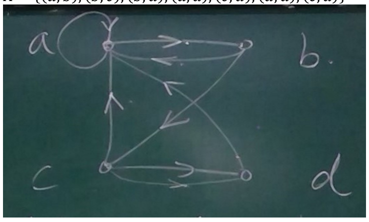
第13章 有向图与网络

2021年6月24日　11:00

13.1 有向图

- $D=(V,A)$
- 1. $V\neq\emptyset$
- 2. $A\subseteq\{(a,b)|a,b\in V\}$

$D=(V,A)$
$V=\{a,b,c,d\}$
$A=\{(a,b),(b,c),(b,a),(a,a),(c,d),(d,a),(c,a)\}$



环：(a,a)

重边：$(a,b)=(a,b)$

弧 $e=(a,b)$

记起点 $\iota(e)=a$，终点 $\tau(e)=b$

出度：$\deg^{+}(a)=|\{e|\iota(e)=a\}|$

入度：$\deg^{-}(a)=|\{e|\tau(e)=a\}|$

度数：$\deg(a)=\deg^{+}(a)+\deg^{-}(\mathrm{a})$

定理：在一般有向图中，$\deg^{+}(a)=\deg^{-}(a)=|A|$

有向途径

有向迹：途径中的弧都是不同的

有向路径：有向迹中的顶点都不相同

有向回路：封闭的路径

有向图 D $\Longrightarrow$ 基础图 G (将方向去掉，得到无向图)

　　$\Leftarrow$ （边定方向，得到有向图）

连通：基础图连通

强连通：$\forall a,b\in V$，a 到 b 且 b 到 a 都存在有向路径

定理：（有向 Euler 图）设 $D=(V,A)$ 连通

（1）若存在有向 Euler 闭迹 $\Leftrightarrow$ $\forall a\in V,\deg^{+}(a)=\deg^{-}(a)$

（2）若存在从 x 到 y 的 Euler 迹（$x\neq y$），则满足

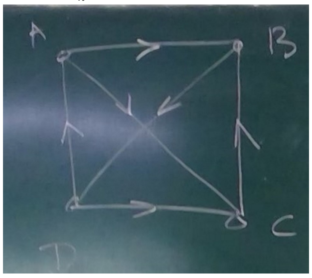
- （a）$\deg^{+}(x)=\deg^{-}(x)+1$
- （b）$\deg^{+}(y)=\deg^{-}(y)-1$
- （c）$\deg^{+}(a)=\deg^{-}(a)$，$a\in V-\{x,y\}$

定理：（Hamilton 图）设 $D=(V,A)$ 无环，无重边，D 是有向强连通图，

　且 $\forall x\in V,\deg^{+}(x)+\deg^{-}(x)\geq n$，

　则 D 有有向 Hamilton 圈

竞赛图：K_n 定向后得到竞赛图，可以视为循环赛的结果表示



定理：竞赛图有有向 Hamilton 路径

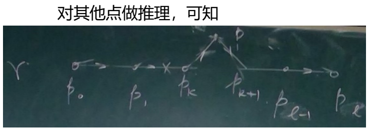
证明：设 $r{:}\,p_0-p_1-\cdots-p_e$ 是竞赛图的最长有向路径

　若 r 不是 Hamilton 路径，则存在顶点 p，p 不在 r 上。

　　若存在边 (p,p_0)，r 可延长，矛盾

　　$\Rightarrow$ 存在边 (p_0,p)，同理，存在边 (p,p_e)

　　对其他点做推理，可知



　　$\Rightarrow$ 存在 $k\ (0\leq k\leq e-1)$，使得 $(p_k,p),(p,p_{k+1})\in A$

　　$r'{:}\,p_0\to p_1\to\cdots\to p_k\to p\to p_{k+1}\to\cdots\to p_e$ 是有向路径，比 r 长，矛盾

无向图 G 定向成 强连通的有向图

定理：G 可定向成强连通有向图 $\Leftrightarrow$ G 无桥

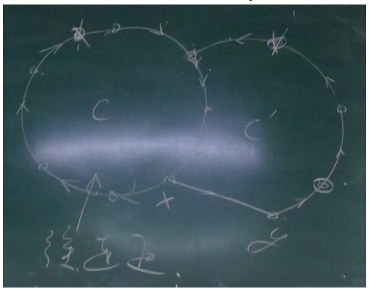
证明：“$\Longrightarrow$”若 G 有桥 $a=\{x,y\}$，则无论如何定向，要么 x 到 y 没有有向路径，要么 y 到 x 没有有向路径

　　“$\Leftarrow$”G 无桥，算法：

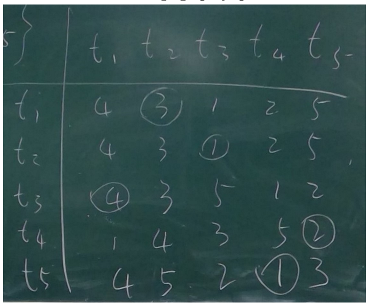
　　　（1）$U=\emptyset$

（2）G 中有圈 C，$U=V(C)$，将 C 定向成有向图

（3）若 C 之外没有顶点，则停止，否则，取 $x\in V(C), y\in V-V(C)$，使 $a=\{x,y\}\in E$，a 在一个圈 C' 将 C' 定向成从 x 到 y 的有向图，令 $U\leftarrow U\cup\{C'$上从 x 到第一次进入 C 的顶点$\}$，转（3）



例：交易问题，$U=\{t_1,t_2,t_3,t_4,t_5\}$ 商人相互交易



	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
t_1	4	3	1	2	5
t_2	4	3	1	2	5
t_3	4	3	5	1	2
t_4	1	4	3	5	2
t_5	4	5	2	1	3

交易：$\rho:\{t_1,t_2,\dots,t_5\}\to\{t_1,t_2,\dots,t_5\}$ 一一映射

ρ_1: $\rho(t_1)=t_2$,　$\rho(t_2)=t_3$,　$\rho(t_3)=t_1$,　$\rho(t_4)=t_5$,　$\rho(t_5)=t_4$

目标：挑最喜欢

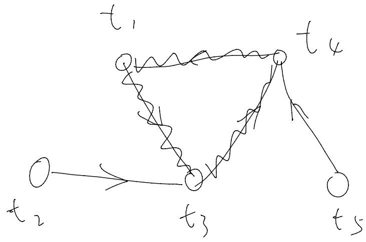
核心分配ρ：

不存在 $V\subseteq U$，使得有分配，使得 V 中每人得到的商品更好

ρ_1 不是核心分配，因为 $\rho(t_1)=t_4, \rho(t_4)=t_1$

问题的核心分配：

ρ': $\rho'(t_1)=t_3, \rho'(t_2)=t_2, \rho'(t_3)=t_4, \rho'(t_4)=t_1, \rho'(t_5)=t_5$

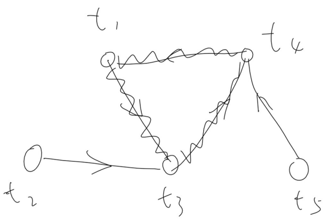


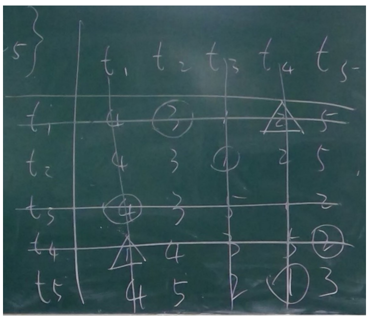
用有向图求解核心分配：

定理：若 $\delta^+(D)=\min_{x\in V}\{\deg^+(x)\}\geq 1$，则 D 中有有向圈

$D=(V,A)$　$V=\{t_1,t_2,\dots,t_n\}$

$t_i\to t_j$：t_i 最喜欢 t_j 的商品





	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
t_1	4	3		2	5
t_2	4	3	1	2	5
t_3	4	3			2
t_4	1	4			2
t_5	4	5	2	1	3

根据矩阵画出有向图，删除圈中的顶点，组成配对，重复操作直至顶点全部配对

13.2 网络

$N=(V,A,s,t,c)$

1. $D=(V,A)$
2. $s,t\in V, s$:源$, t$:汇
3. $c: A\to R^+$，容量函数

流函数（负载）$f: A\to R^+\cup\{0\}$

1. $\forall a\in A, 0\leq f(a)\leq c(a)$，不能超过容量
2. $\forall x\in V-\{s,t\}, \sum_{\iota(a)=x} f(a)-\sum_{\tau(a)=x} f(a)=0$

对每个不同于源和目标的顶点 x，进入 x 的流量等于流出 x 的流量

流量：

$$Val(f)=\sum_{\iota(a)=s} f(a)-\sum_{\tau(a)=s} f(a)=\sum_{\tau(a)=t} f(a)-\sum_{\iota(a)=t} f(a)$$

流出源的净流量 = 进入目标的净流量

截：

$U \subset V$，使 $s \in U, t \in \bar{U}$

$\vec{U} = \{(a,b) \mid a \in U, b \in \bar{U}\}$——截

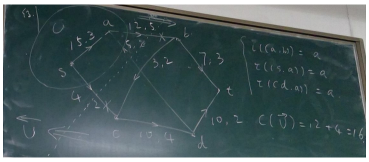
$\overleftarrow{U} = \{(a,b) \mid a \in \bar{U}, b \in U\}$

截量：

$$c(\vec{U}) = \sum_{a \in \vec{U}} c(a)$$

流函数：$\forall a \in A, 0 \le f(a) \le c(a)$

例：



引理1：设 f 是 N 的流函数，$\vec{U}$ 是 N 的截，则

$$Val(f) = \sum_{a \in \vec{U}} f(a) - \sum_{a \in \overleftarrow{U}} f(a)$$

证明：因为对 s 来说

$$\sum_{\iota(a)=s} f(a) - \sum_{\tau(a)=s} f(a) = Val(f)$$

$\forall x \in U - \{s\}$，有

$$\sum_{\iota(a)=x} f(a) - \sum_{\tau(a)=x} f(a) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{x \in U} \left(\sum_{\iota(a)=x} f(a) - \sum_{\tau(a)=x} f(a) \right) = Val(f) \quad (1)$$

对公式的左式换新的计算方式

任取 $a = (x,y) \in A$，分四种情况：

（1）$x, y \in \bar{U}$，$f(a)$ 在公式（1）中不出现

（2）$x, y \in U$，$f(a)$ 以 x 求和，正的出现；以 y 求和，负的出现；总和为零

（3）$x \in U, y \in \bar{U}$，即 $a \in \vec{U}$，因 $\iota(a) = x \Rightarrow f(a)$ 以正值出现

（4）$y \in U, x \in \bar{U}$，即 $a \in \overleftarrow{U}$，因 $\tau(a) = x \Rightarrow f(a)$ 以负值出现

推论：设 f 是流函数，$\vec{U}$ 是截，则 $Val(f) \le c(\vec{U})$

证明：

$$Val(f) = \sum_{a \in \vec{U}} f(a) - \sum_{a \in \overleftarrow{U}} f(a)$$

$$\le \sum_{a \in \vec{U}} c(a) - \sum_{a \in \overleftarrow{U}} 0 = c(\vec{U})$$

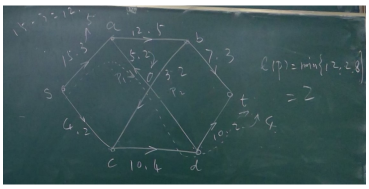
推论：若存在流函数 f，截 $\vec{U}$（U 是 s 在 U 中且 t 不在 U 中的顶点集），使得 $Val(f) = c(\vec{U})$ 则 f 是最大流，$\vec{U}$ 是最小截

证明：设 f^* 是最大流，$\vec{U}'$ 是最小截

$Val(f) \le Val(f^*) \le c(\vec{U}') \le c(\vec{U})$

$\because Val(f) = c(\vec{U})$

$\Rightarrow Val(f) = Val(f^*) = c(\vec{U}') = c(\vec{U})$



假设：网络 N，初始流函数 f

路径 P：无向路径：以 s 为起点

定义 P 的方向：从 s 向前的：

正向边：边方向与 P 方向一致

反方向：边方向与 P 方向相反

$$l(a) = \begin{cases} c(a) - f(a), & \text{正向边} \\ f(a), & \text{反向边} \end{cases}$$

$$l(P) = \min_{a \in E(P)} l(a)$$

正向边 $\begin{cases} \text{满载边：} & f(a) = c(a) \\ \text{未满载边：} & f(a) < c(a) \end{cases}$

反向边 $\begin{cases} \text{零载：} & f(a) = 0 \\ \text{正载：} & f(a) > 0 \end{cases}$

路径 $\begin{cases} \text{不可增再：} & l(P) = 0 \\ \text{正载：} & l(P) > 0 \\ \text{可增载：} & l(P) > 0 \text{ 且终点为 t} \end{cases}$

设 P 是 N 关于流函数 f 的可增载路径

定义：$\bar{f}: A \to R^+ \cup \{0\}$

$$\bar{f}(a) = \begin{cases} f(a), & a \notin E(P) \\ f(a) + l(P), & a \text{是正向边} \\ f(a) - l(P), & a \text{是反向边} \end{cases}$$

1. $0 \le \bar{f}(a) \le c(a)$

2. $\forall x \in V - \{s, t\}, \sum_{\iota(a)=x} \bar{f}(a) - \sum_{\tau(a)=x} \bar{f}(a) = 0$

定理：$\bar f$ 是流函数，且 $Val(\bar f) = Val(f) + l(P)$

证明：任取 $a \in A$

（1）$a \notin E(P), 0 \le \bar f(a) = f(a) \le c(a)$

（2）a 是 P 的正向边：

$0 \le \bar f(e) = f(e) + l(P) \le f(e) + l(e) \le f(e) + (c(e) - f(e)) = c(e)$

（3）a 是 P 的反向边，与（2）类似

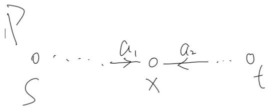
任取 $x \in V$

（1）x 不在 P 上，任取 a，$\iota(a) = x$，或 $\tau(a) = x$

$\bar f(a) = f(a)$

$$\sum_{\iota(a)=x} \bar f(a) - \sum_{\tau(a)=x} \bar f(a) = \sum_{\iota(a)=x} f(a) - \sum_{\tau(a)=x} f(a) = 0$$

（2）x 在 P 上，设 $P = s \dots a_1 x a_2 \dots t$



分为四种情况

A: a_1 是正向边，a_2 是反向边 $\Longrightarrow$ $\tau(a_1) = \tau(a_2) = x$

$$\sum_{\iota(a)=x} \bar f(a) - \sum_{\tau(a)=x} \bar f(a)$$

$$= \sum_{\iota(a)=x} f(a) - \left[\sum_{\substack{\tau(a)=x \\ a\ne a_1,a_2}} f(a) + (f(a_1) + l(P)) + (f(a_2) - l(P))\right]$$

$$= \sum_{\iota(a)=x} f(a) - \sum_{\tau(a)=x} f(a) = 0$$

其他三种情况与上述相似

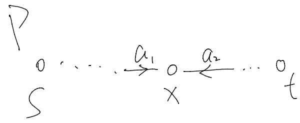
（3）证：$Val(\bar f) = Val(f) + l(P)$

设 $P = s \dots a_3 t$

A: a_3 是正向边，$\bar f(a_3) = f(a_3) + l(P)$

$$Val(\bar f) = \sum_{\tau(a)=t} \bar f(a) - \sum_{\iota(a)=t} \bar f(a)$$

$$= \left[\sum_{\substack{\tau(a)=t \\ a\ne a_3}} f(a) + f(a_3) + l(P)\right] - \sum_{\iota(a)=t} f(a) = Val(f) + l(P)$$



Ford-Fulkson 算法：

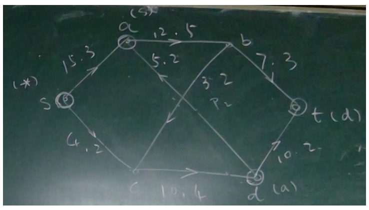
（1）初始流 f

（2）找可增载路径：找到 P，构造 $\bar f$，转（2），否则，算法停止。

问题：

（1）如何找可增载路径

（2）找不到，如何证明最大流



找可增载路径算法：

（1）令 $U = \{s\}$，$prev(s) = *$

（2）若存在 $a = (x, y), x \in U, y \in \bar U$,且 a 未满载

令 $U \leftarrow U \cup \{y\}$，$prev(y) = x$

（3）若存在 $a = (x, y), y \in U, x \in \bar U$,且 a 是正载边

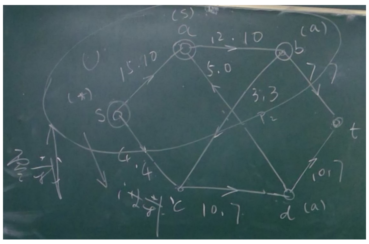
令 $U \leftarrow U \cup \{x\}$，$prev(x) = y$

算法结束时：

（1）$t \in U$：找到可增载路径

（2）$t \notin U$：f是最大流

例：



定理：Ford-Fulkson 算法结束时，f 是最大流

证明：Ford-Fulkson 算法结束时，没有找到可增载路径，

则 $s \in U, t \notin U \Longrightarrow \vec U$ 是一个截

任取 $a \in \vec U, f(a) = c(a)$，且 $\forall a \in \overleftarrow{U}, f(a) = 0$

$$Val(f) = \sum_{a\in \vec U} f(a) - \sum_{a\in \overleftarrow{U}} f(a) = \sum_{a\in \vec U} c(a) - \sum_{a\in \overleftarrow{U}} 0 = c(\vec U)$$

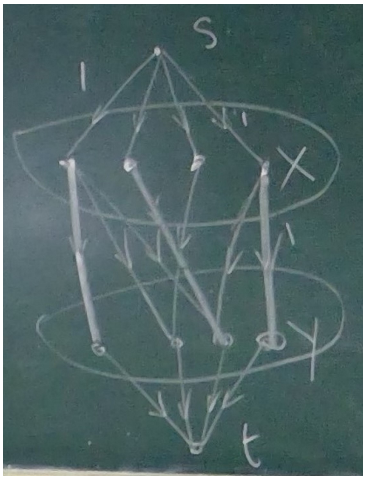
$\Longrightarrow f$ 是最大流，$\vec U$ 是最小截

推论（双最定理）：最大流流量＝最小截截量

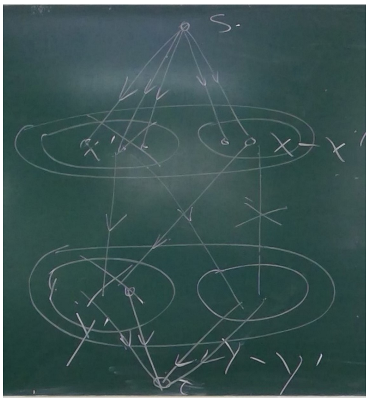
s, t 分离集 $A' \subset A$，$D - A'$ 中不存在从 s 到 t 的有向路径
最小分离集，极小分离集
从 s 到 t 无公共边的有向路径数

定理：设 s, t 是 $D = (V, A)$ 的两个不同顶点，则 D 中最小 s, t 分离集的边数 = D 中无公共边的有向路径的最大数量
证明：构造网络：以 s, t 分别为源与汇，每条边容量为 1，最小 s, t 分离集 = 最小截，其边数 = 截量，最小截截量 = 最大流流量
　下面证明，最大流流量 = 无公共边的路径数
　设 $Val(f) = p$，对 p 归纳：
　　$p = 0$，无可增载路径，最大路径数 = 0
　　$p = 1$，有 1 条从 s 到 t 的有向路径
　　设 $p - 1$ 成立，P：最大流量为 p，存在从 s 到 t 的有向路径 P
　　将 P 上的边从 D 中删除，得到 D'
　　D' 的最大流量为 $p - 1$
　　由归纳法，D' 中有 $p - 1$ 条无公共边的有向路径
　　$\Longrightarrow D$ 中有 p 条无公共边的有向路径
　　$\Longrightarrow$ 无公共边的最大路径数 $\geq p$
　　若 $> p$ 条 $\Longrightarrow$ 最大流量 $> p$，矛盾
　　$\Longrightarrow$ 最小 s, t 分离集边数 = 最大无公共边路径数

定理：设 G 是二分图，则 $\rho(G) = c(G)$，覆盖数 = 匹配数
证明：设 G 的顶点划分为 x, y，构造网络 N，每条边容量为 1：
（1）最大匹配数 = 最大流量



（2）最小覆盖 = 最大流量
　覆盖 $C = X' \cup Y'$



Chap 13: 6， 9， 17， 18
Chap 13: 24，25，26 都只做第一个图