算法设计与分析
Design and Analysis of Algorithms

主讲人 徐云
Fall 2018, USTC

中国科学技术大学 计算机科学与技术系
University of Science and Technology of China
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND TECHNOLOGY

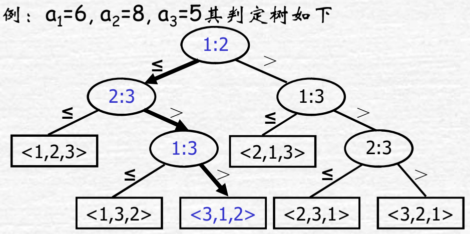
中国科学技术大学 计算机科学与技术系
University of Science and Technology of China
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND TECHNOLOGY

8.1 排序的下界

- 判定树模型
- 最坏情形的下界

判定树模型

- 任何n个元素$a_1,a_2,\ldots,a_n$的基于比较的排序可以用一棵二叉排序树表示，其叶子节点代表一类输入实例的排序结果。
- 示例：$a_1=6, a_2=8, a_3=5$其判定树如下



该实例的比较路径由箭头所示，叶子节点代表的是排序结果。

最坏情形的下界

- 定理8.1 基于比较排序算法在最坏情形下，需要$\Omega(n\log n)$。
- 证明：设h, l分别代表判定树的高度和叶子数

  ∵ 判定树是一棵二叉树

  ∴ $l \le 2^h$ //叶子数不超过2^h

  ∴ $n! \le l \le 2^h$ //$n!$为排序的结果数

  于是有，$h \ge \log n! \ge \Omega(n\log n)$ 证毕！

中国科学技术大学 计算机科学与技术系
University of Science and Technology of China
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND TECHNOLOGY

第8章 线性时间的排序

8.2 计数排序

- 基本思想
- 一种特殊情形的计数排序
- 一般情形的计数排序

基本思想

- 统计小于或等于A[i]的元素数目，将A[i]置入相应的位置，即
  A[i]→B[小于或等于A[i]的元素数目]
- 主要要解决的问题：
  - 计数：统计小于或等于A[i]的元素数目
  - 值相同元素的处理

一种特殊情形的计数排序

- 问题：n个互不相同的整数A[1..n]，1≤A[i]≤n i=1~n
- 排序算法：

```
SpecialCountingSort(A,B)
{//B[1..n]为排序结果
   for i←1 to n do
      B[A[i]]←A[i]; //如A[i]=5，就放到B[5]中
}
```

时间：O(n)，无比较

一般情形的计数排序（1）

- 问题：n个可以相同的整数A[1..n]，1≤A[i]≤k，i=1~n，这里k是A[i]的取值范围，不一定为n。
- 基本思想：
  步骤：A[1..n]→计数器C[1..k]→B[1..n]
  - Step 1(值相同元素的计数)：将A中的值为i的元素个数记入C[i]中；
  - Step 2(累计计数)：对C[1..k]进行修改，使得C[i]的值表示为≤i的元素个数；
  - Step 3(放置)：将A[j]依据C[A[j]]，放入正确位置B[C[A[j]]]上，并修改C[A[j]] ← C[A[j]]-1；

一般情形的计数排序（2）

- 算法：

```
CountingSort(A,B,k)
{//B[1..n]为排序结果，C[1..k]为计数数组
   for i←1 to k do  C[i]←0;
   for j←1 to length[A] do    //扫描A，值相同元素计数
      C[A[j]]++;
   for i←2 to k do            //C[i]修改，累计计数
      C[i]←C[i]+C[i-1];
   for j←length[A] downto 1 do
   {  B[C[A[j]]]←A[j];
      C[A[j]]--;
    }
}
```

时间：T(n,k)=Θ(n+k)=Θ(n)，如果k=Θ(n)时

8.3 基数排序

- 算法
- 一些讨论

基数排序算法

- 假定A[1..n]是非负整数，用k进制表示为不超过d位数。
- 算法：
  RadixSort(A,d)
  { for i←1 to d do
  使用稳定的排序算法对A的第i位排序；//如计数排序
  }
- 时间：$T(n)=\Theta(d(n+k))$ //k为基，d为位数
  $=\Theta(n)$ //如果$k=\Theta(n)$且d是常数
- 示例：Fig. 8.3

一些讨论

- d不为常数，基数排序算法还是线性时间吗？
  设n个整数的取值范围是$0\sim n^c$，c是整常数，$c\geq 1$
  对于十进制整数，n^c需要的位数$d=\lfloor \log_{10}n^c \rfloor+1\approx \log_{10}n$
  ∴ $T(n)=\Theta(d(n+k))=\Theta(n\log n)$ //k为10
  因此，不是线性时间排序
- 算法何时为线性时间？
  - Idea: 只要使d变为常数，k变大到与n同阶
  - How to do:
    选基k=n，则n^c的位数为$\log_n n^c=c=d$
    ∴ d=c， k=n
    ∴ $T(n)=\Theta(n)$

8.4 桶排序

- 基本思想
- 示例
- 算法描述

基本思想和示例

- 假定：输入是均匀分布在[0,1)上的实数。
- 基本思想：
  ① [0,1)划分为 [0,1/n),[1/n,2/n),…,[k/n,(k+1)/n),…,[(n-1)/n,1)n个大小相等的子区间，每个子区间看作一个桶；
  ② 将n个元素分配到桶中；
  ③ 对每个桶里的元素进行排序，依次连接桶；
- 示例：Fig. 8.4

桶排序算法（1）

- 输入：0≤A[1..n]＜1
- 辅助数组：B[0..n-1]是一个指针数组，指向每个桶(链表)
- 关键字映射：
  由于0≤A[i]＜1，必须将A[i]映射到0,1,…,n-1上
  ∵ [0,1)→[0,n)　//通过函数nA[i]
  　即 k≤nA[i]＜k+1　//存在k
  ∴ 桶号k=⌊nA[i]⌋　//映射函数

桶排序算法（2）

- 算法描述：

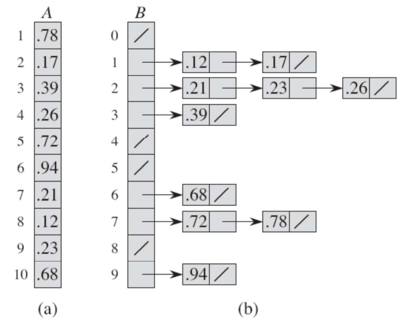
```
BucketSort(A)                                   Time
{ n←length[A];
   for i←1 to n do      //扫描A                 θ (n)
      将A[i]插入到链表B[⌊nA[i]⌋]中;
   for i←0 to n-1 do                            θ (n)*
      用插入排序将B[i]排序;
   将B[0], B[1],…, B[n-1]连接起来;               θ (n)
}
```

*注：∵ n个数是均匀分布在[0,1)中，
　　∴ 每个桶中大约只有一个数，∴ 时间为O(1)

- 期望时间分析：略

桶排序算法（3）

- 示例：



中国科学技术大学 计算机科学与技术系
University of Science and Technology of China
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND TECHNOLOGY

End of Chap8