Tarea 14

Nombre:	**Jairo Saul Diaz Soto**
Maestría:	Ciencias Computacionales
Modulo:	Métodos Numéricos
Instructor:	Dr. Luis Daniel Blanco Cocom
Fecha de entrega:	2023 - 12 - 01

1. El método del disparo

En la línea de las ecuaciones diferenciales ordinarias, existen diferentes planteamientos del problema inicial, aunque la mayoría de los métodos más utilizados y con buenos resultados, están diseñados específicamente para los denominados problemas de valor inicial, sin embargo, dentro de distintas disciplinas, no siempre se tienen este tipo de problemas.

Un problema típico. el cual no es posible resolver con métodos de PVI, son los problemas con condiciones iniciales de frontera. Estos se tratan de problemas en los cuales tenemos condiciones de soluciones fijas para los extremos.

Es para este tipo de problemas en los cuales, se utiliza el método del disparo, pues, aprovecha que se tienen distintas técnicas para resolver problemas de valor inicial y trabaja este problema de la siguiente manera.

La metodología se basa en situarte en uno de los extremos, tomar este como si fuera un problema de valor inicial, resolver el sistema hasta llegar al otro extremo y comparar la solución con el valor fijo que viene establecido por las condiciones de frontera, entonces, si este se acerca lo suficiente bajo cierta tolerancia entonces se habrá resuelto el problema.

De manera formal se plantea lo siguiente, supóngase la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$$

con las siguientes condiciones de frontera

$$y(a) = \alpha \qquad y(b) = \beta$$

donde $[a, b]$ es el intervalo de la solución, α y β son los valores dados en los extremos, y $p(x), q(x), f(x)$ son funciones conocidas.

Ahora, conforme a lo establecido, el método del disparo entonces consiste en transformar este problema en un problema de valor inicial. Proponiendo entonces que se tienen las ecuaciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ que satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} y_1(a) &= \alpha \qquad y_1'(a) = \gamma_1 \\ y_2(a) &= \alpha \qquad y_2'(a) = \gamma_2 \end{aligned}$$

entonces, se resuelven las ecuaciones diferenciales hasta el otro extremo, es decir, hasta $x = b$ y una vez se obtienen se verifica entonces la diferencia entre $|y_1(b) - \beta| < tol$, si lo anterior es correcto, entonces γ_1 es la condición inicial correcta, sin embargo, si se tiene que $|y_2(b) - \beta| < |y_1(b) - \beta|$, entonces se escoge a γ_2 como la condición inicial correcta.

2. Método θ

Las ecuaciones de tipo parabólicas, es un problema que aparece de forma recurrente en la modelación de diferentes prooblemas que se presentan en la realidad, es por eso que es importante estar preparado para enfrentarse a este tipo de problemas.

Existen diferentes métodos que atacan a este tipo de problemas desde distintos enfoques, uno de los más robustos y versatiles, es el denominadoo *método* $\theta, elcualtomavarioselementosdeotrotipodeenfoquesparapod$

además, se plantean los siguientes resultados

Algorithm 1: Método θ

Data: Función inicial u_0, parámetro θ, tiempo total T, límites espaciales a, b, coeficiente α, pasos temporales n, pasos espaciales m

Result: Matriz de solución sol$[i][j]$

$K \leftarrow \frac{T}{n}$;
$h \leftarrow \frac{b-a}{m}$;
$\lambda \leftarrow \alpha \cdot \frac{K}{h^2}$;
$B \leftarrow \mathrm{genMatriz3d}(m-2)$;
$i \leftarrow 1$;
while $i < n-1$ **do**
    for $j \leftarrow 0$ **to** $m-2$ **do**
        for $k \leftarrow 0$ **to** $m-2$ **do**
            $A[j][k] \leftarrow (\theta - 1) \cdot \lambda \cdot B[j][k]$;
            if $j = k$ **then**
                $A[j][k] \leftarrow A[j][k] + 1$;
    $r \leftarrow \mathrm{mult\_matxvec}(A, w, m-2, m-2)$;
    for $j \leftarrow 0$ **to** $m-2$ **do**
        for $k \leftarrow 0$ **to** $m-2$ **do**
            $A[j][k] \leftarrow \theta \cdot \lambda \cdot B[j][k]$;
            if $j = k$ **then**
                $A[j][k] \leftarrow A[j][k] + 1$;
    $w \leftarrow \mathrm{solver\_lu}(A, r, m-2, 0)$;
    for $j \leftarrow 0$ **to** $m-2$ **do**
        $\mathrm{sol}[i-1][j] \leftarrow w[j]$;
    $i \leftarrow i + 1$;
return sol;

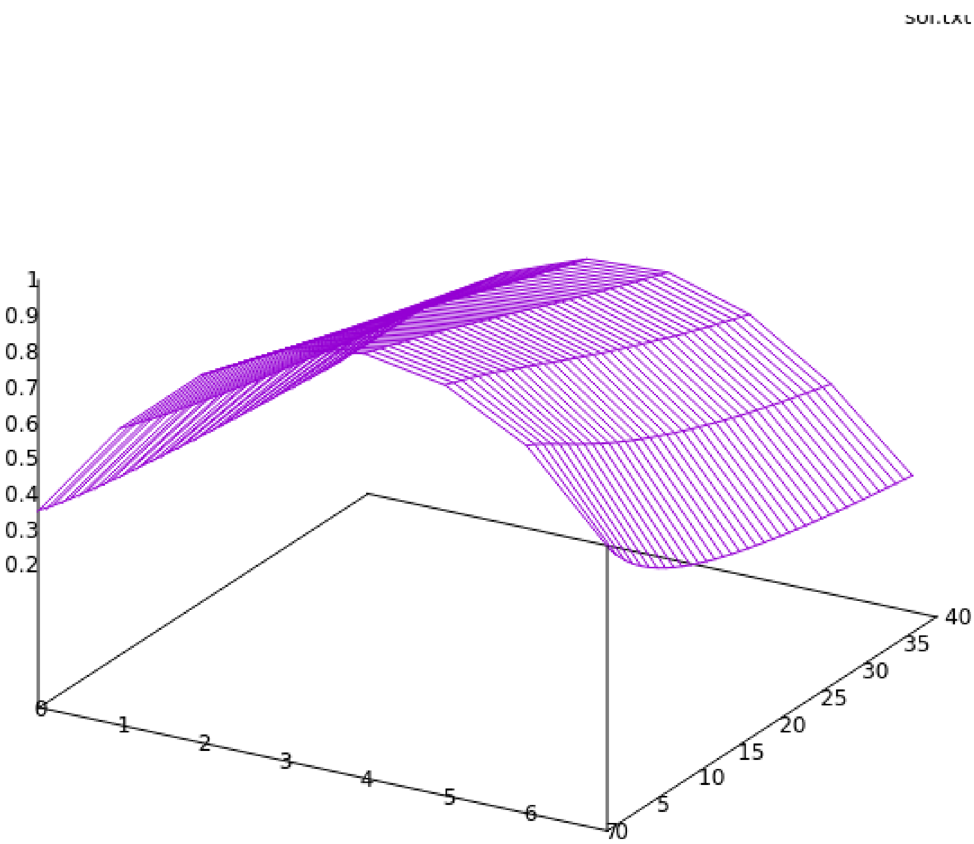

Figura 1: Solución a la ecuación de calor con $n = 40$, $m = 10$, $\theta = 0$, $\alpha = 1$

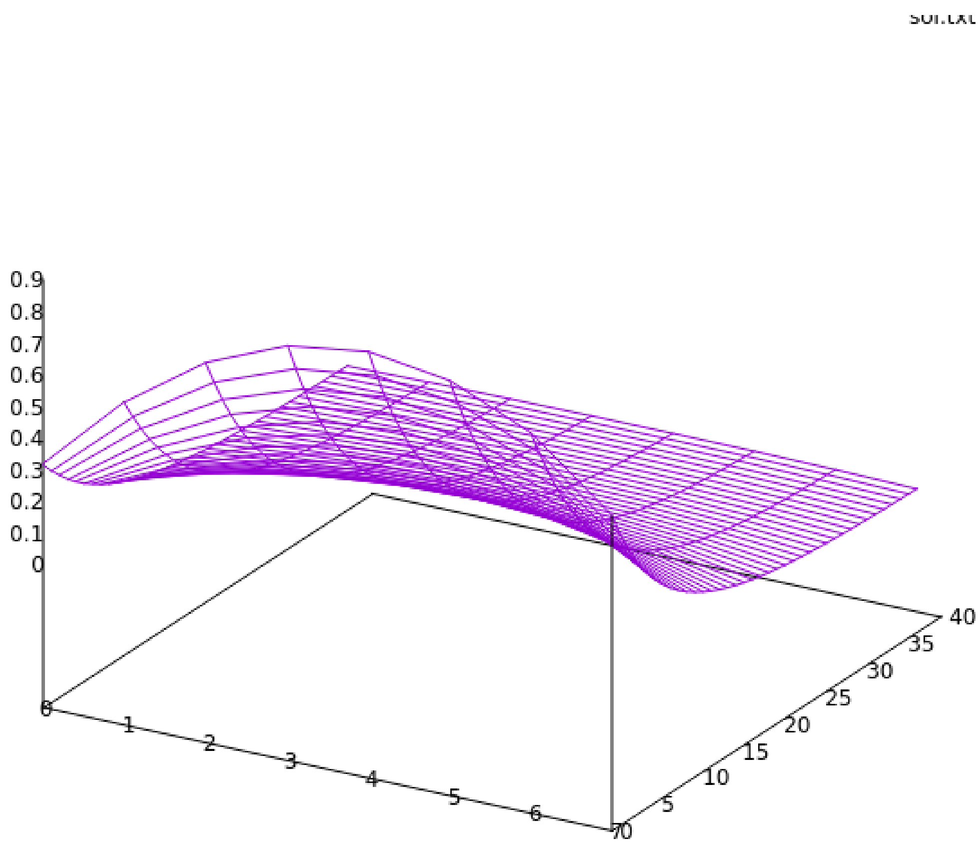

Figura 2: Solución a la ecuación de calor con $n = 40$, $m = 10$, $\theta = 0{,}5$, $\alpha = 1$

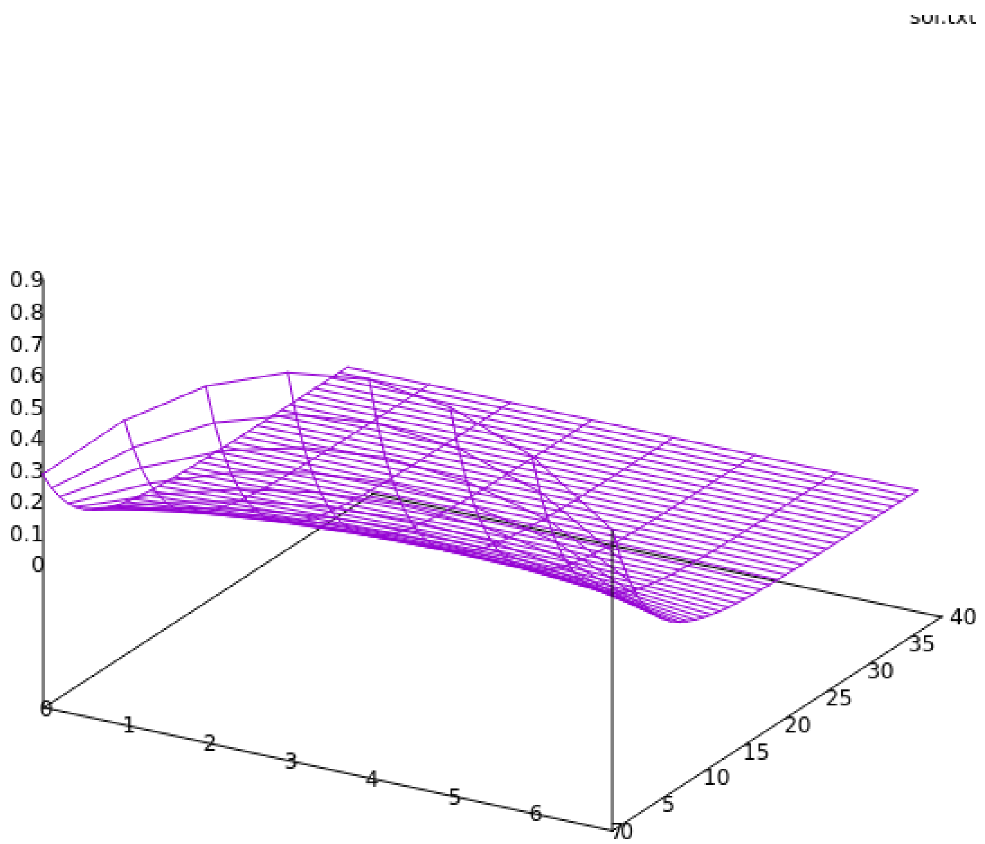

Figura 3: Solución a la ecuación de calor con $n = 40$, $m = 10$, $\theta = 1$, $\alpha = 1$

3. Introducción a elemento finito

Otra alternativa para la resolución de ecuaciones diferenciales, es el método de elemento finito, se utilizó la herramienta denominada FEniCS (Finite Element Computational Software), el cual es una librería bastante robusta para trabajar este método, se resolvió la ecuación

$$-\nabla^2 u(x,y) = f(x,y)$$

donde

$$u(x,y) = e^{xy}$$

se calculo el laplaciano de esta ecuación,, se definió como $f(x,y)$ y se obtuvó la solución, donde se obtuvieron los siguientes resultados

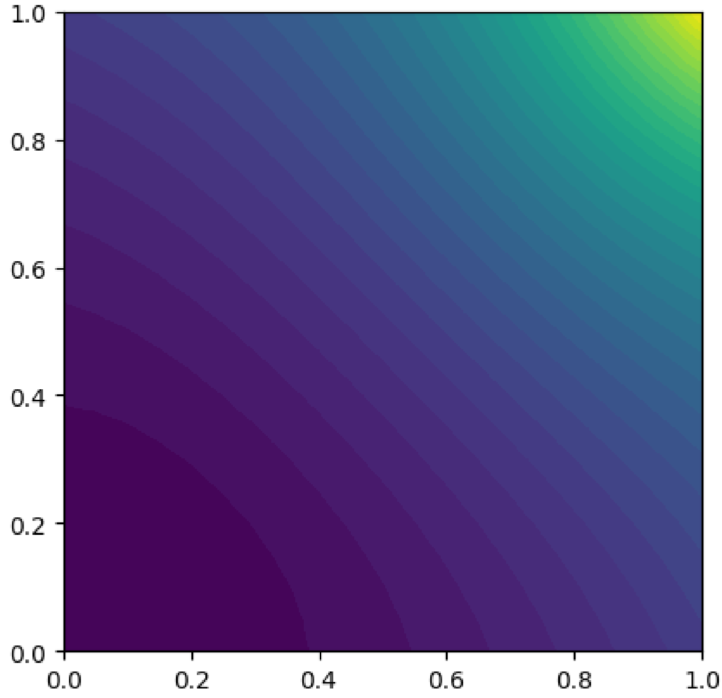

Figura 4: Solución por elemento finito.

El código de esta solución se encuentra en el siguiente enlace.

4. Referencias

[1] Burden, R.L., Faires, J.D. and Burden, A.M. 2015. Numerical analysis. Cengage learning.
[2] Quarteroni, A., Sacco, R. and Saleri, F. 1999. Numerical Mathematics. Springer.

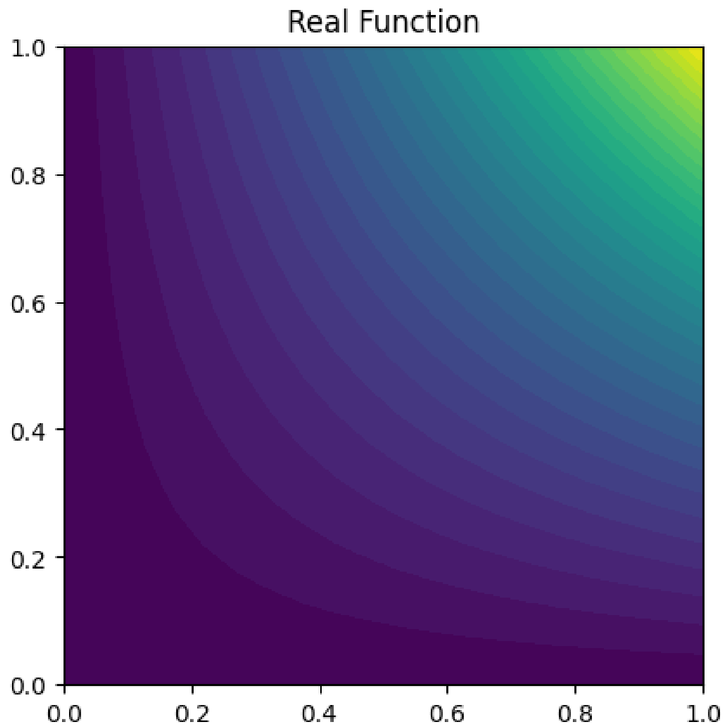

Figura 5: Función real.

```
error_L2  (u real)= 0.6587008628211605
error_max (u real)= 2.718281828459045
error_L2  (u estimada)= 0.13958298722442636
error_max (u estimada)= 0.32012874140227443
```

Figura 6: Errores del modelo.