第3章 函数增长率

2020年9月29日 10:17

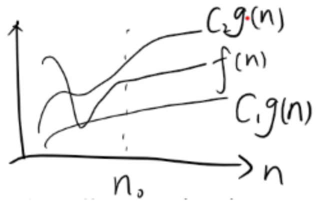
3.1 渐进记号（定义域为N，N为自然数集合）

1. θ记号（渐进界）

Def 给定一个函数g(n), θ(g(n))表示一个函数的集合（g(n)代表标准函数，简单函数，如n, n^2, log n…）

$\theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists$常数$c_1, c_2, n_0 > 0$，使得$0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$，对所有$n \ge n_0\}$

图示：



注：a. 若$f(n) \in \theta(g(n))$，可以记$f(n) = \theta(g(n))$

b. $f(n) = \theta(g(n))$：表示当$n \to \infty$时，$f(n)$和$g(n)$阶相同

c. f 和 g 均为非负

d. 记号$\theta(1)$为常数界，表示算法运行时间为常数，不随问题的规模变化

例1. 证明$\frac{n^2}{2} - 3n = \theta(n^2)$

Proof：只要存在常数$c_1, c_2, n_0 > 0$，使得$n \ge n_0$时

$c_1 n^2 \le \dfrac{n^2}{2} - 3n \le c_2 n^2$成立

要使$\frac{n^2}{2} - 3\mathrm{n} \le \mathrm{c}_2\mathrm{n}^2$即$\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \le c_2$成立

只要$c_2 = 1$,对所有$n \ge 1$均成立

要使$c_1 n^2 \le \frac{n^2}{2} - 3n$即$c_1 \le \frac{1}{2} - \frac{3}{n}$成立

只要$c_1 = \frac{1}{6}$,对所有$n \ge 9$均成立

所以取$c_1 = \frac{1}{6}, c_2 = 1, n_0 = 9$,对所有$n \ge n_0$有

$0 \le c_1 n^2 \le \dfrac{n^2}{2} - 3n \le c_2 n^2$

所以$\frac{n^2}{2} - 3n = \theta(n^2)$

2. O记号（渐进上界）

Def 给定一个函数g(n), O(g(n))表示一个函数的集合（g(n)代表标准函数，简单函数，如n, n^2, log n…）

$O(g(n)) = \{f(n) | \exists$常数$c, n_0 > 0$,使得$0 \le f(n) \le cg(n)$,对所有$n \ge n_0\}$

图示：Fig 3-1

注：a. f(n)=O(g(n))：表示当$n \to \infty$时，$f(n)$的阶$\le g(n)$的阶

b. $f(n) = \theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$

例2：证明$an^2+bn+d=O(n^3)$这里$a>0,b,d$是常数

Proof：取$c=a+|b|+|d|, n_0=\max\{1,n'\}$当$n\ge n_0$,有

$an^2+bn+d\le an^2+|b|n+|d|\le(a+|b|+|d|)n^3$

所以$an^2+bn+d=O(n^3)$

该证明不严格，为什么？（还需考虑$0\le an^2+bn+d$）

$\because a>0 \therefore \exists n'>0$，当$n>n'$时，$an^2+bn+d\ge 0 \therefore n_0=\max\{1,n'\}$

3. Ω记号（渐进下界）

Def 给定一个函数g(n), Ω(g(n))表示一个函数的集合（g(n)代表标准函数，简单函数，如n, n^2, log n...）

$\Omega\big(g(n)\big)=\{f(n)|\exists$常数$c, n_0>0$,使得$0\le cg(n)\le f(n)$,对所有$n\ge n_0\}$

图示：Fig 3-1

注：a. f(n)=Ω(g(n))：表示当$n\to\infty$时，$f(n)$的阶$\ge g(n)$的阶

b. $f(n)=\theta\big(g(n)\big)\Rightarrow f(n)=\Omega\big(g(n)\big)$

4. o记号（渐进非紧上界）

Def 给定一个函数g(n), o(g(n))表示一个函数的集合（g(n)代表标准函数，简单函数，如n, n^2, log n...）

$o\big(g(n)\big)=\{f(n)|\forall$常数$c>0,\exists$常数$n_0>0$,使得$0\le f(n)<cg(n)$,对所有$n\ge n_0\}$

如：$2n=o(n^2)$//小o，$2n^2\ne o(n^2)$//小o

注：a. $f(n)=o\big(g(n)\big)$：表示当$n\to\infty$时，$f(n)$的阶$<g(n)$的阶，即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$$

b. $o\big(g(n)\big)=O\big(g(n)\big)-\theta\big(g(n)\big)$,且$o(g(n))\subset O\big(g(n)\big)$

5. ω记号（渐进非紧下界）

Def 给定一个函数g(n), ω(g(n))表示一个函数的集合（g(n)代表标准函数，简单函数，如n, n^2, log n...）

$\omega\big(g(n)\big)=\{f(n)|\forall$常数$c>0,\exists$常数$n_0>0$,使得$0\le cg(n)<f(n)$,对所有$n\ge n_0\}$

如：$\frac{n^2}{2}=\omega(n)$　$\frac{n^2}{2}\ne\omega(n^2)$

注：a. $f(n)=\omega\big(g(n)\big)$：表示当$n\to\infty$时，f(n)的阶$>g(n)$的阶，即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\infty$$

6. 函数间的比较

传递性

θ具有：$f(n)=\theta\big(g(n)\big)$和$g(n)=\theta\big(h(n)\big)\Rightarrow f(n)=\theta\big(h(n)\big)$

O,Ω,o,ω均具有

自反性

$f(n)=\theta\big(f(n)\big), f(n)=O\big(f(n)\big), f(n)=\Omega\big(f(n)\big)$

对称性

$f(n)=\theta\big(g(n)\big)\Leftrightarrow g(n)=\theta\big(f(n)\big)$

转置对称性

$f(n)=O\big(g(n)\big)\Leftrightarrow g(n)=\Omega\big(f(n)\big)$

$f(n)=o\big(g(n)\big)\Leftrightarrow g(n)=\omega\big(f(n)\big)$

注：并不是所有函数均可比，如：

$f(n)=n, g(n)=n^{1+\sin n}, g(n)$在$n^{0\sim 2}$波动 $\Longrightarrow f$和g不可比

3.2 常用函数与求和

3.2.1 常用函数和记号

1. 上下取整函数

$\lfloor x \rfloor$: $\le x$的最大整数，$\lceil x \rceil$: $\ge x$的最小整数

性质：a. 对所有实数x，$x-1<\lfloor x\rfloor \le x \le \lceil x\rceil < x+1$

b. 对所有整数n，$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = n$

2. 模函数

$a \bmod n = a - n\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor$ (取余数)

$a \equiv b(mod\ n)$（a, b同余数，被n除）

3. 指数函数

$e=2.71828\ldots, e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$

性质：a. 对所有实数x，$e^x \ge 1+x$

1）对实数$|x|\le 1, 1+x\le e^x \le 1+x+x^2 = 1+x+\theta(x^2)$

2）对实数$|x|\le 1, \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

4. 对数

$\log n = \log_2 n, lg = \log_{10} n, \ln n = \log_e n, \log^k n = (\log n)^k, \log\log n = \log(\log n)$

性质：a. 对$|x|<1, \ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$

1）对$x>1, \frac{x}{x+1}\le \ln(1+x)\le x$

2）对常数$a>0$和b，$\log^b n = o(n^a)$

5. 阶乘

$$n! = \begin{cases} 1, & n=0 \\ n(n-1)!, & n>0 \end{cases}$$

性质：$n! < n^n$

6. 斯特林（Stirling）公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$\Longrightarrow$ 证明：

$n! = o(n^n), n! = \omega(2^n), \log(n!) = \theta(nlog\, n)$

7. 函数迭代

$$\mathrm{Def}\, f^{(i)}(n) = \begin{cases} n, & if\ i=0 \\ f\left(f^{(i-1)}(n)\right), & if\ i>0 \end{cases}$$ 其中i为重数

如：$f(n)=2n \Longrightarrow f^{(1)}(n)=2n, f^{(2)}(n)=f\left(f^{(1)}(n)\right)=2f^{(1)}(n)=2^2n,\ldots,f^{(i)}(n)=2^in$

8. 对数迭代

$\log^* n = \min_i\left\{i\ge 0 \middle| \log^{(i)} n \le 1\right\}$（从参数n开始，连续应用对数函数i次）

如：$\log^* 2 = 1, \log^* 4 = 2, \log^* 16 = 3, \log^* 65536 = 4, \log^* 2^{65536} = 5, \ldots$

这是一个增长非常缓慢的函数

9. Fib数

$$\text{Def } F_i = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ 1, & i = 1 \\ F_{i-1} + F_{i-2}, & i \geq 2 \end{cases}$$

$$F_i = \frac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}, \text{这里} \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\ldots, \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.61803\ldots$$

10. 标准增长函数及其大小关系

(1) 多项式时间阶:

$O(1) < O(\log n) < O(n) < O(nlog\, n) < O(n^2) < O(n^3) < \cdots$

(2) 指数时间阶:

$O(2^n) < O(n!) < O(n^n)$

3.2.2 求和

1. 求和公式及性质

有限和: $\sum_{k=1}^{n} a_k$ //$\sum$ 1820年由$Jorseph\ Fourier$引入

无限和: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$: 含义 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ 存在

(1) 线性性质

a. $$\sum_{k=1}^{n}(ca_k + db_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k + d\sum_{k=1}^{n} b_k, \text{其中} c, d \in R$$

b. $$\sum_{k=1}^{s} \theta(f_k(n)) = \theta\left(\sum_{k=1}^{s} f_k(n)\right)$$

(2) 算术级数

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \theta(n^2)$$

(3) 几何级数

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \text{当} |x| < 1 \text{时,} \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

(4) 调和级数

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$$

(5) 积分和微分级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \text{ 这里} |x| < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$ (对上式两边微分并乘以x)

(6) 套选级数

对$a_0, a_1, \ldots, a_n$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0, \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n$$

如: $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = a_0 - a_n$

(7) 积$\prod_{k=1}^{n} a_k$

$$\Rightarrow \lg\left(\prod_{k=1}^{n} a_{\mathrm{k}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \lg a_k$$

2. 和式上界（下界）

(1) 数学归纳法：先猜后证明

例1. 求$\sum_{\mathrm{k}=0}^{n} 3^k$的上界

解：猜测为$O(3^n)$，这里$f(n) = \sum_{k=0}^{n} 3^k, g(n) = 3^n$

①归纳基础：$\mathrm{n} = 1$

$$f(1) = \sum_{k=0}^{1} 3^k = 4 \le cg(1),\text{只要}\mathrm{c} = 2$$

②归纳假设：对n成立

③归纳步骤：下证明n+1成立

$$f(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1} \le c \cdot 3^n + 3^{n+1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c}\right) \cdot c \cdot 3^{n+1} \le c \cdot 3^{n+1}$$

只要$\frac{1}{3} + \frac{1}{c} \le 1$,即$c \ge \frac{3}{2}$

所以取$c = 2$即可，故$\sum_{k=0}^{n} 3^k = O(3^n)$

注：证明过程中，使用渐进记号要注意!

如，错误证明：$\sum_{k=1}^{n} k = O(n)$

假设对n>1成立，对n+1有

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 = O(n) + n + 1 = O(n)$$ （未按定义证明，提前使用结论）

被“大O”记号隐藏的“常数”是随着n的增大而增长的，不是恒定不变的

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 \le c \cdot n + n + 1 = (c+1) \cdot n + 1$$ （证明无法进行下去）

(2) 对项限界

a. 最大/最小项限界

如，$\sum_{\mathrm{k}=1}^{n} k \le \sum_{k=1}^{n} n = n^2 = O(n^2)$

一般地，$\sum_{\mathrm{k}=1}^{n} a_k = n \cdot a_{max}$， $a_{max} = \max_{k=1\sim n}\{a_k\}$

b. 用几何级数限界

假设对所有$k \ge 0$有$\frac{a_{k+1}}{a_k} \le r$，$r$为常数且$0 < r < 1$

则$a_k \le a_0 r^k$ （应为$a_k \le \mathrm{a}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{r} \le \cdots \le \mathrm{a}_0\mathrm{r}^{\mathrm{k}}$）

所以$\sum_{k=0}^{n} a_k \le \sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k = \frac{a_0}{1-r}$

例2，求$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}$的上界

解：

$$\frac{\frac{k+1}{3^{k+1}}}{\frac{k}{3^k}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{k+1}{k}\le\frac{2}{3}, for\ all\ k\ge 1$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}\le\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1$$

（3）和式分解

a. 简单的一分为二

例3，求$\sum_{k=1}^{n}k$的下界

解：

$$\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=1}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}k+\sum_{k=\lceil\frac{n}{2}\rceil+1}^{n}k\ge\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}o(\square)+\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n}\frac{n}{2}\ge\left(\frac{n}{2}\right)^2=\Omega(n^2)$$

b. 忽略前几项

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{n}}a_k=\sum_{k=0}^{k_0-1}a_k+\sum_{k=k_0}^{n}a_k=\theta(1)+\sum_{k=k_0}^{n}a_k,\qquad k_0\text{为常整数}$$

例4，$\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}$

解：

观察邻项比值：

$$\frac{\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{\frac{k^2}{2^k}}=\frac{(k+1)^2}{2k^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2\le\frac{8}{9},\qquad for\ all\ k\ge 3$$

则可以将和式分割为：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}=\sum_{k=0}^{2}\frac{k^2}{2^k}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}\le\sum_{k=0}^{2}\frac{k^2}{2^k}+\frac{9}{8}\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^k=O(1)$$

c. 更复杂的划分

例5，H_n上界

元素个数：　1　2　4　8　$\le 2^{\lfloor\log n\rfloor}$

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{15}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{\lfloor\log n\rfloor}}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

项编号：　i=1　i=2　i=4　i=8　i=$2^{\lfloor\log n\rfloor}$

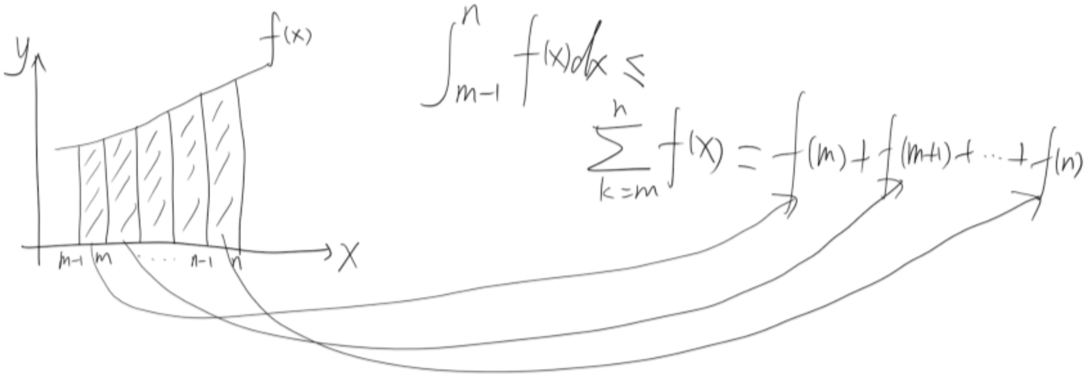
$$\le\sum_{i=0}^{\lfloor\log n\rfloor}\sum_{j=0}^{2^i-1}\frac{1}{2^i+j}\le\sum_{i=0}^{\lfloor\log n\rfloor}\sum_{j=0}^{2^i-1}\frac{1}{2^i}=\sum_{i=0}^{\lfloor\log n\rfloor}1=\lfloor\log n\rfloor+1\le\log n+1=O(\log n)$$

d. 积分近似

1. 若f(k)递增，则$\int_{m-1}^{n} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)\,dx$

2. 若f(k)递减，则$\int_{m}^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m\text{-}1}^{n} f(x)\,dx$

以1.为例，画图：



例6，求H_n的紧致界

解：$\because f(k) = \frac{1}{k}$递减

$$\therefore \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{k} \ge \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln x \,\Big|_{1}^{n+1} = \ln(n+1)$$

$$\because \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \theta(\ln n)$$

（4）Knuth求和方法

以$K_n = \sum_{0 \le k \le n} k^2$,以$n \ge 0$为例

方法0：搜索和请教

$$K_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

方法1：猜结果，用数学归纳法证明

可以这样猜：$K_n = \frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}{3}$

方法2：使用摄动法

$$K_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le k \le n} (k+1)^2 = \sum_{0 \le k \le n} (k^2 + 2k + 1) = \sum_{\infty} k^2 + 2\sum_{\infty} k + \sum_{\infty} 1$$

$$= K_n + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

不幸的是K_n彼此消去，幸好得到$2\sum_{0 \le k \le n} k = (n+1)^2 - (n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$

由上启示：令$C_n = \sum_{0 \le k \le n} k^3$

$$C_n + (n+1)^3 = \cdots = C_n + 3K_n + \frac{3}{2}(n+1)n + (n+1) \Rightarrow K_n = \cdots$$

方法3：使用递归

方法4：使用积分

方法5：使用二重积分

方法6：使用有限演算

方法7：使用母函数