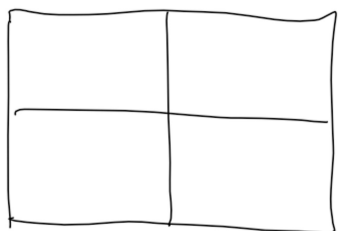


第1章 什么是组合数学

2021年3月9日 7:57

组合数学：对一组对象（离散结构）按一定规则进行安排

1. 存在性
2. 安排计数
3. 分析
4. 优化



- (1) 1, 2, 3, 4均出现有多少种方法？有4!种方法
- (2) 行和==列和==对角线和 排列方法是否存在？不存在（幻方）

1.1 棋盘的完美覆盖

1、8x8棋盘，1x2骨牌，完美覆盖？

存在， $\# = 12988816 = 2^4 \times 17^2 \times 53^2$

2、mxn棋盘，1x2骨牌，完美覆盖？

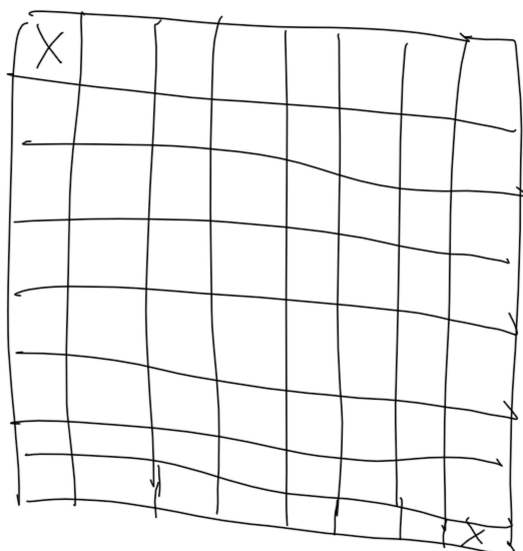
存在性：有完美覆盖 $\Leftrightarrow 2|mn$ ，否则， mn 为奇数， t 张 1×2 骨牌覆盖 $2t$ 个格子

$\Leftarrow 2|mn \Rightarrow 2|m \text{ or } 2|n$ ，不妨设 $2|m$ ，每列 $\frac{m}{2}$ 个 1×2 骨牌纵向放置

3、8x8棋牌，剪掉对角的2个方格，1x2骨牌，完美覆盖？

对8x8棋盘着色，黑白两色，相邻异色，32Black, 32White（对角两个方格同色）

剪去2个格子，30B, 32W \neq 31B, 31W，显然不能完美覆盖



4、 $m \times n$ 棋盘，任意剪去一些方格， 1×2 骨牌，完美覆盖？

必要条件：有完美覆盖 $\Rightarrow \#B = \#W$ （反过来不一定成立）

5、 $m \times n$ 棋盘， b 格牌（ $1 \times b$ 牌），完美覆盖？

存在性：有完美覆盖 $\Leftrightarrow b$ 是素数， $b \mid mn$

$\Leftrightarrow b \mid m \text{ or } b \mid n$

6、 4×4 棋盘，被 1×2 骨牌完美覆盖后，是否存在一条断层线将棋盘分开，分开后的两个棋盘还是满足完美覆盖？

反证： $x_i > 0$ ，则 $x_i = 2, 4$ （断层线 x_i 分开的骨牌数）

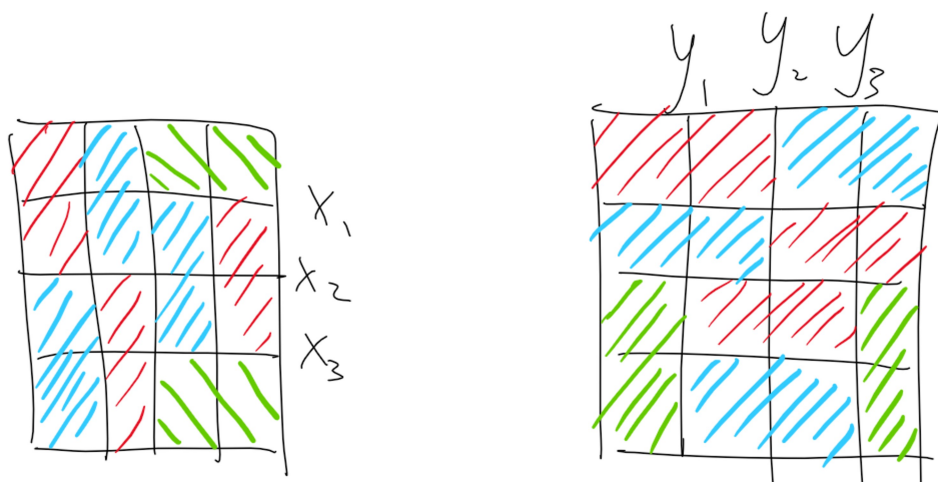
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 + 2 + 2 = 6$$

至少有6个纵向骨牌

$$\text{同理 } y_1 + y_2 + y_3 \geq 6$$

至少有6个横向骨牌

$$6 + 6 = 12 > 8 \text{ (} 4 \times 4 \text{ 棋盘被8个骨牌覆盖)}$$



1.2 幻方问题

1、 $1, 2, \dots, n^2$ 放入 $n \times n$ 棋盘，每个数字出现，

要求：行和 == 列和 == 对角线和 == $\frac{1+2+\dots+n^2}{n} = \frac{n(1+n^2)}{2}$ ，存在？

2阶幻方不存在， $n(\geq 3)$ 阶幻方存在

奇数阶幻方构造方法：

(1) 1放在第一行中间

(2) $i+1$ 在 i 的右上角，其中： i 在第1行， $i+1$ 放在最后一行的下一列
 i 在最后一列， $i+1$ 放在第1列的上一行

(3) i 的右上角已填有数字， $i+1$ 放在 i 的下方

i 在棋盘右上角（第1行最后一列）， $i+1$ 放在 i 的下方

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

2、n阶幻方体：1, 2, 3, ..., n^3 放入 $n \times n \times n$ 的立方体

要求：①与边平行的直线上数字之和

②每个平面截面的对角线上数字之和

③4条体对角线上数字之和

上述的数字之和相等

$$\text{幻和为} \frac{n^4+n}{2}$$

(1) 2阶幻方体不存在（证明方法同下）

(2) 3阶幻方体不存在

反证：每个平面截面（如图）：

$$a + y + f = 42$$

$$c + y + d = 42$$

$$x + y + z = 42$$

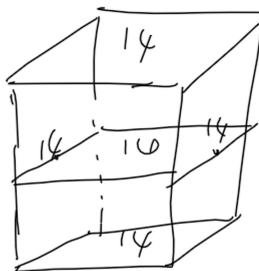
$$a + b + c = 42$$

$$d + e + f = 42$$

$$\Rightarrow y = 14 (\text{中心填} 14)$$

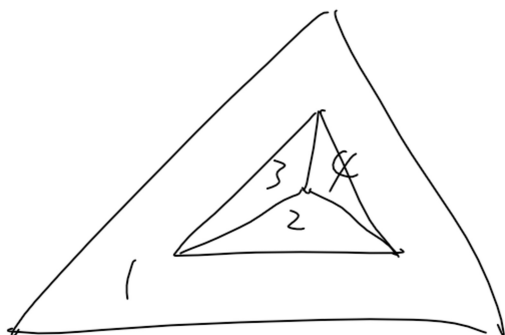
14显然不能放在7个平面的中心

a	b	c
x	y	z
d	e	f



1.3 四色问题

相邻区域异色



1.4 36军官问题

36名军官：来自6支军队，同一军队的6人军衔不同，所以任意两个军官要么军队不同，要么军衔不同。军官用 (i,j) 表示， i 表示军队， j 表示军衔，排成 6×6 方阵，每行/列：不同军队，不同军衔

先考虑 $3 \times 3 = 9$ 军官问题

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

军队 (3阶拉丁方)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

军衔 (3阶拉丁方)

上述两个3阶拉丁方并置：

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) \\ (3,2) & (1,3) & (2,1) \\ (2,3) & (3,1) & (1,2) \end{pmatrix}$$

正交拉丁方 (生成所有可能的9个有序对 (i,j))

然而 6×6 的拉丁方存在， 6×6 的正交拉丁方不存在

作业 Chap1: 2, 4(a), 18