第5章 二项式系数

2021年3月18日　　11:30

5.2 二项式定理

$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^k x^{n-k} y^k + \cdots + C_n^n y^n$

C_n^k：二项式系数(组合数)

证明：（1）数学归纳法(不建议)

（2）组合意义

$$(x+y)^n = \overbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}^{n}$$

每一项：$C_n^k x^{n-k} y^k, k = 0, 1, 2, \ldots, n$

从n个括号中选k个y出来，剩下的取x

$$\therefore (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$$

二项式恒等式

（1）$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$

（2）$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$，由$x = 1, y = -1$可得

（3）$1C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + kC_n^k + \cdots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$，由$(1+y)^n$对y求导可得

（4）$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$

证：右边=2n元集合S的n组合数

将S等分成两部分A，B，$|A| = |B| = n$

n组合的取法：在A中取k个元素，在B中取n-k个元素

$$\therefore \text{方法数} \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k}$$

（5）$\sum_{k=0}^{r} C_m^k C_n^{r-k} = C_{m+n}^r$，范德蒙恒等式

（6）$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

$\Longrightarrow C_{n+1}^{k+1} = C_0^k + C_1^k + \cdots + C_{n-1}^k + C_n^k$

证：左边：n+1元素集合S的k+1组合数

右边：令$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$

k+1组合可分为以下情况：

1）含a_1，则C_n^k

2）不含a_1，含a_2，则C_{n-1}^k

3）不含a_1, a_2，含a_3，则C_{n-2}^k

以此类推

5.3 二项式系数的单峰性

$$\overbrace{C_n^0 C_n^1 \ldots C_n^n}^{n+1}$$

n为奇数：

$$C_n^0 < C_n^1 < \cdots < C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}} > \cdots > C_n^n$$

n为偶数

$$C_n^0 < C_n^1 < \cdots < C_n^{\frac{n}{2}} > \cdots > C_n^n$$

5.4 多项式定理

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n=\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_t=n} C_n^{n_1\,n_2\ldots\,n_t} x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}\quad \text{(多项式系数)}$$

其中$C_n^{n_1\,n_2\ldots\,n_t}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}$

注：项数 = 不定方程$n_1+n_2+\cdots+n_t=n$的非负整数解个数

= C_{n+t-1}^{n}

证明：

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n=\overbrace{(x_1+x_2+\cdots+x_t)\ldots(x_1+x_2+\cdots+x_t)}^{n}$$

每一项：$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}\ \ (n_1+n_2+\cdots+n_t=n)$

系数= $C_n^{n_1}C_{n-n_1}^{n_2}\ldots C_{n-n_1-\cdots-n_{t-1}}^{n_t}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}=C_n^{n_1\,n_2\ldots\,n_t}$

二项式系数 C_n^k 记为 $C_n^{k\ n-k}$

例：$(x_1+x_2+\cdots+x_5)^7$

$$x_1^2x_3x_4^3x_5\text{的系数}=\frac{7!}{2!\,0!\,1!\,3!\,1!}=C_7^{2\ 0\ 1\ 3\ 1}$$

$(x_1+2x_2-3x_3+4x_4-5x_5)^7$

$x_1^2x_3x_4^3x_5$的多项式系数 $=\mathrm{C}_7^{2\ 0\ 1\ 3\ 1}$

对应项：$\frac{7!}{2!1!3!1!}x_1^2\cdot(-3x_3)\cdot(4x_4)^3\cdot(-5x_5)$

$$x_1^2x_3x_4^3x_5\text{的系数}=\frac{7!}{2!\,1!\,3!\,1!}\cdot(-3)\cdot4^3\cdot(-5)$$

5.5 牛顿二项式定理

C_n^k ————————————→ C_α^k

$n,k\in \mathrm{Z},k\le n$ $\qquad\qquad$ $\alpha\in R,k\in Z$

$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}C_\alpha^k x^k$，其中$C_\alpha^k=\frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}^{k}}{k!}$

当$\alpha=n\in Z$，$C_\alpha^k=C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$

———→ 当$k=n+1$时，$n-k+1=0$，此后$C_n^k=0$，也就是说，项数最多为n+1个

（1）$\alpha=-n$

$$C_{-n}^k=\frac{\overbrace{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}^{k}}{k!}$$
$$=\frac{(-1)^k n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}$$
$$=(-1)^kC_{n+k-1}^k$$

（2）$\alpha=\frac{1}{2}$

$$C_{\frac{1}{2}}^k=\frac{\overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}^{k}}{k!}\text{，其中}\frac{1}{2}-\mathrm{i}=\frac{1-2\mathrm{i}}{2}=(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot(2i-1)$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k(-1)^{k-1}\cdot1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2k-3)}{k!}\cdot\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2k-2)}{2^{k-1}\cdot1\cdot2\cdot\cdots\cdot(k-1)}$$
$$=\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\cdot k}\cdot\frac{(2k-2)!}{(k-1)!\,(k-1)!}$$
$$=\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\cdot k}C_{2k-2}^{k-1}$$

例：$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+x}$

$$\sqrt{20}=\sqrt{16+4}=4\cdot(1+0.5)^{\frac{1}{2}}$$

Chap5: 40