Tarea 9

CIMAT

Nombre:	**Jairo Saul Diaz Soto**
Maestría:	Ciencias Computacionales
Modulo:	Métodos Numéricos
Instructor:	Dr. Luis Daniel Blanco Cocom
Fecha de entrega:	2023 - 10 - 22

1. Introducción

Cuando se toman datos de campo, es decir, cuando se realizan observaciones sobre algun tipo de experimento, población o demás información, esto se hace mediante muestras discretas, por lo cual, existe información faltante, por ejemplo, quiza no se pudo tomar una encuesta sobre toda la población o por otro lado, solo se probo la medición para ciertas condiciones etc.

Sin embargo, es relevante tener información para predecir ya sea información sobre datos intermedios de las mediciones o bien realizar predicciones de hacía donde se dirije dicha curva de información. Para resolver esta problematica y poder tomar los valores discretos de los datos de campo y poder mapearlos a información en el continuo, existen los métodos de interpolación, los cuales trabajan a traves de la información de estas observaciones discretas y pueden hacer una evaluación para valores de los reales.

1.1. Interpolación de Taylor

Uno de los métodos más comunes utilizados para estas aproximaciones es mediante el polinomio de Taylor el cual presenta lo siguiente

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor, $f(x_0)$ es la función evaluada en un punto y $f^{(n)}$ es la enésima derivada de la función evaluada en un punto.

A continuación se muestra el pseudocódigo del algoritmo para obtener la evaluación del polinomio de Taylor dadas las evaluaciones de la función y sus derivadas

Algorithm 1: Rutina para evaluar el polinomio de Taylor

Data: Arreglo evaluaciones, valores z, x_0 y entero n
Result: Valor del polinomio de Taylor en z

for $i \leftarrow 0$ **to** n **do**
- $dif \leftarrow z - x_0$;
- $res \leftarrow \text{eval}[0]$;
- $prod \leftarrow 1{,}0$;

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
- $prod \leftarrow prod \cdot \frac{dif}{i}$;
- $res \leftarrow res + \text{eval}[i] \cdot prod$;

return res;

1.2. Interpolación de Lagrange

Otro método que a diferencia del anterior, es obtener la evaluación a traves del polinomio de Lagrange, el cual utiliza diferentes pares de valores, es decir, los puntos y no sus derivadas, el cual se define de la siguiente manera

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \ell_i(x), \qquad f_i = f(x_i), \qquad \ell_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

donde $f(x_i)$ es la evaluación de la funcion en un punto dado y $\ell_i(x)$ se conoce como el polinomio fundamental.

A continuación un algoritmo para realizar la evaluación del polinomio de Lagrange

Algorithm 2: Rutina para evaluar el polinomio de Lagrange

Data: Arreglos x y y, valor z, entero n
Result: Valor del polinomio de Lagrange en z

for $i \leftarrow 0$ **to** n **do**
  $prod \leftarrow 1{,}0$;
  for $j \leftarrow 0$ **to** n **do**
    if $j \neq i$ **then**
      $prod \leftarrow prod \cdot \frac{z-x[j]}{x[i]-x[j]}$;
  $sol \leftarrow sol + y[i] \cdot prod$;
return sol;

1.3. Método de Neville

A continuación, un método que genera una aproximación de la evaluación del polinomio según los puntos, es decir, los pares de datos dados.

A continuación un algoritmo que genera la evaluación y la matriz de Neville

Algorithm 3: Rutina para evaluar el polinomio de Neville

Data: Arreglos x y y, valor z, entero n
Result: Estructura solInterpol con la matriz de Neville y el valor interpolado

Inicialización:
$Q \leftarrow$ Crear matriz de tamaño $n \times n$ de ceros;
$sol \leftarrow 0$;
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $Q[i][0] \leftarrow y[i]$;
for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
  for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**
    $Q[i][j] \leftarrow \frac{(z-x[i-j])\cdot Q[i][j-1]-(z-x[i])\cdot Q[i-1][j-1]}{x[i]-x[i-j]}$;
$stc \leftarrow$ Crear una estructura solInterpol;
$stc.matriz \leftarrow Q$;
$stc.sol \leftarrow Q[n-1][n-1]$;
return stc;

1.4. Método de diferencias divididas de Newton

Este método propone el siguiente polinomio

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

para lo cual, se tiene el siguiente método para obtener la evaluación y la matriz de evaluaciones de las diferencias divididas

2. Resultados

A continuación se despliegan las evaluaciones obtenidas para distintas aplicaciones de los métodos antes presentados.

Algorithm 4: Rutina para evaluar el polinomio interpolante de Newton con diferencias divididas

Data: Arreglos x y y, valor z, entero n

Result: Estructura solInterpol con la matriz de diferencias divididas de Newton y el valor interpolado

Inicialización:
$F \leftarrow$ Crear matriz de tamaño $n \times n$ de ceros;
$sol \leftarrow 0$;

for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $F[i][0] \leftarrow y[i]$;

for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
  for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**
    $F[i][j] \leftarrow \frac{F[i][j-1]-F[i-1][j-1]}{x[i]-x[i-j]}$;

$sol \leftarrow F[0][0]$;
for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
  $prod \leftarrow 1{,}0$;
  for $j \leftarrow 0$ **to** $i-1$ **do**
    $prod \leftarrow prod \cdot (z - x[j])$;
  $sol \leftarrow sol + F[i][i] \cdot prod$;

$stc \leftarrow$ Crear una estructura solInterpol;
$stc.matriz \leftarrow F$;
$stc.sol \leftarrow sol$;
return stc;

En lo siguiente se muestra una tabla la cual despliega la información de la interpolación y distintas evaluaciones para el método de Taylor

z	P_n(z)	n	error	f(z)=exp(z)	x0=0
0.500000	1.000000	1	0.648721		
0.500000	1.625000	3	0.0237213		
0.500000	1.648438	5	0.000283771		
0.500000	1.648721	10	2.81877e-10		
1.000000	1.000000	1	1.71828		
1.000000	2.500000	3	0.218282		
1.000000	2.708333	5	0.0099485		
1.000000	2.718282	10	3.02886e-07		
1.500000	1.000000	1	3.48169		
1.500000	3.625000	3	0.856689		
1.500000	4.398438	5	0.0832516		
1.500000	4.481671	10	1.83637e-05		
2.000000	1.000000	1	6.38906		
2.000000	5.000000	3	2.38906		
2.000000	7.000000	5	0.389056		
2.000000	7.388713	10	0.000343577		

Figura 1: Evaluaciones para el método de interpolación de Taylor.

Luego, se tiene la siguiente tabla donde se aplican los métodos de Lagrange, Neville y difernecias divididas de Newton.

z	f(z)=exp(z)	Lagrange	e_Lagrang	Neville	e_Neville	DD	e_DD
0.4	1.49182	1.49093	0.000895648	1.49093	0.000895648	1.49093	0.000895648
0.8	2.22554	2.22645	0.000910657	2.22645	0.000910657	2.22645	0.000910657
1.2	3.32012	3.31914	0.000972966	3.31914	0.000972966	3.31914	0.000972966
1.6	4.95303	4.95413	0.00109259	4.95413	0.00109259	4.95413	0.00109259
1.9	6.68589	6.68851	0.00261529	6.68851	0.00261529	6.68851	0.00261529

Figura 2: Resultado de las evaluaciones y errores de los métodos de Lagrange, Neville y diferencias divididas de Newton.

Por ultimo, se realizo una aplicacion sobre una curva de polarización segun datos de entrada y se obtuvo lo siguiente

3. Conclusión

Bien, a traves de estos métodos se puede observar que, teniendo información es posible generar otra la cual sigue el mismo comportamiento, esto es de suma utilidad, pues se pueden realizar medidas moderadas y obtener curvas suaves que nos permitan apreciar de una manera bastante clara sobre como se comportan los datos, lo cual permitiría realizar predicciones bastante acertadas sobre datos faltantes.

4. Referencias

[1] Burden, R.L., Faires, J.D. and Burden, A.M. 2015. *Numerical analysis.* Cengage learning.
[2] Quarteroni, A., Sacco, R. and Saleri, F. 1999. *Numerical Mathematics.* Springer.

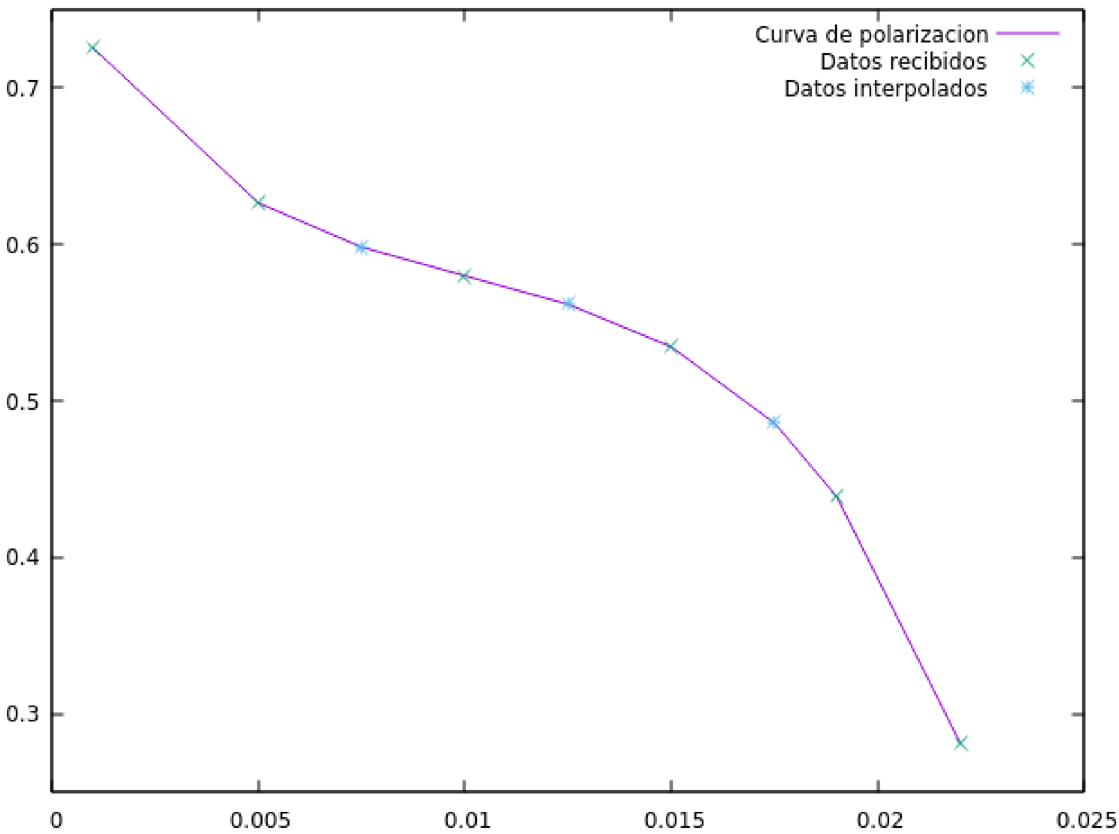

Figura 3: Curva de polarizacion.