

2018 年秋季学期《算法基础》期中试题

Edited by [Lyncien](#)

2018.11.04 晚 7:00

一、 简答题 2 * 5%

1. 动态规划是一种分治方法，解释其时间性能优势体现在哪些方面？
2. 构造一棵有 8 个（内部）结点的红黑树，使该红黑树的高度达到极大值。

二、 计算题 3 * 10%

1. 求解递归式 $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$ 的上界。
2. Tom 教授为 $n \times n$ 矩阵 A 和 B 相乘设计了一个分治算法，他将矩阵分解为 a 次 4×4 阶子矩阵相乘，其时间成本递归式为 $T(n) = aT(n/4) + O(n^2)$ 。如果要好于 Strassen 算法， a 应该小于多少？
3. 求 $\langle G, T, T, A, C, G \rangle$ 和 $\langle C, T, G, A, C, T, G, T \rangle$ 的一个 LCS （最长公共子序列），并给出其动态规划矩阵和用于构造解的附加信息矩阵和相关说明。

三、 算法设计与分析题 4 * 15%

1. 在无序数组 $A[1..n]$ 中找第 k 小元素问题有许多实际需求考虑，试：
 - (1) 如果需要 m 次找不同的第 k 小元素，可以先用 $O(n \log n)$ 的时间的算法排序，然后再返回不同的第 k 小元素，分析 m 大于多少时，好于 m 次线性时间的基本算法单独调用代价？
 - (2) 如果数组元素经常有变动，用什么样数据结构来代替数组，并给出该数据结构设计。
2. 对于可能有重复元素的有序数值数组 $A[1..n]$ ，要求在 $O(\log n)$ 时间内完成：
 - (1) 给出数组中所有等于 x 元素的下标范围并写出伪代码；
 - (2) 查找数组元素在开区间 (a, b) 内的元素下标范围，并给出其伪代码。
3. 组合数 C_n^m 表示从 n 个物品中选出 m 的方式数，对计算公式 $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$ ，试完成：
 - (1) 求 C_n^m 值的时间 $T(n) = O(n * m)$ 和空间 $S(n) = O(n * m)$ 的动态规划算法及伪代码。
 - (2) 如何将空间降为 $O(m)$ 或 $O(n)$ ，请说明改进思想及其相应修改的伪代码。
4. 找出两个长度分别为 m 和 n 字符串序列的最长公共子串（子串为下标连续的子序列），试：
 - (1) 先给出朴素算法的算法思想、伪代码及计算时间复杂度
 - (2) 再给出算法改进思路或一个更有效的算法