题目分卷 1 和卷 2，不分说明两卷相同。

一、基本题

1. **(卷 1)请证明$5n^2logn+2n=O(n^3)$。**

   证明：取 c=7, n_0=2,对 n>n_0 有
   $cn^3-5n^2logn-2n$
   $=n^2(cn-5\ logn)-2n$
   $>2n^3-2n$
   $>2n_0({n_0}^2-1)$
   =12
   即当 c=7, n_0=2 时，对 n>n_0, $5n^2logn+2n<cn^3$恒成立，
   $5n^2logn+2n=O(n^3)$

   (卷 2)请证明 5nlogn + 2n = O(n^2)。

   证明：取 c=7，n_0=2,对 n>n_0 有
   $cn^2-5nlogn-2n$
   $=\mathrm{n}(cn-5\ logn)-2n$
   $>2n^2-2n$
   $>2n_0(n_0-1)$
   $=4$
   即当 c=7, n_0=2 时，对 n>n_0, $5\mathrm{n}logn+2n<cn^2$恒成立
   $5\mathrm{n}logn+2n=O(n^2)$

2. **(卷 1)已知 $f_1(n)=\Theta(g_1(n))$，$f_2(n)=\Theta(g_2(n))$，请问是否有 $f_1(n)+f_2(n)=\Theta(\max(g_1(n),g_2(n)))$?**

   解：存在$f_1(\mathrm{n})+f_2(n)=\theta(\max(g_1(n),g_2(n)$
   证明：
   $f_1(n)=\theta(g_1(\mathrm{n}))$
   则存在 a1>0，a2>0, n1>0 使得 n>n1 时有
   $a1*g_1(\mathrm{n})<f_1(n)<a2*g_1(\mathrm{n})$
   $f_2(n)=\theta(g_2(\mathrm{n}))$
   则存在 b1>0，b2>0, n2>0 使得 n>n2 时有
   $b1*g_2(\mathrm{n})<f_2(n)<b2*g_2(\mathrm{n})$
   取 c1=min(a1,b1) >0, c2=2*max(a2,b2) >0, n0=max(n1,n2)>0
   当 n>n0 时，有
   $$\begin{aligned}f_1(\mathrm{n})+f_2(n)&>a1*g_1(\mathrm{n})+b1*g_2(\mathrm{n})\\&>\mathrm{c}1*(g_1(n)+g_2(n))\\&>c1*\max\big(g_1(n),g_2(n)\big)\end{aligned}$$
   $$\begin{aligned}f_1(\mathrm{n})+f_2(n)&<a2*g_1(n)+b2*g_2(n)\\&<\max(a2,b2)*(g_1(n)+g_2(n))\\&<2*\max(a2,b2)*\max(g_1(n),g_2(n))\\&=c2*max(g_1(n),g_2(n))\end{aligned}$$

综上，$f_1(\mathrm{n})+f_2(n)=\theta(\max(g_1(n),g_2(n))$

(卷 2)已知 $f_1(n)=\Theta(g_1(n))$，$f_2(n)=\Theta(g_2(n))$，请问是否有 $f_1(n)+ f_2(n)= \Theta(\min(g_1(n),g_2(n)))$?

解：没有 $f_1(n)+ f_2(n)= \Theta(\min(g_1(n),g_2(n)))$

反例：

令 $g_1(n)=3n^2+n$, $f_1(n)=n^2$。

$g_2(n)=3n^3+n$, $f_2(n)=n^3$。

$\min(g_1(n), g_2(n))= g_1(n)$, $\Theta(\min(g_1(n),g_2(n)))= n^2$。

$f_1(n)+f_2(n)= n^3+ n^2$

显然 $f_1(n)+f_2(n) \neq \Theta(\min(g_1(n),g_2(n)))$。

3. (卷 1)求解递归方程 $T(n)=4T(n/3)+n^2-7n+5$。

解：

采用主方法

a = 4, b=3, $\mathrm{f(n)}=n^2-7n+5$

$log_b a=log_3 4<2$

则存在$0<\varepsilon<2-log_b^a$,有$\mathrm{f(n)}=\Omega(n^{log_b a+\varepsilon})$

$$\mathrm{af}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{b}}\right)=\frac{4}{9}*n^2-\frac{28}{3}*n+5$$

取 c=5/9 < 1,$n_0=3$,当 $n>n_0$ 时，有

$$\mathrm{c}*\mathrm{f(n)}-\mathrm{af}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{b}}\right)$$

$$=\left(c-\frac{4}{9}\right)*n^2+\frac{28-21c}{3}*n+5(c-1)$$

$$>\frac{28-21c}{3}*n-5$$

$$>2n-5$$

$$>2n_0-5=1$$

即$\mathrm{af}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{b}}\right)\le cf(n)$,满足主定理第三条

综上，$\mathrm{T(n)}=\Theta(\mathrm{f(n)})=\Theta(n^2)$

(卷 2)求解递归方程 $T(n)=3T(n/2)+n^2-7n+5$。

解：

采用主方法

a = 3, b=2, $\mathrm{f(n)}=n^2-7n+5$

$log_b a=log_2 3<2$

则存在$0<\varepsilon<2-log_b^a$,有$\mathrm{f(n)}=\Omega(n^{log_b a+\varepsilon})$

$$\mathrm{af}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{b}}\right)=\frac{3}{4}*n^2-\frac{21}{2}*n+5$$

取 c=7/8 <1,$n_0=2$,当 $n>n_0$ 时，有

$$c * \mathrm{f(n)} - \mathrm{af}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{b}}\right)$$

$$= \left(c - \frac{3}{4}\right) * n^2 + \frac{21 - 14c}{2} * n + 5(c - 1)$$

$$> \frac{21 - 14c}{2} * n - 5$$

$$> 3n - 5$$

$$> 3n_0 - 5 = 1$$

即$\mathrm{af}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{b}}\right) \leq cf(n)$,满足主定理第三条

综上，$\mathrm{T(n)} = \Theta(\mathrm{f(n)}) = \Theta(n^2)$

4. (卷 1)求解递归方程 $T(n)=3T(n-1)+ n^2-2n+1$。

解：

$T(n)=3T(n-1)+(n-1)^2$ (1)

$T(n-1)=3T(n-2)+(n-2)^2$

$T(n)-T(n-1) = 3T(n-1)+(n-1)^2 -3T(n-2)-(n-2)^2 = 3T(n-1)-3T(n-2)+2n-3$

$T(n)-T(n-1)+n = 3(T(n-1)-2T(n-2)+n-1)$

令 $c(n)= T(n)-T(n-1)+n$，则有 $c(n)=3c(n-1)$。

由于 $T(1)=1$,则 $T(2)=4$，$c(2)=T(2)-T(1)+2=5$

则 $c(n)=5*3^{n-2}$，

$T(n)-T(n-1)+n=5*3^{n-2}$ (2)

将(1)式和(2)式联合求解可得

$T(n)=(5*3^{n-1}-n^2-n-1)/2$

(卷 2)求解递归方程 $T(n)=2T(n-1)+ n^2-2n+1$。

解：

$T(n)=2T(n-1)+(n-1)^2$ (1)

$T(n-1)=2T(n-2)+(n-2)^2$

$T(n)-T(n-1) = 2T(n-1)+(n-1)^2 -2T(n-2)-(n-2)^2 = 2T(n-1)-2T(n-2)+2n-3$

$T(n)-T(n-1)+2n+1 = 2(T(n-1)-2T(n-2)+2(n-1)+1)$

令 $c(n)= T(n)-T(n-1)+2n+1$，则有 $c(n)=2c(n-1)$。

由于 $T(1)=1$,则 $T(2)=3$，$c(2)=T(2)-T(1)+5=7$

则 $c(n)=7*2^{n-2}$，

$T(n)-T(n-1)+2n+1=7*2^{n-2}$ (2)

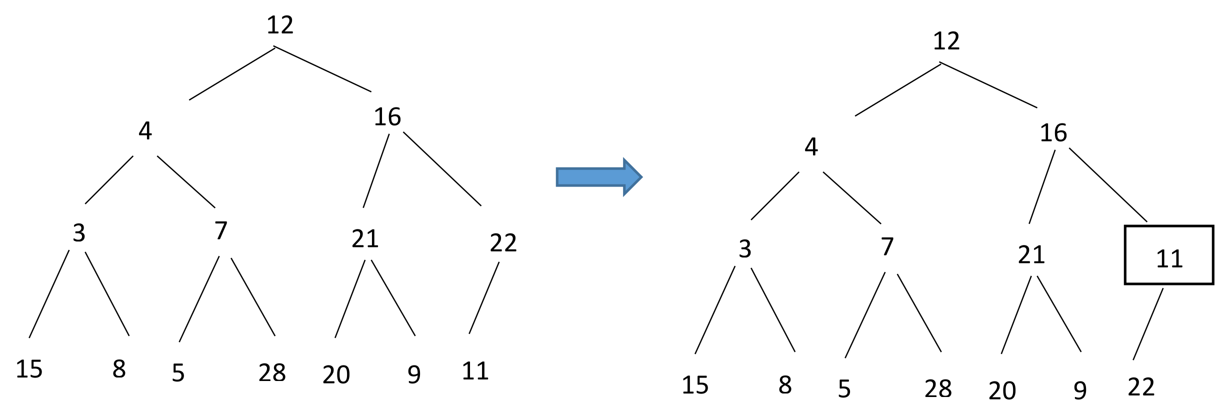
将(1)式和(2)式联合求解可得

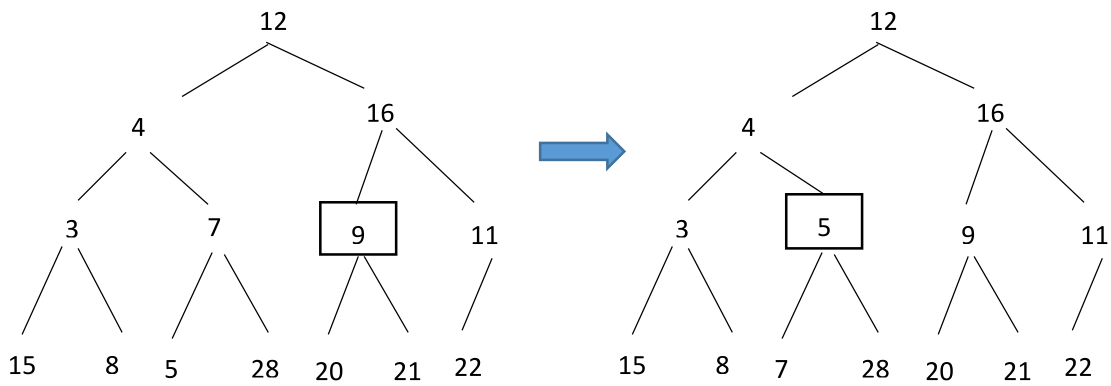
$T(n)=7*2^{n-1}-n^2-2n-3$。

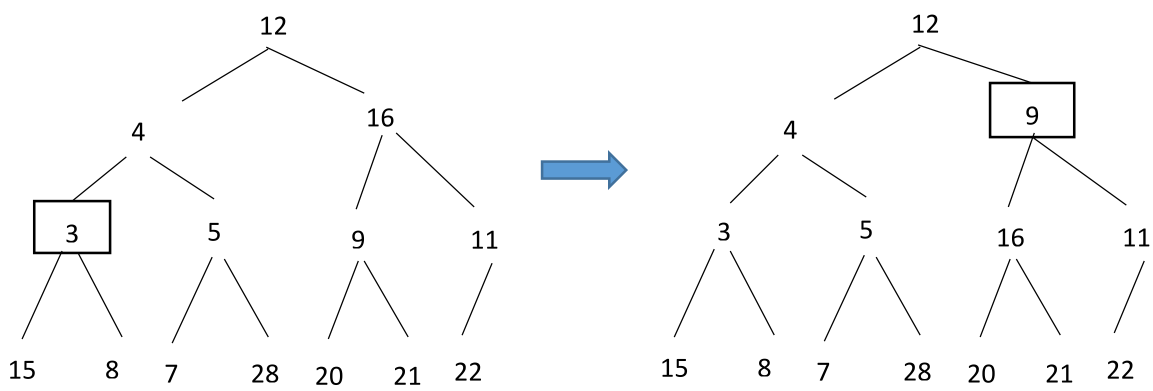
二、计算题

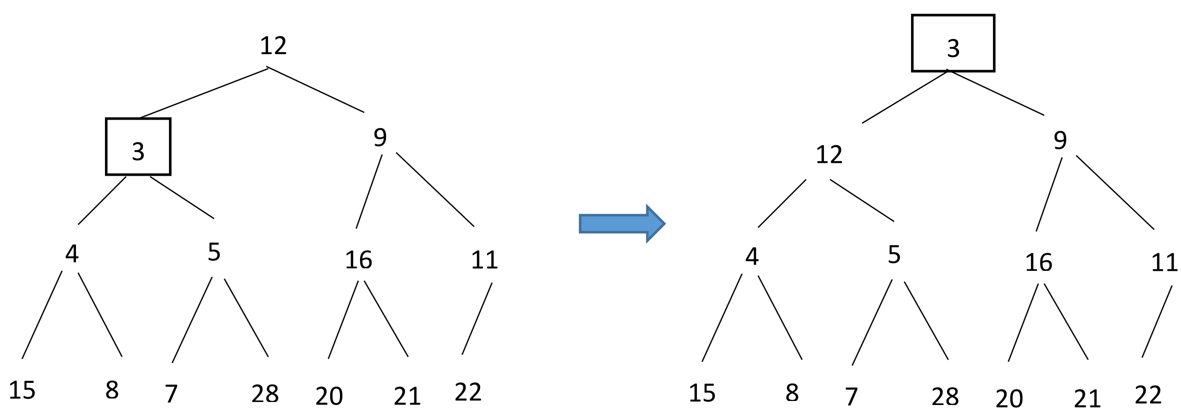
1、 (卷 1)已知数组 A[1..14]="12,4,16,3,7,21,22,15,8,5,28,20,9,11",请给出将数组 A 调整为 Min-堆的过程。

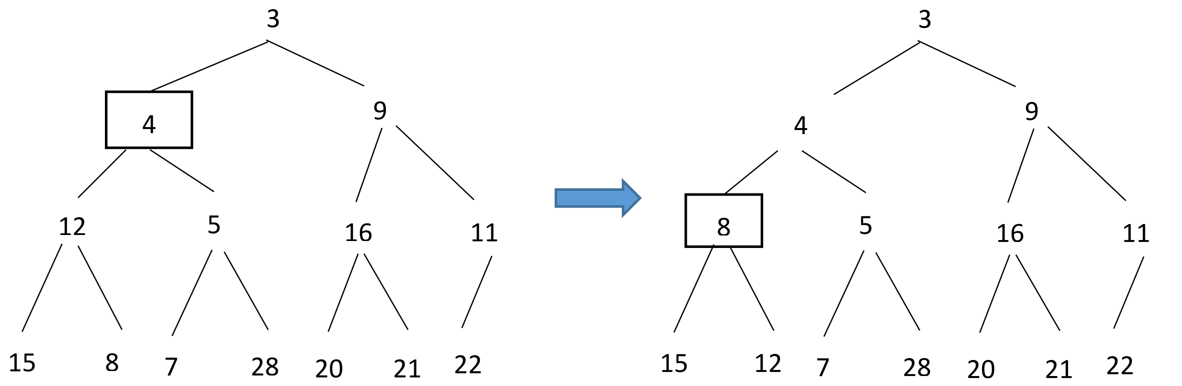
解：调整过程如下，带 $\boxed{\quad}$ 的节点表示正在调整以该节点为根的堆为小根堆。

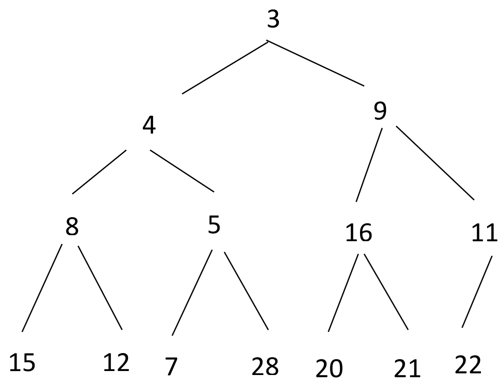

12
4 16
3 7 21 22
15 8 5 28 20 9 11
12
4 16
3 7 21 11
15 8 5 28 20 9 22


12
4 16
3 7 9 11
15 8 5 28 20 21 22
12
4 16
3 5 9 11
15 8 7 28 20 21 22


12
4 16
3 5 9 11
15 8 7 28 20 21 22
12
4 9
3 5 16 11
15 8 7 28 20 21 22

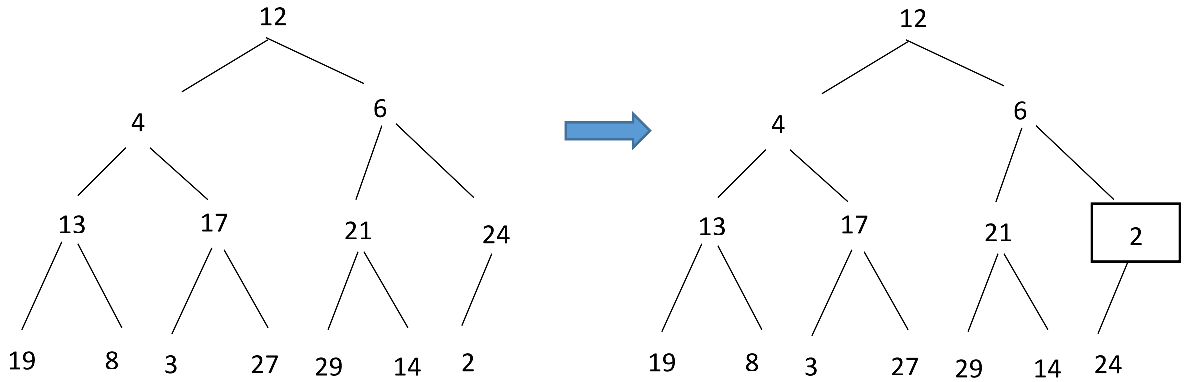

12
3 9
4 5 16 11
15 8 7 28 20 21 22
3
12 9
4 5 16 11
15 8 7 28 20 21 22

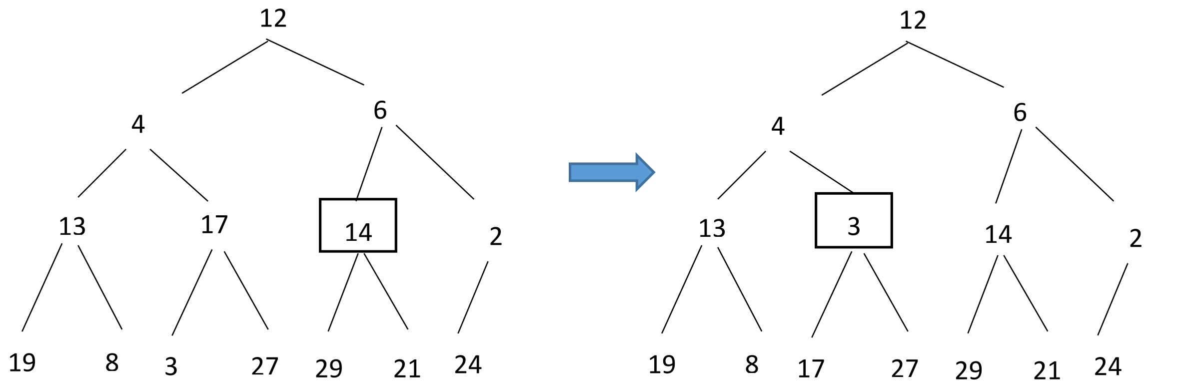


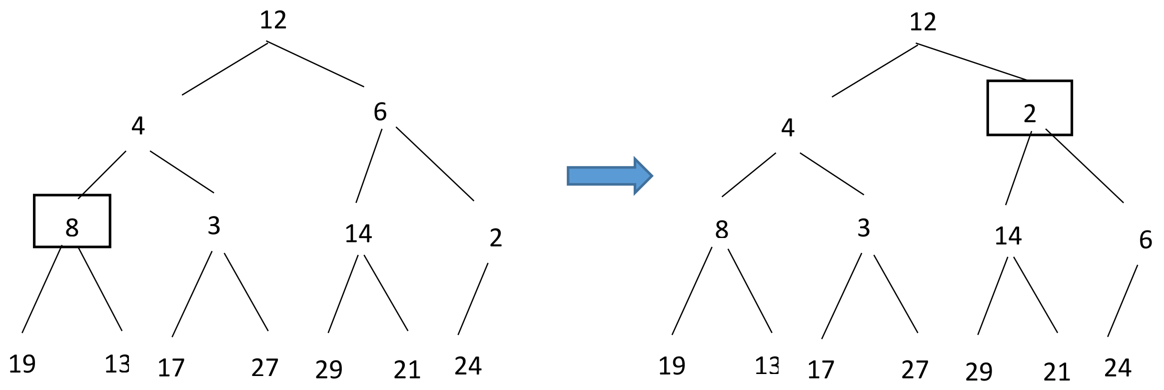


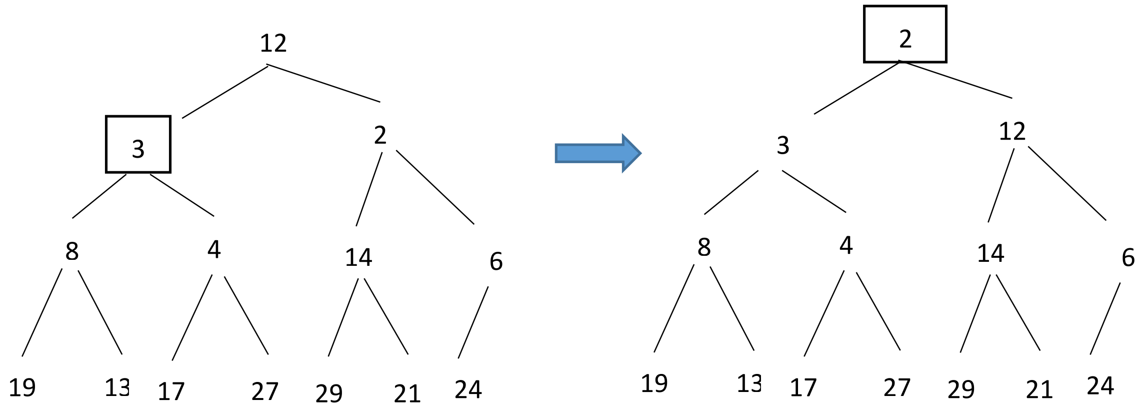
(卷 2)已知数组 A[1…14]="12, 4, 6, 13, 17, 21, 24, 19, 8, 3, 27, 29, 14, 2"，请给出将数组 A 调整为 Min-堆(二叉堆)的过程。

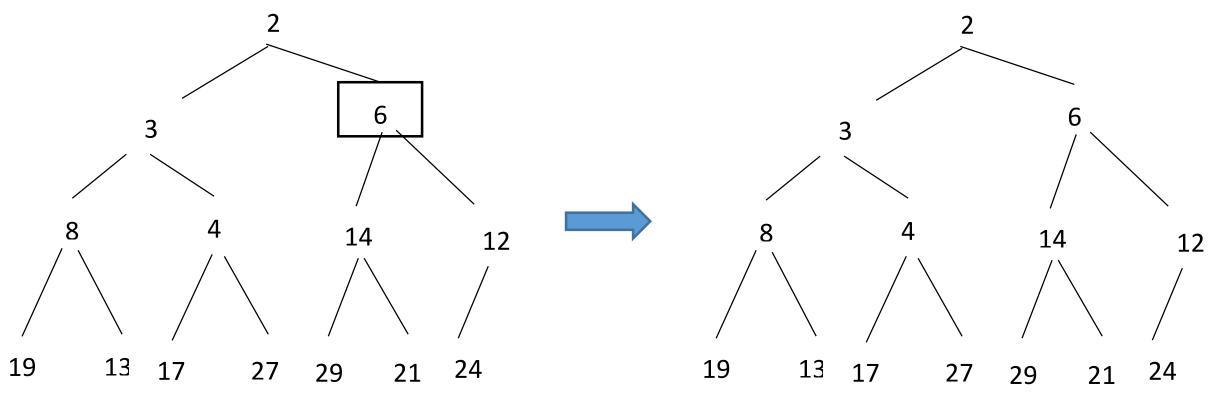
解：调整过程如下，带 $\boxed{}$ 的节点表示正在调整以该节点为根的堆为小根堆。











2、(卷 1) 请在图 **1** 所示的红黑树中先插入关键字为 **23** 的结点，在插入关键字为 **21** 的结点，给出具体的变化过程。

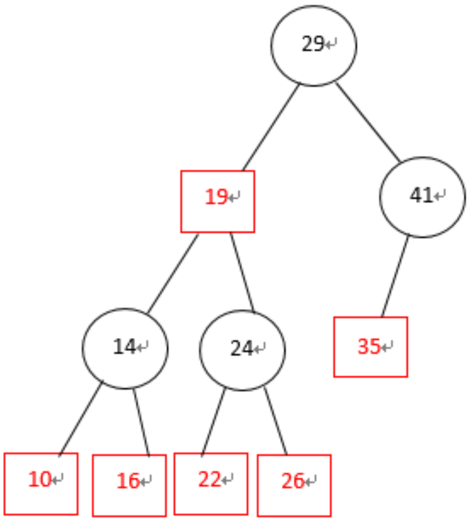
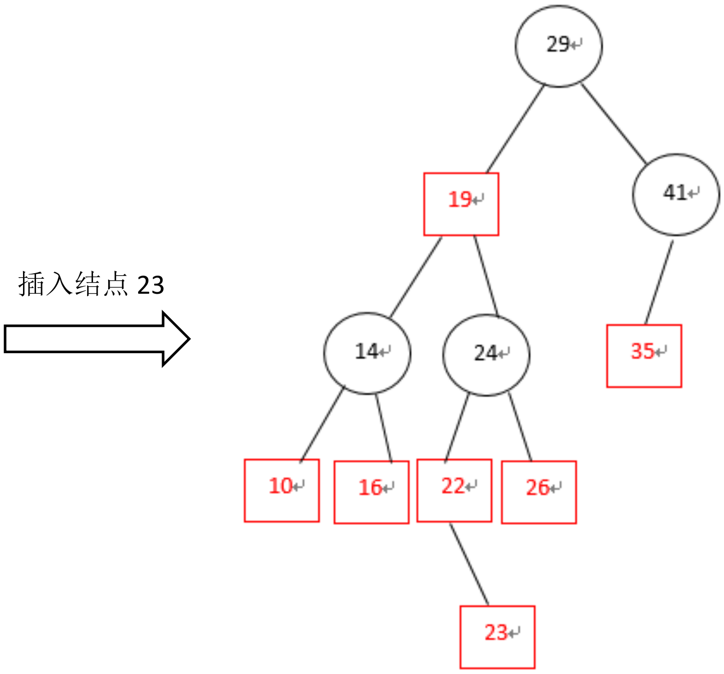
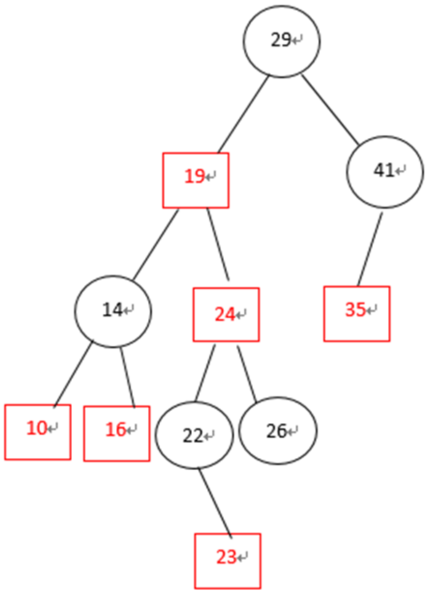


图 1

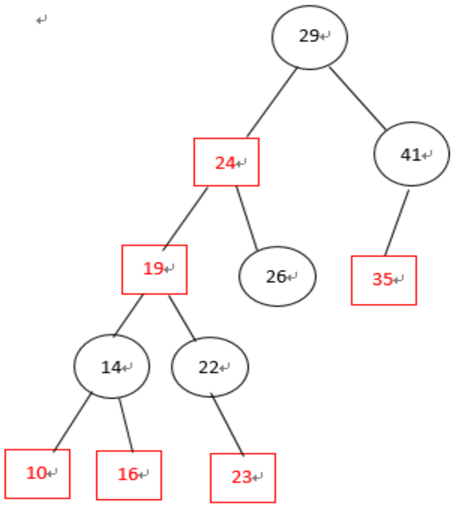
解：第一幅图为在图 1 中插入结点 23



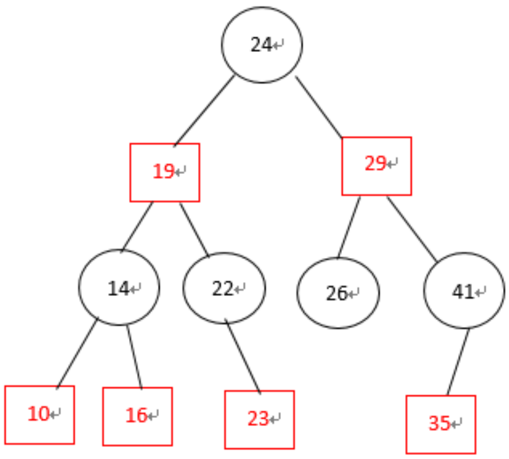
改变颜色


29
19
41
14
24
35
10
16
22
26
23

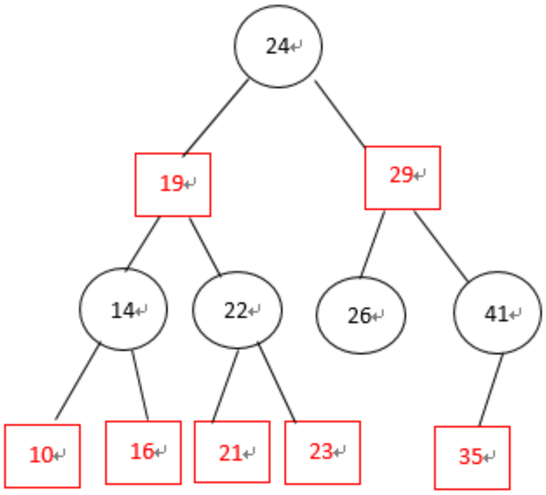
左旋


29
24
41
19
26
35
14
22
10
16
23

右旋


24
19
29
14
22
26
41
10
16
23
35

插入结点 21



(卷 2)请在图 1 所示的红黑树中先插入关键字为 37 的结点，再插入关键字为 32 的结点，给出具体变化过程。

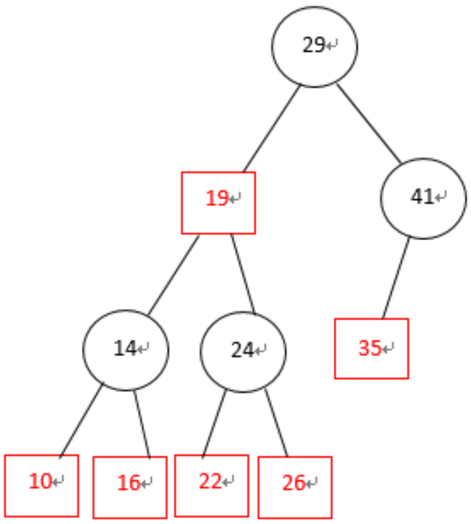
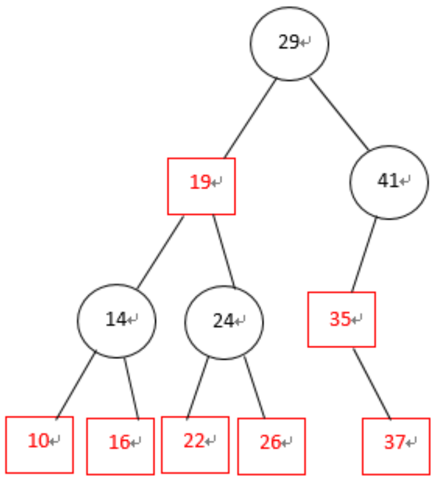


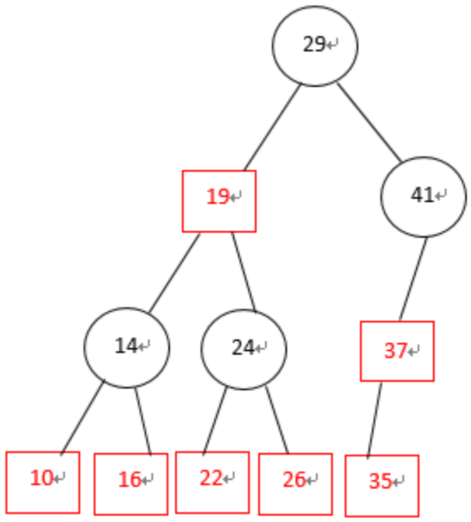
图 1

解答：从原图基础上开始画变化过程下

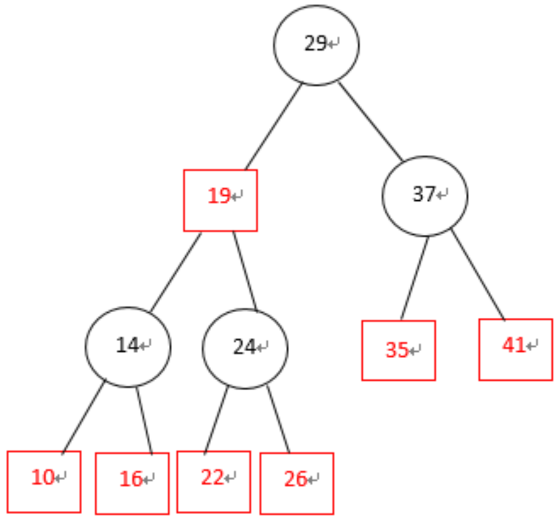
插入结点 37



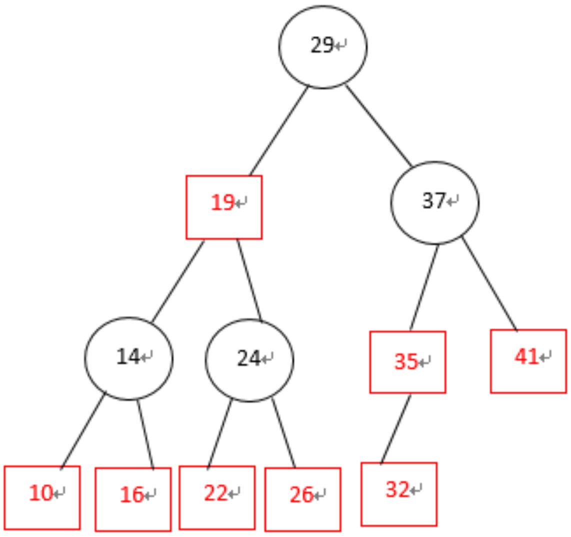
左旋

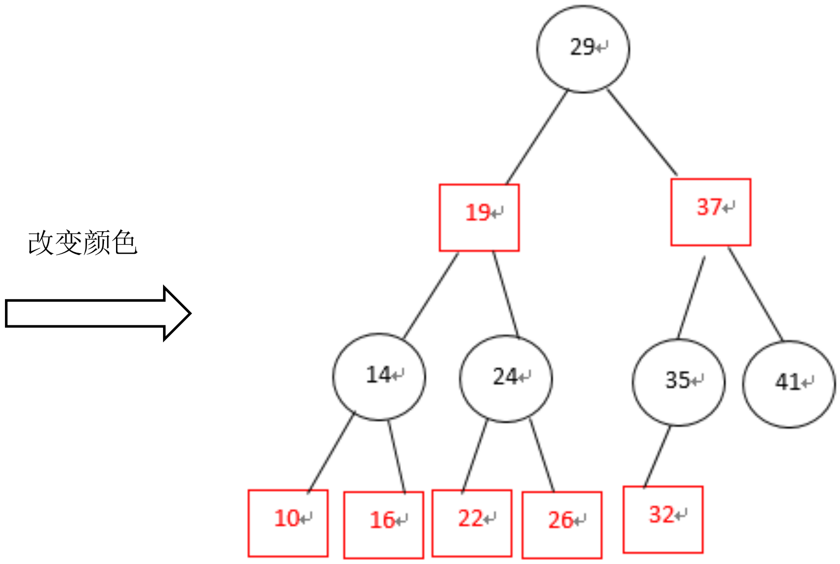

29
19
41
14
24
37
10
16
22
26
35

右旋


29
19
37
14
24
35
41
10
16
22
26

插入结点 32


29
19
37
14
24
35
41
10
16
22
26
32



3.已知有图 **2** 所示的有向图以及权值函数 **w**，图 **2** 中有的边权值为负，现在需要重新定义图 **2** 中边的权值函数 **w**，新的权值函数记为$\overline{w}$，使得：**1)** 在函数 **w** 意义下的最短路径也一定是在函数$\overline{w}$意义下的最短路径，反之亦然；**2)** 图中所有边的$\overline{w}$权值均大于等于 **0**。请你给出满足上述条件的函数$\overline{w}$，并给出计算过程。

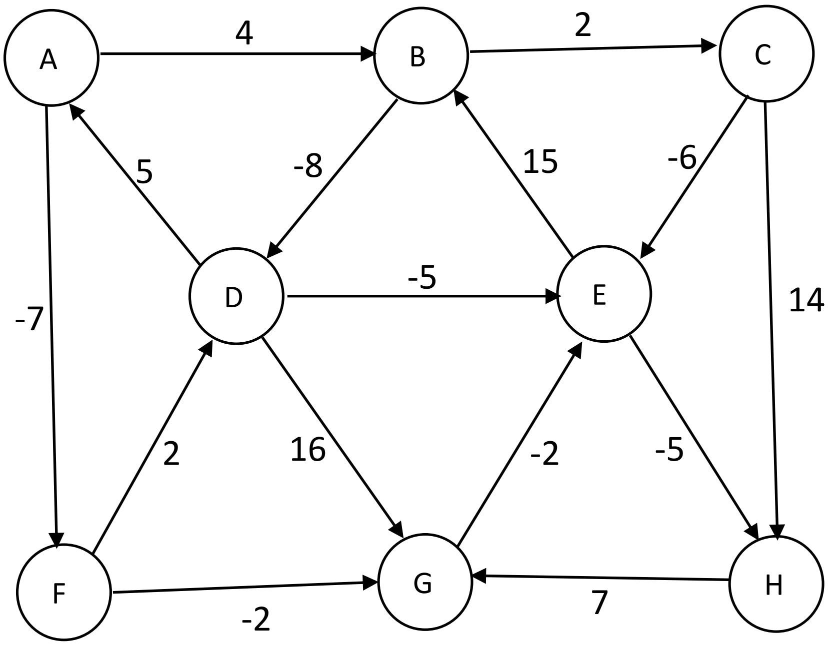
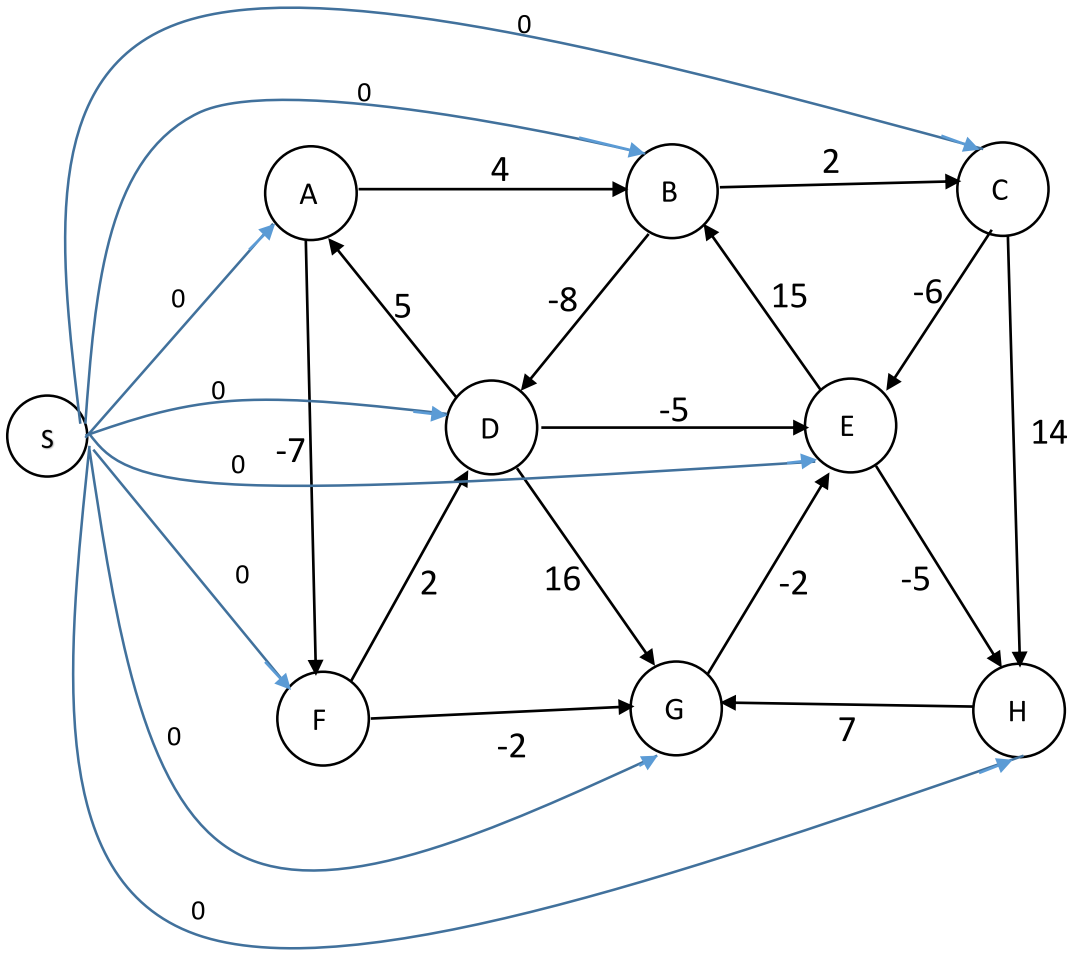


图 2

解：如下图所示，添加新的节点 S，并添加 S 到图中任意节点的一条边，权值为 0.



使用 Bellman-Ford 算法求出 S 到每个节点间的最短距离。整个 RELAX 过程中，按照 AB, AF, BC, BD, CE, CH, DA, DE, DG, EB, EH, FD, FG, GE, HG, SA, SB, SC, SD, SE, SF， SG, SH 的顺序（顺序不唯一）进行 RELAX 操作。每遍历一遍所有边，各顶点的权值更新如下表所示（0 表示初始化后的状态）

	A	B	C	D	E	F	G	H	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-3	0	0	-8	-13	-7	-11	-18	0
3	-3	0	0	-8	-14	-10	-12	-18	0
4	-3	0	0	-8	-14	-10	-12	-19	0
5	-3	0	0	-8	-14	-10	-12	-19	0
6	-3	0	0	-8	-14	-10	-12	-19	0
7	-3	0	0	-8	-14	-10	-12	-19	0
8	-3	0	0	-8	-14	-10	-12	-19	0

S 到个顶点间的最短距离如下：

h(A)=-3　h(B)=0　h(C)=0　h(D)=-8　h(E)=-14　h(F)=-10　h(G)=-12　h(H)=-19

则 $\overline{w}(u,v) = w(u,v) + h(u) - h(v)$

$\overline{w}(A,B) = w(A,B) + h(A) - h(B) = 4 - 3 - 0 = 1$

$\overline{w}(A,F) = w(A,F) + h(A) - h(F) = -7 - 3 - (-10) = 0$

$\overline{w}(\mathrm{B},\mathrm{C}) = \mathrm{w}(\mathrm{B},\mathrm{C}) + \mathrm{h}(\mathrm{B}) - \mathrm{h}(\mathrm{C}) = 2 + 0 - 0 = 2$
$\overline{w}(\mathrm{B},\mathrm{D}) = \mathrm{w}(\mathrm{B},\mathrm{D}) + \mathrm{h}(\mathrm{B}) - \mathrm{h}(\mathrm{D}) = -8 + 0 - (-8) = 0$
$\overline{w}(\mathrm{C},\mathrm{E}) = \mathrm{w}(\mathrm{C},\mathrm{E}) + \mathrm{h}(\mathrm{C}) - \mathrm{h}(\mathrm{E}) = -6 + 0 - (-14) = 8$
$\overline{w}(\mathrm{C},\mathrm{H}) = \mathrm{w}(\mathrm{C},\mathrm{H}) + \mathrm{h}(\mathrm{C}) - \mathrm{h}(\mathrm{H}) = 14 + 0 - (-19) = 33$
$\overline{w}(\mathrm{D},\mathrm{A}) = \mathrm{w}(\mathrm{D},\mathrm{A}) + \mathrm{h}(\mathrm{D}) - \mathrm{h}(\mathrm{A}) = 5 + (-8) - (-3) = 0$
$\overline{w}(\mathrm{D},\mathrm{E}) = \mathrm{w}(\mathrm{D},\mathrm{E}) + \mathrm{h}(\mathrm{D}) - \mathrm{h}(\mathrm{E}) = -5 + (-8) - (-14) = 1$
$\overline{w}(\mathrm{D},\mathrm{G}) = \mathrm{w}(\mathrm{D},\mathrm{G}) + \mathrm{h}(\mathrm{D}) - \mathrm{h}(\mathrm{G}) = 16 + (-8) - (-12) = 20$
$\overline{w}(\mathrm{E},\mathrm{B}) = \mathrm{w}(\mathrm{E},\mathrm{B}) + \mathrm{h}(\mathrm{E}) - \mathrm{h}(\mathrm{B}) = 15 + (-14) - 0 = 1$
$\overline{w}(\mathrm{E},\mathrm{H}) = \mathrm{w}(\mathrm{E},\mathrm{H}) + \mathrm{h}(\mathrm{E}) - \mathrm{h}(\mathrm{H}) = -5 + (-14) - (-19) = 0$
$\overline{w}(\mathrm{F},\mathrm{D}) = \mathrm{w}(\mathrm{F},\mathrm{D}) + \mathrm{h}(\mathrm{F}) - \mathrm{h}(\mathrm{D}) = 2 + (-10) - (-8) = 0$
$\overline{w}(\mathrm{F},\mathrm{G}) = \mathrm{w}(\mathrm{F},\mathrm{G}) + \mathrm{h}(\mathrm{F}) - \mathrm{h}(\mathrm{G}) = -2 + (-10) - (-12) = 0$
$\overline{w}(\mathrm{G},\mathrm{E}) = \mathrm{w}(\mathrm{G},\mathrm{E}) + \mathrm{h}(\mathrm{G}) - \mathrm{h}(\mathrm{E}) = -2 + (-12) - (-14) = 0$
$\overline{w}(\mathrm{H},\mathrm{G}) = \mathrm{w}(\mathrm{H},\mathrm{G}) + \mathrm{h}(\mathrm{H}) - \mathrm{h}(\mathrm{G}) = 7 + (-19) - (-12) = 0$

4.(卷 1) 现在要求出 6 个矩阵的链乘 A_1* A_2* A_3* A_4* A_5* A_6，A_i 是一个 P_{i-1}*P_i 的矩阵，其中 P[0..6]=(4, 5, 10, 8, 5, 10, 50)，请计算其最优的乘法次序，给出计算过程。

解：A_1 4*5 A_2 5*10 A_3 10*8 A_4 8*5 A_5 5*10 A_6 10*50
先计算后画图，计算过程如下：
m[1,2]=m[1,1]+m[2,2]+$P_0P_1P_2$ = 4*5*10=200 k=1
m[2,3]=m[2,2]+m[3,3]+$P_1P_2P_3$ = 5*10*8=400 k=2
m[3,4]=m[3,3]+m[4,4]+$P_2P_3P_4$ = 10*8*5=400 k=3
m[4,5]=m[4,4]+m[5,5]+$P_3P_4P_5$ = 8*5*10=400 k=4
m[5,6]=m[5,5]+m[6,6]+$P_4P_5P_6$ = 5*10*50=2500 k=5

m[1,3]=min(
m[1,1]+m[2,3]+ $P_0P_1P_3$=400+4*5*8=560
m[1,2]+m[3,3]+ $P_0P_2P_3$=200+4*10*8=520 k=2
)
m[2,4]=min(
m[2,2]+m[3,4]+ $P_1P_2P_4$ =400+5*10*5=650
m[2,3]+m[4,4]+ $P_1P_3P_4$ =400+5*8*5=600 k=3
)
m[3,5]=min(
m[3,3]+m[4,5]+ $P_2P_3P_5$ =400+10*8*10=1200
m[3,4]+m[5,5]+ $P_2P_4P_5$ =400+10*5*10=900 k=4
)
m[4,6]=min(
m[4,4]+m[5,6]+ $P_3P_4P_6$=2500+8*5*50=4500
m[4,5]+m[6,6]+ $P_3P_5P_6$=400+8*10*50=4400 k=5
)

m[1,4]=min(

$m[1,1]+m[2,4]+P_0P_1P_4$=600+4*5*5=700

$m[1,2]+m[3,4]+P_0P_2P_4$=200+400+4*10*5=800

$m[1,3]+m[4,4]+P_0P_3P_4$=520+4*8*5=680 k=3

)

m[2,5]= min(

$m[2,2]+m[3,5]+P_1P_2P_5$=900+5*10*10=1400

$m[2,3]+m[4,5]+P_1P_3P_5$=400+400+5*8*10=1200

$m[2,4]+m[5,5]+P_1P_4P_5$=600+5*5*10=850 k=4

)

m[3,6]=min(

$m[3,3]+m[4,6]+P_2P_3P_6$=4400+10*8*50=8400

$m[3,4]+m[5,6]+P_2P_4P_6$=400+2500+10*5*50=5400 k=4

$m[3,5]+m[6,6]+P_2P_5P_6$=900+10*10*50=5900

)

m[1,5]=min(

$m[1,1]+m[2,5]+P_0P_1P_5$=850+4*5*10=1050

$m[1,2]+m[3,5]+P_0P_2P_5$=200+900+4*10*10=1500

$m[1,3]+m[4,5]+P_0P_3P_5$=520+400+4*8*10=1240

$m[1,4]+m[5,5]+P_0P_4P_5$=680+4*5*10=880 k=4

)

m[2,6]=min(

$m[2,2]+m[3,6]+P_1P_2P_6$=5400+5*10*50=7900

$m[2,3]+m[4,6]+P_1P_3P_6$=400+4400+5*8*50=6800

$m[2,4]+m[5,6]+P_1P_4P_6$=600+2500+5*5*50=4350

$m[2,5]+m[6,6]+P_1P_5P_6$=850+5*10*50=3350 k=5

)

m[1,6]=min(

$m[1,1]+m[2,6]+P_0P_1P_6$=3350+4*5*50=4350

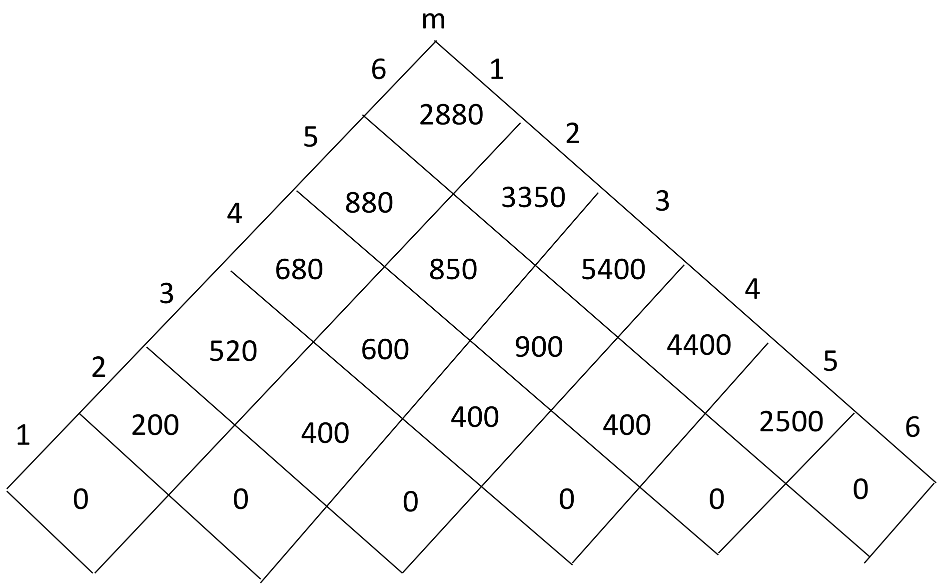
$m[1,2]+m[3,6]+P_0P_2P_6$=200+5400+4*10*50=7600

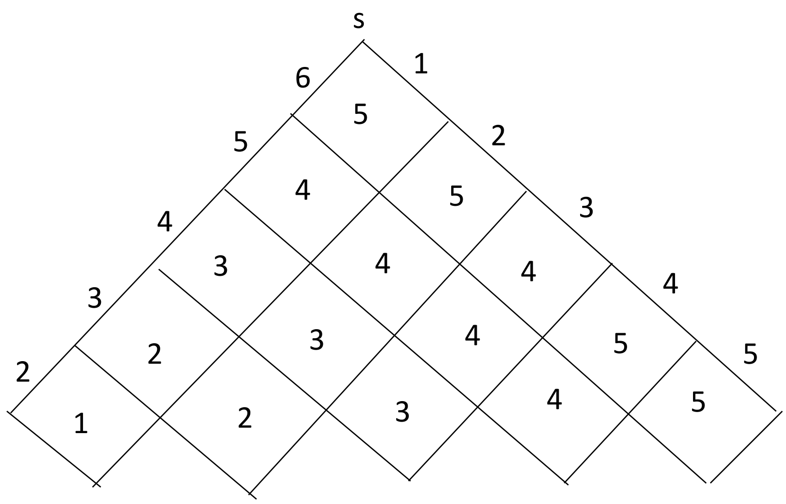
$m[1,3]+m[4,6]+P_0P_3P_6$=520+4400+4*8*50=6520

$m[1,4]+m[5,6]+P_0P_4P_6$=680+2500+4*5*50=4180

$m[1,5]+m[6,6]+P_0P_5P_6$=880+4*10*50=2880 k=5

)





所以最优乘法次序应该为(((((A_1A_2)A_3)A_4)A_5) A_6)。

(卷 2)现在要求出 6 个矩阵的链乘 A_1* A_2* A_3* A_4* A_5* A_6，A_i 是一个 P_{i-1}*P_i 的矩阵，其中 P[0..6]=(5, 10, 4, 15, 20, 8, 5)，请计算其最优的乘法次序，给出计算过程。

解：A_1 5*10 A_2 10*4 A_3 4*15 A_4 15*20 A_5 20*8 A_6 8*5

先计算后画图，计算过程如下：

m[1,2]=m[1,1]+m[2,2]+$P_0P_1P_2$ = 5*10*4=200 k=1

m[2,3]=m[2,2]+m[3,3]+$P_1P_2P_3$ = 10*4*15=600 k=2

m[3,4]=m[3,3]+m[4,4]+$P_2P_3P_4$ = 4*15*20=1200 k=3

m[4,5]=m[4,4]+m[5,5]+$P_3P_4P_5$ = 15*20*8=2400 k=4

m[5,6]=m[5,5]+m[6,6]+$P_4P_5P_6$ = 20*8*5=800 k=5

m[1,3]=min(

m[1,1]+m[2,3]+ $P_0P_1P_3$=600+5*10*15=1350

m[1,2]+m[3,3]+ $P_0P_2P_3$=200+5*4*15=500 k=2

)

m[2,4]=min(

$m[2,2]+m[3,4]+P_1P_2P_4=1200+10*4*20=2000$ k=2

$m[2,3]+m[4,4]+P_1P_3P_4=600+10*15*20=3600$

)

m[3,5]=min(

$m[3,3]+m[4,5]+P_2P_3P_5=2400+4*15*8=2880$

$m[3,4]+m[5,5]+P_2P_4P_5=1200+4*20*8=1840$ k=4

)

m[4,6]=min(

$m[4,4]+m[5,6]+P_3P_4P_6=800+15*20*5=2300$ k=4

$m[4,5]+m[6,6]+P_3P_5P_6=2400+15*8*5=3000$

)

m[1,4]=min(

$m[1,1]+m[2,4]+P_0P_1P_4=2000+5*10*20=3000$

$m[1,2]+m[3,4]+P_0P_2P_4=200+1200+5*4*20=1800$ k=2

$m[1,3]+m[4,4]+P_0P_3P_4=500+5*15*20=2000$

)

m[2,5]= min(

$m[2,2]+m[3,5]+P_1P_2P_5=1840+10*4*8=2160$ k=2

$m[2,3]+m[4,5]+P_1P_3P_5=600+2400+10*15*8=4200$

$m[2,4]+m[5,5]+P_1P_4P_5=2000+10*20*8=3600$

)

m[3,6]=min(

$m[3,3]+m[4,6]+P_2P_3P_6=2300+4*15*5=2600$

$m[3,4]+m[5,6]+P_2P_4P_6=1200+800+4*20*5=2400$

$m[3,5]+m[6,6]+P_2P_5P_6=1840+4*8*5=2000$ k=5

)

m[1,5]=min(

$m[1,1]+m[2,5]+P_0P_1P_5=2160+5*10*8=2560$

$m[1,2]+m[3,5]+P_0P_2P_5=200+1840+5*4*8=2200$ k=2

$m[1,3]+m[4,5]+P_0P_3P_5=500+2400+5*15*8=3500$

$m[1,4]+m[5,5]+P_0P_4P_5=1800+5*20*8=2600$

)

m[2,6]=min(

$m[2,2]+m[3,6]+P_1P_2P_6=2000+10*4*5=2200$ k=2

$m[2,3]+m[4,6]+P_1P_3P_6=600+2300+10*15*5=3650$

$m[2,4]+m[5,6]+P_1P_4P_6=2000+800+10*20*5=3800$

$m[2,5]+m[6,6]+P_1P_5P_6=2160+10*8*5=2560$

)

m[1,6]=min(

$m[1,1]+m[2,6]+ P_0P_1P_6=2200+5*10*5=2450$

$m[1,2]+m[3,6]+ P_0P_2P_6=200+2000+5*4*5=2300$ k=2

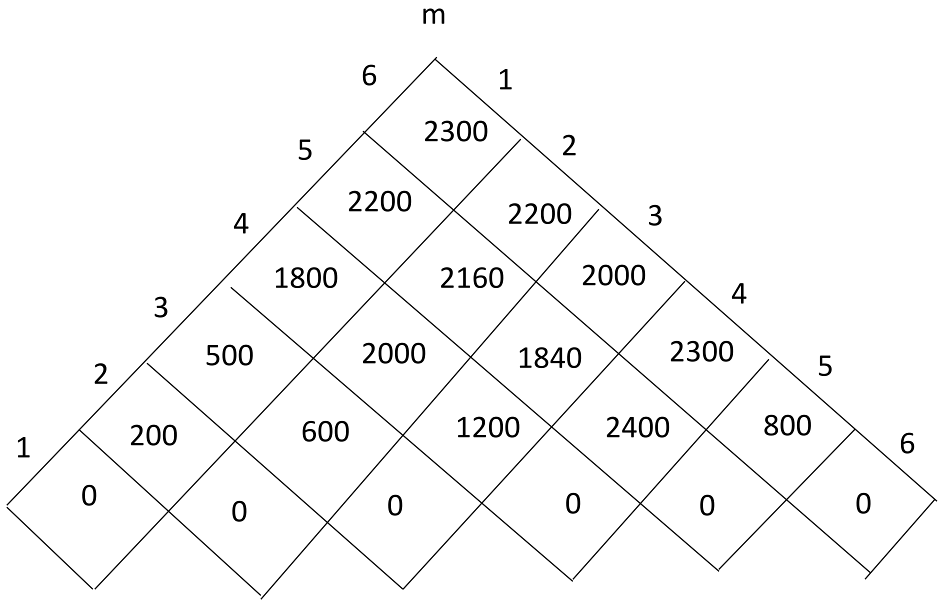
$m[1,3]+m[4,6]+ P_0P_3P_6=500+2300+5*15*5=3175$

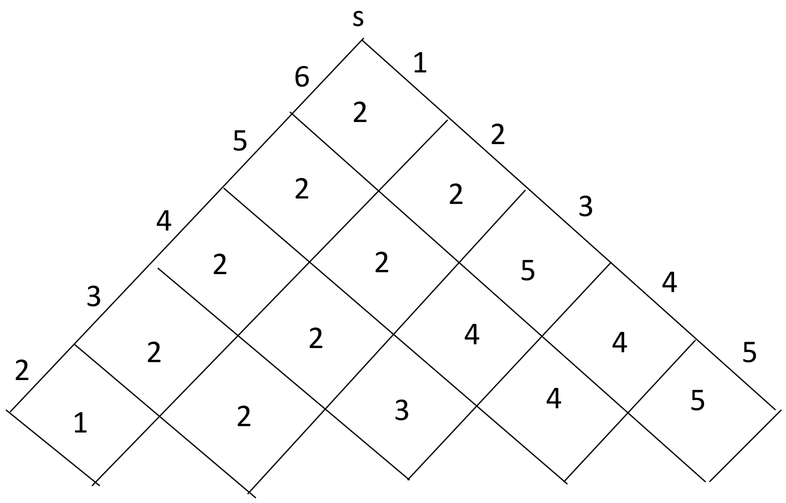
$m[1,4]+m[5,6]+ P_0P_4P_6=1800+800+5*20*5=3100$

$m[1,5]+m[6,6]+ P_0P_5P_6=2200+5*8*5=2400$

)

对应的表示 m 和 s 的图如下：





所以最优乘法次序应该为$(A_1A_2)(((A_3A_4)A_5)A_6)$。

三、简单回答题。

1 求∑中字符对应的 GF(x)函数值。

卷 1..

$P[1..12] = (a, b, c, d, e, c, g, b, f, a, d, a)$ $\quad \sum = (a, b, c, d, e, f, g)$

x	a	b	c	d	e	f	g
GF(x)	2	4	6	1	7	3	5

卷 2

$P[1..12] = (a, c, b, a, b, f, c, b, a, d, e, a)$ $\quad \sum = (a, b, c, d, e, f, g)$

x	a	b	c	d	e	f	g
GF(x)	3	4	5	2	1	6	12

2.给出下述算法的最终返回结果。

卷 1

```
 Merry-Christmas(n)
     r=0
     For i=1 to n do
            For j=1 to I do
                   For k=j to i+j do
                          r=r+1
return (r)
```

解：由程序得

$$r = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

卷 2

```
Merry-Christmas(n)
     r=0
     For i=1 to n-1 do
            For j=i+1 to n do
                   For k=j to i+j do
                          r=r+1
return (r)
```

解：由程序得

$$r = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(i+1)$$

$$= n * \sum_{i=1}^{n-1} (i+1) - \sum_{i=1}^{n-1} i\,(i+1)$$

$$= \frac{n(n+2)(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

$$=\frac{n(n-1)(n+4)}{6}$$

四、算法设计。

1. **已知 A[1…n]是一个数组，其中每个元素是一个实数，要求写出一个最坏情况时间复杂度为 O(n^2)的算法，找出 A[1…n]中最长单调增子序列。**

   解：定义一个数组 B 刚开始 B 和 A 的值都相同，对数组 B 调用快速排序按照递增序列排序，然后找出 A 和 B 的最长公共子序列就是 A 中的最长单调增子序列。

```
find_longest_increasing_subsequences(A)
    for i=1 to n
        B[i]=A[i]
    QUICKSORT(B,1,n)
    b=LCS-LENGTH(A,B)
    PRINT-LCS(b,A,n,n)
```

   伪代码说明：

   赋值的复杂度为 n,快排复杂度是$n\log n$，LCS-LENGTH 的复杂度为 n^2,打印的复杂度也是 n^2，所以总复杂度为 O(n+nlgn+2n^2)=O(n^2)。

2. **设有 n 个变量：$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$,以及给定的 m 个相关的变量间相等”$x_i=x_j$”或不相等”$x_i\neq x_j$”关系式，请写出一个有效的算法判断这些关系式是否都可以得到满足（要求算法复杂度为 O（m+nlgn））。**

解：

算法：

将 n 个元素划分为 n 个不相交的集合，整个判断过程分为两个步骤。

第一步，对于 m 个表达式中所有的相等关系式，若“$x_i=x_j$”且 x_i 与 x_j 不属于同一个集合，则合并 x_i 与 x_j 所在的集合。第二步，在第一步完成后，对于 m 个表达式中的所有不相等关系式，如果$x_i \neq x_j$ 判断 x_i 与 x_j 是否属于同一集合，若属于同一集合，则 m 个关系式无法全部得到满足。

伪代码

```
CHECK(X, M, n, m)
    for i=1 to n
        MAKE-SET(X[i])
     end for
    for i=1 to m
        if(M[i] is equation)
            A=FIND-SET(left value of M[i])
            B=FIND-SET(right value of M[i])
            If(A != B)
                UNION(A,B)
            end if
        end if
    end for
    for i=1 to m
        if(M[i] is not equation)
```

```
            A=FIND-SET(left value of M[i])
            B=FIND-SET(right value of M[i])
            If(A = B)
                return false
            end if
        end if
    end for
    return true
```

伪代码说明：

数组 X 存储 n 个变量的数组，M 为存储 m 个关系式的数组。UNION 操作采用下述的 UNION 方法。

复杂度证明：

使用链表来表示集合。每个链表包含有头指针，尾指针以及当前链表的长度。头指针指向的元素为该集合的代表元素，链表中每一个元素均包含指向其后继的指针以及指向代表元素的指针。则由该链表结构，MAKE-SET 与 FIND-SET 操作的时间均为 O(1).采用加权合并启发式策略来实现集合间的 UNION 操作。每一次 UNION 时，均将长度较短的链表接到长度较长的链表后面。则每次 UNION 操作时，需要更改指向代表元素指针的节点个数不会超过新链表长度的一半。

对于大小为 n 的集合，考虑其指向代表元素的指针更新次数的上界。考虑元素 x，其从最小的集合开始更新。第一次更新后，集合中至少包含两个元素，第二次更新后，集合中至少包含四个元素；依次类推。对 k<=n,在指向代表元素的指针更新$[lgk]$次后，集合中至少包含 k 个元素。本题中整个集合的最大元素个数为 n，因而每个对象的代表指针至多被更新$[lgn]$次。将头尾指针以及链表长度的更新考虑在内，每次 UNION 操作时这些代价为 O（1）。因而更新 n 个对象的 UNION 操作所用的总时间为 O(nlgn)。

对于上述的判断过程，整个的合并集合操作的代价为 O（nlgn）；对于每一个表达式，需要执行两次 FIND-SET 操作，代价为 O（1）；对每个变量执行一次一次 MAKE-SET 操作，代价为 O(1)。整个判断过程的代价为 O（m+n+nlgn）=O(m+nlgn)。