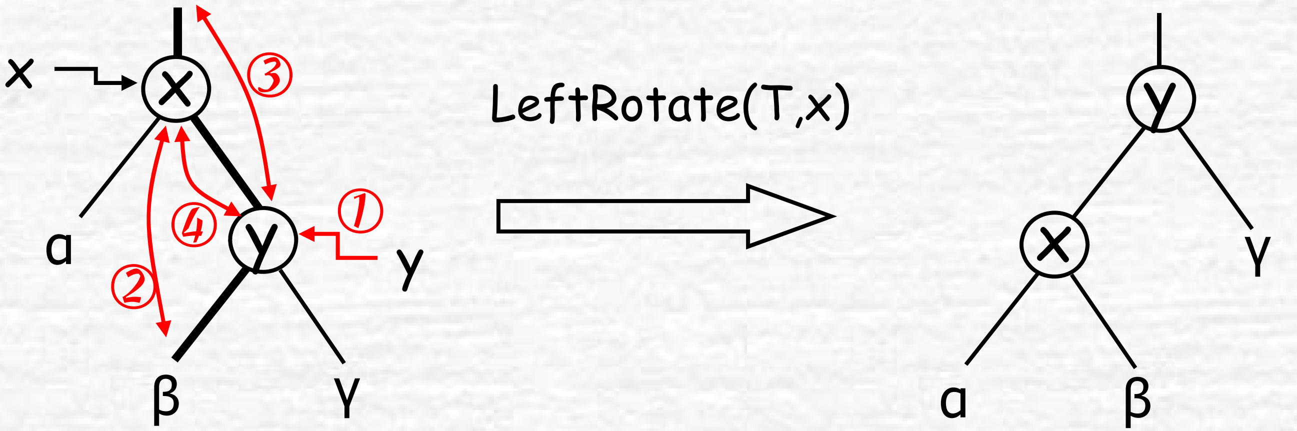
- 左、右旋转的图示



注：旋转过程中二叉搜索树(BST)性质不变：α ≤x ≤ β ≤y ≤ γ

左旋实现的步骤

- 左旋图示：



- 步骤解释：需要变动的是3根粗链

临界情形

① y←right[x] //记录指向y节点的指针

② right[x]←left[y], p[left[y]]←x //β连到x右 β=nil[T]

p[y]表示y节点指向父节点的指针

③ p[y]←p[x], p[x]的左或右指针指向y //y连到p[x] P[x]=nil[T], 即x为根

④ Left[y]←x, p[x]←y //x连到y左

注：- 要注意先后顺序；- 每条边的修改涉及双向；

- 要考虑临界情形(特殊情形)；

左旋算法

```
LeftRotate(T, x)
{  //假定right[x] ≠ nil[T]
   //step ①
    y ← right[x];
   //step ②
    right[x] ← left[y]; p[left[y]] ← x;
   //step ③
    p[y] ← p[x];
    if p[x]=nil[T] then          //x是根
         root[T] ← y;            //修改树指针
    else  if  x=left[p[x]] then left[p[x]] ← y;
           else right[p[x]] ← y;  p[x]的左或右指针指向y
   //step ④
    left[y] ← x; p[x] ← y;
}
```

T(n)=O(1)

第13章 红黑树

13.1 红黑树的性质

13.2 旋转

13.3 插入

13.4 删除

13.3 插入

- 算法步骤
- RBInsert算法
- RBInsertFixup算法

算法步骤

step 1：将z节点按BST树规则插入红黑树中，
z是叶子节点；

step 2：将z涂红；

step 3：调整使其满足红黑树的性质；

RBInsert算法（1）

```
RBInsert(T, z)
{   y ← nil[T];              //y用于记录：当前扫描节点的双亲节点
    x ← root[T];             //从根开始扫描
    while x ≠ nil[T] do      //查找插入位置
    {   y ← x;
        if key[z] < key[x] then      //z插入x的左边
            x ← left[x];
        else
            x ← right[x];            //z插入x的右边
    }
    p[z] ← y;                //y是z的双亲
    if y = nil[T] then              //z插入空树
        root[T] ← z;                //z是根
    else
        if key[z] < key[y] then
            left[y] ← z;            //z是y的左子插入
        else
            right[y] ← z;           //z是y的右子插入
```

RBInsert算法（2）

```
    left[z] ← right[z] ← nil[T];
    color[z] ← red;
    RBInsertFixup(T, z);
}
```

时间： $T(n)=O(\log n)$

RBInsertFixup算法（1）

- 调整分析
  - idea：通过旋转和改变颜色，自下而上调整（z进行上溯），使树满足红黑树；
  - z插入后违反情况：

    ∵z作为红点，其两个孩子为黑（nil[T]）

    ∴满足性质1，3，5

    可能违反性质2：z是根

    可能违反性质4：p[z]是红
  - 调整步骤：

    (1)若z为根，将其涂黑；

    (2)若z为非根，则p[z]存在

    ①若p[z]为黑，无需调整

RBInsertFixup算法（2）

②若p[z]为红，违反性质4，则需调整

∵ p[z]为红，它不为根

∴ p[p[z]]存在且为黑

- 分6种情况进行调整：

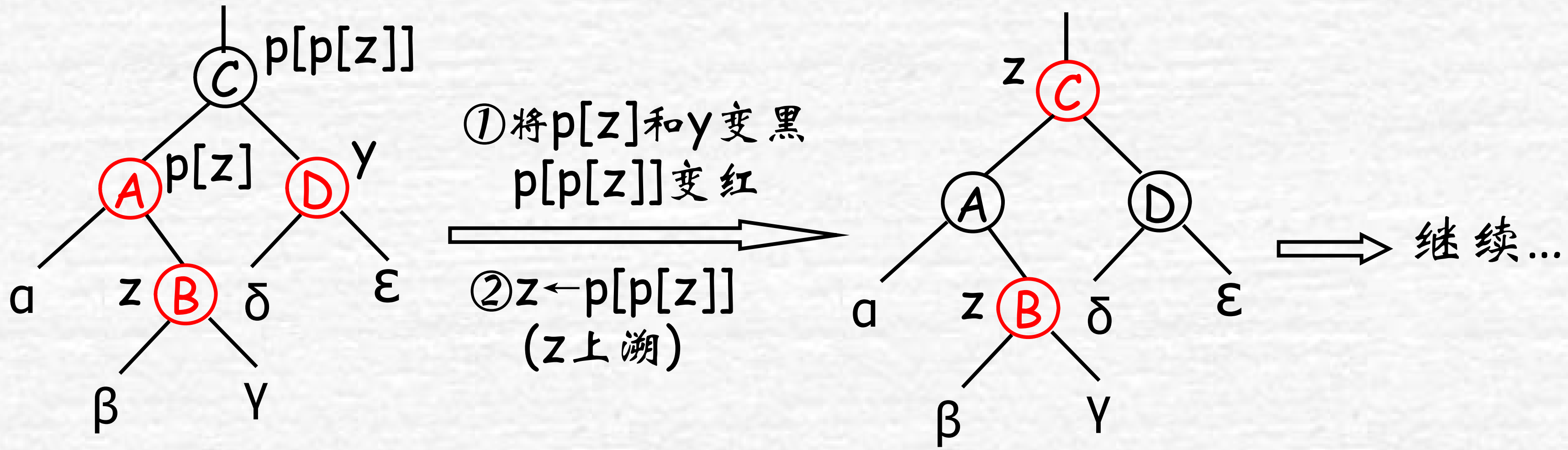
其中

case1~3为z的双亲p[z]是其祖父p[p[z]]的左孩子，

case4~6为z的双亲p[z]是其祖父p[p[z]]的右孩子。

RBInsertFixup算法（3）

Case 1：z的叔叔y是红色 黑色下沉，矛盾上移



注：(1)变换后，新的z(上溯后)可能违反性质4，故调整最多至根；

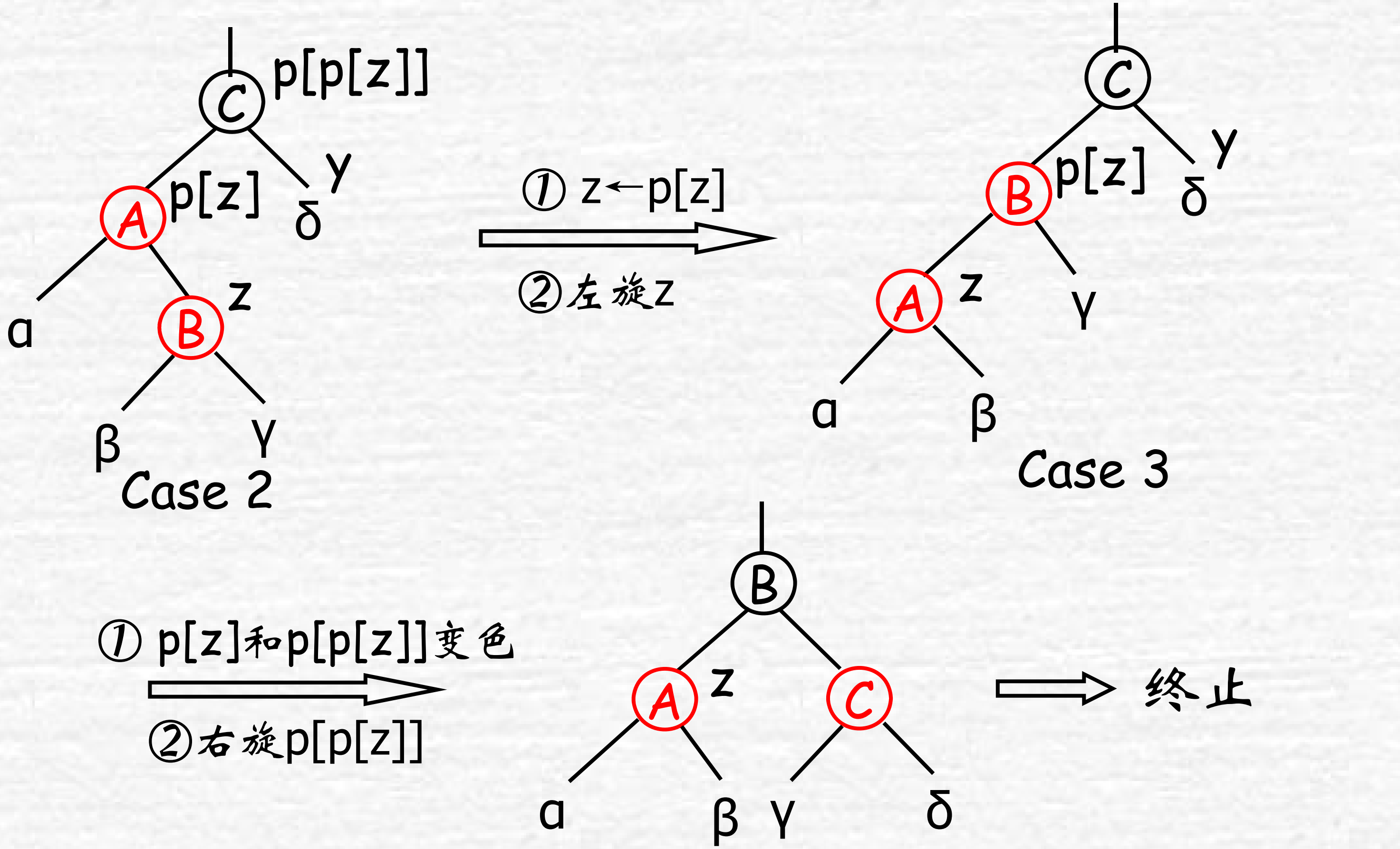
(2)若红色传播到根，将根涂黑，则树的黑高增1；//临界处理

(3)z是p[z]的左、右孩子均一样处理；

RBInsertFixup算法（4）

Case 2：当z的叔叔y是黑色，且z是双亲p[z]的右孩子

Case 3：当z的叔叔y是黑色，且z是双亲p[z]的左孩子



RBInsertFixup算法（5）

- RBInsertFixup算法

```
RBInsertFixup(T, z)
{   while ( color[p[z]]=red ) do
    { //若z为根，则p[z]=nil[T]，其颜色为黑，不进入此循环
     //若p[z]为黑，无需调整，不进入此循环
       if p[z]=left[p[p[z]]] then   //case 1,2,3
       {   y ← right[p[p[z]]];      //y是z的叔叔
           if color[y]=red then    //case 1
           {   color[y]=black; color[p[z]]=black;
               color[p[p[z]]]=red; z ← p[p[z]];
           }
           else     //case 2 or case 3   y为黑
```

RBInsertFixup算法（6）

```
else     //case 2 or case 3   y为黑
 {   if z=right[p[z]] then  //case 2
     {   z ← p[z];         //上溯至双亲
         leftRotate(T, z);
     }//以下为case 3
     color[p[z]]=black; color[p[p[z]]]=red;
     RightRotate(T, p[p[z]]); //p[z]为黑，退出循环
   }  //case 1's endif
 } //case 2 or 3' s
else   //case 4,5,6's 与上面对称
{ … … }
} //endwhile
color[root[t]] ← black;
}
```

RBInsertFixup算法（5）

- 算法的时间复杂性
  - 调整算法的时间：O(logn)
  - 整个插入算法的时间：O(logn)
  - 调整算法中至多使用2个旋转

第13章 红黑树

13.1 红黑树的性质

13.2 旋转

13.4 插入

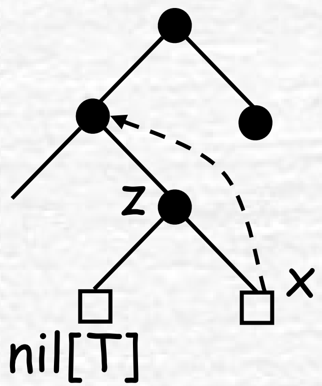
13.4 删除

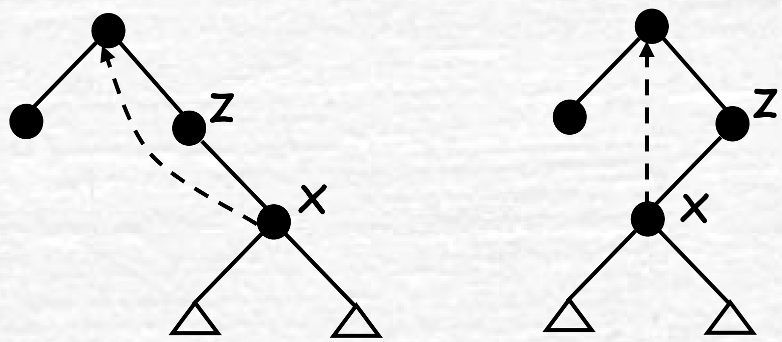
13.4 删除

- 分析讨论
- 删除算法

分析讨论（1）

- z删除后BST的调整
  - case 1：z为叶子；　　case 2：z只有一个孩子(非空)





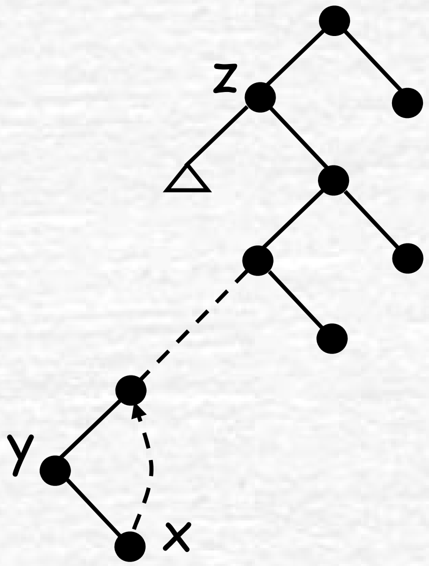
注：(1)删除z，连接x。这里x是z的中序后继；

(2)case 1是case 2的特例，因为处理模式是一样的。

(3)z是p[z]的左孩子，类似讨论；

分析讨论（2）

➢ case 3：z的两个孩子均非空；



注：(1)找z的中序后继，即找z的右子树中最左下节点y；

(2)删除y，将y的内容copy到z，再将y的右子连到p[y]左下。

- RBT性质的影响

删红点不影响，删黑点需要调整。 //这里是后面算法中y的颜色

删除算法（1）

- 删除算法

```
RBDelete(T, z)
{   if (left[z]=nil[T]) or (right[z]=nil[T]) then  //case 1,2
        y ← z;          //后面进行物理删除y
    else  //z的两子树均非空，case 3
        y ← TreeSuccessor(z);   //y是z的中序后继
    //此时，y统一地是x的双亲节点且是要删除节点
    // x是待连接到p[y]的节点，以下要确定x
    if left[y] ≠ nil[T]  then  //本if语句综合了case1,2,3的x
        x ← left[y];
    else
        x ← right[y];
    //以下处理：用x取代y与y的双亲连接
    p[x] ← p[y];
```

删除算法（2）

```
    if p[y]=nil[T] then   //y是根
        root[T] ← x;          //根指针指向x
    else  //y非根
        if  y=left[p[y]]  then   //y是双亲的左子
            left[p[y]] ← x;
        else
            right[p[y]] ← x;
    if  y≠z then              //case 3
        y的内容copy到z;
    if  color[y]=black then
        RBDeleteFixup(T, x);   //调整算法
    return  y;    //实际是删除y节点
}
```

删除算法（3）

- 调整算法：RBDeleteFixup(T, x)
  - 讨论

    x：或是y的唯一孩子；或是哨兵nil[T]

    可以想象将y的黑色涂到x上，于是

    - 若x为红，只要将其涂黑，调整即可终止；
    - 若x为黑，将y的黑色涂上之后，x是一个双黑节点，违反性质1。

    处理步骤如下：

    step 1：若x是根，直接移去多余一层黑色(树黑高减1)，终止；

    step 2：若x原为红，将y的黑色涂到x上，终止；

    step 3：若x非根节点，且为黑色，则x为双黑。通过变色、旋转使多余黑色向上传播，直到某个红色节点或传到根；

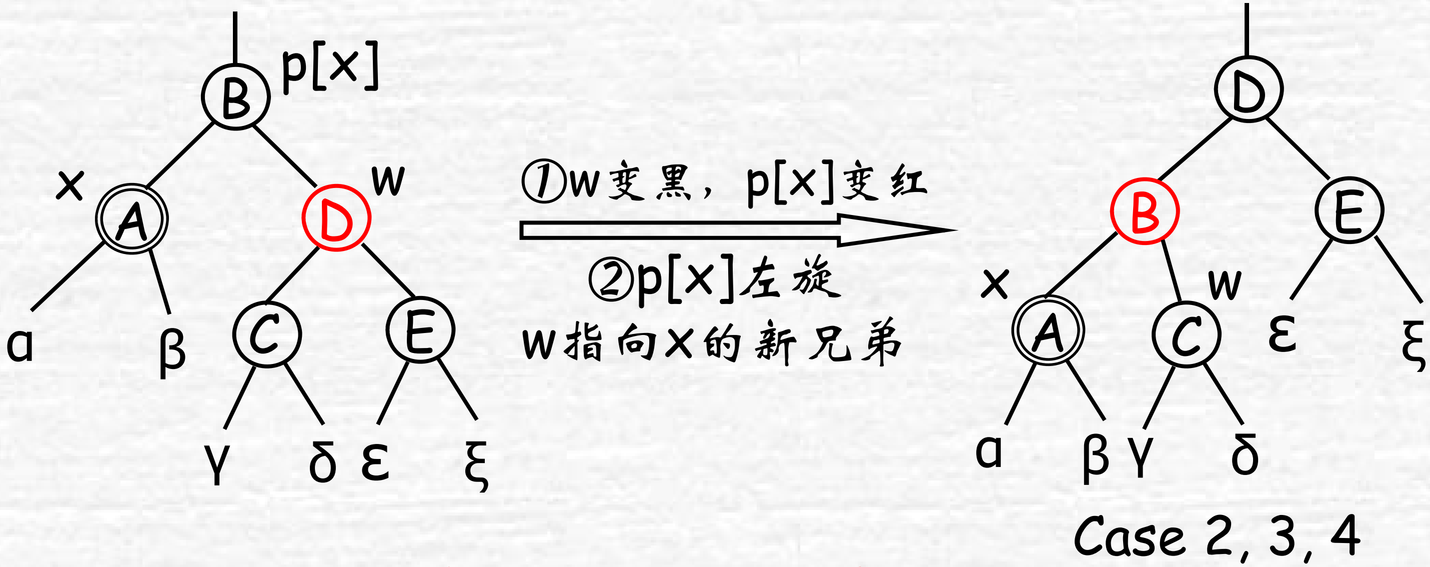
删除算法（4）

- 调整分8种情况

case 1~4为x是p[x]的左子；case 5~8为x是p[x]的右子

case 1：x的兄弟w是红色

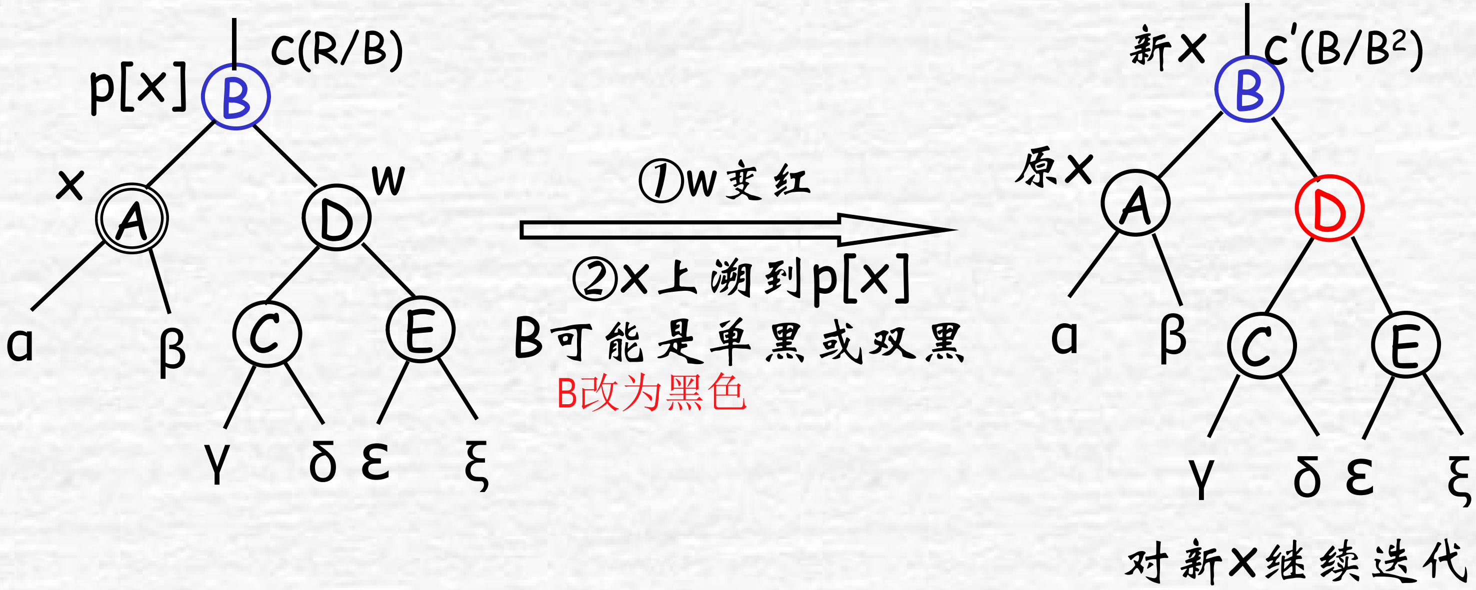
∵ w是红，　　∴ p[x]必黑



目标：将case1转为case2,3,4处理

删除算法（5）

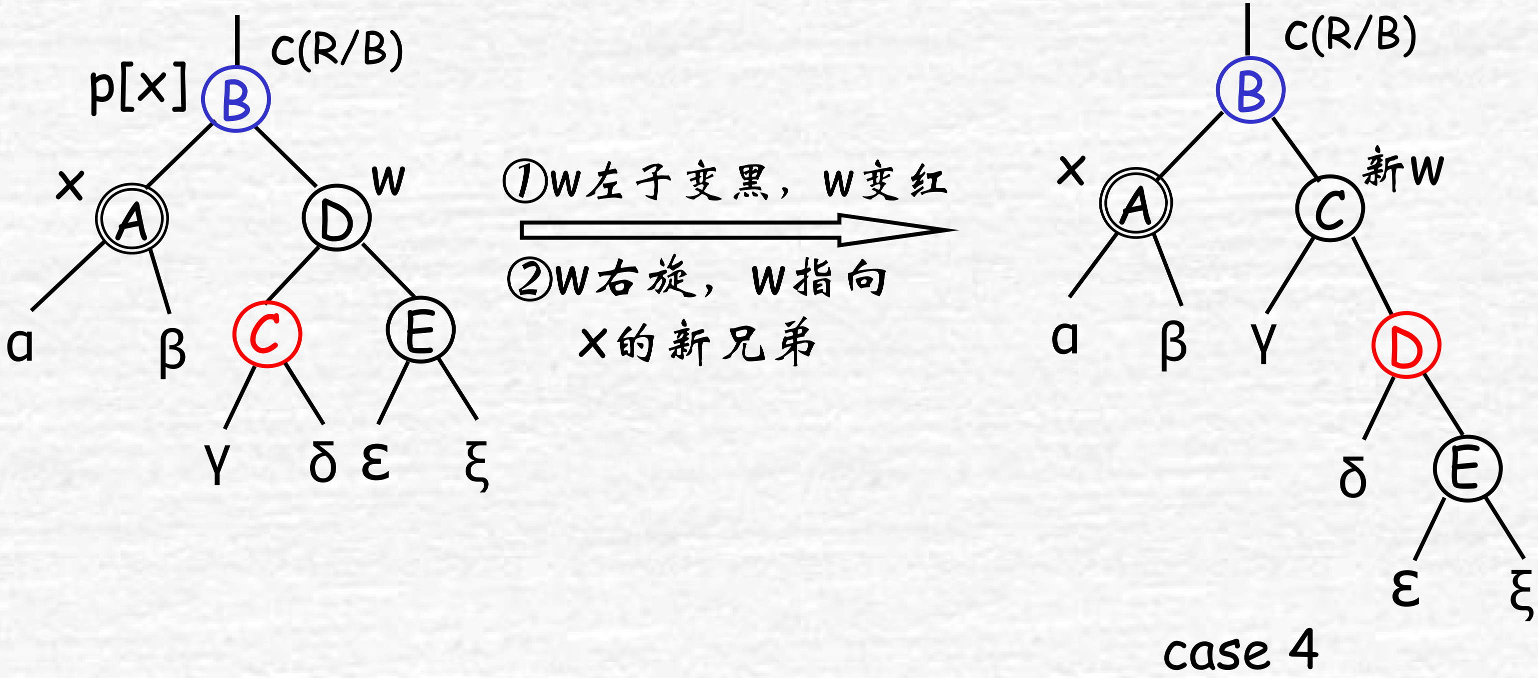
case 2：X的黑兄弟W的两个孩子均为黑



目标： X上移到B，通过A和D的黑色上移

删除算法（6）

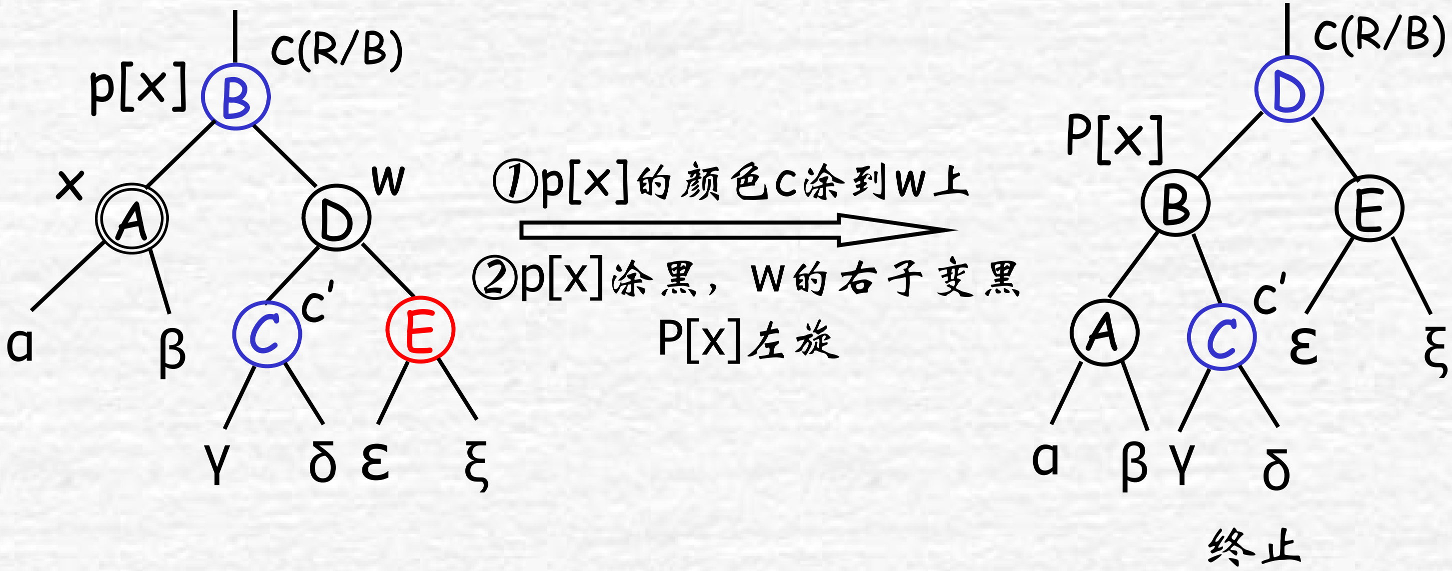
case 3：X的黑兄弟W的右子为黑且左子为红



目标：将case3转为case4

删除算法（7）

case 4：x的黑兄弟w的右子为红(左子为黑或红)



目标：终结处理。x的黑色上移给B，B的原色下移给D，D将黑色下移给C和E，通过旋转解决矛盾点C

- DeleteFixup(T, x)算法：P185

End of Chap13