第4章 分治策略（递归关系式）

2020年10月13日 11:03

4.3 替换法

1. 方法步骤

   猜测解

   用数学归纳法证明

2. 例1，确定$T(n)=2T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+n$的上界

   解：猜测$T(n)=O(nlog\ n)$

   要证$T(n)\le c\cdot n\cdot log\ n$对某个$c>0$成立

   假设对于$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$成立，即$\mathrm{T}\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)\le c\cdot\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\log\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$

   $T(n)=2T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+n\le 2c\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\log\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+n\le cnlog\frac{n}{2}+n=cn(\log n-1)+n=cn\log n\ -cn+1\le cn\log n$，只要$c\ge 1$

   下证归纳基础也成立

   $n=1$时

   $T(1)=1$ 假定$T(0)=0$

   $T(1)\le c\log 1$不成立

   $n=2$时

   $T(2)=2T(1)+2=4,\qquad c\cdot 2\cdot\log 2=2c$

   $T(2)=4\le c\cdot 2\cdot\log 2$只要$c\ge 2$

   $\therefore$取$c=2, T(n)\le cn\log n$对所有$\mathrm{n}\ge 2$成立

   $\therefore T(n)=O(n\log n)$

3. 评注

（1）做好的猜测

①与见过的解类似，如$T(n)=2T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)+n, T(n)=O(n\log n)$

②先证宽松上界，再缩小范围

③分析推测

k次迭代的问题规模：$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{n}{2^2}\right\rfloor,\dots,\left\lfloor\frac{n}{2^k}\right\rfloor$

什么时候规模为1，即可终止

总存在一个k，使得$\left\lfloor\frac{n}{2^k}\right\rfloor=1\Rightarrow\frac{n}{2^k}\ge 1\Rightarrow n\ge 2^k\Rightarrow k\le\log n$

总迭代次数$\le\log n$，每次成本$\frac{n}{2^{\mathrm{k}}}$

$$n+\frac{n}{2}+\frac{n}{2^2}+\cdots+1=O(n\log n)\qquad\left(\sum_{k=1}^{\lceil\log n\rceil}\frac{n}{2^k}=\mathrm{O}(n\log n)\right)$$

（2）修正细节：如，在猜测解中减去一个低阶项

例2，$T(n)=T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+T\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right)+1$

解：猜测$T(n)=O(n)$，即证$T(n)\le cn$

$T(n)\le c\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+c\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1=cn+1\le cn$(走不通)

设$T(n)\le cn-b$，$b>0$为常数

$T(n)\le c\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-b+c\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-b+1=cn-2b+1=cn-b+(1-b)\le cn-b$

只要$1-b\le 0\Rightarrow b\ge 1$

于是得证

(3) 避免陷阱

例3，$T(n)=2T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+1$

解：猜测$T(n)\le cn$

$T(n)\le 2\left(c\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+1\le cn+1\le O(n)\Rightarrow T(n)=O(n)$(犯错了，偷换概念，应该根据定义证明)

(4) 变量变换

例4，$T(n)=2T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)+\log n$

解：令$m=\log n\Rightarrow n=2^m$代入上式

则$T(2^m)=2T\left(2^{\frac{m}{2}}\right)+m$

再令$s(m)=T(2^m)$,即为$T(n)$

则$s(m)=2S\left(\frac{m}{2}\right)+m=O(m\log m)=O(\log n\ \cdot\log\log n)=T(n)$

4.4 迭代法和递归树法

1. 展开

例5，$T(n)=\begin{cases}O(1),\ \ n=1\\ 3T\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)+n, n>1\end{cases}$

解：$T(n)=n+3\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor+3T\left(\left\lfloor\frac{n}{4^2}\right\rfloor\right)\right)=n+3\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor+3^2T\left(\left\lfloor\frac{n}{4^2}\right\rfloor\right)=n+3\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor+3^2\left\lfloor\frac{n}{4^2}\right\rfloor+3^3T\left(\left\lfloor\frac{n}{4^3}\right\rfloor\right)=n+3\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor+3^2\left\lfloor\frac{n}{4^2}\right\rfloor+\cdots+3^kT\left(\left\lfloor\frac{n}{4^k}\right\rfloor\right)$

由$\left\lfloor\frac{n}{4^k}\right\rfloor=1$ (∃最大k) $\Rightarrow\frac{n}{4^k}\ge 1\Rightarrow k\le\log_4 n$

上式变为

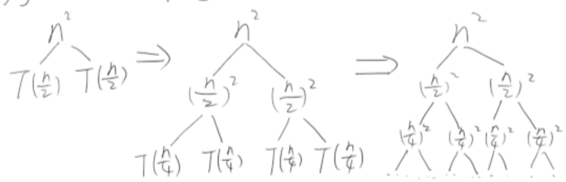
$T(n)\le n+3\cdot\frac{n}{4}+\cdots+3^i\cdot\frac{n}{4^n}+\cdots+3^{\lfloor\log_4 n\rfloor}O(1)\le n\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i+O\left(n^{\log_4 3}\right)\le 4n+o(n)=O(n)$

2. 递归树

例6，$T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+n^2$

解：

例6：$T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+n^2$



Running Time	Size
n^2	n
$\frac{1}{2}n^2$	$\frac{n}{2}$
$\frac{1}{4}n^2$	$\frac{n}{4}$
⋮	⋮
$\frac{1}{2^k}n^2$	$\frac{n}{2^k}$

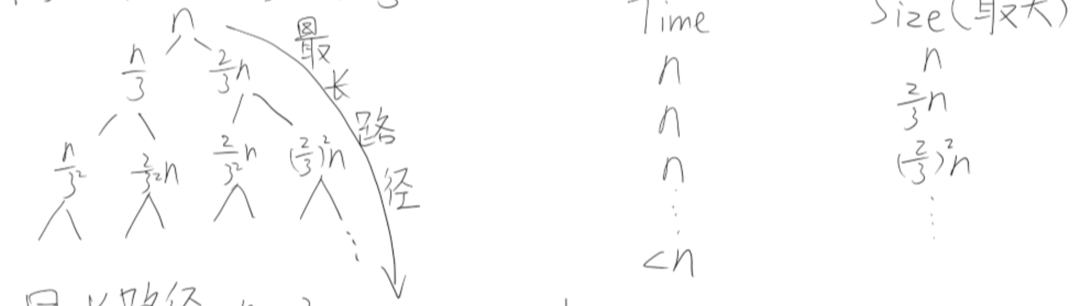
$\therefore T(n)=n^2\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{1}{2}-1}\le 2n^2-n=O(n^2)$

临界的问题size：$\frac{n}{2^k}\ge 1\Rightarrow k\le\log n$. 树高$\le\log n+1$

例7，$T(n)=T\left(\frac{n}{3}\right)+T\left(\frac{2}{3}n\right)+n$

解：

例7: $T(n)=T(\frac{n}{3})+T(\frac{2}{3}n)+n$



最长路径：$n\to\frac{2}{3}n\to(\frac{2}{3})^2n\to\cdots\to(\frac{2}{3})^kn$

令$(\frac{2}{3})^kn=1\Rightarrow k=\log_{\frac{3}{2}}n$

$\therefore T(n)\le(k+1)n=n\cdot(\log_{\frac{3}{2}}n+1)=O(n\log n)$

4.5 Master定理（主定理）

Th4.1 设$a\ge 1, b>1$的整数，$f(n)$是定义在b的幂上的非负函数，$\mathrm{T(n)=aT}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{b}}\right)+\mathrm{f}(n)$，

$\Big($理解：原问题分解为a个规模为$\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{b}}$的子问题，其中分解和合并的成本为$f(n)\Big)$

则$T(n)$的渐进界为：

case1: $f(n)=O\left(n^{\log_b a-\xi}\right)$, 对某个常数$\xi>0$成立, 则$T(n)=\theta\left(n^{\log_b a}\right)$

case2: $f(n)=\theta\left(n^{\log_b a}\right)$成立, 则$T(n)=\theta\left(n^{\log_b a}\cdot\log n\right)$

case3: $f(n)=\Omega\left(n^{\log_b a+\xi}\right)$, 对某个常数$\xi>0$成立, 且$af\left(\frac{n}{b}\right)\le cf(n)$, 对某个常数$c<1$及足够大的$n$成立, 则$\mathrm{T(n)}=\theta\big(f(n)\big)$

注：case按$n^{\log_b a}$(分水岭函数)划分的，但不完备

例8，求下列各式$T(n)$的阶

（1）$T(n)=9T\left(\frac{n}{3}\right)+n$

解：$\because a=9, b=3, f(n)=n$

$\therefore n^{\log_b a}=n^{\log_3 9}=n^2$

$\therefore f(n)=n<n^{\log_b a-\xi}=n^{2-0.5}$, 这$\xi=0.5$

$\therefore f(n)=O\left(n^{\log_b a-\xi}\right), \xi=0.5$

由case1$\Longrightarrow T(n)=\theta(n^2)$

（2）$T(n)=T\left(\frac{2}{3}n\right)+1$

解：$\because a=1, b=\frac{3}{2}, f(n)=1$

$\therefore n^{\log_b a}=n^{\log_{\frac{3}{2}}1}=n^0=1=f(n)$

由case2$\Longrightarrow T(n)=\theta(\log n)$

（3）$T(n)=3T\left(\frac{n}{4}\right)+n$

解：$\because a=3, b=4, f(n)=n$

$\therefore n^{\log_b a}=n^{\log_4 3}, \log_4 3<1\Longrightarrow\exists\xi>0$, 使得$\log_4 3+\xi<1$

$\therefore f(n)=n>n^{\log_b a+\xi}=\Omega\left(n^{\log_b a+\xi}\right)$

$\therefore af\left(\frac{n}{b}\right)=\frac{3}{4}n<\frac{7}{8}n=cf(n), c=\frac{7}{8}<1$, 对$n\ge 1$成立

由case3$\Longrightarrow T(n)=\theta(n)$

（4）$T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+nlog\,n$

解：$\because a=2, b=2, f(n)=n\log n$

$\therefore n^{\log_b a}=n^{\log_2 2}=n$

$f(n)=n\log n$渐进大于n，但并不是多项式意义上的大于，因为对于任意正常数ϵ，比值$\frac{f(n)}{n^{log_b a}}=\frac{(n\,log\,n)}{n}=log\,n$都渐进小于$n^{\epsilon}$

case1&2&3均不符合，因此主定理方法不适用

回归到4.3和4.4中的方法来解